

مجله علوم آماری، پاییز و زمستان ۱۴۰۰

جلد ۱۵، شماره ۲، ص ۳۸۱ - ۴۰۵

DOI: 10.29252/jss.15.2.381

مقاله پژوهشی

## برآوردیابی و پیش‌بینی برای توزیع پواسن-نمایی بر اساس رکوردها و زمان‌های بین رکورد: یک مطالعه مقایسه‌ای

فیروزه باستان، سید محمدتقی کامل میرمصطفائی

گروه آمار، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه مازندران

تاریخ دریافت: ۱۳۹۹/۰۱/۰۸ تاریخ پذیرش و انتشار: ۱۴۰۰/۰۳/۱۷

**چکیده:** در این مقاله، برآوردیابی و پیش‌بینی برای توزیع پواسن-نمایی بر اساس رکوردهای پایین و زمان‌های بین رکورد مورد مطالعه قرار می‌گیرند. برآوردیابی با روش‌های ماکسیمم درست‌نمایی و بیزی بر اساس دو تابع زیان متقارن و نامتقارن صورت می‌پذیرد. از آن‌جا که به نظر می‌رسد انتگرال‌های مرتبط با برآوردهای بیزی دارای فرم‌های بسته نیستند، از الگوریتم‌های متروپولیس-هستینگز درون‌گیز و نمونه‌گیری نقاط مهم برای تقریب این انتگرال‌ها استفاده می‌شود. همچنین پیش‌بینی بیزی رکوردهای آینده نیز مورد بررسی قرار می‌گیرد. یک مطالعه شبیه‌سازی و یک مثال کاربردی برای ارزیابی و نشان دادن کاربرد نتایج مقاله و همچنین مقایسه نتایج عددی وقتی استنباط بر اساس رکوردها و زمان‌های بین رکورد است، با هنگامی که استنباط تنها بر اساس رکوردها صورت می‌پذیرد، ارائه می‌گردد.

**واژه‌های کلیدی:** الگوریتم متروپولیس-هستینگز درون‌گیز، آماره‌های رکوردی پایین، زمان‌های بین رکورد، شبیه‌سازی مونت کارلو، نمونه‌گیری نقاط مهم.

## ۱ مقدمه

در دنباله متغیرهای تصادفی  $\{X_n; n \geq 1\}$  مشاهده  $X_i$  رکورد پایین نامیده می‌شود اگر از تمام مشاهدات ما قبل خود کوچک‌تر باشد. به عبارت دیگر  $n$ -امین رکورد پایین به صورت  $X_{T_n}$  تعریف می‌شود، که در آن  $T_1 = 1$  (با احتمال ۱) و برای  $n > 1$ ،  $T_n = \min\{i > T_{n-1}, X_i < X_{T_{n-1}}\}$ . همچنین  $n$ -امین زمان بین رکورد پایین به صورت  $K_n = T_{n+1} - T_n$  برای  $n \geq 1$  تعریف می‌شود. اگر  $n$ -امین رکورد پایین با  $R_n$  نمایش داده شود، آنگاه در حقیقت  $n$ -امین زمان بین رکورد پایین، تعداد آزمایش‌های لازم بعد از وقوع  $R_n$  برای مشاهده یک رکورد جدید  $(R_{n+1})$  است. در ادامه مشاهدات رکوردی به صورت  $(R, K) = (R_1, K_1, \dots, R_{m-1}, K_{m-1}, R_m)$  نمایش داده می‌شوند و رکوردهای بالا و زمان‌های بین رکورد بالا نیز به طور مشابه قابل تعریف هستند.

امروزه داده‌های رکوردی در اکثر شاخه‌های علمی نظیر اقتصاد، هواشناسی، زلزله نگاری، مهندسی، پزشکی، کنترل کیفیت، آب شناسی، قابلیت اطمینان، تحلیل داده‌های طول عمر، استخراج نفت و معادن، هوا و فضا و غیره کاربرد فراوانی دارند (آرنولد و همکاران، ۱۹۹۸). محققان بسیاری به مسأله استنباط آماری بر اساس رکوردها پرداخته‌اند (احمدی و دوست‌پرست، ۲۰۰۶؛ سنجری فارسی‌پور و ریاحی، ۱۳۹۲). به کار بردن اطلاعات اضافه موجود در آماره‌های زمان بین رکورد نیز می‌تواند منجر به بهبود نتایج استنباط آماری شود. فئورگر و هال (۱۹۹۸) تاکید کردند که رکوردها و زمان بین رکوردها توأمأ اطلاعات بیشتری در رابطه با  $F$  نسبت به رکوردها بدون در نظر گرفتن زمان‌های بین رکورد دارند. محققان بسیاری به مسأله استنباط آماری برای توزیع‌های طول عمر بر اساس رکوردها و زمان‌های بین رکورد پرداخته‌اند. سامانیگو و ویتاکر (۱۹۸۶) مسأله برآوردیابی برای توزیع نمایی بر اساس رکوردها و زمان‌های بین آن‌ها را بحث کردند. از دیگر کارهای استنباطی انجام شده در این زمینه می‌توان به دوست‌پرست و همکاران (۲۰۱۳)، سینگ و همکاران (۲۰۱۷) و پاک و دی (۲۰۱۹) اشاره نمود.

توزیع نمایی که یکی از ساده‌ترین و پرکاربردترین توزیع‌های طول عمر است، به دلیل ثابت بودن تابع نرخ خطر آن، الگوی مناسبی برای بسیاری از پدیده‌های طول عمر نیست. لذا پژوهشگران درصدد برآمدن تا تعمیم‌هایی با انعطاف پذیری بالاتر از توزیع نمایی معرفی نمایند. توزیع پواسن-نمایی (کانچو و همکاران، ۲۰۱۱) را می‌توان به عنوان توزیع طول عمر یک سیستم موازی که تعداد مؤلفه‌های آن متغیر تصادفی است، در نظر گرفت. در این سیستم، طول عمرهای مؤلفه‌ها از یکدیگر مستقل بوده، طول عمر هر مؤلفه دارای توزیع نمایی و تعداد مؤلفه‌ها نیز دارای توزیع پواسن بریده شده در نقطه صفر است. فرض کنید  $Y$  دارای

توزیع پواسن-نمایی با پارامتر شکل  $\theta$  و پارامتر مقیاس  $\lambda$  و تابع چگالی احتمال

$$f(y) = \frac{\theta \lambda e^{-\lambda y - \theta e^{-\lambda y}}}{1 - e^{-\theta}}, \quad y > 0. \quad (1)$$

باشد، که به صورت  $Y \sim PE(\theta, \lambda)$  نشان داده می‌شود. وقتی  $\theta \rightarrow 0$  توزیع پواسن-نمایی به توزیع نمایی با پارامتر  $\lambda$  میل می‌کند. نمودار این توزیع به ازای  $0 < \theta \leq 1$  به طور یکنواخت نزولی و به ازای  $\theta > 1$  صعودی-نزولی است. همچنین، تابع توزیع تجمعی و تابع نرخ خطر توزیع پواسن-نمایی به ترتیب عبارتند از

$$F(y) = 1 - \frac{1 - e^{-\theta e^{-\lambda y}}}{1 - e^{-\theta}}, \quad y > 0, \quad \theta > 0, \quad \lambda > 0, \quad (2)$$

$$h(y) = \frac{\theta \lambda \exp(-\lambda y - \theta e^{-\lambda y})}{1 - \exp(-\theta e^{-\lambda y})}, \quad y > 0.$$

تابع نرخ خطر این توزیع صعودی است و برای الگوبندی داده‌هایی که در طول زمان فرسوده می‌شوند و پس از مدتی نرخ خرابی طول عمر مولفه‌ها حالتی پایدار پیدا می‌کند، می‌تواند به عنوان یک توزیع پیشنهادی مناسب به کار رود. **لوزادا-نتو و همکاران** (۲۰۱۱) مسأله استنباط بیزی برای این توزیع را با استفاده از توزیع پیشین ناآگاهی‌بخش برای پارامتر مقیاس مطالعه نمودند. در رابطه با سایر کارهای استنباطی برای این توزیع می‌توان به **تومازلا و همکاران** (۲۰۱۳)، **سینگ و همکاران** (۲۰۱۴، ۲۰۱۶) و **کومار و همکاران** (۲۰۱۶) اشاره نمود. همچنین، **عربی بلاغی و همکاران** (۲۰۱۹) مسأله برآوردیابی و پیش‌بینی را برای توزیع پواسن-نمایی بر اساس داده‌های سانسور شده نوع II را مورد تحقیق قرار دادند.

## ۲ برآوردیابی ماکسیمم درست‌نمایی پارامترها

فرض کنید  $R = (R_1, \dots, R_m)$  و  $K = (K_1, \dots, K_{m-1})$  به ترتیب آماره‌های رکوردی و آماره‌های زمان بین رکورد از توزیع  $PE(\theta, \lambda)$  باشند. همچنین، فرض کنید  $r = (r_1, \dots, r_m)$  و  $k = (k_1, \dots, k_{m-1})$  به ترتیب مجموعه‌های مشاهده شده  $R$  و  $K$  باشند، در این صورت، لگاریتم

۳۸۴ ..... برآوردیابی و پیش‌بینی برای توزیع پواسن-نمایی بر اساس رکوردها و زمان‌های بین رکورد

تابع درستنمایی برای پارامترها به شرط در اختیار داشتن  $k$  و  $r$  به صورت

$$\begin{aligned} \ell(\theta, \lambda | r, k) = & m(\ln \theta + \ln \lambda) - \ln(1 - e^{-\theta}) \sum_{i=1}^m k_i - \lambda \sum_{i=1}^m r_i - \theta \sum_{i=1}^m e^{-\lambda r_i} \\ & + \sum_{i=1}^m (k_i - 1) \ln(1 - e^{-\theta e^{-\lambda r_i}}), \end{aligned} \quad (3)$$

به‌دست می‌آید، که در آن  $r_1 > \dots > r_m$  (آرنولد و همکاران، ۱۹۹۸) و بنا به قرارداد  $k_m = 1$ . با مشتق‌گیری از (۳) نسبت به  $\theta$  و  $\lambda$  و برابر با صفر قرار دادن آن‌ها داریم

$$\begin{aligned} \frac{m}{\theta} - \frac{e^{-\theta}}{1 - e^{-\theta}} \sum_{i=1}^m k_i - \sum_{i=1}^m e^{-\lambda r_i} + \sum_{i=1}^m (k_i - 1) \frac{\xi(r_i, \theta, \lambda)}{\psi(r_i, \theta, \lambda)} &= 0, \\ \frac{m}{\lambda} - \sum_{i=1}^m r_i + \theta \sum_{i=1}^m r_i e^{-\lambda r_i} - \theta \sum_{i=1}^m (k_i - 1) \frac{r_i \xi(r_i, \theta, \lambda)}{\psi(r_i, \theta, \lambda)} &= 0, \end{aligned}$$

که در آن  $\xi(r_i, \theta, \lambda) = \exp(-\theta e^{-\lambda r_i} - \lambda r_i)$  و  $\psi(r_i, \theta, \lambda) = 1 - \exp(-\theta e^{-\lambda r_i})$ . برای برآوردیابی پارامترها این معادله‌ها با نرم افزار  $R$  (تیم هسته‌ای R، ۲۰۱۹) حل شده‌اند.

### ۳ برآوردیابی بیزی

برای برآوردیابی بیزی پارامترهای  $\theta$  و  $\lambda$  توزیع‌های پیشین گامای مستقل با تابع‌های چگالی احتمال  $\pi(\lambda) \propto \lambda^{c-1} e^{-d\lambda}$  و  $\pi(\theta) \propto \theta^{a-1} e^{-b\theta}$  در نظر گرفته می‌شوند، که در آن ابرپارامترهای  $a, b, c$  و  $d$  همگی مثبت هستند و مقادیر آن‌ها می‌تواند با توجه به اطلاعات پیشین درباره میانگین‌ها و واریانس‌های پارامترها انتخاب شوند. در این صورت تابع احتمال پسین توأم  $\theta$  و  $\lambda$  به صورت

$$\begin{aligned} \pi(\theta, \lambda | r, k) = & \frac{\theta^{a+m-1} \lambda^{m+c-1}}{C_0 (1 - e^{-\theta})^{\sum_{i=1}^m k_i}} \exp \left\{ -\theta \left( b + \sum_{i=1}^m e^{-\lambda r_i} \right) - \lambda \left( d + \sum_{i=1}^m r_i \right) \right\} \\ & \times \prod_{i=1}^m (1 - e^{-\theta e^{-\lambda r_i}})^{k_i-1}, \end{aligned} \quad (4)$$

به دست می‌آید که

$$C_0 = \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\theta^{a+m-1} \lambda^{m+c-1}}{(\lambda - e^{-\theta})^{\sum_{i=1}^m k_i}} \exp \left\{ -\theta \left( b + \sum_{i=1}^m e^{-\lambda r_i} \right) - \lambda \left( d + \sum_{i=1}^m r_i \right) \right\} \\ \times \prod_{i=1}^m (\lambda - e^{-\theta e^{-\lambda r_i}})^{k_i-1} d\theta d\lambda.$$

برای برآورد پارامترها از تابع زیان توان دوم خطا به صورت  $L_2(\delta, \hat{\delta}) = (\hat{\delta} - \delta)^2$  استفاده می‌شود، که در آن  $\hat{\delta}$  برآوردگر پارامتر  $\delta$  است. همچنین، از تابع زیان نامتقارن نمایی-خطی یا لاینکس به صورت  $L_2(\delta, \hat{\delta}) = b^*(e^{q(\hat{\delta}-\delta)} - q(\hat{\delta}-\delta) - 1)$  استفاده می‌شود (واریان، ۱۹۷۵). بدون از دست دادن کلیت مسأله می‌توان قرار داد  $b^* = 1$ . علامت و بزرگی  $q$  باید با دقت تعیین گردد. مقدارهای مثبت  $q$  موجب می‌شوند که بیش برآوردی جدی‌تر و زیان‌بارتر از کم‌برآوردی گردد و برعکس (زلنر، ۱۹۸۶). برآورد بیز پارامتر  $\delta$  تحت تابع زیان لاینکس به صورت  $\hat{\delta}_L = -\frac{1}{q} \ln E(e^{-q\delta} | data)$  به دست می‌آید. برآوردهای بیز  $\theta$  تحت تابع‌های زیان توان دوم خطا و لاینکس به شرط وجود به ترتیب عبارتند از

$$\hat{\theta}_S = E(\theta | \mathbf{r}, \mathbf{k}) = \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\theta^{a+m-1} \lambda^{m+c-1}}{C_0 (\lambda - e^{-\theta})^{\sum_{i=1}^m k_i}} e^{-\theta(b + \sum_{i=1}^m e^{-\lambda r_i}) - \lambda(d + \sum_{i=1}^m r_i)} \\ \times \prod_{i=1}^m (\lambda - e^{-\theta e^{-\lambda r_i}})^{k_i-1} d\theta d\lambda, \quad (5)$$

$$\hat{\theta}_L = -\frac{1}{q} \ln \left( E(e^{-q\theta} | \mathbf{r}, \mathbf{k}) \right) = -\frac{1}{q} \ln \left( \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\theta^{a+m-1} \lambda^{m+c-1}}{C_0 (\lambda - e^{-\theta})^{\sum_{i=1}^m k_i}} e^{-\theta(q(b + \sum_{i=1}^m e^{-\lambda r_i}) - \lambda(d + \sum_{i=1}^m r_i))} \right. \\ \left. \times \prod_{i=1}^m (\lambda - e^{-\theta e^{-\lambda r_i}})^{k_i-1} d\theta d\lambda \right). \quad (6)$$

به طور مشابه می‌توان روابط مربوط به برآوردهای بیز پارامتر  $\lambda$  را تحت توابع زیان توان دوم خطا و لاینکس (به شرط وجود) را بیان نمود. چون به نظر می‌رسد فرم بسته‌ای برای انتگرال‌های موجود در رابطه‌های (۵) و (۶) وجود ندارد، از روش نمونه‌گیری نقاط مهم و الگوریتم متروپولیس-هستینگز درون گیبز برای تقریب برآوردهای بیز استفاده می‌شود.

### ۳.۱ روش نمونه‌گیری نقاط مهم

تابع احتمال پسین توأم پارامترهای  $\theta$  و  $\lambda$  که در رابطه (۴) داده شده است، را می‌توان به صورت

$$\pi(\theta, \lambda | \mathbf{r}, \mathbf{k}) \propto g_1(\lambda | \mathbf{r}, \mathbf{k}) g_2(\theta | \lambda, \mathbf{r}, \mathbf{k}) h(\theta, \lambda, \mathbf{r}, \mathbf{k}),$$

بازنویسی کرد که در آن  $g_1(\lambda | \mathbf{r}, \mathbf{k})$  تابع چگالی توزیع گاما با پارامترهای  $m + c$  و  $d + \sum_{i=1}^m r_i$ ،  $g_2(\theta | \lambda, \mathbf{r}, \mathbf{k})$  تابع چگالی توزیع گاما با پارامترهای  $m + a$  و  $b + \sum_{i=1}^m e^{-\lambda r_i}$  است و

$$h(\theta, \lambda, \mathbf{r}, \mathbf{k}) = \frac{\Gamma(m+a)\Gamma(m+c)(d + \sum_{i=1}^m r_i)^{-m-c}}{C_0(b + \sum_{i=1}^m e^{-\lambda r_i})^{m+a}(1 - e^{-\theta})^{\sum_{i=1}^m k_i}} \prod_{i=1}^m (1 - e^{-\theta e^{-\lambda r_i}})^{k_i-1}.$$

**الگوریتم ۱.** (کامرون و تریودی، ۲۰۰۵) تقریب برآوردهای بیز توسط روش نمونه‌گیری نقاط مهم:

گام ۱- ابتدا  $\lambda_1$  را از توزیع گاما با پارامترهای  $m + c$  و  $d + \sum_{i=1}^m r_i$  تولید نمایید و سپس با در اختیار داشتن  $\lambda_1$ ،  $\theta_1$  را از توزیع گاما با پارامترهای  $m + a$  و  $b + \sum_{i=1}^m e^{-\lambda_1 r_i}$  تولید کنید.

گام ۲- گام ۱ را  $N$  بار تکرار نمایید تا نمونه  $\{(\lambda_1, \theta_1), \dots, (\lambda_N, \theta_N)\}$  به‌دست آید.

گام ۳- برآوردهای بیز تقریبی برای پارامترهای  $\theta$  و  $\lambda$  تحت تابع زیان توان دوم خطا به ترتیب به صورت  $\hat{\lambda}_{SIS} = \sum_{i=1}^N \lambda_i w_i$  و  $\hat{\theta}_{SIS} = \sum_{i=1}^N \theta_i w_i$  به‌دست می‌آیند. علاوه براین، برآوردهای بیز تقریبی  $\theta$  و  $\lambda$  تحت تابع زیان لاینکس به صورت

$$\hat{\theta}_{LIS} = -\frac{1}{q} \ln \left( \sum_{i=1}^N e^{-q\theta_i w_i} \right), \quad \hat{\lambda}_{LIS} = -\frac{1}{q} \ln \left( \sum_{i=1}^N e^{-q\lambda_i w_i} \right),$$

به‌دست می‌آیند، به طوری‌که  $w_j = \frac{h^*(\theta_j, \lambda_j, \mathbf{r}, \mathbf{k})}{\sum_{i=1}^N h^*(\theta_i, \lambda_i, \mathbf{r}, \mathbf{k})}$  برای  $j = 1, \dots, N$ ، که در آن

$$h^*(\theta, \lambda, \mathbf{r}, \mathbf{k}) = \frac{\prod_{i=1}^m (1 - e^{-\theta e^{-\lambda r_i}})^{k_i-1}}{(b + \sum_{i=1}^m e^{-\lambda r_i})^{m+a}(1 - e^{-\theta})^{\sum_{i=1}^m k_i}}.$$

**الگوریتم ۲.** (چن و شائو، ۱۹۹۹) الگوریتم یافتن بازه‌های باورپذیری بیزی:

گام ۱-  $\{\theta_j; j = 1, \dots, N\}$  را به صورت  $\theta_{(1)} < \dots < \theta_{(N)}$  مرتب کنید.

گام ۲- بازه‌های باورپذیری  $\%(1 - \alpha) ۱۰۰$  را به صورت

$$L_i(N) = (\tilde{\theta}^{(\frac{i}{N})}, \tilde{\theta}^{(\frac{i + [(1-\alpha)N]}{N})}), \quad i = 1, \dots, N - [(1 - \alpha)N]$$

محاسبه کنید، که در آن  $[\cdot]$  نماد جزء صحیح است و  $\tilde{\theta}^{(\gamma)} = \theta_{(i)}$  اگر  $\sum_{j=1}^i w_j < \gamma \leq \sum_{j=1}^i w_j$ . در نتیجه، کوتاه‌ترین بازه باورپذیری بیزی  $\%(1 - \alpha) ۱۰۰$  چن و شائو، بازه با کوچک‌ترین طول در بین تمام  $L_i$  ها است.

با همین روش می‌توان کوتاه‌ترین بازه باورپذیری بیزی  $\%(1 - \alpha) ۱۰۰$  را برای  $\lambda$  نیز یافت.

### ۳.۲ روش متروپولیس-هستینگز درون گیبز

تابع‌های احتمال پسین شرطی برای  $\theta$  و  $\lambda$  از رابطه (۴) به ترتیب عبارتند از

$$\pi(\theta|\lambda, \mathbf{r}, \mathbf{k}) \propto \frac{\theta^{a+m-1} e^{-\theta(b + \sum_{i=1}^m e^{-\lambda r_i})}}{(1 - e^{-\theta})^{\sum_{i=1}^m k_i}} \prod_{i=1}^m (1 - e^{-\theta e^{-\lambda r_i}})^{k_i-1},$$

$$\pi(\lambda|\theta, \mathbf{r}, \mathbf{k}) \propto \lambda^{c+m-1} e^{-\lambda(d + \sum_{i=1}^m r_i)} e^{-\theta \sum_{i=1}^m e^{-\lambda r_i}} \prod_{i=1}^m (1 - e^{-\theta e^{-\lambda r_i}})^{k_i-1}.$$

الگوریتم ۳. (شوچنکو، ۲۰۱۱) الگوریتم متروپولیس-هستینگز در تکرارهای گیبز:

گام ۱- برآوردهای ماکسیمم درستنمایی پارامترها را به عنوان مقدارهای اولیه در نظر بگیرید، یعنی  $(\hat{\theta}_{ML}, \hat{\lambda}_{ML}) = (\theta^{(0)}, \lambda^{(0)})$ . همچنین قرار دهید  $t = 1$ .

گام ۲- برای مقدارهای داده شده  $(\theta^{(t-1)}, \lambda^{(t-1)})$  مقدار  $\theta^*$  را از توزیع نرمال بریده شده مثبت  $P = \min\{\frac{\pi(\theta^*|\lambda^{(t-1)}, \mathbf{r}, \mathbf{k})}{\pi(\theta^{(t-1)}|\lambda^{(t-1)}, \mathbf{r}, \mathbf{k})} \frac{q_1(\theta^{(t-1)}|\theta^*)}{q_1(\theta^*|\theta^{(t-1)})}, 1\}$  تولید کنید. با احتمال  $N(\theta^{(t-1)}, \sigma_1^2) I_{\{\theta > 0\}}$  قرار دهید  $\theta^{(t)} = \theta^*$  که  $q_1(x|b)$  تابع چگالی احتمال توزیع نرمال بریده شده مثبت  $N(b, \sigma_1^2) I_{\{\theta > 0\}}$  است. در غیر این صورت قرار دهید  $\theta^{(t)} = \theta^{(t-1)}$ .

گام ۳- برای مقدارهای داده شده  $(\theta^{(t)}, \lambda^{(t-1)})$  مقدار  $\lambda^*$  را از توزیع نرمال بریده شده مثبت  $P = \min\{\frac{\pi(\lambda^*|\theta^{(t)}, \mathbf{r}, \mathbf{k})}{\pi(\lambda^{(t-1)}|\theta^{(t)}, \mathbf{r}, \mathbf{k})} \frac{q_2(\lambda^{(t-1)}|\lambda^*)}{q_2(\lambda^*|\lambda^{(t-1)})}, 1\}$  تولید کنید. با احتمال  $N(\lambda^{(t-1)}, \sigma_2^2) I_{\{\lambda > 0\}}$  قرار دهید  $\lambda^{(t)} = \lambda^*$  که  $q_2(x|b)$  تابع چگالی احتمال توزیع نرمال بریده شده مثبت  $N(b, \sigma_2^2) I_{\{\lambda > 0\}}$  است. در غیر این صورت قرار دهید  $\lambda^{(t)} = \lambda^{(t-1)}$ .

۳۸۸ ..... برآوردیابی و پیش‌بینی برای توزیع پواسن-نمایی بر اساس رکوردها و زمان‌های بین رکورد

گام ۴- مرحله‌های ۲ و ۳ را برای  $t = 1, \dots, T$  تکرار کنید. نمونه‌های تولید شده زنجیره مارکوف مونت کارلو<sup>۱</sup> (MCMC) برای  $\theta$  و  $\lambda$  به ترتیب به صورت  $\{\theta^{(M+1)}, \dots, \theta^{(T)}\}$  و  $\{\lambda^{(M+1)}, \dots, \lambda^{(T)}\}$  به دست می‌آیند که در آن  $M$  نقطه برش الگوریتم است.

اکنون با توجه به نمونه تولید شده  $\{(\theta^{(M+1)}, \lambda^{(M+1)}), \dots, (\theta^{(T)}, \lambda^{(T)})\}$  برآوردهای بیز تقریبی پارامترهای  $\theta$  و  $\lambda$  تحت تابع زیان توان دوم خطا به صورت

$$\tilde{\theta}_{SMHG} = \frac{1}{T-M} \sum_{i=M+1}^T \theta^{(i)}, \quad \tilde{\lambda}_{SMHG} = \frac{1}{T-M} \sum_{i=M+1}^T \lambda^{(i)},$$

به دست می‌آیند. همچنین برآوردهای بیز تقریبی پارامترها تحت تابع زیان لاینکس نیز عبارتند از

$$\tilde{\theta}_{LMHG} = -\frac{1}{q} \ln \left[ \frac{1}{T-M} \sum_{i=M+1}^T e^{-q\theta^{(i)}} \right], \quad \tilde{\lambda}_{LMHG} = -\frac{1}{q} \ln \left[ \frac{1}{T-M} \sum_{i=M+1}^T e^{-q\lambda^{(i)}} \right].$$

لازم به ذکر است که در الگوریتم ۳ پارامترهای  $\sigma_1^2$  و  $\sigma_2^2$  را می‌توان به ترتیب مقادیر واریانس‌های تقریبی برآوردهای ماکسیم درست‌نمایی آنها یعنی  $\hat{Var}(\hat{\lambda}_{ML})$  و  $\hat{Var}(\hat{\theta}_{ML})$  در نظر گرفت. علاوه بر این، به کمک نمونه  $\{(\theta^{(M+1)}, \lambda^{(M+1)}), \dots, (\theta^{(T)}, \lambda^{(T)})\}$  می‌توان کوتاه‌ترین بازه‌های باورپذیری به روش **چن و شائو (۱۹۹۹)** را به دست آورد. فرض کنید  $\theta_{(1)} \leq \dots \leq \theta_{(T-M)}$  نمونه مرتب شده  $\{\theta^{(q)}; q = M+1, \dots, T\}$  باشد. کوتاه‌ترین بازه باورپذیری بیزی  $100(1-\alpha)\%$  چن و شائو برای  $\theta$  به صورت  $(\theta_{(j)}, \theta_{(j+[(T-M)(1-\alpha)])})$  است، به طوری که  $j$  به صورت

$$\theta_{(j+[(T-M)(1-\alpha)])} - \theta_{(j)} = \min_{1 \leq i \leq K^*} \{\theta_{(i+[(T-M)(1-\alpha)])} - \theta_{(i)}\},$$

انتخاب می‌شود که در آن  $K^* = T - M - [(T-M)(1-\alpha)]$ . به طور مشابه می‌توان کوتاه‌ترین بازه باورپذیری بیزی  $100(1-\alpha)\%$  چن و شائو را برای پارامتر  $\lambda$  نیز به دست آورد.

<sup>1</sup>Markov chain Monte Carlo



#### ۴ پیش‌بینی بیزی

مسأله پیش‌بینی بیزی نقطه‌ای و فاصله‌ای برای رکورد پایین مشاهده نشده  $s$ -ام در آینده یعنی  $R_s$  که  $s > m$ ، بر اساس رکوردها  $\mathbf{R} = (R_1, \dots, R_m)$  و زمان‌های بین رکورد  $\mathbf{K} = (K_1, \dots, K_{m-1})$  مورد مطالعه قرار می‌گیرد. از (۱) و (۲)، تابع چگالی احتمال شرطی  $s$ -امین رکورد پایین مشاهده نشده  $Z = R_s$  به شرط در اختیار داشتن  $\mathbf{r}$  و  $\mathbf{k}$  عبارت است از (آرنولد و همکاران، ۱۹۹۸)

$$f_Z(z|\mathbf{r}, \mathbf{k}, \theta, \lambda) = \frac{f(z)[- \log F(z) + \log F(r_m)]^{s-m-1}}{\Gamma(s-m)F(r_m)} \quad (۷)$$

$$= \frac{\theta \lambda \exp\{-\lambda z - \theta e^{-\lambda z}\}}{\Gamma(s-m)(e^{-\theta e^{-\lambda r_m}} - e^{-\theta})} \left[ \log \left( \frac{e^{-\theta e^{-\lambda r_m}} - e^{-\theta}}{e^{-\theta e^{-\lambda z}} - e^{-\theta}} \right) \right]^{s-m-1},$$

که در آن  $z < r_m$ . با توجه به (۴) و (۷)، تابع چگالی پیش‌بین بیزی  $Z$  به شرط  $\mathbf{r}$  و  $\mathbf{k}$  عبارت است از

$$f_Z^*(z|\mathbf{r}, \mathbf{k}) = \int_0^\infty \int_0^\infty f_Z(z|\mathbf{r}, \mathbf{k}, \theta, \lambda) \pi(\theta, \lambda|\mathbf{r}, \mathbf{k}) d\theta d\lambda,$$

$$= \frac{1}{C \Gamma(s-m)} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda(z+d+\sum_{i=1}^m r_i) - \theta(e^{-\lambda z} + b + \sum_{i=1}^m e^{-\lambda r_i})}}{(1 - e^{-\theta})^{\sum_{i=1}^m k_i} (e^{-\theta e^{-\lambda r_m}} - e^{-\theta})}}{\times \theta^{m+a} \lambda^{m+c} \left[ \log \left( \frac{e^{-\theta e^{-\lambda r_m}} - e^{-\theta}}{e^{-\theta e^{-\lambda z}} - e^{-\theta}} \right) \right]^{s-m-1} \prod_{i=1}^m (1 - e^{-\theta e^{-\lambda r_i}})^{k_i-1}} d\theta d\lambda.$$

پیش‌بین‌های نقطه‌ای بیز  $Z$  تحت تابع‌های زیان توان دوم خطا و لاینکس به ترتیب به صورت  $\hat{Z}_{LEP} = -\frac{1}{q} \ln \left[ \int_0^{r_m} e^{-qz} f_Z^*(z|\mathbf{r}, \mathbf{k}) dz \right]$  و  $\hat{Z}_{SEP} = \int_0^{r_m} z f_Z^*(z|\mathbf{r}, \mathbf{k}) dz$  ارائه می‌شوند. فاصله پیش‌بینی بیزی  $100(1 - \alpha)\%$  برای  $Z$  به صورت  $(L, U)$  است، که در آن  $L$  و  $U$  می‌توانند با حل معادله‌های غیر خطی  $1 - \frac{\alpha}{4}$  و  $P(Z > L|\mathbf{r}, \mathbf{k}) = \int_L^{r_m} f_Z^*(z|\mathbf{r}, \mathbf{k}) dz = 1 - \frac{\alpha}{4}$  و  $P(Z > U|\mathbf{r}, \mathbf{k}) = \int_U^{r_m} f_Z^*(z|\mathbf{r}, \mathbf{k}) dz = \frac{\alpha}{4}$  به دست آیند. از آن‌جا که به نظر می‌رسد  $f_Z^*(z|\mathbf{r}, \mathbf{k})$  فرم بسته‌ای ندارد، پیش‌بین‌های نقطه‌ای و فاصله پیش‌بینی  $(L, U)$  نمی‌توانند به سادگی محاسبه شوند. لذا تابع  $f_Z^*(z|\mathbf{r}, \mathbf{k})$  به کمک نمونه‌های تولید شده از روش نمونه‌گیری نقاط مهم یا الگوریتم متروپولیس-هستینگز درون گیبز تقریب زده می‌شود.

## ۵ مطالعه شبیه‌سازی

در این بخش، یک مطالعه شبیه‌سازی به منظور مقایسه و بررسی عملکرد برآوردهای کلاسیک و بیزی و پیش‌بینی‌کننده‌های بیزی پیشنهاد شده در این مقاله ارائه می‌گردد. همچنین مقایسه نتایج عددی وقتی برآوردیابی و پیش‌بینی بر اساس رکوردها و زمان‌های بین رکورد صورت می‌پذیرد با وقتی برآوردیابی و پیش‌بینی بر اساس رکوردها بدون در نظر گرفتن زمان‌های بین رکورد است، نیز از اهداف این مطالعه شبیه‌سازی است. در این شبیه‌سازی دو ترکیب پارامتری  $(\theta, \lambda) = (3, 2), (5, 6)$  برای مقادیرهای واقعی پارامترها در نظر گرفته شده‌اند. تعداد رکوردهای پایین نیز  $m = 4, 5, 6, 7$  در نظر گرفته شده‌اند و رکورد  $s-m$  که  $s = m + 1$  است، پیش‌بینی می‌گردد. در راستای برآوردیابی و پیش‌بینی تحت تابع زیان لاینکس،  $q$  مقادیرهای  $0/5$  و  $-0/5$  اختیار می‌شوند. برای توزیع پیشین دو حالت در نظر گرفته شده‌اند: حالت I: توزیع‌های پیشین کم‌آگاهی‌بخش برای پارامترها به طوری که امید ریاضی‌های پیشین پارامترها با مقادیرهای واقعی متناظر برابر گردند و واریانس‌های پیشین برابر با  $10$  شوند. در این حالت برای ترکیب پارامتری  $(\theta, \lambda) = (3, 2)$  مقادیر  $a = 0/9, b = 0/3, c = 0/4, d = 0/2$  و برای ترکیب پارامتری  $(\theta, \lambda) = (5, 6)$  مقادیر  $a = 2/5, b = 0/5, c = 3/6, d = 0/6$  به دست می‌آیند.

حالت II: توزیع‌های پیشین آگاهی‌بخش برای پارامترها به طوری که امید ریاضی‌های پیشین پارامترها با مقادیرهای واقعی متناظر برابر گردند و واریانس‌های پیشین برابر با یک شوند. در این حالت برای ترکیب پارامتری  $(\theta, \lambda) = (3, 2)$  مقادیر  $a = 9, b = 3, c = 4, d = 2$  به دست می‌آیند و برای ترکیب پارامتری  $(\theta, \lambda) = (5, 6)$  مقادیر  $a = 25, b = 5, c = 36, d = 6$  به دست می‌آیند.

برای بررسی همگرایی زنجیره‌های مارکوف حاصل از الگوریتم متروپولیس-هستینگز درون گیز از آزمون گوک<sup>۱</sup> (گوک، ۱۹۹۲)، معیار تشخیص رافتری و لویس<sup>۲</sup> (رافتری و لویس، ۱۹۹۲، ۱۹۹۶) و معیار تشخیص همگرایی هیدلبرگر و ولج<sup>۳</sup> (هیدلبرگر و ولج، ۱۹۸۳) استفاده شد. لازم به ذکر است که هیدلبرگر و ولج (۱۹۸۳) کارهای هیدلبرگر و ولج (a۱۹۸۱)، هیدلبرگر و ولج (b۱۹۸۱)، اشروبن و همکاران (۱۹۸۰)، اشروبن (۱۹۸۲) و اشروبن و همکاران (۱۹۸۳) را ترکیب نموده‌اند. در برخی از تکرارهای شبیه‌سازی، برای آن‌که زنجیره‌های مارکوف تولید شده تحت سه معیار فوق مورد قبول قرار گیرند، از تنک‌سازی بهره گرفته شد. تعداد محدودی از تکرارهای بد در نظر گرفته نشدند که اکثر آن‌ها مربوط به تکرارهایی بودند که در آن‌ها واریانس‌های مجانبی محاسبه شده برآوردهای ماکسیمم درست‌نمایی پارامترها منفی گردید.

<sup>1</sup>Geweke's test

<sup>2</sup>Raftery and Lewis's diagnostic

<sup>3</sup>Heidelberger and Welch's convergence diagnostic

#### الگوریتم ۴. الگوریتم شبیه‌سازی:

گام ۱-  $m$  رکورد به همراه زمان‌های بین رکورد متناظر را از توزیع  $PE(\theta, \lambda)$  تولید نمایید.

گام ۲- برآوردهای ماکسیمم درست‌نمایی پارامترها، برآوردهای نقطه‌ای بیز تقریبی برای پارامترها و پیش‌بینی‌کننده‌های بیز تقریبی برای رکورد  $s$ -ام را تحت تابع زیان توان دوم خطا و لاینکس به کمک دو روش نمونه‌گیری نقاط مهم و متروپولیس-هستینگز درون گیبز، بر اساس رکوردهای پایین و زمان‌های بین رکورد و همچنین بر اساس رکوردهای پایین بدون در نظر گرفتن زمان‌های بین رکورد محاسبه نمایید.

گام ۳- بازه‌های باورپذیری ۹۵ درصد برای پارامترها و فاصله‌های پیش‌بینی بیزی تقریبی ۹۵ درصد برای رکورد  $s$ -ام را به کمک دو روش نمونه‌گیری نقاط مهم و متروپولیس-هستینگز درون گیبز، بر اساس رکوردهای پایین و زمان‌های بین رکورد و همچنین بر اساس رکوردهای پایین بدون در نظر گرفتن زمان‌های بین رکورد به دست آورید.

گام ۴- مرحله‌های ۱ تا ۳ را  $N^* = 2000$  تکرار نمایید. سپس ریسک‌های برآورد شده برآوردها و پیش‌بینی‌کننده‌های نقطه‌ای را تحت تابع زیان توان دوم خطا و تابع زیان لاینکس به دست آورید. همچنین احتمال‌های پوشش و متوسط‌های طول فاصله را برای بازه‌های باورپذیری و فاصله‌های پیش‌بینی بیابید.

ریسک برآوردشده<sup>۱</sup> (ER) برآوردها  $\hat{\theta}$  تحت توابع زیان توان دوم خطا و لاینکس به ترتیب به صورت

$$ER_S(\hat{\theta}) = \frac{1}{N^*} \sum_{i=1}^{N^*} (\hat{\theta}_i - \theta)^2,$$

$$ER_L(\hat{\theta}) = \frac{1}{N^*} \sum_{i=1}^{N^*} \left( e^{q(\hat{\theta}_i - \theta)} - q(\hat{\theta}_i - \theta) - 1 \right),$$

محاسبه می‌شوند، که در آن  $\hat{\theta}_i$  برآورد به دست آمده برای  $\theta$  در تکرار  $i$ -ام شبیه‌سازی است. به طور مشابه می‌توان  $ER$ ها را برای برآوردها  $\lambda$  و پیش‌بین نقطه‌ای  $R_s$  نیز محاسبه نمود.

نتایج عددی شبیه‌سازی برای برآوردها و نقطه‌ای در جدول‌های ۱ و ۲ ارائه شده‌اند. لازم به ذکر است که برای برآوردها ماکسیمم درست‌نمایی هر سه نوع ریسک برآورد شده یعنی  $ER_S$ ،  $ER_L$  با  $q = -0.5$  و  $ER_L$  با  $q = 0.5$  محاسبه شده‌اند، اما در رابطه با برآوردها بیز تقریبی تنها ریسک برآورد شده متناظر با زیان مربوطه محاسبه شده است، یعنی به طور مثال  $ER_S$  تنها برای برآوردها بیز تقریبی که تحت زیان توان دوم خطا به دست آمده‌اند، محاسبه گردید. نتایج عددی برای بازه‌های باورپذیری

<sup>1</sup>Estimated risk

۳۹۲ ..... برآوردیابی و پیش‌بینی برای توزیع پواسن-نمایی بر اساس رکوردها و زمان‌های بین رکورد

پارامترها در جدول‌های ۳ و ۴ ارائه شده‌اند. جدول‌های ۵ و ۶ در بردارنده نتایج به ترتیب برای پیش‌بین‌های بیز تقریبی و فاصله‌های پیش‌بینی  $R_s$  برای ترکیب پارامتری  $(\lambda, \theta) = (2, 3)$  هستند و جدول‌های ۷ و ۸ نیز نتایج را به ترتیب برای پیش‌بین‌های بیز تقریبی و فاصله‌های پیش‌بینی  $R_s$  برای ترکیب پارامتری  $(\lambda, \theta) = (6, 5)$  در بردارند.

در جدول‌های ۱ و ۲ ملاحظه می‌شود که  $ER$ های برآوردگرهای نقطه‌ای بیز تقریبی کمتر از  $ER$ های متناظر برآوردگرهای ماکسیمم درست‌نمایی است (فقط یک استثناء وجود دارد). همچنین،  $ER$ های برآوردگرهای بیز تحت توزیع پیشین I بیشتر از  $ER$ های متناظر برآوردگرهای بیز تحت توزیع پیشین II است (فقط یک استثناء وجود دارد). علاوه بر این با توجه به جدول‌های ۳ و ۴، بازه‌های باورپذیری تحت توزیع پیشین II به طور میانگین کوتاه‌تر از بازه‌های باورپذیری تحت توزیع پیشین I می‌باشند. متوسط طول بازه‌های باورپذیری در اکثر موارد نسبت به تعداد رکوردها نزولی است.

در جدول‌های ۱ و ۲ دیده می‌شود که در اکثر موارد تحت توزیع پیشین II برآوردگرهای نقطه‌ای بیز تقریبی به‌دست آمده توسط روش متروپولیس-هستینگز درون گیبز عملکرد بهتری نسبت به برآوردگرهای نقطه‌ای متناظر به‌دست آمده توسط روش نمونه‌گیری نقاط مهم دارند و این امر تحت توزیع پیشین I برای برآوردگرهای بیز که تحت زیان توان دوم خطا و لاینکس با  $q = 0.5$  به‌دست آمده‌اند، نیز در اکثر موارد صادق است. علاوه بر این با توجه به جدول‌های ۳ و ۴، بازه‌های باورپذیری تحت روش نمونه‌گیری نقاط مهم دارای متوسط طول کمتر (و تقریباً در نیمی از موارد دارای احتمال پوششی نزدیک‌تر به مقدار اسمی ۹۵ درصد) نسبت به بازه‌های باورپذیری متناظر تحت روش متروپولیس-هستینگز درون گیبز می‌باشند.

در جدول‌های ۵ و ۷ ملاحظه می‌شود که  $ER$ های پیش‌بینی‌کننده‌های تقریبی بیز تحت هر دو توزیع پیشین بسیار نزدیک به یکدیگر هستند. تحت زیان توان دوم خطا، پیش‌بینی‌کننده‌های بیز تقریبی به‌دست آمده توسط روش متروپولیس-هستینگز درون گیبز عملکرد بهتری نسبت به پیش‌بین‌های بیز به‌دست آمده توسط روش نمونه‌گیری نقاط مهم دارند. با توجه به جدول‌های ۶ و ۸، متوسط طول فاصله‌های پیش‌بینی تحت هر دو توزیع پیشین دارای مقدارهای بسیار نزدیک به یکدیگر می‌باشند. فاصله‌های پیش‌بینی تحت هر دو روش متروپولیس-هستینگز درون گیبز و نمونه‌گیری نقاط مهم رفتاری بسیار نزدیک به یکدیگر دارند.

در جدول‌های ۱ و ۲ ملاحظه می‌شود که در اکثر موارد، برآوردگرهای ماکسیمم درست‌نمایی و برآوردگرهای بیز تقریبی تحت توزیع پیشین I با در نظر گرفتن توأم رکوردها و زمان‌های بین رکورد دارای عملکرد بهتری نسبت به هنگامی که برآوردگرها بر اساس رکوردها بدون در نظر گرفتن زمان‌های بین رکورد به‌دست می‌آیند، می‌باشند اما این امر تحت توزیع پیشین II صادق نیست. لذا می‌توان نتیجه گرفت وقتی واریانس‌های

توزیع پیشین کاهش یابند یا به عبارتی دیگر از توزیع پیشین آگاهی بخش تر بهره گرفته شود، در نظر گرفتن زمان‌های بین رکورد در بهبود عملکرد برآوردگرهای نقطه‌ای بیز تأثیر خود را از دست می‌دهد. علاوه بر این از جدول‌های ۳ و ۴، مشاهده می‌شود که در تمامی موارد بازه‌های باورپذیری هنگامی که زمان‌های بین رکوردها دخالت داده می‌شوند، با توجه به معیار متوسط طول دارای عملکرد بهتری خواهند شد و در عین حال در اکثر موارد بازه‌های باورپذیری با توجه به معیار احتمال پوشش عملکردی نزدیک دارند. همچنین با توجه به جدول‌های ۸-۵، ملاحظه می‌شود که در نظر گرفتن زمان‌های بین رکورد تأثیر چندانی در عملکرد پیش‌بینی‌کننده‌های نقطه‌ای و فاصله‌های پیش‌بینی ندارد.

## ۶ مثال کاربردی

داده‌ها میزان کل بارندگی سالانه (برحسب اینچ) از سال ۱۹۸۸ تا ۲۰۰۷ است که در مرکز مدنی لس‌آنجلس<sup>۱</sup> ثبت شده و از طریق [www.laalamnac.com/weather/we08aa.php](http://www.laalamnac.com/weather/we08aa.php) قابل دسترس است. رکوردهای برخاسته از داده‌های ریزش باران مورد توجه محققان بوده است (آرنولد و همکاران، ۱۹۹۸). در رابطه با اهمیت، رکوردهای پایین می‌توان اشاره کرد که بارش اندک باران می‌تواند موجب خشکسالی شود و در این راستا شکسته شدن کمترین رکورد بارش باران می‌تواند مورد توجه قرار گرفته، اثرات آن مطالعه گردد. داده‌ها عبارتند از

۸/۰۸ ۷/۳۵ ۱۱/۴۷ ۲۱/۰۰ ۲۷/۳۶ ۸/۱۱ ۲۴/۳۵ ۱۲/۴۶ ۱۲/۴۰ ۳۱/۰۱  
۹/۰۹ ۱۱/۵۷ ۱۷/۹۴ ۴/۴۲ ۱۶/۴۹ ۹/۲۴ ۳۷/۲۵ ۱۳/۱۹ ۳/۲۱

با استفاده از آزمون کلموگروف-اسمیرنوف، مناسب بودن توزیع پواسن-نمایی با برآوردهای ماکسیمم درست‌نمایی محاسبه شده  $\hat{\theta} = 4/9836$  و  $\hat{\lambda} = 0/148$  برای داده‌ها مورد بررسی قرار گرفت و مقدار آماره آزمون  $p$ -مقدار متناظر با آن به ترتیب  $0/14219$  و  $0/7868$  به دست آمدند که نشان می‌دهد  $PE(\hat{\theta}, \hat{\lambda})$  به خوبی به این داده‌ها برازش می‌شود. همچنین نمودارهای TTT، احتمال-احتمال، تابع توزیع برازش داده شده در مقابل تابع توزیع تجربی و بافت‌نگار برای این داده‌ها در شکل ۱ نمایش داده شده‌اند که برازش مناسب توزیع پواسن-نمایی بر داده‌ها را تأیید می‌کنند. تقعر نمودار TTT نشان می‌دهد تابع نرخ خطر رفتاری صعودی دارد و از آن‌جا که یکی از ویژگی‌های توزیع پواسن-نمایی، صعودی بودن تابع نرخ خطر آن است، لذا این توزیع از این دیدگاه مناسب است (آرست، ۱۹۸۷). مقدارهای رکوردهای پایین مستخرج از داده‌ها و زمان‌های بین رکورد در جدول ۹ ارائه شده‌اند. از آن‌جا که اطلاعاتی راجع به پارامترها داده

<sup>1</sup>Los Angeles Civic Center

جدول ۰.۱  $ER$  های برآوردها بر اساس مقادیرهای رکورد پایین و زمان‌های بین رکورد (سطر اول) و رکوردهای پایین بدون زمان‌های بین رکورد (سطر دوم) برای  $(\theta, \lambda) = (3, 2)$ .

$m$	بیز (توزیع پیشین II)						بیز (توزیع پیشین I)						ماکسیم درستیابی					
	میزوبولیس-هسینگر			نیونگیزی نقاط مهم			میزوبولیس-هسینگر			نیونگیزی نقاط مهم			$ER_{LU}$			$ER_S$		
	$ER_{LU}$	$ERS$	$q = -\infty/\Delta$	$q = -\infty/\Delta$	$q = \infty/\Delta$	$q = \infty/\Delta$	$ER_{LU}$	$ERS$	$q = -\infty/\Delta$	$q = -\infty/\Delta$	$q = \infty/\Delta$	$q = \infty/\Delta$	$ER_{LU}$	$ERS$	$q = -\infty/\Delta$	$q = -\infty/\Delta$	$q = \infty/\Delta$	$q = \infty/\Delta$
$\infty/14$	$\infty/14$	$\infty/4$	$\infty/14$	$\infty/14$	$\infty/14$	$\infty/14$	$\infty/14$	$\infty/14$	$\infty/14$	$\infty/14$	$\infty/14$	$\infty/14$	$\infty/14$	$\infty/14$	$\infty/14$	$\infty/14$	$\infty/14$	$\infty/14$
$\infty/11$	$\infty/11$	$\infty/11$	$\infty/11$	$\infty/11$	$\infty/11$	$\infty/11$	$\infty/11$	$\infty/11$	$\infty/11$	$\infty/11$	$\infty/11$	$\infty/11$	$\infty/11$	$\infty/11$	$\infty/11$	$\infty/11$	$\infty/11$	$\infty/11$
$\infty/10$	$\infty/10$	$\infty/10$	$\infty/10$	$\infty/10$	$\infty/10$	$\infty/10$	$\infty/10$	$\infty/10$	$\infty/10$	$\infty/10$	$\infty/10$	$\infty/10$	$\infty/10$	$\infty/10$	$\infty/10$	$\infty/10$	$\infty/10$	$\infty/10$
$\infty/13$	$\infty/13$	$\infty/13$	$\infty/13$	$\infty/13$	$\infty/13$	$\infty/13$	$\infty/13$	$\infty/13$	$\infty/13$	$\infty/13$	$\infty/13$	$\infty/13$	$\infty/13$	$\infty/13$	$\infty/13$	$\infty/13$	$\infty/13$	$\infty/13$
$\infty/15$	$\infty/15$	$\infty/15$	$\infty/15$	$\infty/15$	$\infty/15$	$\infty/15$	$\infty/15$	$\infty/15$	$\infty/15$	$\infty/15$	$\infty/15$	$\infty/15$	$\infty/15$	$\infty/15$	$\infty/15$	$\infty/15$	$\infty/15$	$\infty/15$
$\infty/17$	$\infty/17$	$\infty/17$	$\infty/17$	$\infty/17$	$\infty/17$	$\infty/17$	$\infty/17$	$\infty/17$	$\infty/17$	$\infty/17$	$\infty/17$	$\infty/17$	$\infty/17$	$\infty/17$	$\infty/17$	$\infty/17$	$\infty/17$	$\infty/17$
$\infty/12$	$\infty/12$	$\infty/12$	$\infty/12$	$\infty/12$	$\infty/12$	$\infty/12$	$\infty/12$	$\infty/12$	$\infty/12$	$\infty/12$	$\infty/12$	$\infty/12$	$\infty/12$	$\infty/12$	$\infty/12$	$\infty/12$	$\infty/12$	$\infty/12$
$\infty/18$	$\infty/18$	$\infty/18$	$\infty/18$	$\infty/18$	$\infty/18$	$\infty/18$	$\infty/18$	$\infty/18$	$\infty/18$	$\infty/18$	$\infty/18$	$\infty/18$	$\infty/18$	$\infty/18$	$\infty/18$	$\infty/18$	$\infty/18$	$\infty/18$
$\infty/16$	$\infty/16$	$\infty/16$	$\infty/16$	$\infty/16$	$\infty/16$	$\infty/16$	$\infty/16$	$\infty/16$	$\infty/16$	$\infty/16$	$\infty/16$	$\infty/16$	$\infty/16$	$\infty/16$	$\infty/16$	$\infty/16$	$\infty/16$	$\infty/16$
$\infty/19$	$\infty/19$	$\infty/19$	$\infty/19$	$\infty/19$	$\infty/19$	$\infty/19$	$\infty/19$	$\infty/19$	$\infty/19$	$\infty/19$	$\infty/19$	$\infty/19$	$\infty/19$	$\infty/19$	$\infty/19$	$\infty/19$	$\infty/19$	$\infty/19$
$\infty/20$	$\infty/20$	$\infty/20$	$\infty/20$	$\infty/20$	$\infty/20$	$\infty/20$	$\infty/20$	$\infty/20$	$\infty/20$	$\infty/20$	$\infty/20$	$\infty/20$	$\infty/20$	$\infty/20$	$\infty/20$	$\infty/20$	$\infty/20$	$\infty/20$
$\infty/21$	$\infty/21$	$\infty/21$	$\infty/21$	$\infty/21$	$\infty/21$	$\infty/21$	$\infty/21$	$\infty/21$	$\infty/21$	$\infty/21$	$\infty/21$	$\infty/21$	$\infty/21$	$\infty/21$	$\infty/21$	$\infty/21$	$\infty/21$	$\infty/21$
$\infty/22$	$\infty/22$	$\infty/22$	$\infty/22$	$\infty/22$	$\infty/22$	$\infty/22$	$\infty/22$	$\infty/22$	$\infty/22$	$\infty/22$	$\infty/22$	$\infty/22$	$\infty/22$	$\infty/22$	$\infty/22$	$\infty/22$	$\infty/22$	$\infty/22$
$\infty/23$	$\infty/23$	$\infty/23$	$\infty/23$	$\infty/23$	$\infty/23$	$\infty/23$	$\infty/23$	$\infty/23$	$\infty/23$	$\infty/23$	$\infty/23$	$\infty/23$	$\infty/23$	$\infty/23$	$\infty/23$	$\infty/23$	$\infty/23$	$\infty/23$
$\infty/24$	$\infty/24$	$\infty/24$	$\infty/24$	$\infty/24$	$\infty/24$	$\infty/24$	$\infty/24$	$\infty/24$	$\infty/24$	$\infty/24$	$\infty/24$	$\infty/24$	$\infty/24$	$\infty/24$	$\infty/24$	$\infty/24$	$\infty/24$	$\infty/24$
$\infty/25$	$\infty/25$	$\infty/25$	$\infty/25$	$\infty/25$	$\infty/25$	$\infty/25$	$\infty/25$	$\infty/25$	$\infty/25$	$\infty/25$	$\infty/25$	$\infty/25$	$\infty/25$	$\infty/25$	$\infty/25$	$\infty/25$	$\infty/25$	$\infty/25$
$\infty/26$	$\infty/26$	$\infty/26$	$\infty/26$	$\infty/26$	$\infty/26$	$\infty/26$	$\infty/26$	$\infty/26$	$\infty/26$	$\infty/26$	$\infty/26$	$\infty/26$	$\infty/26$	$\infty/26$	$\infty/26$	$\infty/26$	$\infty/26$	$\infty/26$
$\infty/27$	$\infty/27$	$\infty/27$	$\infty/27$	$\infty/27$	$\infty/27$	$\infty/27$	$\infty/27$	$\infty/27$	$\infty/27$	$\infty/27$	$\infty/27$	$\infty/27$	$\infty/27$	$\infty/27$	$\infty/27$	$\infty/27$	$\infty/27$	$\infty/27$
$\infty/28$	$\infty/28$	$\infty/28$	$\infty/28$	$\infty/28$	$\infty/28$	$\infty/28$	$\infty/28$	$\infty/28$	$\infty/28$	$\infty/28$	$\infty/28$	$\infty/28$	$\infty/28$	$\infty/28$	$\infty/28$	$\infty/28$	$\infty/28$	$\infty/28$
$\infty/29$	$\infty/29$	$\infty/29$	$\infty/29$	$\infty/29$	$\infty/29$	$\infty/29$	$\infty/29$	$\infty/29$	$\infty/29$	$\infty/29$	$\infty/29$	$\infty/29$	$\infty/29$	$\infty/29$	$\infty/29$	$\infty/29$	$\infty/29$	$\infty/29$
$\infty/30$	$\infty/30$	$\infty/30$	$\infty/30$	$\infty/30$	$\infty/30$	$\infty/30$	$\infty/30$	$\infty/30$	$\infty/30$	$\infty/30$	$\infty/30$	$\infty/30$	$\infty/30$	$\infty/30$	$\infty/30$	$\infty/30$	$\infty/30$	$\infty/30$
$\infty/31$	$\infty/31$	$\infty/31$	$\infty/31$	$\infty/31$	$\infty/31$	$\infty/31$	$\infty/31$	$\infty/31$	$\infty/31$	$\infty/31$	$\infty/31$	$\infty/31$	$\infty/31$	$\infty/31$	$\infty/31$	$\infty/31$	$\infty/31$	$\infty/31$
$\infty/32$	$\infty/32$	$\infty/32$	$\infty/32$	$\infty/32$	$\infty/32$	$\infty/32$	$\infty/32$	$\infty/32$	$\infty/32$	$\infty/32$	$\infty/32$	$\infty/32$	$\infty/32$	$\infty/32$	$\infty/32$	$\infty/32$	$\infty/32$	$\infty/32$
$\infty/33$	$\infty/33$	$\infty/33$	$\infty/33$	$\infty/33$	$\infty/33$	$\infty/33$	$\infty/33$	$\infty/33$	$\infty/33$	$\infty/33$	$\infty/33$	$\infty/33$	$\infty/33$	$\infty/33$	$\infty/33$	$\infty/33$	$\infty/33$	$\infty/33$
$\infty/34$	$\infty/34$	$\infty/34$	$\infty/34$	$\infty/34$	$\infty/34$	$\infty/34$	$\infty/34$	$\infty/34$	$\infty/34$	$\infty/34$	$\infty/34$	$\infty/34$	$\infty/34$	$\infty/34$	$\infty/34$	$\infty/34$	$\infty/34$	$\infty/34$
$\infty/35$	$\infty/35$	$\infty/35$	$\infty/35$	$\infty/35$	$\infty/35$	$\infty/35$	$\infty/35$	$\infty/35$	$\infty/35$	$\infty/35$	$\infty/35$	$\infty/35$	$\infty/35$	$\infty/35$	$\infty/35$	$\infty/35$	$\infty/35$	$\infty/35$
$\infty/36$	$\infty/36$	$\infty/36$	$\infty/36$	$\infty/36$	$\infty/36$	$\infty/36$	$\infty/36$	$\infty/36$	$\infty/36$	$\infty/36$	$\infty/36$	$\infty/36$	$\infty/36$	$\infty/36$	$\infty/36$	$\infty/36$	$\infty/36$	$\infty/36$
$\infty/37$	$\infty/37$	$\infty/37$	$\infty/37$	$\infty/37$	$\infty/37$	$\infty/37$	$\infty/37$	$\infty/37$	$\infty/37$	$\infty/37$	$\infty/37$	$\infty/37$	$\infty/37$	$\infty/37$	$\infty/37$	$\infty/37$	$\infty/37$	$\infty/37$
$\infty/38$	$\infty/38$	$\infty/38$	$\infty/38$	$\infty/38$	$\infty/38$	$\infty/38$	$\infty/38$	$\infty/38$	$\infty/38$	$\infty/38$	$\infty/38$	$\infty/38$	$\infty/38$	$\infty/38$	$\infty/38$	$\infty/38$	$\infty/38$	$\infty/38$
$\infty/39$	$\infty/39$	$\infty/39$	$\infty/39$	$\infty/39$	$\infty/39$	$\infty/39$	$\infty/39$	$\infty/39$	$\infty/39$	$\infty/39$	$\infty/39$	$\infty/39$	$\infty/39$	$\infty/39$	$\infty/39$	$\infty/39$	$\infty/39$	$\infty/39$
$\infty/40$	$\infty/40$	$\infty/40$	$\infty/40$	$\infty/40$	$\infty/40$	$\infty/40$	$\infty/40$	$\infty/40$	$\infty/40$	$\infty/40$	$\infty/40$	$\infty/40$	$\infty/40$	$\infty/40$	$\infty/40$	$\infty/40$	$\infty/40$	$\infty/40$
$\infty/41$	$\infty/41$	$\infty/41$	$\infty/41$	$\infty/41$	$\infty/41$	$\infty/41$	$\infty/41$	$\infty/41$	$\infty/41$	$\infty/41$	$\infty/41$	$\infty/41$	$\infty/41$	$\infty/41$	$\infty/41$	$\infty/41$	$\infty/41$	$\infty/41$
$\infty/42$	$\infty/42$	$\infty/42$	$\infty/42$	$\infty/42$	$\infty/42$	$\infty/42$	$\infty/42$	$\infty/42$	$\infty/42$	$\infty/42$	$\infty/42$	$\infty/42$	$\infty/42$	$\infty/42$	$\infty/42$	$\infty/42$	$\infty/42$	$\infty/42$
$\infty/43$	$\infty/43$	$\infty/43$	$\infty/43$	$\infty/43$	$\infty/43$	$\infty/43$	$\infty/43$	$\infty/43$	$\infty/43$	$\infty/43$	$\infty/43$	$\infty/43$	$\infty/43$	$\infty/43$	$\infty/43$	$\infty/43$	$\infty/43$	$\infty/43$
$\infty/44$	$\infty/44$	$\infty/44$	$\infty/44$	$\infty/44$	$\infty/44$	$\infty/44$	$\infty/44$	$\infty/44$	$\infty/44$	$\infty/44$	$\infty/44$	$\infty/44$	$\infty/44$	$\infty/44$	$\infty/44$	$\infty/44$	$\infty/44$	$\infty/44$
$\infty/45$	$\infty/45$	$\infty/45$	$\infty/45$	$\infty/45$	$\infty/45$	$\infty/45$	$\infty/45$	$\infty/45$	$\infty/45$	$\infty/45$	$\infty/45$	$\infty/45$	$\infty/45$	$\infty/45$	$\infty/45$	$\infty/45$	$\infty/45$	$\infty/45$
$\infty/46$	$\infty/46$	$\infty/46$	$\infty/46$	$\infty/46$	$\infty/46$	$\infty/46$	$\infty/46$	$\infty/46$	$\infty/46$	$\infty/46$	$\infty/46$	$\infty/46$	$\infty/46$	$\infty/46$	$\infty/46$	$\infty/46$	$\infty/46$	$\infty/46$
$\infty/47$	$\infty/47$	$\infty/47$	$\infty/47$	$\infty/47$	$\infty/47$	$\infty/47$	$\infty/47$	$\infty/47$	$\infty/47$	$\infty/47$	$\infty/47$	$\infty/47$	$\infty/47$	$\infty/47$	$\infty/47$	$\infty/47$	$\infty/47$	$\infty/47$
$\infty/48$	$\infty/48$	$\infty/48$	$\infty/48$	$\infty/48$	$\infty/48$	$\infty/48$	$\infty/48$	$\infty/48$	$\infty/48$	$\infty/48$	$\infty/48$	$\infty/48$	$\infty/48$	$\infty/48$	$\infty/48$	$\infty/48$	$\infty/48$	$\infty/48$
$\infty/49$	$\infty/49$	$\infty/49$	$\infty/49$	$\infty/49$	$\infty/49$	$\infty/49$	$\infty/49$	$\infty/49$	$\infty/49$	$\infty/49$	$\infty/49$	$\infty/49$	$\infty/49$	$\infty/49$	$\infty/49$	$\infty/49$	$\infty/49$	$\infty/49$
$\infty/50$	$\infty/50$	$\infty/50$	$\infty/50$	$\infty/50$	$\infty/50$	$\infty/50$	$\infty/50$	$\infty/50$	$\infty/50$	$\infty/50$	$\infty/50$	$\infty/50$	$\infty/50$	$\infty/50$	$\infty/50$	$\infty/50$	$\infty/50$	$\infty/50$
$\infty/51$	$\infty/51$	$\infty/51$	$\infty/51$	$\infty/51$	$\infty/51$	$\infty/51$	$\infty/51$	$\infty/51$	$\infty/51$	$\infty/51$	$\infty/51$	$\infty/51$	$\infty/51$	$\infty/51$	$\infty/51$	$\infty/51$	$\infty/51$	$\infty/51$
$\infty/52$	$\infty/52$	$\infty/52$	$\infty/52$	$\infty/52$	$\infty/52$	$\infty/52$	$\infty/52$	$\infty/52$	$\infty/52$	$\infty/52$	$\infty/52</$							

جدول ۲. های برآوردگرها بر اساس مقادیرهای رکورد پایش و زمان‌های بین رکورد (سطر اول) و رکوردهای پایش بدون زمان‌های بین رکورد (سطر دوم) برای  $(\theta, \lambda) = (5, 6)$

تیز (توزیع پیشین (II)				تیز (توزیع پیشین (I)				مکسیم درستایی				m
متروپولیس-هسٹینگز		نمونگیری نقاط مهم		متروپولیس-هسٹینگز		نمونگیری نقاط مهم		ERL		ER <sub>S</sub>		
$q = \circ/\Delta$	$q = \circ/\Delta$	$q = \circ/\Delta$	$q = \circ/\Delta$	$q = \circ/\Delta$	$q = \circ/\Delta$	$q = \circ/\Delta$	$q = \circ/\Delta$	$q = \circ/\Delta$	$q = \circ/\Delta$	$q = \circ/\Delta$	$q = \circ/\Delta$	
$\circ/20$	$\circ/25$	$\circ/15$	$\circ/22$	$\circ/18$	$\circ/24$	$\circ/20$	$\circ/26$	$\circ/12$	$\circ/18$	$\circ/24$	$\circ/30$	
$\circ/12$	$> 1000$	$\circ/18$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	
$\circ/25$	$\circ/25$	$\circ/18$	$\circ/15$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	
$\circ/105$	$\circ/13$	$\circ/28$	$\circ/11$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	
$\circ/22$	$\circ/26$	$\circ/18$	$\circ/23$	$\circ/12$	$\circ/22$	$\circ/12$	$\circ/26$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	
$\circ/14$	$\circ/17$	$\circ/20$	$\circ/15$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	
$\circ/15$	$\circ/24$	$\circ/18$	$\circ/15$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	
$\circ/12$	$\circ/185$	$\circ/26$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	
$\circ/22$	$\circ/24$	$\circ/18$	$\circ/23$	$\circ/12$	$\circ/22$	$\circ/12$	$\circ/26$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	
$\circ/14$	$\circ/18$	$\circ/20$	$\circ/15$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	
$\circ/16$	$\circ/25$	$\circ/18$	$\circ/17$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	
$\circ/12$	$\circ/19$	$\circ/27$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	
$\circ/22$	$\circ/24$	$\circ/18$	$\circ/23$	$\circ/12$	$\circ/22$	$\circ/12$	$\circ/26$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	
$\circ/14$	$\circ/18$	$\circ/20$	$\circ/15$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	
$\circ/16$	$\circ/25$	$\circ/18$	$\circ/17$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	
$\circ/12$	$\circ/19$	$\circ/27$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	
$\circ/22$	$\circ/24$	$\circ/18$	$\circ/23$	$\circ/12$	$\circ/22$	$\circ/12$	$\circ/26$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	
$\circ/14$	$\circ/18$	$\circ/20$	$\circ/15$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	
$\circ/16$	$\circ/25$	$\circ/18$	$\circ/17$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	
$\circ/12$	$\circ/19$	$\circ/27$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	
$\circ/22$	$\circ/24$	$\circ/18$	$\circ/23$	$\circ/12$	$\circ/22$	$\circ/12$	$\circ/26$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	
$\circ/14$	$\circ/18$	$\circ/20$	$\circ/15$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	
$\circ/16$	$\circ/25$	$\circ/18$	$\circ/17$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	
$\circ/12$	$\circ/19$	$\circ/27$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	
$\circ/22$	$\circ/24$	$\circ/18$	$\circ/23$	$\circ/12$	$\circ/22$	$\circ/12$	$\circ/26$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	
$\circ/14$	$\circ/18$	$\circ/20$	$\circ/15$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	
$\circ/16$	$\circ/25$	$\circ/18$	$\circ/17$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	
$\circ/12$	$\circ/19$	$\circ/27$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	
$\circ/22$	$\circ/24$	$\circ/18$	$\circ/23$	$\circ/12$	$\circ/22$	$\circ/12$	$\circ/26$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	
$\circ/14$	$\circ/18$	$\circ/20$	$\circ/15$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	
$\circ/16$	$\circ/25$	$\circ/18$	$\circ/17$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	
$\circ/12$	$\circ/19$	$\circ/27$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	
$\circ/22$	$\circ/24$	$\circ/18$	$\circ/23$	$\circ/12$	$\circ/22$	$\circ/12$	$\circ/26$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	
$\circ/14$	$\circ/18$	$\circ/20$	$\circ/15$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	
$\circ/16$	$\circ/25$	$\circ/18$	$\circ/17$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	
$\circ/12$	$\circ/19$	$\circ/27$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	
$\circ/22$	$\circ/24$	$\circ/18$	$\circ/23$	$\circ/12$	$\circ/22$	$\circ/12$	$\circ/26$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	
$\circ/14$	$\circ/18$	$\circ/20$	$\circ/15$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	
$\circ/16$	$\circ/25$	$\circ/18$	$\circ/17$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	
$\circ/12$	$\circ/19$	$\circ/27$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	
$\circ/22$	$\circ/24$	$\circ/18$	$\circ/23$	$\circ/12$	$\circ/22$	$\circ/12$	$\circ/26$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	
$\circ/14$	$\circ/18$	$\circ/20$	$\circ/15$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	
$\circ/16$	$\circ/25$	$\circ/18$	$\circ/17$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	
$\circ/12$	$\circ/19$	$\circ/27$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	
$\circ/22$	$\circ/24$	$\circ/18$	$\circ/23$	$\circ/12$	$\circ/22$	$\circ/12$	$\circ/26$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	
$\circ/14$	$\circ/18$	$\circ/20$	$\circ/15$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	
$\circ/16$	$\circ/25$	$\circ/18$	$\circ/17$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	
$\circ/12$	$\circ/19$	$\circ/27$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	
$\circ/22$	$\circ/24$	$\circ/18$	$\circ/23$	$\circ/12$	$\circ/22$	$\circ/12$	$\circ/26$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	
$\circ/14$	$\circ/18$	$\circ/20$	$\circ/15$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	
$\circ/16$	$\circ/25$	$\circ/18$	$\circ/17$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	
$\circ/12$	$\circ/19$	$\circ/27$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	
$\circ/22$	$\circ/24$	$\circ/18$	$\circ/23$	$\circ/12$	$\circ/22$	$\circ/12$	$\circ/26$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	
$\circ/14$	$\circ/18$	$\circ/20$	$\circ/15$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	
$\circ/16$	$\circ/25$	$\circ/18$	$\circ/17$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	
$\circ/12$	$\circ/19$	$\circ/27$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	
$\circ/22$	$\circ/24$	$\circ/18$	$\circ/23$	$\circ/12$	$\circ/22$	$\circ/12$	$\circ/26$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	
$\circ/14$	$\circ/18$	$\circ/20$	$\circ/15$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	
$\circ/16$	$\circ/25$	$\circ/18$	$\circ/17$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	
$\circ/12$	$\circ/19$	$\circ/27$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	
$\circ/22$	$\circ/24$	$\circ/18$	$\circ/23$	$\circ/12$	$\circ/22$	$\circ/12$	$\circ/26$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	
$\circ/14$	$\circ/18$	$\circ/20$	$\circ/15$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	
$\circ/16$	$\circ/25$	$\circ/18$	$\circ/17$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	
$\circ/12$	$\circ/19$	$\circ/27$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	
$\circ/22$	$\circ/24$	$\circ/18$	$\circ/23$	$\circ/12$	$\circ/22$	$\circ/12$	$\circ/26$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	
$\circ/14$	$\circ/18$	$\circ/20$	$\circ/15$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	
$\circ/16$	$\circ/25$	$\circ/18$	$\circ/17$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	
$\circ/12$	$\circ/19$	$\circ/27$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	
$\circ/22$	$\circ/24$	$\circ/18$	$\circ/23$	$\circ/12$	$\circ/22$	$\circ/12$	$\circ/26$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	
$\circ/14$	$\circ/18$	$\circ/20$	$\circ/15$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	
$\circ/16$	$\circ/25$	$\circ/18$	$\circ/17$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	
$\circ/12$	$\circ/19$	$\circ/27$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	
$\circ/22$	$\circ/24$	$\circ/18$	$\circ/23$	$\circ/12$	$\circ/22$	$\circ/12$	$\circ/26$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	
$\circ/14$	$\circ/18$	$\circ/20$	$\circ/15$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	
$\circ/16$	$\circ/25$	$\circ/18$	$\circ/17$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	$\circ/12$	
$\circ/12$	$\circ/19$	$\circ/27$ </										

۳۹۶ ..... برآوردیابی و پیش‌بینی برای توزیع پواسن-نمایی بر اساس رکوردها و زمان‌های بین رکورد

جدول ۳. مقدارهای متوسط طول و احتمال پوشش (در داخل پرانتز) برای بازه‌های باورپذیری ۹۵ درصد پارامترها بر اساس مقدارهای رکورد پایین و زمان‌های بین رکورد (سطر اول) و رکوردهای پایین بدون زمان‌های بین رکورد (سطر دوم) برای  $(\theta, \lambda)$ .

$m$	$\theta$	بیز (توزیع پیشین I)		بیز (توزیع پیشین II)	
		نمونه گیری نقاط مهم	متروپولیس-هستینگر	نمونه گیری نقاط مهم	متروپولیس-هستینگر
۴	$\theta$	۶/۳۴۸(۰/۹۷۹)	۶/۷۱۳(۰/۹۸۷۵)	۳/۲۵۳(۱/۰۰۰)	۳/۲۸۵(۱/۰۰۰)
		۷/۰۲۱(۰/۹۸۸۵)	۷/۳۴۶(۰/۹۸۹۵)	۳/۵۵۸(۱/۰۰۰)	۳/۵۹۱(۱/۰۰۰)
		۴/۱۱۹(۰/۹۶۱۵)	۴/۳۸۵(۰/۹۷۲)	۲/۵۸۴(۰/۹۹۳)	۲/۶۰۵(۰/۹۹۲)
		۵/۹۴۳(۰/۹۶۳)	۶/۱۸۱(۰/۹۶۷)	۳/۱۱۵(۰/۹۹۲۵)	۳/۱۶۳(۰/۹۹۲)
۵	$\theta$	۵/۲۵۷(۰/۹۴۲)	۵/۹۶۵(۰/۹۸۱۵)	۳/۰۴۶(۰/۹۹۹۵)	۳/۱۳۴(۰/۹۹۹۵)
		۶/۱۶۱(۰/۹۷۲۵)	۷/۱۴۵(۰/۹۸۹)	۳/۰۷۲(۱/۰۰۰)	۳/۵۸۸(۱/۰۰۰)
		۳/۷۰۱(۰/۹۲۳۵)	۴/۲۴۵(۰/۹۶۲۵)	۲/۵۰۳(۰/۹۹۴)	۲/۵۶۲(۰/۹۹۳۵)
		۵/۸۳۷(۰/۹۳۷)	۶/۱۹۵(۰/۹۵۹۵)	۳/۰۵۰(۰/۹۸۹)	۳/۱۶۸(۰/۹۹۱۵)
۶	$\theta$	۴/۱۳۹(۰/۸۹۱۵)	۵/۱۹۰(۰/۹۵۶)	۲/۷۹۷(۰/۹۹۹)	۲/۹۷۷(۱/۰۰۰)
		۵/۱۳۸(۰/۹۵۵)	۶/۷۷۰(۰/۹۹۱۵)	۳/۱۷۹(۰/۹۹۹۵)	۳/۵۸۶(۱/۰۰۰)
		۳/۱۴۰(۰/۸۷۱۵)	۳/۹۰۵(۰/۹۵۳۵)	۲/۳۶۸(۰/۹۸۸)	۲/۴۸۳(۰/۹۹۲۵)
		۵/۲۶۶(۰/۹۰۴)	۵/۷۹۳(۰/۹۵۴۵)	۲/۹۱۸(۰/۹۸۹۵)	۳/۱۰۸(۰/۹۹۲)
۷	$\theta$	۳/۲۱۸(۰/۸۰۴۵)	۴/۷۶۰(۰/۹۴۲۵)	۲/۵۰۱(۰/۹۹۳)	۲/۸۲۳(۰/۹۹۹۵)
		۴/۳۰۷(۰/۹۰۶۵)	۶/۶۱۴(۰/۹۹۴۵)	۲/۸۸۹(۰/۹۹۸۵)	۳/۵۷۱(۱/۰۰۰)
		۲/۷۴۲(۰/۷۹۶)	۳/۹۶۰(۰/۹۴۴۵)	۲/۲۸۸(۰/۹۷۹۵)	۲/۵۱۶(۰/۹۸۹)
		۵/۲۳۶(۰/۸۵۸)	۵/۹۶۹(۰/۹۵۴)	۲/۸۵۴(۰/۹۸۷)	۳/۱۵۶(۰/۹۸۹)

جدول ۴. مقدارهای متوسط طول و احتمال پوشش (در داخل پرانتز) برای بازه‌های باورپذیری ۹۵ درصد پارامترها بر اساس مقدارهای رکورد پایین و زمان‌های بین رکورد (سطر اول) و رکوردهای پایین بدون زمان‌های بین رکورد (سطر دوم) برای  $(\theta, \lambda)$ .

$m$	$\theta$	بیز (توزیع پیشین I)		بیز (توزیع پیشین II)	
		نمونه گیری نقاط مهم	متروپولیس-هستینگر	نمونه گیری نقاط مهم	متروپولیس-هستینگر
۴	$\theta$	۷/۲۱۲(۰/۹۶۷)	۷/۶۴۱(۰/۹۸۶)	۳/۲۰۵۵(۰/۹۹۹)	۳/۲۳۷(۰/۹۹۸۵)
		۸/۳۱۱(۰/۹۷۰۵)	۹/۰۵۷(۰/۹۹۶۵)	۳/۶۴۴(۱/۰۰۰)	۳/۶۸۵(۱/۰۰۰)
		۷/۵۴۷(۰/۹۸۵۵)	۷/۹۷۷(۰/۹۹۳)	۳/۴۱۵(۰/۹۹۹)	۳/۴۳۴(۰/۹۹۹۵)
		۹/۱۸۳(۰/۹۹۵)	۹/۳۷۷(۰/۹۹۵)	۳/۶۸۶(۰/۹۹۹۵)	۳/۶۹۷(۰/۹۹۹۵)
۵	$\theta$	۵/۵۳۷(۰/۸۹۷)	۶/۴۵۵(۰/۹۸۴۵)	۲/۸۸۴(۰/۹۹۵)	۲/۹۸۲(۰/۹۹۷۵)
		۶/۸۷۴(۰/۹۱۳۵)	۸/۶۰۲(۰/۹۹۳)	۳/۴۵۸(۱/۰۰۰)	۳/۶۶۳(۱/۰۰۰)
		۶/۷۹۳(۰/۹۵۵۵)	۷/۷۸۲(۰/۹۹۰)	۳/۳۴۴(۰/۹۹۹)	۳/۳۹۸(۰/۹۹۹)
		۸/۸۹۰(۰/۹۸۵)	۹/۲۵۱(۰/۹۸۷)	۳/۶۳۶(۰/۹۹۹۵)	۳/۶۸۷(۰/۹۹۹۵)
۶	$\theta$	۴/۲۰۸(۰/۷۹۱)	۵/۵۶۷(۰/۹۸۱۵)	۲/۵۶۲(۰/۹۹۳)	۲/۷۵۹(۰/۹۹۸۵)
		۵/۶۷۱(۰/۸۱۲)	۸/۵۲۰(۰/۹۹۶)	۳/۱۵۱۵(۰/۹۹۷۵)	۳/۶۶۳(۱/۰۰۰)
		۵/۹۹۰(۰/۸۹۲)	۷/۶۱۲(۰/۹۷۹۵)	۳/۲۵۸(۰/۹۹۸۵)	۳/۳۸۷(۰/۹۹۹)
		۸/۵۶۴(۰/۹۸۰۵)	۹/۱۶۶(۰/۹۸۵۵)	۳/۵۸۰(۱/۰۰۰)	۳/۶۸۳(۱/۰۰۰)
۷	$\theta$	۲/۹۳۳(۰/۶۰۰)	۴/۷۱۷(۰/۹۷۷۵)	۲/۱۴۹(۰/۹۵۹)	۲/۵۳۴(۰/۹۹۸۵)
		۴/۶۳۰(۰/۶۴۸۵)	۸/۲۵۰(۰/۹۹۴)	۲/۷۲۸(۰/۹۶۹)	۳/۶۵۲(۱/۰۰۰)
		۴/۹۱۳(۰/۷۹۹)	۷/۴۱۱(۰/۹۸۲۵)	۳/۰۹۷(۰/۹۹۱۵)	۳/۳۸۴(۱/۰۰۰)
		۸/۲۹۳(۰/۹۸۰)	۹/۱۴۶(۰/۹۸۵۵)	۳/۴۶۱(۰/۹۹۸۵)	۳/۶۸۴(۱/۰۰۰)



جدول ۵. ER های پیش‌بین‌های بیزی  $R_s$  بر اساس مقادیرهای رکورد پایین و زمان‌های بین رکورد (سطر اول) و رکوردهای پایین بدون زمان‌های بین رکورد (سطر دوم) برای  $(\theta, \lambda) = (3, 2)$ .

متروپولیس-هستینگز			نمونه‌گیری نقاط مهم				m	توزیع پیشین
$ER_L$		$ER_S$	$ER_L$		$ER_S$			
$q = 0/5$	$q = -0/5$		$q = 0/5$	$q = -0/5$				
0/0004	0/0004	0/0033	0/0004	0/0004	0/0152	4	I	
0/0004	0/0004	0/0034	0/0004	0/0004	0/0152	4		
0/0002	0/0002	0/0014	0/0002	0/0002	0/0069	5		
0/0002	0/0002	0/0014	0/0002	0/0002	0/0069	5		
0/0001	0/0001	0/0006	0/0001	0/0001	0/0019	6		
0/0001	0/0001	0/0006	0/0001	0/0001	0/0019	6		
0/0000	0/0000	0/0002	0/0000	0/0000	0/0007	7		
0/0000	0/0000	0/0002	0/0000	0/0000	0/0007	7	II	
0/0004	0/0004	0/0031	0/0004	0/0004	0/0152	4		
0/0004	0/0004	0/0032	0/0004	0/0004	0/0152	4		
0/0002	0/0002	0/0013	0/0002	0/0002	0/0069	5		
0/0002	0/0002	0/0013	0/0002	0/0002	0/0069	5		
0/0001	0/0001	0/0005	0/0001	0/0001	0/0019	6		
0/0001	0/0001	0/0005	0/0001	0/0001	0/0019	6		
0/0000	0/0000	0/0002	0/0000	0/0000	0/0007	7		
0/0000	0/0000	0/0002	0/0000	0/0000	0/0007	7		

جدول ۶. مقادیرهای متوسط طول و احتمال پوشش (در داخل پرانتز) برای فاصله‌های پیش‌بینی ۹۵ درصد برای  $R_s$  بر اساس مقادیرهای رکورد پایین و زمان‌های بین رکورد (سطر اول) و رکوردهای پایین بدون زمان‌های بین رکورد (سطر دوم) به ازای  $(\theta, \lambda) = (3, 2)$ .

بیز (توزیع پیشین II)		بیز (توزیع پیشین I)		m
متروپولیس-هستینگز	نمونه‌گیری نقاط مهم	متروپولیس-هستینگز	نمونه‌گیری نقاط مهم	
0/122(0/9485)	0/122(0/9485)	0/122(0/948)	0/122(0/949)	4
0/122(0/9485)	0/122(0/9485)	0/122(0/9495)	0/122(0/949)	4
0/072(0/946)	0/072(0/946)	0/0715(0/9455)	0/071(0/945)	5
0/072(0/946)	0/072(0/946)	0/071(0/9475)	0/071(0/947)	5
0/037(0/954)	0/037(0/954)	0/037(0/9525)	0/037(0/9515)	6
0/037(0/954)	0/037(0/954)	0/037(0/951)	0/037(0/9515)	6
0/019(0/950)	0/019(0/950)	0/019(0/9495)	0/019(0/9495)	7
0/019(0/950)	0/019(0/950)	0/019(0/9495)	0/019(0/950)	7

نشده است، انتخاب واریانس بزرگ مثلاً ۱۰۰ برای توزیع‌های پیشین موجه به نظر می‌رسد. لذا مقادیر ابرپارامترها  $a = b = c = d = 0/1$  در نظر گرفته می‌شوند. برآوردهای پارامترها در جدول ۱۰ و بازه‌های باورپذیری بیزی ۹۵ درصد برای پارامترهای  $\theta$  و  $\lambda$  در جدول ۱۱ و مقادیرهای پیش‌بین‌های نقطه‌ای بیزی تقریبی نیز در جدول ۱۲ گزارش شده‌اند. بازه‌های پیش‌بین بیزی ۹۵ درصد برای پنج‌مین رکورد پایین با در نظر گرفتن زمان‌های بین رکورد بر اساس روش‌های نمونه‌گیری نقاط مهم و الگوریتم متروپولیس-هستینگز درون گیبز به ترتیب  $(0/154, 3/174)$  و  $(0/105, 3/163)$  به دست آمدند و بازه‌های پیش‌بین

۳۹۸ ..... برآوردیابی و پیش‌بینی برای توزیع پواسن-نمایی بر اساس رکوردها و زمان‌های بین رکورد

جدول ۷. ER های پیش‌بین‌های بیزی  $R_s$  بر اساس مقدارهای رکورد پایین و زمان‌های بین رکورد (سطر اول) و رکوردهای پایین بدون زمان‌های بین رکورد (سطر دوم) برای  $(\theta, \lambda) = (5, 6)$ .

متروپولیس-هستینگز			نمونه‌گیری نقاط مهم			m	توزیع پیشین
$ER_L$		$ER_S$	$ER_L$		$ER_S$		
$q = 0/\Delta$	$q = -0/\Delta$		$q = 0/\Delta$	$q = -0/\Delta$			
0/0001	0/0001	0/0007	0/0001	0/0001	0/0052	4	I
0/0001	0/0001	0/0008	0/0001	0/0001	0/0052	5	
0/0000	0/0000	0/0004	0/0000	0/0000	0/0023	6	
0/0000	0/0000	0/0004	0/0000	0/0000	0/0023	7	
0/0000	0/0000	0/0002	0/0000	0/0000	0/0012	4	
0/0000	0/0000	0/0002	0/0000	0/0000	0/0012	5	
0/0000	0/0000	0/0001	0/0000	0/0000	0/0006	6	
0/0000	0/0000	0/0001	0/0000	0/0000	0/0006	7	II
0/0001	0/0001	0/0007	0/0001	0/0001	0/0052	4	
0/0001	0/0001	0/0007	0/0001	0/0001	0/0052	5	
0/0000	0/0000	0/0003	0/0000	0/0000	0/0023	6	
0/0000	0/0000	0/0003	0/0000	0/0000	0/0023	7	
0/0000	0/0000	0/0002	0/0000	0/0000	0/0012	4	
0/0000	0/0000	0/0002	0/0000	0/0000	0/0012	5	
0/0000	0/0000	0/0001	0/0000	0/0000	0/0006	6	
0/0000	0/0000	0/0001	0/0000	0/0000	0/0006	7	

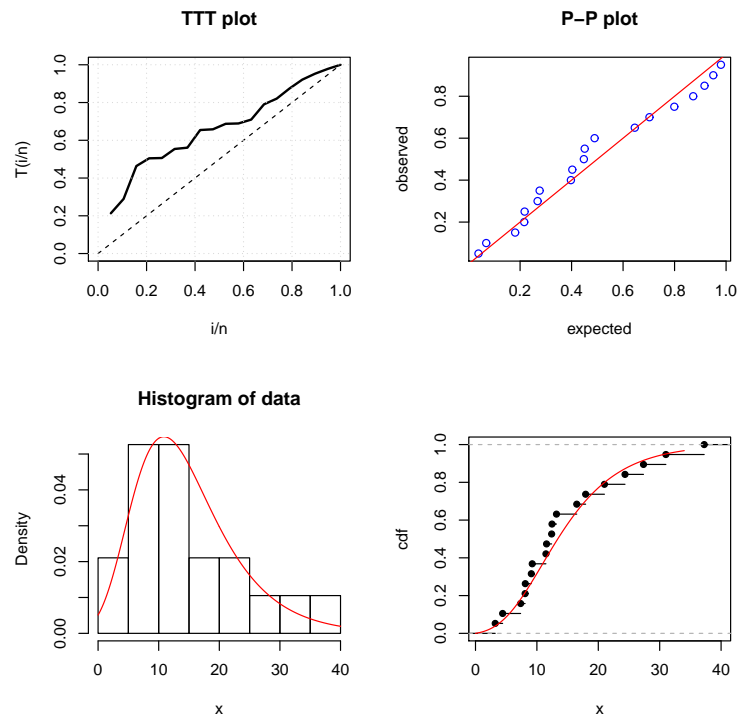
جدول ۸. مقدارهای متوسط طول و احتمال پوشش (در داخل پرانتز) برای فاصله‌های پیش‌بینی ۹۵ درصد برای  $R_s$  بر اساس مقدارهای رکورد پایین و زمان‌های بین رکورد (سطر اول) و رکوردهای پایین زمان‌های بین رکورد (سطر دوم) به ازای  $(\theta, \lambda) = (5, 6)$ .

m	بیز (توزیع پیشین I)		بیز (توزیع پیشین II)	
	نمونه‌گیری نقاط مهم	متروپولیس-هستینگز	نمونه‌گیری نقاط مهم	متروپولیس-هستینگز
4	0/072(0/950)	0/072(0/9495)	0/072(0/948)	0/072(0/948)
5	0/072(0/947)	0/072(0/949)	0/072(0/9485)	0/072(0/9485)
6	0/044(0/950)	0/044(0/950)	0/044(0/952)	0/044(0/952)
7	0/044(0/9505)	0/044(0/949)	0/044(0/952)	0/044(0/952)
8	0/029(0/952)	0/029(0/952)	0/029(0/954)	0/029(0/954)
9	0/028(0/9525)	0/028(0/951)	0/029(0/9545)	0/029(0/9545)
10	0/017(0/9565)	0/017(0/9575)	0/017(0/9575)	0/017(0/9575)
11	0/017(0/958)	0/017(0/9565)	0/017(0/9575)	0/017(0/9575)

جدول ۹. مقادیر رکورد و زمان‌های بین رکورد مستخرج از داده‌های مثال کاربردی.

i	1	2	3	4
$r_i$	8/08	7/35	4/42	3/21
$k_i$	1	12	5	1

بیزی ۹۵ درصد برای پنجمین رکورد پایین بر اساس رکوردها بدون در نظر گرفتن زمان‌های بین رکورد، به کمک روش نمونه‌گیری نقاط مهم و روش متروپولیس هستینگز درون گیبز به ترتیب  $(0/189, 3/180)$  و  $(0/141, 3/179)$  محاسبه شده‌اند.



شکل ۱. نمودارهای TTT، احتمال-احتمال، تابع توزیع برازش داده شده در مقابل تابع توزیع تجربی و بافت‌نگار داده‌ها هم‌زمان با تابع احتمال برازش داده شده.

جدول ۱۰. برآوردهای پارامترها در مثال کاربردی بر اساس مقدارهای رکورد پایین و زمان‌های بین رکورد (سطر اول) و رکوردهای پایین بدون زمان‌های بین رکورد (سطر دوم).

ماکسیم درست‌نمایی	بیز					
	متروپولیس-هستینگز			نمونه‌گیری نقاط مهم		
	لاینکس		توان دوم خطا	لاینکس		توان دوم خطا
	$q = 0/5$	$q = -0/5$		$q = 0/5$	$q = -0/5$	
$\theta$	۱/۰۱۶	۲۶/۴۲۲	۳/۲۹۰	۲/۷۶۳	۲۷/۰۱۸	۵/۸۰۹
	۱/۷۴۶	۴۳/۳۲۴	۶/۹۷۵	۲/۸۶۷	۲۲/۷۵۱	۷/۳۹۶
$\lambda$	۰/۱۰۱	۰/۱۰۷	۰/۱۰۴	۰/۱۵۸	۰/۱۶۴	۰/۱۶۱
	۰/۲۱۴	۰/۲۳۱	۰/۲۲۳	۰/۲۴۵	۰/۲۵۹	۰/۲۵۲
						۰/۳۹۱

## بحث و نتیجه‌گیری

مسائل استنباط آماری برای توزیع طول عمر پواسن-نمایی بر اساس رکوردهای پایین و زمان‌های بین رکورد مورد مطالعه قرار گرفت. برآوردیابی ماکسیم درست‌نمایی، برآوردیابی و پیش‌بینی نقطه‌ای و فاصله‌ای

۴۰۰ ..... برآوردیابی و پیش‌بینی برای توزیع پواسن-نمایی بر اساس رکوردها و زمان‌های بین رکورد

جدول ۱۱. بازه باورپذیری بیزی ۹۵ درصد برای پارامترها در مثال کاربردی بر اساس مقدارهای رکورد پایین و زمان‌های بین رکورد (سطر اول) و رکوردهای پایین بدون زمان‌های بین رکورد (سطر دوم).

نمونه‌گیری نقاط مهم		متروپولیس-هستینگز
$\theta$	(۰/۱۷۴, ۱۴/۷۶۹)	(۰/۰۰۰۰۸, ۱۴/۴۱۶)
	(۰/۱۰۷, ۲۱/۱۰۴)	(۰/۰۰۰۰۲, ۲۴/۵۷۹)
$\lambda$	(۰/۰۱۴, ۰/۳۷۳)	(۰/۰۰۰۵, ۰/۳۳۱)
	(۰/۰۰۰۸, ۰/۶۰۴)	(۰/۰۰۰۰۰۸, ۰/۵۷۸)

جدول ۱۲. پیش‌بینی نقطه‌ای بیزی تقریبی پنجمین رکورد آینده در مثال کاربردی بر اساس مقدارهای رکورد پایین و زمان‌های بین رکورد (سطر اول) و رکوردهای پایین بدون زمان‌های بین رکورد (سطر دوم).

نمونه‌گیری نقاط مهم			متروپولیس-هستینگز		
لاینکس		توان دوم خطا	لاینکس		توان دوم خطا
$q = ۰/۵$	$q = -۰/۵$		$q = ۰/۵$	$q = -۰/۵$	
۱/۷۸۸	۲/۱۹۲	۰/۰۰۰۴	۱/۵۸۹	۲/۰۲۵	۱/۸۱۶
۱/۹۱۵	۲/۲۹۷	۰/۰۰۰۴	۱/۸۰۱	۲/۲۲۵	۲/۰۳۱

بیزی به کمک دو روش متروپولیس-هستینگز درون گیز و نمونه‌گیری نقاط مهم تحت تابع زیان متقارن توان دوم خطا و تابع زیان نامتقارن لاینکس مطالعه گردید. در همین راستا، یک مطالعه شبیه‌سازی و یک مثال کاربردی نیز ارائه شدند. بر اساس نتایج شبیه‌سازی نتایج زیر حاصل شدند: الف) تأثیر بهبودبخشی به کارگرفتن زمان‌های بین رکورد علاوه بر رکوردها در برآوردیابی نقطه‌ای کلاسیک (ماکسیم درست‌نمایی) به طور واضح (در اکثر موارد) مشهود است، ب) در برآوردیابی نقطه‌ای بیزی وقتی از اطلاع پیشین کم آگاهی‌بخش بهره گرفته شد، نتایج عددی بر اساس رکوردها و زمان‌های بین رکورد در مقایسه با هنگامی که برآوردیابی تنها بر اساس رکوردهای پایین در نظر گرفته شد، در اکثر موارد بهبود یافتند با این حال، هنگامی که از توزیع‌های پیشین آگاهی بخش‌تر (توزیع پیشین با واریانس‌های کمتر) بهره گرفته شد، به کارگرفتن زمان‌های بین رکورد در بهبود عملکرد برآوردگرهای نقطه‌ای تأثیر خود را از دست داد. لذا در مجموع می‌توان گفت وقتی اطلاعات پیشین اندک باشد، به کارگرفتن زمان‌های بین رکورد تأثیر قابل تأملی بر بهبود عملکرد برآوردگرهای نقطه‌ای بیزی خواهد داشت، ج) در برآوردیابی فاصله‌ای بیزی، ملاحظه گردید که بازه‌های باورپذیری هنگامی که زمان‌های بین رکوردها دخالت داده می‌شوند، با توجه به معیار متوسط طول دارای عملکرد بهتری خواهند شد و در عین حال در اکثر موارد، با توجه به معیار احتمال پوشش عملکردی نزدیک دارند، د) در نظر گرفتن زمان‌های بین رکورد تأثیر چندانی در عملکرد

پیش‌بینی‌کننده‌های نقطه‌ای و فاصله‌های پیش‌بینی رکورد پایین آینده ندارد. از جمله موضوعات مورد توجه در این رابطه می‌توان به مطالعه اثربخشی به کار گرفتن زمان‌های بین رکورد علاوه بر رکوردها در سایر استنباط‌های آماری مانند آزمون فرضیه، برآوردیابی انقباضی، برآوردیابی پارامترهای دیگری مانند پارامتر تنش مقاومت بر اساس دو نمونه رکوردی و غیره اشاره نمود. همچنین، می‌توان مطالعه مسائل استنباطی را برای سایر توزیع‌های طول عمر به ویژه تعمیم‌های اخیر توزیع نمایی نیز به کار برد. برخی از موضوعات مطرح شده در حال بررسی است. در پایان لازم به ذکر است که تمامی محاسبات این مقاله به کمک نرم افزار آماری R (تیم هسته‌ای R، ۲۰۱۹) و بسته‌های نرم‌افزاری nlqslv (هیسلمن، ۲۰۱۸)، coda (پلامر و همکاران، ۲۰۰۶، ۲۰۱۸)، AdequacyModel (مارینهو و همکاران، ۲۰۱۶) و truncnorm (مرسمن و همکاران، ۲۰۱۸) و همچنین نرم‌افزار Maple ۲۰۱۶ انجام شده‌اند.

## تقدیر و تشکر

نویسندگان مقاله مراتب قدردانی و سپاس خود را از داوران محترم به خاطر نظرات سازنده و مفید ابراز می‌دارند. همچنین، از زحمات سردبیر محترم مجله و ویراستار گرامی نیز قدردانی می‌گردد.

## مراجع

سنجری فارسی‌پور، ن. و ریاحی، ه. (۱۳۹۲)، استنباط درست‌نمایی و بیزی مدل تنش نیرو بر اساس داده های رکوردی در خانواده های نرخ خطر متناسب و معکوس متناسب، مجله علوم آماری، ۷، ۲۳۲-۲۰۷.

Aarset, M. V. (1987), How to Identify a Bathtub Hazard Rate, *IEEE Transactions on Reliability*, **R-36**, 106-108.

Ahmadi, J. and Doostparast, M. (2006), Bayesian Estimation and Prediction for Some Life Distributions Based on Record Values, *Statistical Papers*, **47**, 373-392.

Arabi Belaghi, R., Noori Asl, M., Gurunlu Alma, O., Singh, S. and Vasfi, M. (2019), Estimation and Prediction for the Poisson-Exponential Distribu-

tion Based on Type-II Censored Data, *American Journal of Mathematical and Management Sciences*, **38**, 96-115.

Arnold, B. C., Balakrishnan, N. and Nagaraja, H. N. (1998), *Records*, John Wiley and Sons, New York.

Cameron, A. C. and Trivedi, P. K. (2005), *Microeconometrics Methods and Applications*, Cambridge University Press, Cambridge.

Cancho, V. G., Louzada-Neto, F. and Barriga, G. D. C. (2011), The Poisson-Exponential Lifetime Distribution, *Computational Statistics & Data Analysis*, **55**, 677-686.

Chen, M. H. and Shao, Q. M. (1999), Monte Carlo Estimation of Bayesian Credible and HPD Intervals, *Journal of Computational and Graphical Statistics*, **8**, 69-92.

Doostparast, M., Deepak, S. and Zangoie, A. (2013), Estimation with the Lognormal Distribution on the Basis of Records, *Journal of Statistical Computation and Simulation*, **83**, 2339-2351.

Feuerverger, A. and Hall, P. (1998), On Statistical Inference Based on Record Values, *Extremes*, **1**, 169-190.

Geweke, J. (1992), Evaluating the Accuracy of Sampling-Based Approaches to the Calculation of Posterior Moments, In Bayesian Statistics 4, (Eds J. M. Bernardo, J. O. Berger, A. P. Dawid and A. F. M. Smith), Clarendon Press, Oxford, UK, 169-193.

Hasselmann, B. (2018), nleqslv: Solve Systems of Nonlinear Equations, R package version 3.3.2, "<https://CRAN.R-project.org/package=nleqslv>".

- Heidelberger, P. and Welch, P. D. (1981a), A Spectral Method for Confidence Interval Generation and Run Length Control in Simulations, *Communications of the ACM*, **24**, 233-245.
- Heidelberger, P. and Welch, P. D. (1981b), Adaptive Spectral Methods for Simulation Output Analysis, *IBM Journal of Research and Development*, **25**, 860-876.
- Heidelberger, P. and Welch, P. D. (1983), Simulation Run Length Control in the Presence of an Initial Transient, *Operations Research*, **31**, 1109-1144.
- Kumar, M., Singh, S. K. and Singh, U. (2016), Reliability Estimation for Poisson-Exponential Model Under Progressive Type II Censoring Data with Binomial Removal Data, *Statistica*, **76**, 3-26.
- Louzada-Neto, F., Cancho, V. G. and Barriga, G. D. C. (2011), The Poisson-Exponential Distribution: A Bayesian Approach, *Journal of Applied Statistics*, **38**, 1239-1248.
- Marinho, P. R. D., Bourguignon M. and Dias, C. R. B. (2016), AdequacyModel: Adequacy of Probabilistic Models and General Purpose Optimization. R package version 2.0.0. "[https:// CRAN.R-project.org/package=AdequacyModel](https://CRAN.R-project.org/package=AdequacyModel)".
- Mersmann, O., Trautmann, H., Steuer, D. and Bornkamp, B. (2018), truncnorm: Truncated Normal Distribution, R package version 1.0-8, "[https://CRAN.R-project.org/package= truncnorm](https://CRAN.R-project.org/package=truncnorm)".
- Pak, A. and Dey, S. (2019), Statistical Inference for the Power Lindley Model Based on Record Values and Inter-Record Times, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **347**, 156-172.

Plummer, M., Best, N., Cowles, K. and Vines, K. (2006), CODA: Convergence Diagnosis and Output Analysis for MCMC, *R News*, **6**, 7-11.

Plummer, M., Best, N., Cowles, K., Vines, K., Sarkar, D., Bates, D., Almond, R. and Magnusson, A. (2018), coda: Output Analysis and Diagnostics for MCMC, R package version 0.19-2, "<https://CRAN.R-project.org/package=coda>".

R Core Team (2019), R: A Language and Environment for Statistical Computing. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria.

Raftery, A. E. and Lewis, S. M. (1992), Comment: One Long Run with Diagnostics: Implementation Strategies for Markov Chain Monte Carlo, *Statistical Science*, **7**, 493-497.

Raftery, A. E. and Lewis, S. M. (1996), Implementing MCMC, In Markov Chain Monte Carlo in Practice, (Eds W. R. Gilks, S. Richardson and D. J. Spiegelhalter), Chapman and Hall/CRC, Boca, 115-130.

Samaniego, F. J. and Whitaker, L. R. (1986), On Estimating Population Characteristics from Record-Breaking Observations. I. Parametric Results, *Naval Research Logistics*, **33**, 531-543.

Schruben, L. W. (1982), Detecting Initialization Bias in Simulation Output, *Operations Research*, **30**, 569-590.

Schruben, L., Singh, H. and Tierney, L. (1980), A Test of Initialization Bias Hypotheses in Simulation Output, Technical Report 471, School of Operations Research and Industrial Engineering, Cornell University, Ithaca, New York.



- Schruben, L., Singh, H. and Tierney, L. (1983), Optimal Tests for Initialization Bias in Simulation Output, *Operations Research*, **31**, 1167-1178.
- Shevchenko, P. V. (2011), *Modelling Operational Risk Using Bayesian Inference*, Springer-Verlag, Berlin.
- Singh, S., Tripathi, Y. M. and Wu, S. J. (2017), Bayesian Estimation and Prediction Based on Lognormal Record Values, *Journal of Applied Statistics*, **44**, 916-940.
- Singh, S. K., Singh, U. and Kumar, M. (2014), Estimation for the Parameter of Poisson-Exponential Distribution Under Bayesian Paradigm, *Journal of Data Science*, **12**, 157-173.
- Singh, S. K., Singh, U. and Kumar, M. (2016), Bayesian Estimation for Poisson-exponential Model under Progressive Type-II Censoring Data with Binomial Removal and Its Application to Ovarian Cancer Data, *Communications in Statistics- Simulation and Computation*, **45**, 3457-3475.
- Tomazella, V. L. D., Cancho, V. G. and Louzada, F. (2013), Bayesian Reference Analysis for the Poisson Exponential Lifetime Distribution, *Chilean Journal of Statistics*, **4**, 99-113.
- Varian, H. R. (1975), A Bayesian Approach to Real Estate Assessment, In *Studies in Bayesian Econometrics and Statistics in Honor of Leonard J. Savage*, (Eds S. E. Fienberg and A. Zellner), North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 195-208.
- Zellner, A. (1986), Bayesian Estimation and Prediction Using Asymmetric Loss Functions, *Journal of the American Statistical Association*, **81**, 446-451.

Journal of Statistical Sciences, Autumn and Winter, 2021  
Vol. 15, No. 2, pp 381-405  
DOI: 10.29252/jss.15.2.381

## **Estimation and Prediction for the Poisson-Exponential Distribution Based on Records and Inter-Record Times: A Comparative Study**

Bastan, F., MirMostafaei, S. M. T. K.

Department of Statistics, University of Mazandaran, Babolsar, Iran.

**Abstract:** In this paper, estimation and prediction for the Poisson-exponential distribution are studied based on lower records and inter-record times. The estimation is performed with the help of maximum likelihood and Bayesian methods based on two symmetric and asymmetric loss functions. As it seems that the integrals of the Bayes estimates do not possess closed forms, the Metropolis-Hastings within Gibbs and importance sampling methods are applied to approximating these integrals. Moreover, the Bayesian prediction of future records is also investigated. A simulation study and an application example are presented to evaluate and show the applicability of the paper's results and also to compare the numerical results when the inference is based on records and inter-record times with those when the inference is based on records alone.

**Keywords:** Metropolis-Hastings within Gibbs algorithm, Lower record statistics, Inter-record times, Monte Carlo simulation, Importance sampling.

**Mathematics Subject Classification (2010):** 62F15, 65C60, 60G25.