

کوچکترین ناحیه اطمینان برای پارامترهای توزیع نمایی دوپارامتری

مرجان زارع، اکبر اصغرزاده و سید فاضل باقری

گروه آمار، دانشگاه مازندران

تاریخ دریافت: ۱۳۹۷/۰۹/۱۸ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۸/۰۱/۱۳

چکیده: در این مقاله، کوچکترین ناحیه اطمینان برای پارامترهای مکان و مقیاس توزیع نمایی دوپارامتری به دست می‌آید. برای این منظور از روش‌های بهینه‌سازی مقید استفاده می‌شود. با ارائه کمیت‌های محوری مناسب، ابتدا ناحیه اطمینان متعادل را پیدا کرده و سپس با مینیم کردن مساحت ناحیه اطمینان با استفاده از روش لاگرانژ، کوچکترین ناحیه اطمینان به دست خواهد آمد. دو مثال عددی برای تشریح روش‌های پیشنهادی ارائه می‌شوند. در پایان، کاربرد نواحی اطمینان پیشنهادی در انجام آزمون فرض‌های همزمان و محاسبه کران اطمینان برای هر تابعی از پارامترها، مورد مطالعه قرار می‌گیرند. **واژه‌های کلیدی:** ناحیه اطمینان، روش لاگرانژ، توزیع نمایی دوپارامتری.

۱ مقدمه

توابع چگالی احتمال و توزیع تجمعی توزیع نمایی دو پارامتری با پارامترهای $\mu \in R$ و $\theta > 0$ به ترتیب به صورت

$$f(x; \mu, \theta) = \frac{1}{\theta} e^{-\left(\frac{x-\mu}{\theta}\right)}, \quad x > \mu,$$

$$F(x; \mu, \theta) = 1 - e^{-\left(\frac{x-\mu}{\theta}\right)}, \quad x > \mu,$$

هستند، که در آن $\mu \in \mathbb{R}$ پارامتر مکان و $\theta > 0$ پارامتر مقیاس است. این توزیع حالت خاصی از توزیع وایبل است، که کاربرد زیادی در قابلیت اعتماد، تحلیل بقا و مطالعات طول عمر دارد. در قابلیت اعتماد، توزیع نمایی برای مدل‌بندی طول عمر قطعات و دستگاه‌هایی که دارای نرخ خرابی ثابتی‌اند مناسب است. برای مطالعه بیشتر روی این توزیع، می‌توان به جانسون و همکاران (۱۹۹۴) مراجعه کرد. در این مقاله، کوچکترین ناحیه اطمینان برای پارامترهای μ و θ در توزیع نمایی دوپارامتری مورد مطالعه قرار می‌گیرد. بر اساس نمونه تصادفی X_1, \dots, X_n از توزیع نمایی، ناحیه تصادفی $C(\underline{X})$ در فضای \mathbb{R}^2 را یک ناحیه اطمینان با ضریب اطمینان $1 - \alpha$ ، $0 < \alpha < 1$ برای (μ, θ) گویند هرگاه $P\{(\mu, \theta) \in C(\underline{X})\} = 1 - \alpha$ باشد. ناحیه اطمینان در بسیاری از مطالعات حائز اهمیت است. به کمک ناحیه اطمینان برای (μ, θ) ، می‌توان فرض‌های آماری درباره جفت پارامتر (μ, θ) را آزمون کرد. افزون بر این به کمک ناحیه اطمینان می‌توان فواصل اطمینان را برای هر تابعی از پارامترهای μ و θ پیدا کرد. همچنین، کران‌های اطمینان همزمان را برای توابعی چون تابع توزیع تجمعی و تابع قابلیت اعتماد پیدا کرد. نواحی اطمینان (توأم) در کتابهای استاندارد آمار ریاضی به طور مفصل مورد بحث قرار نگرفته است. تنها توصیف از ناحیه اطمینان در این کتابها، ناحیه اطمینان برای میانگین و واریانس توزیع نرمال در کتاب مود و گریبیل (۱۹۶۳) است. برای یک مرجع فارسی مناسب درباره نواحی اطمینان می‌توان به اصغرزاده و همکاران (۱۳۹۴) مراجعه کرد. ناحیه اطمینان متعادل^۱ (با دمه‌های برابر) برای پارامترهای توزیع نمایی دو پارامتری در سال‌های اخیر مورد مطالعه برخی محققان قرار گرفته است. وو (۲۰۰۷) برآوردهای فاصله‌ای و ناحیه اطمینان را برای پارامترهای توزیع نمایی دو پارامتری براساس نمونه‌های سانسور شده نوع دوم دوطرفه پیدا نمود. براساس نمونه‌های سانسور شده فزاینده نوع دوم، ناحیه اطمینان برای پارامترهای توزیع نمایی دوپارامتری توسط وو (۲۰۱۰) پیشنهاد شد. اصغرزاده و عبدی (۲۰۱۱) فواصل اطمینان و نواحی اطمینان را برای پارامترهای توزیع نمایی دو پارامتری براساس داده‌های رکوردی مورد مطالعه قرار دادند. اخیراً عبدی و اصغرزاده (۲۰۱۸) ناحیه اطمینان را برای پارامترهای توزیع رایلی براساس داده‌های رکوردی به‌دست آوردند. علیرغم برخی مطالعات انجام شده روی ناحیه اطمینان متعادل، مطالعات زیادی روی کوچکترین ناحیه اطمینان انجام نشده است. در این مقاله با روش‌های بهینه‌سازی مقید، مسئله تعیین کوچکترین ناحیه اطمینان برای (μ, θ) در توزیع نمایی دوپارامتری مورد بحث قرار می‌گیرد. در بخش ۲ کمیت‌های محوری لازم برای پیدا کردن نواحی اطمینان متعادل و بهینه ارائه می‌شوند. در بخش‌های ۳ و ۴، عبارات‌های صریحی برای مساحت ناحیه اطمینان متعادل ارائه می‌شوند و یک مسئله برنامه‌ریزی غیرخطی

¹Balanced confidence region

برای پیدا کردن کوچکترین ناحیه اطمینان فرمول‌بندی و حل می‌شود. جواب بهینه با روش لاگرانژ به دست می‌آید. در بخش ۵ در مطالعه‌ای شبیه‌سازی، روش‌های ذکر شده در مقاله ارزیابی و مقایسه می‌شوند. در بخش ۶، کاربرد نواحی اطمینان ارائه شده در این مقاله بحث می‌شود.

۲ کمیت‌های محوری برای ناحیه اطمینان

فرض کنید X_1, \dots, X_n یک نمونه تصادفی از توزیع نمایی دوپارامتری و $X_{(1)}, \dots, X_{(n)}$ آماره‌های ترتیبی متناظر با آن‌ها باشند. تعریف کنید:

$$Y_{(i)} = -\log(1 - F(X_{(i)}; \mu, \theta)) = \frac{X_{(i)} - \mu}{\theta}, \quad i = 1, \dots, n,$$

آنگاه $Y_{(1)} < \dots < Y_{(n)}$ آماره‌های ترتیبی متناظر یک نمونه تصادفی به اندازه n از توزیع نمایی استاندارد، خواهند بود. همچنین بنابر قضیه سوخاتمه (۱۹۳۷)، فواصل متوالی آماره‌های ترتیبی

$$Z_1 = nY_{(1)}, \quad Z_2 = (n-1)(Y_{(2)} - Y_{(1)}), \dots, \quad Z_n = Y_{(n)} - Y_{(n-1)},$$

متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع با توزیع نمایی استاندارد هستند (آرنولد و همکاران، ۱۳۷۹). بنابراین $Q = \frac{Z_1}{n} = Y_{(1)} = \frac{X_{(1)} - \mu}{\theta}$ دارای توزیع نمایی با پارامتر n و

$$W = \sum_{i=2}^n Z_i = \sum_{i=1}^n Y_{(i)} - nY_{(1)} = \frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^n (X_{(i)} - X_{(1)})$$

دارای توزیع گاما با پارامترهای $n-1$ و 1 است. کمیت‌های محوری Q و W مستقل هستند و از آن‌ها برای پیدا کردن ناحیه اطمینان برای (μ, θ) استفاده خواهد شد. با توجه به اینکه $V = 2Z_1 = 2nY_{(1)}$ دارای توزیع خی‌دو با 2 درجه آزادی و $U = 2 \sum_{i=2}^n Z_i = 2 \sum_{i=1}^n Y_{(i)} - nY_{(1)}$ دارای توزیع خی‌دو با $2(n-1)$ درجه آزادی و U و V مستقل هستند. می‌توان دو کمیت محوری جدید T_1 و T_2 به صورت

$$T_1 = \frac{U/2(n-1)}{V/2} = \frac{\sum_{i=1}^n Y_{(i)} - nY_{(1)}}{n(n-1)Y_{(1)}} = \frac{\sum_{i=1}^n X_{(i)} - nX_{(1)}}{n(n-1)(X_{(1)} - \mu)},$$

$$T_2 = U + V = 2 \sum_{i=1}^n Y_{(i)} = \frac{2}{\theta} \sum_{i=1}^n (X_{(i)} - \mu),$$

۱۵۸ کوچکترین ناحیه اطمینان برای پارامترهای توزیع نمایی دوپارامتری

تعریف کرد. واضح است که T_1 دارای توزیع فیشر با درجات آزادی $2(n-1)$ و 2 و T_2 دارای توزیع χ^2 با $2n$ درجه آزادی است. علاوه بر این می‌توان ثابت کرد که T_1 و T_2 نیز از هم مستقل هستند.

۳ ناحیه اطمینان براساس جفت کمیت محوری (Q, W)

فرض کنید برای $\alpha \in (0, 1)$ ، $\Gamma_{\nu_1, \nu_2, \alpha}$ چندک α م توزیع گاما با پارامترهای ν_1 و ν_2 باشد و ناحیه اطمینان $(1-\alpha) \times 100\%$ برای (μ, θ) مدنظر باشد. با توجه به اینکه W دارای توزیع گاما با پارامترهای $n-1$ و 1 ، و Q دارای توزیع نمایی با میانگین $\frac{1}{n}$ است، آنگاه:

$$P\left\{\Gamma_{n-1, 1; \frac{1-\sqrt{1-\alpha}}{2}} < W < \Gamma_{n-1, 1; \frac{1+\sqrt{1-\alpha}}{2}}\right\} = \sqrt{1-\alpha},$$

$$P\left\{0 < Q < -\frac{1}{n} \log(1 - \sqrt{1-\alpha})\right\} = \sqrt{1-\alpha}.$$

از استقلال W و Q نتیجه می‌شود:

$$P\left\{\Gamma_{n-1, 1; \frac{1-\sqrt{1-\alpha}}{2}} < W < \Gamma_{n-1, 1; \frac{1+\sqrt{1-\alpha}}{2}}, 0 < Q < -\frac{1}{n} \log(1 - \sqrt{1-\alpha})\right\} = 1-\alpha.$$

با حل نابرابری‌های داخل آکولاد برحسب μ و θ داریم

$$P\left\{X_{(1)} + \frac{\theta}{n} \log(1 - \sqrt{1-\alpha}) < \mu < X_{(1)}, \frac{S}{\Gamma_{n-1, 1; \frac{1+\sqrt{1-\alpha}}{2}}} < \theta < \frac{S}{\Gamma_{n-1, 1; \frac{1-\sqrt{1-\alpha}}{2}}}\right\} = 1-\alpha,$$

که در آن $S = \sum_{i=1}^n (X_{(i)} - X_{(1)})$. بنابراین یک ناحیه اطمینان متعادل با ضریب اطمینان $1-\alpha$ برای (μ, θ) براساس جفت کمیت محوری (Q, W) به صورت

$$R_{1-\alpha}^b = \left\{(\mu, \theta) : X_{(1)} + \frac{\theta}{n} \log(1 - \sqrt{1-\alpha}) < \mu < X_{(1)}, \frac{S}{\Gamma_{n-1, 1; \frac{1+\sqrt{1-\alpha}}{2}}} < \theta < \frac{S}{\Gamma_{n-1, 1; \frac{1-\sqrt{1-\alpha}}{2}}}\right\},$$

به دست می‌آید. حال برای پیدا کردن کوچکترین ناحیه اطمینان، به جای در نظر گرفتن چندک‌های توزیع‌های گاما و نمایی، ثابت‌های $a_1 < a_2$ و $0 < b$ طوری محاسبه می‌شوند تا

$$Pr\{a_1 < W < a_2, 0 < Q < b\} = \{H(a_2) - H(a_1)\}\{1 - e^{-nb}\} = 1 - \alpha,$$

که در آن H تابع توزیع گاما با پارامترهای $n-1$ و 1 است. براساس ثابت‌های a_1, a_2, b ، ناحیه اطمینان $(1-\alpha)100\%$ برای (μ, θ) براساس جفت کمیت محوری (Q, W) به صورت

$$R_{1-\alpha} = \left\{ (\mu, \theta) : X_{(1)} - b\theta < \mu < X_{(1)}, \frac{S}{a_2} < \theta < \frac{S}{a_1} \right\},$$

است و مساحت ناحیه اطمینان عبارت است از

$$Area[R_{1-\alpha}] = \int_{\frac{S}{a_2}}^{\frac{S}{a_1}} \int_{X_{(1)} - b\theta}^{X_{(1)}} d\mu d\theta = \frac{b}{2} S^2 \left[\frac{1}{a_2^2} - \frac{1}{a_1^2} \right].$$

برای پیدا کردن کوچکترین ناحیه اطمینان در سطح $(1-\alpha)$ باید مساحت با شرط جانبی

$$\{H(a_2) - H(a_1)\}\{1 - e^{-nb}\} = 1 - \alpha.$$

مینیمم شود. حال با به کارگیری روش لاگرانژ برای مینیمم کردن این مساحت نسبت به شرط ذکر شده، رابطه

$$L(\mathbf{z}, \beta) = \frac{b}{2} S^2 \left[\frac{1}{a_2^2} - \frac{1}{a_1^2} \right] - \beta \{ (H(a_2) - H(a_1))(1 - e^{-nb}) - (1 - \alpha) \},$$

۱۶۰ کوچکترین ناحیه اطمینان برای پارامترهای توزیع نمایی دوپارامتری

به دست می آید، که در آن تابع لاگرانژ، $L(\mathbf{z}, \beta)$ و $\mathbf{z} = (a_1, a_2, b)$ ضریب لاگرانژ است. مشتق تابع لاگرانژ نسبت به a_1, a_2, b و β به ترتیب به صورت

$$\begin{aligned}\frac{\partial L(\mathbf{z}, \beta)}{\partial a_1} &= -\frac{b}{a_1^2} S^2 + \beta h(a_1)(1 - e^{-nb}), \\ \frac{\partial L(\mathbf{z}, \beta)}{\partial a_2} &= \frac{b}{a_2^2} S^2 - \beta h(a_2)(1 - e^{-nb}), \\ \frac{\partial L(\mathbf{z}, \beta)}{\partial b} &= \left[\frac{1}{a_1^2} - \frac{1}{a_2^2} \right] \frac{S^2}{2} - \beta n [H(a_2) - H(a_1)] e^{-nb}, \\ \frac{\partial L(\mathbf{z}, \beta)}{\partial \beta} &= [H(a_2) - H(a_1)] [1 - e^{-nb}] - (1 - \alpha),\end{aligned}$$

به دست می آیند که در آنها $h(\cdot)$ تابع چگالی توزیع گاما با پارامترهای $1 - n$ و 1 است. با قرار دادن مشتقات جزئی تابع $L(\mathbf{z}, \beta)$ برابر صفر می توان جواب بهینه $\mathbf{z}^* = (a_1^*, a_2^*, b^*)$ را به دست آورد. مقادیر بهینه a_1^*, a_2^* و b^* از حل سه معادله

$$\begin{aligned}a_1^2 h(a_1) &= a_2^2 h(a_2), \\ a_1^2 h(a_2) [1 - e^{-nb}] \left[\frac{1}{a_1^2} - \frac{1}{a_2^2} \right] &= 2nbe^{-nb} [H(a_2) - H(a_1)], \\ [H(a_2) - H(a_1)] [1 - e^{-nb}] &= (1 - \alpha),\end{aligned}$$

به طور همزمان به دست می آیند. حال با جایگذاری مقادیر بهینه a_1^*, a_2^* و b^* به جای a_1, a_2 و b در $R_{1-\alpha}$ ، کوچکترین ناحیه اطمینان برای (μ, θ) براساس کمیت محوری (Q, W) به صورت

$$R_{1-\alpha}^* = \left\{ (\mu, \theta) : X_{(1)} - b^* \theta < \mu < X_{(1)}, \frac{S}{a_1^*} < \theta < \frac{S}{a_2^*} \right\},$$

به دست می آید. اگر هدف از مینیم سازی توأم، به مینیم سازی جداگانه تقلیل داده شود، می توان کوچکترین ناحیه اطمینان را به صورت

$$R_{1-\alpha}^{*part} = \left\{ (\mu, \theta) : X_{(1)} + \frac{\theta}{n} \log(1 - \sqrt{1 - \alpha}) < \mu < X_{(1)}, \frac{S}{a_2^*} < \theta < \frac{S}{a_1^*} \right\}.$$

نوشت، به گونه‌ای که a_1^* و a_2^* مینیمم ساز تابع

$$L(a_1, a_2, \beta) = S^2 \left[\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} \right] - \beta \{ (H(a_2) - H(a_1)) - \sqrt{1 - \alpha} \},$$

باشند، که در آن β ضریب لاگرانژ است. مشتق تابع لاگرانژ نسبت به a_1, a_2 و β به ترتیب عبارتند از:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L(a_1, a_2, \beta)}{\partial a_1} &= -\frac{S^2}{a_1^2} + \beta h(a_1), \\ \frac{\partial L(a_1, a_2, \beta)}{\partial a_2} &= \frac{S^2}{a_2^2} - \beta h(a_2), \\ \frac{\partial L(\mathbf{z}, \beta)}{\partial \beta} &= [H(a_2) - H(a_1)] - \sqrt{1 - \alpha}. \end{aligned}$$

مقادیر بهینه a_1^* و a_2^* از حل دو معادله زیر به طور همزمان به دست می‌آیند.

$$a_1^2 h(a_1) = a_2^2 h(a_2), \quad H(a_2) - H(a_1) = \sqrt{1 - \alpha}.$$

۴ ناحیه اطمینان بر اساس جفت کمیت محوری (T_1, T_2)

فرض کنید برای $F_{\nu_1, \nu_2, \alpha}$ ، $\alpha \in (0, 1)$ چندک α ام توزیع F با درجات آزادی ν_1 و ν_2 و $\chi_{\nu, \gamma}^2$ چندک α ام توزیع χ^2 با ν درجه آزادی را نشان دهد و همچنین فرض کنید ناحیه اطمینان $(1 - \alpha) \times 100\%$ برای (μ, θ) براساس کمیت‌های محوری T_1 و T_2 مدنظر باشد. در بخش دوم اشاره شد که کمیت‌های محوری

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{\sum_{i=1}^n X_{(i)} - nX_{(1)}}{n(n-1)(X_{(1)} - \mu)} \sim F_{(2n-2, 2)}, \\ T_2 &= \frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^n (X_{(i)} - \mu) \sim \chi_{(2n)}^2, \end{aligned}$$

مستقل‌اند. از این رو

$$P\{F_{\tau n-\tau, \tau; 1-\sqrt{1-\alpha}} < T_1 < \infty\} = \sqrt{1-\alpha},$$

$$P\{\chi_{\tau n; \frac{1-\sqrt{1-\alpha}}{\tau}}^{\tau} < T_{\tau} < \chi_{\tau n; \frac{1+\sqrt{1-\alpha}}{\tau}}^{\tau}\} = \sqrt{1-\alpha}.$$

بنابراین

$$P\{F_{\tau n-\tau, \tau; 1-\sqrt{1-\alpha}} < T_1 < \infty, \chi_{\tau n; \frac{1-\sqrt{1-\alpha}}{\tau}}^{\tau} < T_{\tau} < \chi_{\tau n; \frac{1+\sqrt{1-\alpha}}{\tau}}^{\tau}\} = 1-\alpha.$$

یا به طور معادل،

$$P\left\{X_{(1)} - \frac{S}{n(n-1)F_{\tau n-\tau, \tau; 1-\sqrt{1-\alpha}}} < \mu < X_{(1)} , \right. \\ \left. \frac{A(\mu)}{\chi_{\tau n; \frac{1+\sqrt{1-\alpha}}{\tau}}^{\tau}} < \theta < \frac{A(\mu)}{\chi_{\tau n; \frac{1-\sqrt{1-\alpha}}{\tau}}^{\tau}} \right\} = 1-\alpha,$$

که در آن

$$S = \sum_{i=1}^n (X_{(i)} - X_{(1)}), \quad A(\mu) = \tau \sum_{i=1}^n (X_{(i)} - \mu).$$

بنابراین ناحیه اطمینان متعادل با ضریب اطمینان $1-\alpha$ برای (μ, θ) براساس جفت کمیت محوری (T_1, T_{τ}) به صورت

$$R_{1-\alpha}^b = \left\{ (\mu, \theta) : X_{(1)} - \frac{S}{n(n-1)F_{\tau n-\tau, \tau; 1-\sqrt{1-\alpha}}} < \mu < X_{(1)} , \right. \\ \left. \frac{A(\mu)}{\chi_{\tau n; \frac{1+\sqrt{1-\alpha}}{\tau}}^{\tau}} < \theta < \frac{A(\mu)}{\chi_{\tau n; \frac{1-\sqrt{1-\alpha}}{\tau}}^{\tau}} \right\}.$$

است. اینک برای پیدا کردن کوچکترین ناحیه اطمینان، ثابت‌های $a > 0$ و $b_1 < b_2 < 0$ طوری تعیین می‌شوند که رابطه

$$P\{a < T_1 < \infty, b_1 < T_2 < b_2\} = \{1 - F_1(a)\}\{F_2(b_2) - F_2(b_1)\} = 1 - \alpha,$$

برقرار باشد، که در آن F_1 و F_2 به ترتیب توابع توزیع T_1 و T_2 هستند. براساس ثابت‌های a, b_1 و b_2 ، ناحیه اطمینان $(1 - \alpha) \times 100\%$ و مساحت ناحیه اطمینان متناظر بترتیب به صورت

$$R_{1-\alpha} = \left\{ B(a) < \mu < X_{(1)}, \frac{A(\mu)}{b_2} < \theta < \frac{A(\mu)}{b_1} \right\},$$

$$Area(R_{1-\alpha}) = \int_{B(a)}^{X_{(1)}} \left(\frac{A(\mu)}{b_1} - \frac{A(\mu)}{b_2} \right) d\mu,$$

است، که در آن $B(a) = X_{(1)} - \frac{S}{n(n-1)a}$. اکنون برای تعیین ناحیه اطمینان $(1 - \alpha) \times 100\%$ با کمترین مساحت باید عبارت

$$\int_{B(a)}^{X_{(1)}} \left(\frac{A(\mu)}{b_1} - \frac{A(\mu)}{b_2} \right) d\mu,$$

تحت شرط جانبی

$$\{1 - F_1(a)\}\{F_2(b_2) - F_2(b_1)\} = 1 - \alpha,$$

مینیم شود. در این صورت تابع لاگرانژ به صورت

$$L(\mathbf{z}, \beta) = \int_{B(a)}^{X_{(1)}} \left(\frac{A(\mu)}{b_1} - \frac{A(\mu)}{b_2} \right) d\mu - \beta (\{1 - F_1(a)\}\{F_2(b_2) - F_2(b_1)\} - (1 - \alpha)),$$

است، که در آن $\mathbf{z} = (a, b_1, b_2)$ و β ضریب لاگرانژ است. مشتق تابع لاگرانژ نسبت به a, b_1, b_2 و β بترتیب عبارتند از:

$$\begin{aligned}\frac{\partial L(\mathbf{z}, \beta)}{\partial a} &= -B'(a) \left(\frac{A(B(a))}{b_1} - \frac{A(B(a))}{b_2} \right) + \beta f_1(a) \{F_2(b_2) - F_2(b_1)\}, \\ \frac{\partial L(\mathbf{z}, \beta)}{\partial b_1} &= \int_{B(a)}^{X_{(1)}} \frac{-A(\mu)}{b_1^\gamma} d\mu + \beta f_2(b_1) \{1 - F_1(a)\}, \\ \frac{\partial L(\mathbf{z}, \beta)}{\partial b_2} &= \int_{B(a)}^{X_{(1)}} \frac{A(\mu)}{b_2^\gamma} d\mu - \beta f_2(b_2) \{1 - F_1(a)\}, \\ \frac{\partial L(\mathbf{z}, \beta)}{\partial \beta} &= \{1 - F_1(a)\} \{F_2(b_2) - F_2(b_1)\} - (1 - \alpha),\end{aligned}$$

که در آنها f_1 و f_2 مشتق‌های F_1 و F_2 هستند. با قرار دادن مشتقات جزئی تابع $L(\mathbf{z}, \beta)$ برابر صفر می‌توان جواب بهینه $\mathbf{z}^* = (a^*, b_1^*, b_2^*)$ به‌دست آورد. جواب بهینه از حل همزمان سه معادله

$$\int_{B(a)}^{X_{(1)}} \frac{A(\mu)}{b_1^\gamma} d\mu = \frac{B'(a) f_2(b_1) \{1 - F_1(a)\} \left(\frac{A(B(a))}{b_1} - \frac{A(B(a))}{b_2} \right)}{f_1(a) \{F_2(b_2) - F_2(b_1)\}},$$

$$\{1 - F_1(a_1)\} \{F_2(b_2) - F_2(b_1)\} = 1 - \alpha,$$

$$b_1^\gamma f_2(b_1) = b_2^\gamma f_2(b_2),$$

به‌دست می‌آید. بنابراین کوچکترین ناحیه اطمینان $(1 - \alpha) \times 100\%$ برای (μ, θ) بر اساس جفت کمیت محوری (T_1, T_2) به صورت

$$R_{1-\alpha}^* = \left\{ (\mu, \theta) : B(a^*) < \mu < X_{(1)}, \frac{A(\mu)}{b_2^*} < \theta < \frac{A(\mu)}{b_1^*} \right\},$$

خواهد بود. در ادامه، همانند بخش قبلی، اگر به جای مینیمم‌سازی توأم، مینیمم‌سازی جداگانه مد نظر باشد. آنگاه کوچکترین ناحیه اطمینان را می‌توان به فرم

$$R_{1-\alpha}^{*part} = \left\{ (\mu, \theta) : X_{(1)} - \frac{S}{n(n-1)F_{\tau n-\tau, \tau; 1-\sqrt{1-\alpha}}} < \mu < X_{(1)}, \right. \\ \left. \frac{A(\mu)}{b_{\tau}^*} < \theta < \frac{A(\mu)}{b_1^*} \right\},$$

نوشت. طوری که b_{τ}^* و b_1^* مینیمم‌ساز تابع

$$L(a_1, a_{\tau}, \beta) = A(\mu) \left[\frac{1}{b_1} - \frac{1}{b_{\tau}} \right] - \beta \{ (F_{\tau}(b_{\tau}) - F_{\tau}(b_1)) - \sqrt{1-\alpha} \},$$

هستند، که در آن β ضریب لاگرانژ است. در ناحیه اطمینان فوق، مینیمم‌سازی فقط روی کمیت محوری T_{τ} انجام شده است. مشتق تابع لاگرانژ نسبت به b_{τ}, b_1 و β به ترتیب عبارتند از:

$$\frac{\partial L(b_1, b_{\tau}, \beta)}{\partial b_1} = -\frac{A(\mu)}{b_1^2} + \beta f_{\tau}(b_1), \\ \frac{\partial L(b_1, b_{\tau}, \beta)}{\partial b_{\tau}} = \frac{A(\mu)}{b_{\tau}^2} - \beta f_{\tau}(b_{\tau}), \\ \frac{\partial L(\mathbf{z}, \beta)}{\partial \beta} = [F_{\tau}(b_{\tau}) - F_{\tau}(b_1)] - \sqrt{1-\alpha}.$$

مقادیر بهینه b_1^* و b_{τ}^* از حل همزمان دو معادله زیر به‌دست می‌آیند.

$$b_1^2 f_{\tau}(b_1) = b_{\tau}^2 f_{\tau}(b_{\tau}), \quad F_{\tau}(b_{\tau}) - F_{\tau}(b_1) = \sqrt{1-\alpha}.$$

۵ مطالعه شبیه‌سازی

در این بخش، به منظور مقایسه نواحی اطمینان متعادل و بهینه (کوچکترین) و همچنین مقایسه کارایی کمیت‌های محوری (Q, W) و (T_1, T_{τ}) یک مطالعه شبیه‌سازی انجام می‌شود. در این شبیه‌سازی، نمونه‌های تصادفی به اندازه n (۵۰، ۱۰۰، ۲۰۰، ۵۰۰، ۱۰۰۰) از توزیع نمایی دو پارامتری با پارامترهای μ و θ

تولید شده‌اند. چون μ و θ بترتیب پارامترهای مکان و مقیاس هستند، $\mu = 0$ و $\theta = 1$ اختیار شده است. با توجه به نمونه های تولید شده، نواحی اطمینان متعادل و بهینه بر اساس کمیت‌های محوری (Q, W) و (T_1, T_2) محاسبه شده‌اند. جدول ۱، میانگین مساحت‌های نواحی اطمینان به‌دست آمده را در ۱۰۰۰ تکرار شبیه‌سازی نشان می‌دهد. همان‌طور که انتظار می‌رود روش بهینه برای هر دو جفت کمیت محوری، ناحیه اطمینان کوچکتری ارایه می‌دهد. همچنین از شبیه‌سازی می‌توان نتیجه گرفت که استفاده از کمیت

جدول ۱: متوسط نواحی اطمینان متعادل و بهینه در سطح ۹۵٪ برای $(\mu = 0, \theta = 1)$.

n	(Q, W)		(T_1, T_2)	
	متعادل	بهینه	متعادل	بهینه
۵	۹/۳۵۰۴	۵/۶۲۲۷	۲۸/۶۸۹۷	۱۸/۸۱۷۹
۱۰	۱/۱۷۲۱	۰/۹۲۵۱	۲/۱۳۴۲	۱/۹۴۴۲
۲۰	۰/۲۸۷۴	۰/۲۵۴۴	۰/۲۷۸۴	۰/۲۶۴۷
۵۰	۰/۰۵۴۴	۰/۰۵۱۴	۰/۰۵۲۸	۰/۰۵۱۵
۱۰۰	۰/۰۱۷۶	۰/۰۱۶۹	۰/۰۱۷۳	۰/۰۱۶۹

محوری (Q, W) برای حجم داده‌های کم ترجیح داده می‌شود، البته نتایج حاصله از کمیت‌های محوری (Q, W) و (T_1, T_2) برای داده‌های حجم متوسط و بالا، تفاوت چشمگیر و معنی داری نسبت به یکدیگر ندارند بنابراین استفاده از هر دو روش بهینه برای داده‌های حجم متوسط و بالا پیشنهاد می‌شود. کدهای محاسباتی مورد نیاز در کل این مقاله در نرم افزار R نوشته شدند به خصوص اینکه تابع پرکاربرد بخش ۵، تابع `constrOptim.nl` از بسته نرم افزاری `alabama` بکار گرفته شده است. همچنین به کمک تابع `auglag` از بسته نرم افزاری `nloptr` می‌توان درباره محاسبه مقادیر بهینه لازمه، به فرم کدهای قید شده در ضمیمه استفاده کرد.

۶ مثال‌های کاربردی

در این بخش، دو مثال عددی برای تشریح روش پیشنهادی ارائه می‌شوند و کاربرد نواحی اطمینان پیشنهادی در انجام آزمون فرض‌های آماری و محاسبه فاصله‌های اطمینان بحث می‌شوند.

مثال ۱: داده‌های مثال میانگین دمای ماهیانه شهرستان بابلسر طی سال‌های ۱۹۹۸ تا ۲۰۱۰ برحسب سانتی‌گراد است، که از سایت هواشناسی <http://www.chaharmahalmet.ir/iranarchive.asp> استخراج

مرجان زارع و همکاران ۱۶۷

شده‌اند. در این سایت، اطلاعات اقلیمی ۲۰۰ ایستگاه سینوپتیک کشور تا سال ۲۰۱۰ ثبت شده است.

$$۱۸/۱, ۱۷/۹, ۱۷/۷, ۱۸/۳, ۱۸/۲, ۱۷/۴, ۱۸/۰,$$

$$۱۸/۱, ۱۸/۲, ۱۷/۹, ۱۷/۸, ۱۷/۸, ۱۹/۱$$

بر اساس آزمون کولموگروف-اسمیرنوف، که آماره آن برابر $K - S = ۰/۲۴۹۹$ و مقدار متناظر آن $p_value = ۰/۲۳۲۸$ است، توزیع نمایی دوپارامتری با پارامترهای $\mu = ۱۷/۴$ و $\theta = ۰/۶۳۸۴$ به این داده‌ها قابل برازش است. اکنون نواحی اطمینان متعادل و بهینه در سطح ۹۵٪ برای (μ, θ) محاسبه می‌شوند. براساس کمیت‌های محوری Q و W، نواحی اطمینان متعادل و بهینه ۹۵٪ به ترتیب

$$R_{۰/۹۵}^b = \{ ۱۷/۴ - ۰/۲۸۲۷\theta < \mu < ۱۷/۴, ۰/۳۹۴۵۴ < \theta < ۱/۴۷۹۲۵ \},$$

$$R_{۰/۹۵}^* = \{ ۱۷/۴ - ۰/۲۹۲۳\theta < \mu < ۱۷/۴, ۰/۳۱۵۳۱ < \theta < ۱/۳۱۸۲۷ \},$$

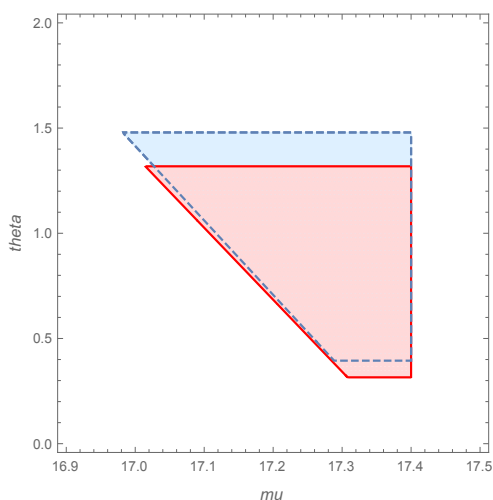
با مساحت‌های متناظر $Area(R^b) = ۰/۲۸۷۳$ و $Area(R^*) = ۰/۲۳۹۵$ هستند. از این رو روش مینیم کردن، مقدار کاهش $۱ - Area[R_{۰/۹۵}^*]/Area[R_{۰/۹۵}^b] \approx ۱۶/۶۶۸۰\%$ در مساحت را نشان می‌دهد. همچنین

$$R_{۰/۹۵}^{*part} = \{ ۱۷/۴ - ۰/۲۸۲۷\theta < \mu < ۱۷/۴, ۰/۳۴۸۸ < \theta < ۱/۳۶۰۳ \},$$

با مساحت متناظر $Area(R^{*part}) = ۰/۲۴۴۴$ است. بنابراین روش مینیم کردن جداگانه، مقدار کاهش $۱۴/۹۳۲۱\%$ در مساحت را نشان می‌دهد. در نتیجه رویه مینیم‌سازی توأم ترجیح داده می‌شود. نواحی اطمینان متعادل و بهینه ۹۵٪ براساس کمیت‌های محوری Q و W در شکل ۱ نشان داده شده است.

با توجه به کمیت‌های T_1 و T_2 ، نواحی اطمینان متعادل و بهینه ۹۵٪ عبارتند از:

$$R_{۰/۹۵}^b = \{ (\mu, \theta) : ۱۷/۱۷ < \mu < ۱۷/۴, \frac{A(\mu)}{۴۴/۷۱۱} < \theta < \frac{A(\mu)}{۱۲/۵۸۸} \},$$



شکل ۱: نواحی اطمینان ۹۵٪ متعادل (خط تیره) و بهینه (خطوط یکپارچه) با توجه به کمیت های Q و W.

$$R_{\circ/95}^* = \{(\mu, \theta) : 17/189 < \mu < 17/4, \frac{A(\mu)}{51/624} < \theta < \frac{A(\mu)}{12/99}\}.$$

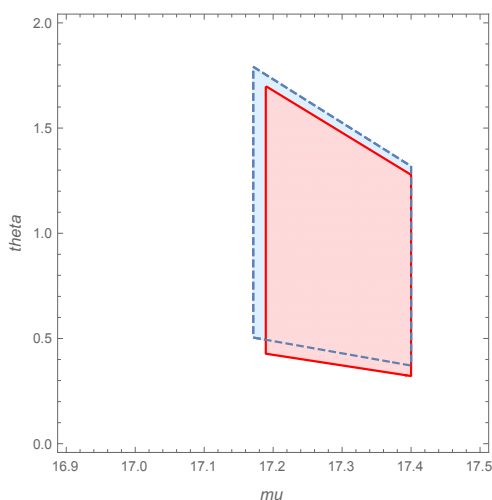
مساحت نواحی اطمینان متعادل و بهینه به ترتیب ۰/۳۹۷۱ و ۰/۳۶۶۹ هستند، که کاهش در مساحت $R_{\circ/95}^b$ نسبت به $R_{\circ/95}^*$ ، برابر ۷/۶۰۵۸٪ است. همچنین

$$R_{\circ/95}^{*part} = \{(\mu, \theta) : 17/17 < \mu < 17/4, \frac{A(\mu)}{48/9217} < \theta < \frac{A(\mu)}{13/5109}\},$$

با مساحت متناظر $Area(R^{*part}) = ۰/۳۷۲۷$ است. بنابراین روش مینیمسازی جداگانه، مقدار کاهش ۶/۲۷۵۹٪ در مساحت را نشان می‌دهد. در نتیجه رویه مینیمسازی توأم ترجیح داده می‌شود. این نواحی اطمینان ۹۵٪ در شکل ۲ آمده است.

مثال ۲: داده‌های این مثال زمان‌های خرابی نوعی از عایق الکترونیکی است که تحت فشار (با ولتاژ ثابت) قرار می‌گیرند. این داده‌ها از نلسون (۱۹۷۰) اقتباس شده‌اند و قبلاً نیز توسط اصغرزاده و همکاران (۲۰۱۴) استفاده شده است.

$$۰/۳۵, ۰/۵۹, ۰/۹۶, ۰/۹۹, ۱/۶۹, ۱/۹۷, ۲/۰۷, ۲/۵۸,$$



شکل ۲: نواحی اطمینان ۹۵٪ متعادل (خط تیره) و بهینه (خطوط یکپارچه) با توجه به کمیت‌های T_1 و T_2 .

$$۲/۷۱, ۲/۹۰, ۳/۶۷, ۳/۹۹, ۵/۳۵, ۱۳/۷۷, ۲۵/۵۰$$

با استفاده از آزمون کولموگروف-اسمیرنوف می‌توان نشان داد که توزیع نمایی با پارامترهای $\mu = ۰/۳۵$ و $\theta = ۴/۲۵۶$ به این داده‌ها برازش می‌شود. اکنون نواحی اطمینان متعادل و بهینه در سطح ۹۵٪ براساس کمیت‌های محوری Q و W عبارتند از:

$$R_{۰/۹۵}^b = \{۰/۳۵ - ۰/۲۴۵\theta < \mu < ۰/۳۵, ۲/۶۹۸ < \theta < ۹/۱۳۴\}$$

$$R_{۰/۹۵}^* = \{۰/۳۵ - ۰/۲۴۵\theta < \mu < ۰/۳۵, ۲/۲۱۷ < \theta < ۸/۲۷۹\}.$$

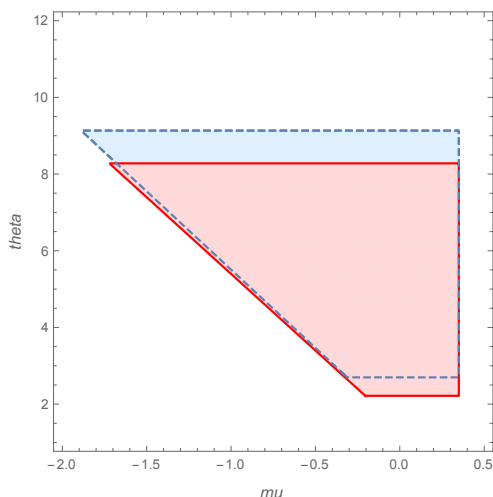
مساحت‌های نواحی اطمینان متعادل و بهینه به ترتیب $۹/۳۳۱۲$ و $۷/۹۵۹۹$ می‌باشند. بنابراین مقدار کاهش در مساحت با روش مینیم‌سازی برابر $۱۴/۶۹۶\%$ است. همچنین

$$R_{۰/۹۵}^{*part} = \{۰/۳۵ - ۰/۲۴۵\theta < \mu < ۰/۳۵, ۲/۴۲۷۸ < \theta < ۸/۴۸۶۶\},$$

با مساحت متناظر $Area(R^{*part}) = ۸/۱۰۳۲$. بنابراین روش مینیم کردن جداگانه، مقدار کاهش $۱۳/۱۶۰۱\%$ در مساحت را نشان می‌دهد. بنابراین رویه مینیم سازی توأم ترجیح داده می‌شود. نواحی

۱۷۰ کوچکترین ناحیه اطمینان برای پارامترهای توزیع نمایی دوپارامتری

اطمینان متعادل و بهینه ۹۵٪ براساس کمیت‌های محوری Q و W در شکل ۳ نشان داده شده‌اند. براساس



شکل ۳: نواحی اطمینان ۹۵٪ متعادل (خط تیره) و بهینه (خطوط یکپارچه) با توجه به کمیت‌های Q و W

کمیت‌های محوری T_1 و T_2 ، نواحی اطمینان متعادل و بهینه ۹۵٪ به ترتیب عبارتند از:

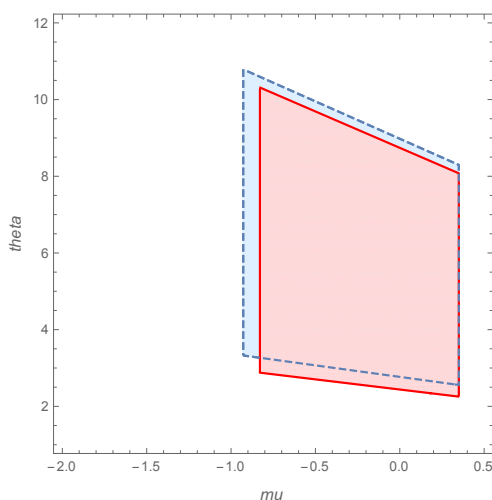
$$R_{\circ/95}^b = \left\{ (\mu, \theta) : -\circ/928 < \mu < \circ/35, \frac{A(\mu)}{49/914} < \theta < \frac{A(\mu)}{15/39} \right\},$$

$$R_{\circ/95}^* = \left\{ (\mu, \theta) : -\circ/829 < \mu < \circ/35, \frac{A(\mu)}{56/656} < \theta < \frac{A(\mu)}{15/807} \right\}.$$

مساحت نواحی اطمینان متعادل و بهینه به ترتیب ۹/۳۸۵۹ و ۸/۶۷۵۴ هستند، که کاهش در مساحت $R_{\circ/95}^b$ نسبت به $R_{\circ/95}^*$ برابر ۷/۵۶۹۷٪ است. همچنین

$$R_{\circ/95}^{*part} = \left\{ (\mu, \theta) : -\circ/928 < \mu < \circ/35, \frac{A(\mu)}{55/0753} < \theta < \frac{A(\mu)}{16/4940} \right\},$$

با مساحت متناظر $Area(R^{*part}) = ۸/۸۶۹۹$ است. بنابراین روش مینیمسازی جداگانه، مقدار کاهش ۵/۴۹۷۰٪ در مساحت را نشان می‌دهد. در نتیجه رویه مینیمسازی توأم به روش لاگرانژ نسبت به رویه مینیمسازی جداگانه، ترجیح داده می‌شود. شکل ۴ نواحی اطمینان ۹۵٪ متعادل و بهینه را برای (μ, θ) نشان می‌دهد.



شکل ۴: نواحی اطمینان ۹۵٪ متعادل (خط تیره) و بهینه (خطوط یکپارچه) با توجه به کمیت‌های T_1 و T_2

۷ کاربردها

کاربردهای نواحی اطمینان ارائه شده در این مقاله در آزمون‌های فرض و برآورد فاصله‌ای تابعی از پارامترها است. به عنوان مثال برای انجام آزمون آماری دو طرفه $(\mu, \theta) = (\mu_0, \theta_0)$: H_0 در مقابل H_1 : $(\mu, \theta) \neq (\mu_0, \theta_0)$ در سطح معنی‌داری α ، اگر ناحیه اطمینان $(1 - \alpha) \times 100\%$ به دست آمده شامل (μ_0, θ_0) باشد فرض H_0 در سطح α رد نمی‌شود. از طرفی به کمک ناحیه اطمینان فوق می‌توان فواصل اطمینان را برای توابعی از پارامترهای توزیع نمایی دوپارامتری و همچنین فاصله اطمینان را برای هر تابعی از پارامترهای μ و θ مانند تابع توزیع تجمعی نمایی به دست آورد. برای مثال نقطه‌ی $t \geq X_1$ داده شده است. روشن است که مجموعه مقادیر $F(t, \mu, \theta)$ با $(\mu, \theta) \in R_{1-\alpha}^*$ یک فاصله اطمینان برای تابع توزیع تجمعی نمایی در t را تشکیل می‌دهد. به همین ترتیب باند اطمینان همزمان برای تابع توزیع تجمعی نمایی مربوط به کوچکترین ناحیه اطمینان $R_{1-\alpha}^*$ به صورت

$$B_{1-\alpha}^* = \{(x, F(x; \mu, \theta)) : (\mu, \theta) \in R_{1-\alpha}^*, x > \mu\},$$

تعریف می‌شود، که معادل با مجموعه

$$B_{1-\alpha}^* = \left\{ (x, [1 - e^{-(\frac{x-\mu}{\theta})}] I(x > \mu)) : c^* < \mu < X_{(1)}, \frac{A(\mu)}{b_1^*} < \theta < \frac{A(\mu)}{b_1^*}, x > \mu \right\},$$

است و در آن $I(\cdot)$ تابع نشانگر را نشان می‌دهد. اینک برای انجام آزمون آماری داده‌های مربوط به میانگین دمای ماهیانه شهرستان بابلسر، با توجه به اینکه برآوردهای ماکسیمم درست نمایی μ و θ بترتیب عبارتند از $\hat{\mu} = 17/4$ و $\hat{\theta} = 0/6384$ ، فرض کنید هدف انجام آزمون آماری $\mu = 17/3, \theta = 1$: H_0 در مقابل $\mu \neq 17/3, \theta \neq 1$: H_1 در سطح ۵٪ است. چون کوچکترین ناحیه اطمینان ۹۵٪ برای (μ, θ) مبنی بر کمیت های T_1 و T_2 به صورت

$$R_{0/95}^* = \left\{ (\mu, \theta) : 17/189 < \mu < 17/4, \frac{A(\mu)}{51/624} < \theta < \frac{A(\mu)}{12/99} \right\},$$

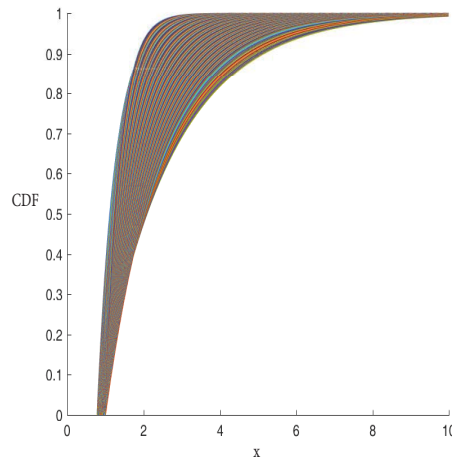
است، که نقطه $(17/3, 1)$ را دربر دارد. بنابراین فرض H_0 در سطح ۵٪ رد نمی‌شود. از طرفی کران اطمینان ۹۵٪ برای تابع توزیع نمایی دوپارامتری براساس $R_{0/95}^*$ به صورت

$$B_{1-\alpha}^* = \left\{ (x, [1 - e^{-(\frac{x-\mu}{\theta})}] I(x > \mu)) : 17/189 < \mu < 17/4, \frac{A(\mu)}{51/624} < \theta < \frac{A(\mu)}{12/99}, x > \mu \right\},$$

است، که در شکل ۵ کران اطمینان مربوطه نشان داده شده است.

تقدیر و تشکر

نویسندگان مقاله از سردبیر محترم مجله علوم آماری، داوران محترم و ویراستار ارجمند به خاطر صرف وقت در مطالعه مقاله و ارایه نظرات و پیشنهادات ارزشمندشان که موجب بهبود مقاله شد، نهایت تشکر و قدردانی را دارند.



شکل ۵: کران اطمینان ۹۵٪ برای توزیع نمایی دوپارامتری در مثال ۱.

ضمیمه

```
library("nloptr")
library("tolerance")
Result=function(alpha,n,x){
  S=sum(x-min(x))
  qL=(1-sqrt(1-alpha))/2
  qU=(1+sqrt(1-alpha))/2
  x0=c(qgamma(qL,n1-,1),qgamma(qU,n1-,1),qgamma(sqrt(1-alpha),1,n))
  fn = function(x){ x[3]*S^2*(1/x[1]^2*5.0*(x[2]^2/1- }
  hin = function(x){ c(x[1],x[2],x[3],x[2]-x[1]) }
  heq = function(x){(pgamma(x[2],n1-,1)-pgamma(x[1],n1-,1))*
    (pgamma(x[3],1,n))-(1-alpha)}
  gr = function(x){ nl.grad(x, fn) }
  hinjac = function(x){ nl.jacobian(x, hin) }
  heqjac = function(x){ nl.jacobian(x, heq) }
  auglag( x0, fn=fn, gr=gr, heq=heq, hin=hin) }
  alpha=0.05; n=50; mu0=0; sigma0=1
  x0=r2exp(n, rate = 1/sigma0, shift = mu0)
  Result(alpha, n, x=x0) par}
```

مراجع

اصغرزاده، الف.، یحیایی، ح.، عبدی، م. (۱۳۹۴)، نواحی اطمینان توأم اندیشه آماری، سال بیستم، شماره اول، شماره پیاپی ۳۹، ۱۹-۱۱.

آرنولد، ب. س.، بالاکریشنان، ن. و ناگارا، ح. ن. (۱۳۷۹)، نخستین درس در آماره های ترتیبی، چاپ اول، ترجمه حسنعلی آذرنوش، انتشارات دانشگاه فردوسی مشهد.

Abdi, M., Asgharzadeh, A. (2018), Rayleigh Confidence Regions Based on Record Data, *Journal of Statistical Research of Iran*, **14**, 171-188.

Asgharzadeh, A., Mohammadpour, M., Ganji, M. (2014), Estimation and Reconstruction Based on Left Censored Data from Pareto Model, *Journal of Iranian Statistical Society*, Issn 1726-4057.

Asgharzadeh, A., Abdi, M. (2011), Confidence Intervals and Joint Confidence Region for the Two Parameter Exponential Distribution Based on Records. *Communications of the Korean Statistical Society*, **18**, 103-110.

Johnson, N. L. Kotz, S. And Balakrishnan, N. (1994), *Continuous Univariate Distributions*, John Wiley & Sons, New York.

Mood, A. M. Graybill, F. A. (1963), *Introduction to the Theory of Statistics*, Second Edition, Mcgraw-Hill. Inc.

Nelson, W. B. (1970). Statistical Methods for Accelerated Life Test Data-the Inverse Power Law Model, *General Electric Corporate Research and Development TIS Report 71-C-01 I*.

Sukhatme, S. M. (1937), Tests of Significance for Samples of the χ^2 Population with Two Degrees of Freedom, *Annals of Eugenics*, **8**, 52-56.

Wu, S. F.b(2007), Interval Estimation for the Two-Parameter Exponential Distribution Based on the Doubly Type II Censored Sample, *Quality & Quantity*, **41**, 489-496.

Wu, S. F.(2010), Interval Estimation for the Two-Parameter Exponential Distribution Under Progressive Censoring, *Quality & Quantity*, **41**, 181-189.