

کلاسی از برآوردهای انقباضی بیزی برای پارامتر مقیاس توزیع وایبل براساس داده‌های سانسور شده

مهران نقی‌زاده قمی

گروه آمار، دانشگاه مازندران

تاریخ دریافت: ۱۳۹۷/۱۲/۲۲ تاریخ آخرین بازنگری: ۱۳۹۹/۰۳/۰۸

چکیده: در آمار کلاسیک، براساس اطلاعات نمونه‌ای و به کمک برآوردهای معمول مانند برآوردهای ماکسیمم درست‌نمایی به برآوردیابی پارامتر مورد علاقه می‌پردازند. در آمار بیزی، براساس اطلاعات پیشینی و با ترکیب آن با اطلاعات نمونه‌ای برآوردهای بیزی به دست می‌آیند. اما در بسیاری از موقعیت‌های کاربردی، پژوهشگر دارای اطلاعاتی درباره پارامتر نامعلوم به صورت یک حدس یا گمان است. با ترکیب این اطلاعات غیرنمونه‌ای با اطلاعات نمونه‌ای و اطلاعات موجود در توزیع پیشینی، می‌توان برآوردهای انقباضی بیزی را به دست آورد که در حوزه آمار نیمه‌کلاسیک قرار می‌گیرند. در این مقاله، کلاسی از برآوردهای انقباضی بیزی برای پارامتر مقیاس توزیع وایبل به عنوان تعمیمی از برآوردهای موجود ارائه می‌شود و اریبی و مخاطره آن‌ها تحت تابع زیان لاینکس مورد بررسی قرار می‌گیرند. سپس با استفاده از یک مجموعه داده واقعی، برآوردهای پیشنهادی مقایسه می‌شوند.

واژه‌های کلیدی: تابع زیان لاینکس، توزیع وایبل، برآوردهای انقباضی بیزی، داده‌های سانسور شده.

۱ مقدمه

فرض کنید x_1, \dots, x_n طول عمر n مولفه از یک سیستم تحت مدل وایبل با تابع چگالی احتمال

$$f(x; \nu, \theta) = \frac{\nu}{\theta} x^{\nu-1} \exp\left(-\frac{x^\nu}{\theta}\right), \quad x > 0, \quad \nu > 0, \quad \theta > 0, \quad (1)$$

باشد، که در آن ν پارامتر شکل معلوم و θ پارامتر مقیاس نامعلوم است. نمونه‌های سانسور شده نوع دوم را در نظر بگیرید که در آن آزمایش تا زمانی ادامه می‌یابد که $r(\leq n)$ مولفه از کار بیفتد. به عبارت دیگر، فقط r تا از کوچکترین مشاهدات از نمونه تصادفی n تایی، بصورت $x_{(1)}, \dots, x_{(r)}$ قابل مشاهده هستند. این نوع سانسور اغلب در انجام آزمون‌های طول عمر به کار می‌رود. تابع درستنمایی بصورت

$$L(\theta | x_{(1)}, \dots, x_{(r)}) = \frac{\nu^r}{\theta^r} \prod_{i=1}^r x_i^{\nu-1} \exp\left(-\frac{r\theta}{x_i^\nu}\right), \quad (2)$$

است، که در آن $\hat{\theta} = \frac{1}{r} [\sum_{i=1}^r x_{(i)}^\nu + (n-r)x_{(r)}^\nu]$ برآوردگر ماکسیمم درستنمایی و همچنین یک برآوردگر نارایب با کمترین واریانس برای θ است و $\chi^2_{2r} \sim 2r\hat{\theta}/\theta$ (سینها، ۱۹۸۶). این اطلاعات، اطلاعات نمونه‌ای نامیده می‌شود. گاهی ممکن است محقق دارای اطلاعاتی درباره پارامتر نامعلوم θ به صورت یک حدس نقطه‌ای θ_0 باشد. چنین اطلاعی در مورد پارامتر، به عنوان اطلاعات غیرنمونه‌ای نامیده می‌شود. اولین بار تامسون (۱۹۶۸) برآوردگر انقباضی^۱ را به صورت

$$S = k\hat{\theta} + (1-k)\theta_0, \quad 0 \leq k \leq 1, \quad (3)$$

مطرح کرد، که در آن k ضریب انقباضی است. وی نشان داد در صورتی که مقدار حدسی به مقدار واقعی آن نزدیک باشد، برآوردگرهای انقباضی دارای رفتار بهتری (مخاطره کمتری) نسبت به برآوردگرهای معمول مانند برآوردگر ماکسیمم درستنمایی هستند. انتخاب مقدار بهینه k یکی از مسائل مهم در برآوردیابی انقباضی است. یکی از روش‌های انتخاب بهینه k ، استفاده از مقداری از k است که مخاطره برآوردگر انقباضی را مینیمم کند (نقی‌زاده قمی و همکاران، ۱۳۹۷).

در روش‌های آمار بیزی، با در نظر گرفتن توزیع پیشین برای پارامتر نامعلوم و محاسبه توزیع پسین با

¹Shrinkage estimator

ترکیب اطلاعات پیشینی و اطلاعات نمونه‌ای، برآوردگرهای بیزی به دست می‌آیند. در صورتی که یک مقدار حدسی برای پارامتر مورد بررسی براساس اطلاعات گذشته یا هر منبع دیگری از اطلاعات وجود داشته باشد می‌توان برآوردگرهای انقباضی بیزی را به دست آورد. در این زمینه **پراکاش و سینگ** (۲۰۰۹) به برآوردیابی انقباضی بیزی پارامتر مقیاس توزیع وایبل براساس داده‌های سانسور شده تحت توابع زیان توان دوم خطا و خطی-نمایی یا لاینکس^۱ پرداختند. برآوردیابی انقباضی بیزی در توزیع رایلی براساس داده‌های سانسور شده تحت تابع زیان آنتروپی توسط **دی و همکاران** (۲۰۱۵) مطالعه شد. همچنین **نقی‌زاده قمی** (۲۰۱۷) برآوردگرهای انقباضی بیزی پارامتر مقیاس توزیع رایلی را تحت تابع زیان توان دوم خطای لگاریتمی به دست آورده و رفتار آن‌ها را با برآوردگر ماکسیمم درست‌نمایی مورد بررسی قرار داد. سپس **کیاپور** (۱۳۹۶) رفتار برآوردگر انقباضی بیزی را در توزیع نمایی تک پارامتری براساس داده‌های سانسور شده تحت یک تابع زیان حزم اندیشانه^۲ مورد مطالعه قرار داد.

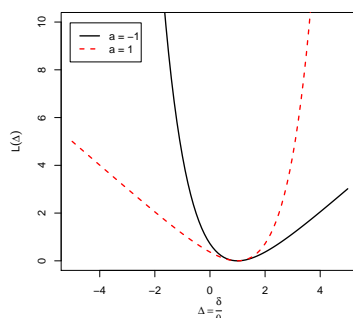
در این مقاله، کلاسی از برآوردگرهای انقباضی بیزی برای پارامتر مقیاس توزیع وایبل تحت تابع لاینکس

$$L(\Delta) = \exp(a(\Delta - 1)) - a(\Delta - 1) - 1, \quad a \neq 0, \quad \Delta = \frac{\delta}{\theta}, \quad (4)$$

ارائه می‌شود که در آن δ یک برآوردگر دلخواه برای برآورد θ است. علامت و مقدار a به ترتیب جهت و میزان عدم تقارن تابع زیان را نشان می‌دهد. مقدار مثبت (منفی) a وقتی استفاده می‌شود که بیش‌برآوردی دارای اهمیت بیشتری (کمتری) نسبت به کم‌برآوردی است. تابع زیان (۴) تقریبی از تابع زیان توان دوم خطا و به ازای مقادیر $|a|$ نزدیک به صفر، تقریباً متقارن است. شکل ۱ نمودار تابع زیان (۴) را به ازای مقادیر $a = -1, 1$ نشان می‌دهد. در بخش ۲ برآوردگرهای انقباضی بیزی معرفی شده توسط **پراکاش و سینگ** (۲۰۰۹) بیان می‌شوند. در بخش ۳ کلاسی از برآوردگرهای انقباضی بیزی برای پارامتر مقیاس توزیع وایبل معرفی می‌شوند. ارزیابی برآوردگر معرفی شده تحت تابع زیان لاینکس محاسبه و شکل آن‌ها رسم می‌شود. همچنین کارایی این برآوردگرها نسبت به برآوردگر ماکسیمم درست‌نمایی تحت تابع زیان لاینکس محاسبه و رفتار آن‌ها مورد بررسی قرار می‌گیرد. در بخش ۴ مثالی از داده‌های واقعی برای کاربریست برآوردگرهای انقباضی بیزی ارائه خواهد شد. در بخش ۵ به بحث و نتیجه‌گیری پرداخته می‌شود.

¹Linear-Exponential loss function

²Precautionary loss function



شکل ۱. نمودار تابع زیان لاینکس به ازای مقادیر $a = -1, 1$.

۲ برآوردهای انقباضی بیزی

با در نظر گرفتن توزیع پیشین گامای وارونه برای θ با تابع چگالی احتمال

$$\pi(\theta) = \frac{\beta^\alpha e^{-\frac{\beta}{\theta}}}{\Gamma(\alpha)\theta^{\alpha+1}}, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0, \quad (5)$$

و ترکیب آن با تابع درستنمایی (۲)، توزیع پسین θ به شرط $\underline{X}^r = (X_{(1)}, \dots, X_{(r)})$ دارای تابع چگالی احتمال به صورت

$$\pi(\theta|\underline{X}^r) = \frac{(r\hat{\theta} + \beta)^{\alpha+r} e^{-\frac{r\hat{\theta} + \beta}{\theta}}}{\Gamma(\alpha+r)\theta^{\alpha+r+1}}, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0,$$

است. با مینیمم کردن مخاطره پسین به صورت

$$E(L(\theta, \delta)|\underline{X}^r) = e^{-a}E(e^{a\frac{\delta}{\theta}}|\underline{X}^r) - a\delta E(\frac{1}{\theta}|\underline{X}^r) + a - 1$$

نسبت به δ ، برآوردهای بیزی θ تحت تابع زیان لاینکس به صورت

$$E(\frac{1}{\theta}e^{a\frac{\delta}{\theta}}|\underline{X}^r) = e^a E(\frac{1}{\theta}|\underline{X}^r)$$

به دست می‌آید. پراکاش و سینگ (۲۰۰۹) نشان دادند برآوردگر بیزی θ برابر

$$\hat{\theta}_B = \phi_1(r\hat{\theta} + \beta), \quad (۶)$$

است، که در آن

$$\phi_1 = \frac{1}{a}(1 - \phi_2^{-1}), \quad \phi_2 = e^{\frac{a}{a+r+1}}. \quad (۷)$$

با قرار دادن $E(\hat{\theta}_B) = \theta$ و با دانستن $\chi^2_r \hat{\theta}/\theta \sim \chi^2_r$ ، مقدار β از رابطه

$$\beta = \theta_*(1 - r\phi_1)\phi_1^{-1}, \quad (۸)$$

به دست می‌آید. با قرار دادن مقدار β از (۸) در (۶) برآوردگر بیزی به صورت

$$\hat{\theta}_{BS} = r\phi_1\hat{\theta} + (1 - r\phi_1)\theta_* = \lambda_1\hat{\theta} + (1 - \lambda_1)\theta_*, \quad \lambda_1 = r\phi_1 \quad (۹)$$

حاصل می‌شود، که به صورت برآوردگر انقباضی (۳) است و به این دلیل توسط پراکاش و سینگ (۲۰۰۹) برآوردگر انقباضی بیزی^۱ نامیده شد. باید توجه کرد که از (۸) و اینکه $\beta > 0$ نتیجه می‌شود $\lambda_1 = r\phi_1 < 1$. همچنین از (۶) و با توجه به اینکه $\hat{\theta}_B > 0$ داریم $\phi_1 > 0$ و در نتیجه $\lambda_1 = r\phi_1 > 0$. بنابراین داریم $0 < \lambda_1 < 1$.

۳ معرفی کلاس جدیدی از برآوردگرهای انقباضی بیزی

در این بخش کلاس جدیدی از برآوردگرهای انقباضی بیزی را معرفی کرده و به بررسی رفتار آن از نظر اریبی و مخاطره می‌پردازیم. کلاس جدید به عنوان تابعی از k طوری ساخته می‌شود که ضریب انقباضی مقداری بین صفر و یک بوده و به ازای $k = 0$ برآوردگر انقباضی پراکاش و سینگ (۲۰۰۹) را نتیجه دهد. بدین

^۱Bayesian Shrinkage estimator

منظور، کلاس جدید از برآوردگرهای انقباضی بیزی به صورت

$$\begin{aligned}\hat{\theta}_{BS}^{(k)} &= \frac{r(\phi_2 - 1) + [(a - r)\phi_2 + r]k}{a\phi_2} \hat{\theta} + \frac{[(a - r)\phi_2 + r](1 - k)}{a\phi_2} \theta_0 \\ &= \lambda_2 \hat{\theta} + (1 - \lambda_2) \theta_0, \quad k \in [0, 1]\end{aligned}\quad (10)$$

در نظر گرفته می شود، که در آن

$$\lambda_2 = \frac{r(\phi_2 - 1) + [(a - r)\phi_2 + r]k}{a\phi_2} \quad (11)$$

مقداری بین صفر و یک است که در ادامه اثبات می شود. به ازای $k = 0$ داریم $\lambda_2 = \frac{r(\phi_2 - 1)}{a\phi_2} = r\phi_1$ و در نتیجه $\hat{\theta}_{BS}^{(0)} = \hat{\theta}_{BS}$. بنابراین برآوردگر (10) تعمیمی از برآوردگر انقباضی بیزی (۹) معرفی شده توسط **پراکاش و سینگ (۲۰۰۹)** همچنین به ازای $k = 1$ به برآوردگر ماکسیمم درستنمایی $\hat{\theta}_{BS}^{(1)} = \hat{\theta}$ حاصل می شود. چون $\phi_1 < 1/r$ ، از رابطه (۷) به ازای $a > 0$ نتیجه می شود $(a - r)\phi_2 + r > 0$. همچنین $\phi_2 > 1$ نتیجه می دهد $r(\phi_2 - 1) > 0$. با عنایت به (۱۱) و اینکه $k > 0$ واضح است که $\lambda_2 > 0$. با توجه به اینکه $k < 1$ است به ازای $a > 0$ داریم $(a - r)\phi_2 + r > [(a - r)\phi_2 + r]k < (a - r)\phi_2 + r$ لذا $r(\phi_2 - 1) + [(a - r)\phi_2 + r]k < a\phi_2$ می توان نتیجه گرفت که مقدار λ_2 در (۱۱) مقداری بین صفر و یک است. بطور مشابه این نتیجه برای $a < 0$ نیز برقرار است.

تعریف ۱. (لهمن، ۱۹۵۱) برآوردگر δ برای θ مخاطره-نااریب است اگر

$$E[L(\theta, \delta)] \leq E[L(\theta', \delta)], \quad \theta \neq \theta'.$$

یافتن برآوردگرهای مخاطره-نااریب به تابع زیان بستگی دارد. با توجه به تابع زیان لاینکس داریم

$$E[L(\theta, \delta)] - E[L(\theta', \delta)] = E[e^{a(\frac{\delta}{\theta} - 1)}] - E[e^{a(\frac{\delta}{\theta'} - 1)}] - a(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{\theta'})E[\delta].$$

با قرار دادن $E[\delta] = e^{-a}E[\delta e^{a\frac{\delta}{\theta}}]$ داریم

$$E[L(\theta, \delta)] - E[L(\theta', \delta)] = e^{-a}\{E[e^{a\frac{\delta}{\theta}} - e^{a\frac{\delta}{\theta'}}] - ae^{-a}(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{\theta'})E[\delta e^{a\frac{\delta}{\theta}}]\},$$

با استفاده از نامساوی $e^c - e^d \leq (c - d)e^c$, $c \neq d$ نتیجه می‌شود

$$E[e^{a\frac{\delta}{\theta}} - e^{a\frac{\delta}{\theta'}}] \leq a(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{\theta'})E[\delta e^{a\frac{\delta}{\theta}}].$$

بنابراین برآوردگر δ مخاطره-نااریب است اگر $E[\delta] = e^{-a}E[\delta e^{a\frac{\delta}{\theta}}]$ و اریبی برآوردگر δ به صورت

$$\text{Bias}(\theta) = E[\delta] - e^{-a}E[\delta e^{a\frac{\delta}{\theta}}], \quad (۱۲)$$

تعریف می‌شود. با توجه به (۱۲) اریبی و امید برآوردگر $\hat{\theta}_{BS}^{(k)}$ تحت تابع لاینکس بترتیب بصورت

$$\begin{aligned} \text{Bias}(\theta) &= E[\hat{\theta}_{BS}^{(k)}] - e^{-a}E[\hat{\theta}_{BS}^{(k)}e^{a\frac{\hat{\theta}_{BS}^{(k)}}{\theta}}], \\ E[\hat{\theta}_{BS}^{(k)}] &= \theta[\lambda_r + (1 - \lambda_r)\theta^*], \end{aligned}$$

به دست می‌آیند، که در آن $\theta^* = \theta_0/\theta$. برای محاسبه $E[\hat{\theta}_{BS}^{(k)}e^{a\frac{\hat{\theta}_{BS}^{(k)}}{\theta}}]$ داریم

$$\begin{aligned} E[\hat{\theta}_{BS}^{(k)}e^{a\frac{\hat{\theta}_{BS}^{(k)}}{\theta}}] &= \theta E[(\lambda_r \frac{\hat{\theta}}{\theta} + (1 - \lambda_r)\theta^*) e^{a(\lambda_r \frac{\hat{\theta}}{\theta} + (1 - \lambda_r)\theta^*)}] \\ &= \theta E[(\frac{\lambda_r}{r}U + (1 - \lambda_r)\theta^*) e^{a(\frac{\lambda_r}{r}U + (1 - \lambda_r)\theta^*)}] \\ &= \theta e^{a(1 - \lambda_r)\theta^*} \{ \frac{\lambda_r}{r} E[U e^{\frac{a\lambda_r}{r}U}] + (1 - \lambda_r)\theta^* E[e^{\frac{a\lambda_r}{r}U}] \}, \end{aligned}$$

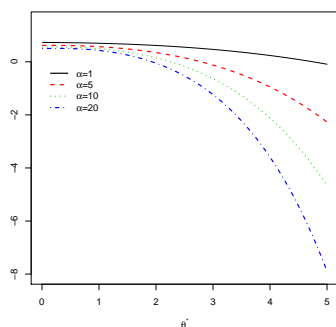
که در آن $U = r\hat{\theta}/\theta$ دارای توزیع کی‌دو با $2r$ درجه آزادی است. با محاسبات ساده نتیجه می‌شود

$$E[e^{\frac{a\lambda_r}{r}U}] = (1 - \frac{a\lambda_r}{r})^{-r}, \quad E[U e^{\frac{a\lambda_r}{r}U}] = \frac{2r^{r+1}}{(r + a\lambda_r)^{r+1}}.$$

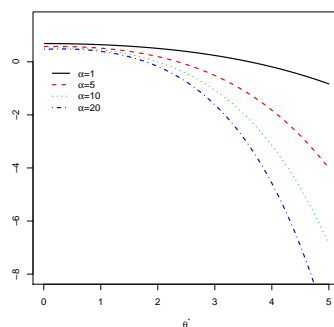
در نتیجه اریبی برآوردگر $\hat{\theta}_{BS}^{(k)}$ بصورت

$$\begin{aligned} \text{Bias}(\theta) &= \theta\{(\lambda_r + (1 - \lambda_r)\theta^*)\} \\ &- \theta\{e^{-a} e^{a(1 - \lambda_r)\theta^*} [\lambda_r (\frac{r}{(r + a\lambda_r)})^{r+1} + (1 - \lambda_r)\theta^* (1 - \frac{a\lambda_r}{r})^{-r}]\} \end{aligned}$$

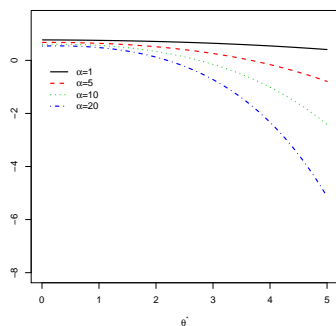
به دست می‌آید، که تابعی از θ و θ^* است. شکل ۲ نمودارهای اریبی کلاس برآوردهای انقباضی بیزی را به ازای مقادیر دلخواه $r = 4, 6, 8, 10$ ، $\alpha = 1, 5, 10, 20$ ، $a = 1$ و $k = 0.5$ نسبت به θ^* نشان می‌دهد. مقدار واقعی پارامتر در این نمودارها برابر یک در نظر گرفته شده است. از نمودارها ملاحظه می‌شود که میزان اریبی منفی، برابر صفر یا مثبت است که در نتیجه می‌توان گفت برآوردهای انقباضی بیزی معرفی شده می‌تواند نااریب یا دارای اریبی مثبت یا منفی باشد.



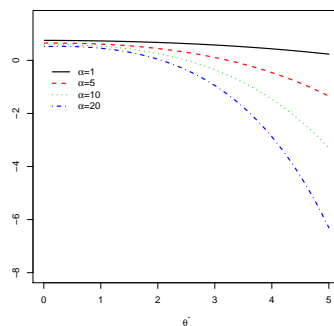
(ب)



(الف)



(د)



(ج)

شکل ۲. اریبی کلاس برآوردهای انقباضی بیزی: الف- $r = 4$ ، ب- $r = 6$ ، ج- $r = 8$ ، د- $r = 10$.

۳.۱ کارایی برآوردگر انقباضی بیزی

در این بخش، کارایی برآوردگر انقباضی بیزی را نسبت به برآوردگر ماکسیمم درستنمایی مورد بررسی قرار می‌دهیم. برای این منظور ابتدا مخاطره برآوردگر ماکسیمم درستنمایی تحت تابع زیان لاینکس به دست آورده می‌شود. با اندکی محاسبات و با توجه به اینکه $\chi^2_r/\theta \sim \chi^2_r$ ، نتیجه می‌شود

$$R(\theta, \hat{\theta}) = E[e^{a(\frac{\hat{\theta}}{\theta}-1)}] - aE[\frac{\hat{\theta}}{\theta} - 1] - 1 = e^{-a}(\frac{r}{r-a})^r - 1.$$

اکنون مخاطره کلاس برآوردگرهای انقباضی تحت تابع زیان لاینکس محاسبه می‌شود، که برابر است با

$$R(\theta, \hat{\theta}_{BS}^{(k)}) = E[e^{a(\frac{\hat{\theta}_{BS}^{(k)}}{\theta}-1)}] - aE[\frac{\hat{\theta}_{BS}^{(k)}}{\theta} - 1] - 1$$

با توجه به رابطه (۱۰) داریم

$$E[e^{a(\frac{\hat{\theta}_{BS}^{(k)}}{\theta}-1)}] = e^{a[(1-\lambda_r)\theta^*-1]}(1 - \frac{a\lambda_r}{r})^{-r},$$

$$E[\frac{\hat{\theta}_{BS}^{(k)}}{\theta}] = (1 - \lambda_r)\theta^* + \lambda_r.$$

در نتیجه

$$R(\theta, \hat{\theta}_{BS}^{(k)}) = e^{a[(1-\lambda_r)\theta^*-1]}(1 - \frac{a\lambda_r}{r})^{-r} + a(1 - \lambda_r)(1 - \theta^*) - 1$$

حال برای بررسی رفتار کلاس برآوردگر انقباضی، کارایی نسبی آن را نسبت به برآورد ماکسیمم درستنمایی به صورت

$$RE(\hat{\theta}_{BS}^{(k)}, \hat{\theta}) = \frac{R(\theta, \hat{\theta})}{R(\theta, \hat{\theta}_{BS}^{(k)})} = \frac{e^{-a}(\frac{r}{r-a})^r - 1}{e^{a[(1-\lambda_r)\theta^*-1]}(1 - \frac{a\lambda_r}{r})^{-r} + a(1 - \lambda_r)(1 - \theta^*) - 1}$$

در نظر گرفته می‌شود. شکل ۳ نمودارهای کارایی نسبی را به ازای مقادیر انتخابی $r = 4, 6, 8, 10$ ، $a = 1$ ، $\alpha = 1/25, 1/5, 2/5, 5, 10$ و $k = 0/5$ نسبت به $\theta_0/\theta = \theta^*$ نشان می‌دهد. همانطور که

ملاحظه می‌شود :

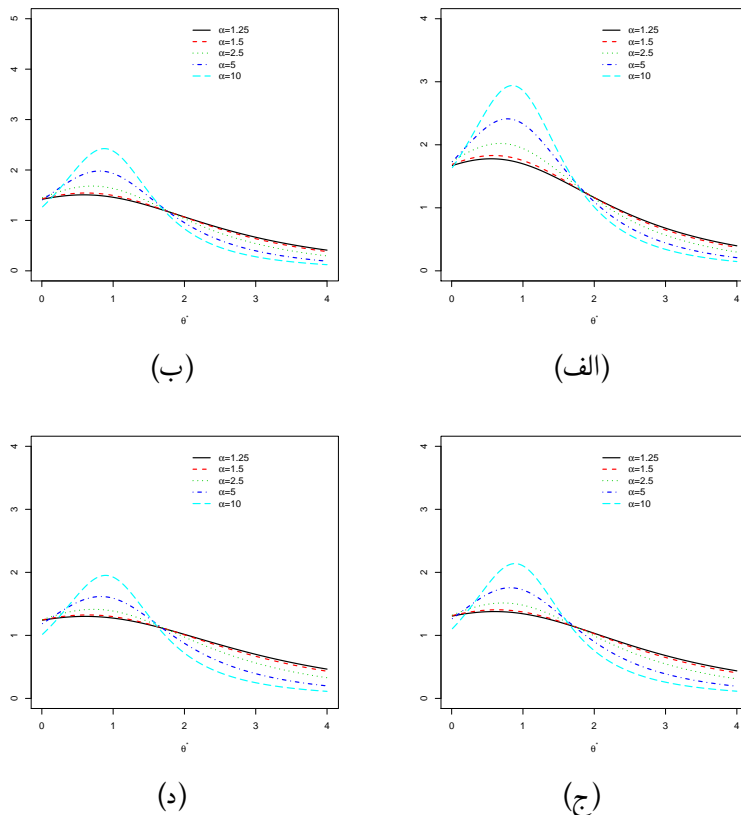
- ۱- کارایی نسبی برای مقادیر θ^* وقتی از مقدار یک فاصله می‌گیرد به صفر میل می‌کند و برای مقادیر θ^* نزدیک به یک ($\theta \approx \theta_0$) دارای بیشترین مقدار است.
- ۲- برآوردگرهای انقباضی بیزی برای مقادیر θ در همسایگی θ_0 دارای کارایی بیشتری (مخاطره کمتری) نسبت به برآوردگر ماکسیم درست‌نمایی هستند.
- ۳- برای مقادیر θ در همسایگی θ_0 ، کارایی نسبی با افزایش α و ثابت نگه‌داشتن سایر پارامترها افزایش می‌یابد، به عبارت دیگر برآوردگرهای انقباضی بیزی با مقدار ابرپارامتر α بزرگتر دارای مخاطره کمتری نسبت به سایر برآوردگرها هستند. قابل توجه است که با توجه به رابطه (۸) به راحتی می‌توان نشان داد که β نسبت به α تابعی صعودی است و در نتیجه می‌توان گفت که برآوردگرهای انقباضی بیزی با مقدار ابرپارامترهای α و β بزرگتر دارای مخاطره کمتری نسبت به سایر برآوردگرها هستند.
- ۴- برای مقادیر θ^* نزدیک به یک و با ثابت نگه‌داشتن سایر پارامترها، مقدار کارایی نسبی با افزایش r کاهش می‌یابد.

برای مقایسه برآوردگرهای انقباضی بیزی در کلاس معرفی شده، شکل ۴ رسم شده که نمودار کارایی نسبی را به ازای مقادیر انتخابی $10, 8, 6, 4, r = 5, \alpha = 1, a = 9/10, 7/10, 5/10, 2/10, 0, k =$ نسبت به $\theta_0/\theta = \theta^*$ نشان می‌دهد. از این شکل ملاحظه می‌شود که در همسایگی θ_0 و θ_0 برآوردگرهای انقباضی با مقدار کوچکتر k دارای کارایی بیشتری هستند. برای درک بیشتر این موضوع، نمودار کارایی نسبی برای مقادیر مختلف $10, 8, 6, 4, r = 5, \alpha = 1, a = 1, \theta^* =$ نسبت به k در شکل ۵ رسم شده است. از این شکل ملاحظه می‌شود که کارایی نسبی نسبت به k تابعی نزولی است به عبارت دیگر برآوردگرهای انقباضی با مقدار $k = 0$ دارای بیشترین کارایی و برای $k = 1$ دارای کمترین کارایی هستند. در جدول ۱ مقادیری از θ^* با بیشترین کارایی (θ_{\max}^*) و همچنین بازه‌ای از مقادیر θ^* ، که در آن برآوردگر انقباضی بیزی نسبت به برآوردگر ماکسیم درست‌نمایی دارای کارایی بیشتری است (بازه موثر) به ازای مقادیر مختلف $10, 8, 6, 4, r = 5, \alpha = 1, a = -1, \theta^* =$ گزارش شده است.

۴ مثال کاربردی

مان و فرتیگ (۱۹۷۳) زمان‌های شکست مولفه‌های هواپیمای $F100$ تولیدی شرکت راکول^۱ در آمریکای

^۱Rockwell corporation

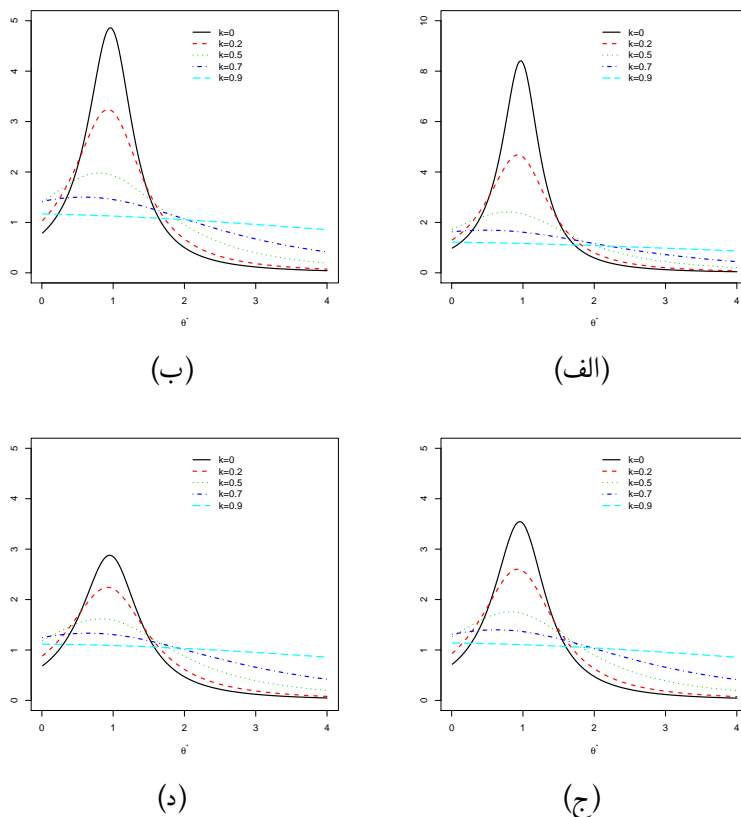


شکل ۳. کارایی نسبی برآوردهای انقباضی بی‌بی: الف- $r = ۴$ ، ب- $r = ۶$ ، ج- $r = ۸$ ، د- $r = ۱۰$.

شمالی را مورد بررسی قرار دادند. ۱۳ مولفه در آزمایش قرار گرفتند و زمان‌های شکست ۱۰ مولفه اول بصورت ۳/۰۰، ۲/۵۰، ۱/۷۶، ۱/۵۴، ۱/۳۳، ۱/۳۲، ۱/۰۰، ۰/۸۸، ۰/۵۰، ۰/۲۲ برحسب ساعت ثبت شد. آن‌ها توزیع وایبل را برای داده‌ها مناسب دانستند (پراکاش و سینگ، ۲۰۰۹). برای مقایسه نتایج، با در نظر گرفتن $\nu = ۴$ برآورد ماکسیمم درست‌نمایی θ برابر

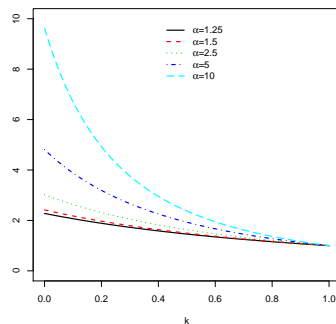
$$\hat{\theta} = \frac{1}{10} \left[\sum_{i=1}^{10} x_{(i)}^4 + (13 - 10)x_{(10)}^4 \right] = 38/6112.$$

و مقدار مخاطره آن به ازای $a = ۱$ برابر ۰/۵۵۱ است. با توجه به مقدار برآورد ماکسیمم درست‌نمایی

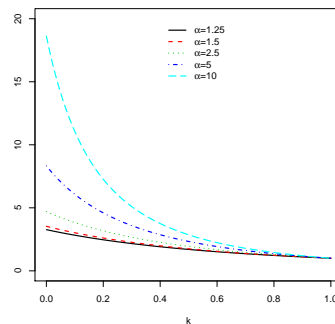


شکل ۴. کارایی برآوردهای انقباضی بیزی به ازای $\alpha = 5$: الف- $r = 4$ ، ب- $r = 6$ ، ج- $r = 8$ ، د- $r = 10$.

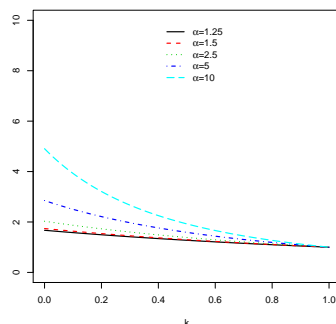
برای θ ، مقادیر $\theta_0 = 20, 35, 45, 65, 70$ در همسایگی $\hat{\theta}$ (به عنوان مقدار واقعی پارامتر) در نظر گرفته شد. برآوردهای انقباضی بیزی و مخاطره آن‌ها در جدول ۲ به ازای مقادیر $k = 0, 0.5$ و $a = 1$ و $\alpha = 2/5, 5, 10, 20$ گزارش شده است. همانطور که ملاحظه می‌شود مقادیر برآوردهای به ازای مقدار حدسی $\theta_0 = 35$ به مقدار واقعی نزدیک‌تر بوده و دارای کمترین مخاطره هستند. همچنین برای مقادیر θ_0 بزرگتر از مقدار واقعی پارامتر، با افزایش α برآوردها و مخاطره آن‌ها افزایش می‌یابد.



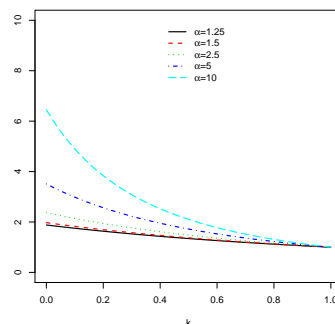
(ب)



(الف)



(د)



(ج)

شکل ۵. کارایی برآوردگرهای انقباضی بیزی به ازای $\theta^* = ۱$: الف-۴، ب-۶، ج-۸، د-۱۰. $r = ۱۰$.

۵ بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله، یک کلاس از برآوردگرهای انقباضی بیزی برای پارامتر مقیاس توزیع وایبل براساس داده‌های سانسور شده ارائه شده و رفتار آن‌ها نسبت به برآوردگر ماکسیمم درست‌نمایی تحت تابع زیان لاینکس مورد بررسی قرار گرفت. در مورد اریبی، نتایج نشان می‌دهد که این برآوردگرها می‌توانند مخاطره نااریب یا دارای اریبی مثبت یا منفی باشند. همچنین کارایی کلاس معرفی شده نسبت به برآوردگر ماکسیمم درست‌نمایی بصورت گرافیکی مورد بررسی قرار گرفت. برآوردگرهای انقباضی بیزی برای مقادیر θ در همسایگی θ_0 دارای کارایی بیشتری (مخاطره کمتری) نسبت به برآوردگر ماکسیمم درست‌نمایی هستند. همچنین نمودارهای

جدول ۱. مقادیر θ_{\max}^* و بازه موثر $[\theta_1^*, \theta_r^*]$ به ازای مقادیر مختلف α , r , k و a .

$\alpha = 2/5$		$\alpha = 1/5$		k	r
$[\theta_1^*, \theta_r^*]$	θ_{\max}^*	$[\theta_1^*, \theta_r^*]$	θ_{\max}^*		
$[0/2329, 2/0588]$	$1/0865$	$[0/1436, 2/2811]$	$1/1489$	۰	۴
$[0, 2/7907]$	$1/3197$	$[0, 3/1618]$	$1/4455$	۰/۵	
$[0/2606, 2/0324]$	$1/1031$	$[0/1651, 2/2717]$	$1/1721$	۰	۶
$[0/0259, 2/7084]$	$1/3171$	$[0, 3/1618]$	$1/4634$	۰/۵	
$[0/2764, 2/0206]$	$1/1139$	$[0/1770, 2/2694]$	$1/1867$	۰	۸
$[0/0487, 2/6657]$	$1/3183$	$[0, 3/0778]$	$1/4694$	۰/۵	
$[0/2865, 2/0142]$	$1/2116$	$[0/1846, 2/2691]$	$1/1966$	۰	۱۰
$[0/0634, 2/6398]$	$1/3197$	$[0, 3/0613]$	$1/4737$	۰/۵	
$\alpha = 10$		$\alpha = 5$		k	r
$[\theta_1^*, \theta_r^*]$	θ_{\max}^*	$[\theta_1^*, \theta_r^*]$	θ_{\max}^*		
$[0/4264, 1/6951]$	$1/0125$	$[0/3408, 1/8364]$	$1/0357$	۰	۴
$[0/1717, 2/2068]$	$1/2171$	$[0/0920, 2/4292]$	$1/1949$	۰/۵	
$[0/4729, 1/6310]$	$1/0166$	$[0/3792, 1/7892]$	$1/0447$	۰	۶
$[0/2448, 2/0694]$	$1/1132$	$[0/1491, 2/3162]$	$1/1859$	۰/۵	
$[0/5000, 1/5963]$	$1/0198$	$[0/4004, 1/7652]$	$1/0512$	۰	۸
$[0/2885, 1/9933]$	$1/1066$	$[0/1822, 2/2553]$	$1/1823$	۰/۵	
$[0/5178, 1/5747]$	$1/0224$	$[0/4141, 1/7509]$	$1/0561$	۰	۱۰
$[0/3177, 1/9444]$	$1/1029$	$[0/2039, 2/2172]$	$1/1806$	۰/۵	

جدول ۲. برآورد های انقباضی بیزی (مخاطره) به ازای مقادیر مختلف θ , k , α و a

α					k	θ_0
۲۰	۱۰	۵	۲/۵			
۲۵/۹۰۷۸(۰/۰۵۲۴)	۲۸/۶۵۴۸(۰/۰۳۹۲)	۳۱/۲۷۵۹(۰/۰۳۲۹)	۳۳/۲۸۷۸(۰/۰۳۲۷)	۰	۲۰	
۳۲/۲۵۹۵(۰/۰۳۲۳)	۳۳/۶۳۳۰(۰/۰۳۳۱)	۳۴/۹۴۳۵(۰/۰۳۵۹)	۳۵/۹۴۹۵(۰/۰۳۹۴)	۰/۵		
۳۶/۱۴۶۳(۰/۰۰۶۸)	۳۶/۶۷۹۳(۰/۰۱۱۹)	۳۷/۱۸۷۹(۰/۰۱۹۳)	۳۷/۵۷۸۳(۰/۰۲۶۸)	۰	۳۵	
۳۷/۳۷۸۷(۰/۰۲۲۷)	۳۷/۶۴۵۲(۰/۰۲۸۲)	۳۷/۸۹۹۵(۰/۰۳۴۲)	۳۸/۰۹۴۷(۰/۰۳۹۳)	۰/۵		
۴۲/۹۷۲۰(۰/۰۱۲۴)	۴۲/۰۲۹۰(۰/۰۱۶۳)	۴۱/۱۲۹۲(۰/۰۲۲۸)	۴۰/۴۳۸۶(۰/۰۲۹۶)	۰	۴۵	
۴۰/۷۹۱۶(۰/۰۲۵۹)	۴۰/۳۲۰۱(۰/۰۳۰۹)	۳۹/۸۷۰۲(۰/۰۳۶۳)	۳۹/۵۲۴۹(۰/۰۴۱۰)	۰/۵		
۵۳/۲۱۰۵(۰/۰۱۳۶۱)	۵۰/۰۵۳۳(۰/۰۹۲۰)	۴۷/۰۴۱۲(۰/۰۶۵۰)	۴۴/۷۲۹۰(۰/۰۵۳۴)	۰	۶۰	
۴۵/۹۱۰۸(۰/۰۵۸۴)	۴۴/۳۳۲۴(۰/۰۵۲۱)	۴۲/۸۲۶۲(۰/۰۴۹۱)	۴۱/۶۷۰۱(۰/۰۴۸۷)	۰/۵		
۶۰/۰۳۶۱(۳/۱۹۵۸)	۵۵/۴۰۳۲(۱/۱۲۷۲)	۵۰/۹۸۲۵(۰/۰۸۳۹)	۴۷/۵۸۹۳(۰/۰۶۳۵)	۰	۷۰	
۴۹/۳۲۳۷(۰/۰۷۲۶)	۴۷/۰۰۷۲(۰/۰۶۱۰)	۴۴/۷۹۶۸(۰/۰۵۴۲)	۴۳/۱۰۰۲(۰/۰۵۱۷)	۰/۵		

مراجع ۵۶۳

کارایی نسبی نسبت به k رسم شدند که نشان می‌دهد برآوردهای انقباضی با مقدار کوچکتر k دارای کارایی بیشتری نسبت به سایر برآوردهای انقباضی بیزی در کلاس معرفی شده هستند. برای کاربست مطلوب کلاس برآوردهای انقباضی بیزی معرفی شده از داده‌های واقعی استفاده شد.

۶ تقدیر و تشکر

نویسنده، از سردبیر، داوران و ویراستار محترم مجله برای ارزیابی و بهبود کیفیت مقاله کمال تشکر را دارد.

مراجع

کیاپور، آ. (۱۳۹۶)، برآوردهای انقباضی بیزی برای پارامتر مقیاس توزیع نمایی براساس داده‌های سانسور شده، *مجله علوم آماری ایران*، ۱۱، ۱۱۹-۱۳۱.

نقی‌زاده قمی، م.، مهدی‌زاده، ز. و زارعی‌فرد، ح. (۱۳۹۷)، آزمون-برآوردیابی انقباضی در توزیع راییلی و کاربرد آن در داده‌های سانسور شده نوع دوم، *مجله علوم آماری ایران*، ۱۲، ۲۲۳-۲۳۷.

Dey, Sanku., Dey, T. and Maiti, S. (2015), Bayes Shrinkage Estimation of the Parameter of Rayleigh Distribution for Progressive Type-II Censored Data, *Austrian Journal of Statistics*, **44**, 3-15.

Lehmann, E. L. (1951), A General Concept of Unbiasedness, *The Annals of Mathematical Statistics*, **22**, 587-592.

Mann, N. R. and Fertig, K.W. (1973), Tables for Obtaining Confidence Bounds and Tolerance Bounds Based on Best Linear Invariant Estimates of Parameters of the Extreme Value Distribution, *Technometrics*, **15**, 87-101.

Naghizadeh Qomi, M. (2017), Bayesian Shrinkage Estimation Based on Rayleigh Type-II Censored Data, *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **46**, 9859-9868.

Prakash, G., and Singh, D. C. (2009), A Bayesian Shrinkage Approach in Weibull Type-II Censored Data Using Prior Point Information, *REVSTAT- Statistical Journal*, **7**, 171-187.

Sinha, S.K. (1986), *Reliability and Life-Testing*, Wiley Eastern, New Delhi.

Thompson, J. R. (1968), Some Shrunk Techniques for Estimating the Mean, *Journal of the American Statistical Association*, **63**, 113-122.

A Class of Bayesian Shrinkage Estimators for the Scale Parameter of Weibull Distribution Based on Censored Data

Naghizadeh Qomi, M.

Department of Statistics, University of Mazandaran, Babolsar, Iran.

Abstract: In classical statistics, the parameter of interest is estimated based on sample information and using natural estimators such as maximum likelihood estimators. In Bayesian statistics, the Bayesian estimators are constructed based on prior knowledge and combining with it sample information. But, in some situations, the researcher has information about the unknown parameter as a guess. Bayesian shrinkage estimators can be constructed by Combining this non-sample information with sample information together with the prior knowledge, which is in the area of semi-classical statistics. In this paper, we introduce a class of Bayesian shrinkage estimators for the Weibull scale parameter as a generalization of the estimator at hand and consider the bias and risk of them under LINEX loss function. Then, the proposed estimators are compared using a real data set.

Keywords: LINEX loss function, Weibull distribution, Bayesian Shrinkage estimator, Censored data.

Mathematics Subject Classification (2010): 62F10, 62F15.