مجله علوم آماری، پاییز و زمستان ۱۳۹۹
جلد ۱۴، شماره ۲، ص ۴۷۱ – ۴۸۶
DOI: 10.29252/jss.14.2.471

استنباط ضریب همبستگی مشترک براساس مفهوم توزیع اطمینان

محمدرضا کاظمی

بخش آمار، دانشکده علوم، دانشگاه فسا

تاریخ دریافت: ۱۳۹۸/۰۷/۱۰ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۸/۱۲/۲۹

چکیده: در این مقاله، مسئله بدست آوردن بازه اطمینان برای ضریب همبستگی مشترک از چندین جامعه نرمال دومتغیره مستقل مورد بررسی قرار می‌گیرد. برای این کار از مفهوم توزیع اطمینان استفاده شده است. در مطالعات شبیه‌سازی و با در نظر گرفتن دو معیار احتمال پوشش و طول بازه مورد انتظار، روش پیشنهادی با روش متغیر تعمیم‌یافته مقایسه می‌شود. نتایج مطالعات شبیه‌سازی نشان می‌دهند که احتمال پوشش روش پیشنهادی در تمام وضعیت‌ها نزدیک به سطح اسمی است و همچنین طول بازه اطمینان مربوط به آن در اغلب موارد از طول بازه اطمینان ایجاد شده توسط روش متغیر تعمیم‌یافته کمتر است. در نهایت دو مثال واقعی برای بکارگیری این روش ارائه می‌گردد.

واژه‌های کلیدی: تبدیل Z–فیشر، توزیع اطمینان، متغیر تعمیم‌یافته، بازه اطمینان، احتمال پوشش.

۱ مقدمه

ارتباط خطی بین دو متغیر معمولاً با ضریب همبستگی اندازه‌گیری می‌شود و یک معیار شناخته‌شده از ارتباط خطی بین دو متغیر تصادفی ضریب همبستگی پیرسون است. از ضریب همبستگی پیرسون زمانی استفاده می‌شود که هر دو متغیر کمی پیوسته باشند و با مقیاس‌های بازه‌ای یا نسبتی اندازه‌گیری شده باشند و همچنین باید یک ارتباط خطی بین دو متغیر برقرار باشد. برآورد و استنباط آماری این پارامتر نقش بسیار مهمی

آدرس الکترونیکی نویسنده مسئول مقاله: محمدرضا کاظمی، kazemi@fasau.ac.ir
کد موضوع‌بندی ریاضی (۲۰۱۰): 62F40, 62F99 62H20.

در تحلیل رفتار متقابل متغیرها در علوم مختلف ایفا می‌کنند. فرض کنید $(X_1, Y_1), \ldots, (X_n, Y_n)$ نمونه‌ای تصادفی از یک جامعه دومتغیره باشد. ضریب همبستگی نمونه‌ای پیرسون به صورت

$$R = \frac{\sum_{\ell=1}^{n} (X_\ell - \overline{X})(Y_\ell - \overline{Y})}{\sqrt{\sum_{\ell=1}^{n} (X_\ell - \overline{X})^2 \sum_{\ell=1}^{n} (Y_\ell - \overline{Y})^2}}. \tag{1}$$

است. فیشر (۱۹۱۵) تابع چگالی ضریب همبستگی نمونه‌ای از یک جامعه نرمال دومتغیره را بدست آورد که برای استنباط در مورد ضریب همبستگی ρ از یک جامعه نرمال دو متغیره مورد استفاده قرار می‌گرفت. به علت پیچیدگی‌هایی که در یافتن بازه اطمینان برای ρ توسط این تابع چگالی وجود داشت، فیشر (۱۹۲۱) بر اساس یک نمونه تصادفی n تایی تبدیل Z–فیشر را به صورت

$$Z = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+R}{1-R}\right) = \tanh^{-1}(R)\ , \tag{2}$$

معرفی کرد و نشان داد Z دارای توزیع مجانبی نرمال با میانگین $\tanh^{-1}(\rho)$ و واریانس $\frac{1}{n-3}$ است. در این زمینه می‌توان به پژوهش‌های سان و وانگ (۲۰۰۷) و کریشنامورسی و ژیا (۲۰۰۷) نیز اشاره کرد. اهمیت بررسی ضرایب همبستگی از چند جامعه دومتغیره، توجه بسیاری را به خود جلب کرده است. به عنوان مثال، تیشلر و دونر (۱۹۷۷) رابطه بین فشار خون دیاستولیک و وزن در دو گروه مردان و زنان، میال و اولدهام (۱۹۵۱) ارتباط بین فشار خون دیاستولیک و سیستولیک گروهی از دختران در رده‌های سنی ۶–۸ ، ۹–۱۱ و ۱۲–۱۴ و همچنین بیلکر و همکاران (۲۰۰۴) همبستگی بین نمره حافظه کلامی و برتری جانبی جریان خون در دو ناحیه پیشانی و زیرقشری در دو گروه مردان و زنان را مورد بررسی قرار دادند. برای اولین بار، پیرسون (۱۹۳۳) مسئله برابری چندین ضریب همبستگی را در نظر گرفت. سپس، دیوید (۱۹۳۸) آزمونی مبتنی بر تبدیل Z–فیشر برای این مسئله ارائه کرد. مطالعات دیگر در این زمینه را کرامر (۱۹۷۹) و پل (۱۹۸۹) انجام داده‌اند. وقتی فرض برابری ضرایب همبستگی چند جامعه دومتغیره قابل پذیرش باشد، پژوهش‌گران علاقه‌مند به بررسی ضریب همبستگی مشترک هستند که موضوع مورد بحث این مقاله است.

به طور مثال در برخی مسائل پزشکی، همبستگی بین فشار خون دیاستولیک و وزن در گروههای سنی مختلف مورد بررسی قرار می‌گیرد، به علت این که عامل سن به هر دو متغیر فشار خون دیاستولیک و وزن مرتبط است. اگر برابری ضرایب همبستگی بین فشار خون دیاستولیک و وزن در این سه گروه سنی

پذیرفته شود، پژوهش‌گر علاقه‌مند است در مورد ضریب همبستگی مشترک این سه گروه سنی استنباط انجام دهد. در حالت کل اگر، (X_{ij}, Y_{ij})، k، $i = ۱, \ldots, k$، $j = ۱, \ldots, n_i$ نمونه‌های تصادفی از k جامعه مستقل باشند، به طوری که میانگین‌ها و واریانس‌های این جامعه‌ها نابرابر باشند ولی همگی دارای ضریب همبستگی برابر باشند، آن‌گاه با اطلاعات بدست آمده از این k جامعه که دارای خصیصه‌های متفاوتی هستند، به طریق شایسته‌تری استنباط آماری ضریب همبستگی مشترک مورد بررسی قرار می‌گیرد. گرچه تحقیقات زیادی برای استنباط در مورد برابری ضرایب همبستگی از چندین جامعه مستقل صورت گرفته‌اند ولی تحقیقات صورت گرفته در مورد ضریب همبستگی مشترک از چندین جامعه مستقل بسیار کم هستند. دونر و روزنر (۱۹۸۰) و پل (۱۹۸۸) مسئله برآوردیابی ضریب همبستگی مشترک را مورد بحث قرار دادند. تیان و ویلدینگ (۲۰۰۸) برای استنباط این پارامتر، یک روش تقریبی و دو روش بر اساس مفهوم متغیر تعمیم‌یافته برای تشکیل بازه‌های اطمینان ارائه کردند.

در این مقاله، یک روش بر اساس مفهوم توزیع اطمینان ارائه و از آن برای بدست آوردن بازه اطمینان برای ضریب همبستگی مشترک استفاده می‌شود. روش توزیع اطمینان توسط تعدادی از پژوهش‌گران در برخی از مسئله‌های استنباط آماری استفاده شده است که در همه آن‌ها نتایج مطلوبی بدست آمده‌اند. برای نمونه، لیو و همکاران (۲۰۱۵) برای استنباط در مورد پارامتر میانگین مشترک از چند جامعه گاوسی وارون [1] و لیو و خو (۲۰۱۵) برای بدست آوردن بازه اطمینان برای ضریب همبستگی مشترک از چند جامعه نرمال از روش توزیع اطمینان استفاده کردند. در بخش ۲ روش متغیر تعمیم‌یافته ارائه شده توسط تیان و ویلدینگ (۲۰۰۸) مرور می‌شود و روش توزیع اطمینان برای بدست آوردن بازه اطمینان برای ضریب همبستگی مشترک ارائه خواهد شد. در بخش ۳ با استفاده از مطالعات شبیه‌سازی، روش‌های ارائه شده برای تشکیل بازه اطمینان برای ضریب همبستگی مشترک مورد مقایسه قرار می‌گیرند. در بخش ۴ دو مثال واقعی ارائه و در نهایت به بحث و نتیجه‌گیری پرداخته می‌شود.

۲ استنباط ضریب همبستگی مشترک

فرض کنید (X_{ij}, Y_{ij})، k، $i = ۱, \ldots, k$، $j = ۱, \ldots, n_i$، k نمونه تصادفی مستقل از توزیع نرمال دو متغیره با میانگین (μ_{xi}, μ_{yi})، انحراف معیار $(\sigma_{xi}, \sigma_{yi})$ و ضریت همبستگی مشترک ρ باشند. برآورد

[1] Inverse Gaussian

ماکسیمم درستنمایی پارامتر ρ بر اساس i امین نمونه تصادفی به صورت

$$R_i = \frac{\sum_{j=1}^{n_i}(X_{ij}-\overline{X}_i)(Y_{ij}-\overline{Y}_i)}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n_i}(X_{ij}-\overline{X}_i)^2\sum_{j=1}^{n_i}(Y_{ij}-\overline{Y}_i)^2}},\ i=1,\ldots,k. \qquad (۳)$$

است. تبدیل Z-فیشر ضریب همبستگی بصورت $Z_i = \frac{1}{2}\log(\frac{1+R_i}{1-R_i}) = \tanh^{-1}(R_i)$ است و دونر و روزنر (۱۹۸۰) نشان دادند برآوردگر

$$R_F = \frac{\exp(2\overline{Z})-1}{\exp(2\overline{Z})+1} = \tanh(\overline{Z}), \qquad (۴)$$

که در آن $\overline{Z} = \frac{\sum_{i=1}^{k}(n_i-3)Z_i}{\sum_{i=1}^{k}(n_i-3)}$، بهترین برآوردگر برای ضریب همبستگی مشترک ρ بر اساس اطلاعات تمام نمونه‌های تصادفی است. برای بدست آوردن بازه اطمینان برای ρ بر اساس اطلاعات جمع‌آوری شده از این k نمونه تصادفی مستقل دو روش ارائه می‌شود؛ یکی بر اساس مفهوم متغیرهای تعمیم‌یافته (تیان و ویلدینگ ، ۲۰۰۸) و روش دیگر بر اساس مفهوم توزیع‌های اطمینان است که در ادامه تشریح می‌شوند. همچنین در این بخش، آزمون استقلال مشترک با از روش CD و سایر روش‌های موجود بیان می‌شود.

۲.۱ روش متغیرهای تعمیم‌یافته

تیان و ویلدینگ (۲۰۰۸) سه روش برای تشکیل بازه اطمینان برای ρ ارائه کردند؛ یکی بر اساس نمونه‌های بزرگ و دوتای دیگر بر اساس استفاده از مفهوم متغیرهای تعمیم‌یافته [1] (GV). آنها با مطالعات شبیه‌سازی نشان دادند که یکی از روش‌های مبتنی بر مفهوم GV (ویراهاندی ، ۱۹۹۳) که بر اساس تبدیل Z- فیشر بدست می‌آید از لحاظ احتمال پوشش، نسبت به آن دو تای دیگر کارایی بهتری دارد. در اینجا به اختصار این روش توضیح داده می‌شود. فرض کنید $\boldsymbol{X} = (X_1,\ldots,X_n)$ یک نمونه تصادفی از یک توزیع که به پارامترهای (θ,ϑ) بستگی دارد، باشد بطوریکه θ پارامتر مورد علاقه و ϑ بردار پارامترهای مزاحم باشد.

تعریف ۱. کمیت $R(X;x,\theta,\vartheta)$، که در آن x تحققی از متغیر X است، یک کمیت محوری تعمیم‌یافته نامیده می‌شود هرگاه توزیع $R(X;x,\theta,\vartheta)$ به پارامترهای مجهول بستگی نداشته باشد و مقدار $R(X;x,\theta,\vartheta)$

[1] Generalized Variable

به ازای $X=x$ برابر با θ باشد.

مثال ۱. یک نمونه تصادفی n تایی از توزیع نرمال با میانگین μ و واریانس $\sigma^۲$ در نظر بگیرید. اگر $\bar{x}$ و $s^۲$ به ترتیب مقدارهای مشاهده‌شده $\bar{X}$ و $S^۲$ باشند و عکس ضریب تغییرات به صورت $\psi=\mu/\sigma$ تعریف شود، آن گاه می‌توان نشان داد کمیت

$$\begin{aligned} R_\psi &= \frac{\bar{x}}{s}\frac{S}{\sigma}-\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma} &(۵)\\ &= \frac{\bar{x}}{s}\sqrt{\frac{M}{n-۱}}-\frac{N}{\sqrt{n}}, &(۶)\end{aligned}$$

که در آن متغیرهای تصادفی M و N به ترتیب دارای توزیع‌های $\chi^۲_{(n-۱)}$ و $N(۰,۱)$ هستند، یک کمیت محوری تعمیم‌یافته برای پارامتر ψ است، زیرا مقدار R_ψ به ازای $\bar{X}=\bar{x}$ و $S^۲=s^۲$ در (۵) برابر ψ است و با استفاده از (۶)، توزیع R_ψ به پارامتر مجهولی بستگی ندارد. همانند استدلال بالا، می‌توان نشان داد $R_\psi^{-۱}$ یک کمیت محوری تعمیم‌یافته برای خود ضریب تغییرات یعنی σ/μ است .

اگر R_α چندک ۱۰۰αام $R(X;x,\theta,\vartheta)$ باشد، آنگاه یک بازه اطمینان $۱-\alpha$ درصد تعمیم‌یافته برای θ عبارت است از $(R_{\alpha/۲},R_{۱-\alpha/۲})$. برای اطلاعات بیشتر در مورد روش GV می‌توانید به ویراهاندی (۱۹۹۵) و ویراهاندی و برگر (۱۹۹۹) رجوع کنید. تیان و ویلدینگ (۲۰۰۸) با استفاده از مفهوم بالا یک بازه اطمینان تعمیم‌یافته برای ρ ارائه کردند. یک GV بر اساس iامین نمونه برای تبدیل Z-فیشر $Z_\rho=\frac{۱}{۲}\log(\frac{۱+\rho}{۱-\rho})$ به صورت

$$R^i_{z_\rho}=\frac{۱}{۲}\log(\frac{۱+R^i_\rho}{۱-R^i_\rho})\ , \qquad (۷)$$

ارائه می‌شود، که در آن

$$R^i_\rho=\frac{R^*_iV-N}{\sqrt{(R^*_iV-N)^۲+W^۲}},\quad R^*_i=\frac{R_i}{\sqrt{۱-R^۲_i}}, \qquad (۸)$$

و V، W و N متغیرهای تصادفی مستقل هستند که به ترتیب دارای توزیع $\chi^۲_{(n_i-۲)}$، $\chi^۲_{(n_i-۱)}$ و

$N(0,1)$ هستند. آنگاه یک GV برای Z_ρ براساس تمام k نمونه تصادفی به صورت

$$R_{Z_\rho} = \frac{\sum_{i=1}^{k} \pi_i R^i_{Z_\rho}}{\sum_{i=1}^{k} \pi_i}, \tag{9}$$

است، که در آن $\pi_i = (n_i - 3)$. آنگاه یک GV برای پارامتر مورد علاقه ρ به صورت

$$R_\rho = \frac{\exp(2R_{Z_\rho}) - 1}{\exp(2R_{Z_\rho}) + 1} \tag{10}$$

است. با الگوریتم زیر می‌توان یک بازه اطمینان GV برای ρ بدست آورد.

الگوریتم ۱. GV
گام ۱- مقدار R_i^* را از رابطه (۸) محاسبه شود.
گام ۲- مقادیر تصادفی مستقل V، W و N به ترتیب از توزیع‌های $\chi^2_{(n-1)}$، $\chi^2_{(n-2)}$ و $N(0,1)$ تولید شوند و مقدار $R^i_{Z_\rho}$ از رابطه (۷) محاسبه شود.
گام ۳- مقدار R_{Z_ρ} از رابطه (۹) محاسبه و سپس R_ρ از رابطه (۱۰)، بدست آورده شود.
گام ۴- با تکرار ۵۰۰۰ بار گام‌های ۲ و ۳ یک آرایه از R_ρ تولید شود.
گام ۵- R_ρ ها را رتبه‌بندی شود.
گام ۶- اگر $R_\rho(\alpha)$ چندک α ام R_ρ باشد، آنگاه $(R_\rho(\frac{\alpha}{2}), R_\rho(1-\frac{\alpha}{2}))$ یک بازه اطمینان $1-\alpha$ درصد تعمیم‌یافته برای پارامتر ρ خواهد بود.

۲.۲ روش توزیع اطمینان

در اینجا از روش توزیع اطمینان [1] (CD) برای استنباط در مورد ضریب همبستگی مشترک استفاده می‌شود. شودر و ژورت (۲۰۰۲) و سینگ و همکاران (۲۰۰۵) مفهوم CD را بازنویسی کردند که به صورت «تفسیر نیمن از توزیع امین فیشر» بیان می‌شود.

تعریف ۲. فرض کنید χ فضای نمونه مربوط به نمونه تصادفی $\boldsymbol{X}_n = (X_1, \ldots, X_n)$، θ پارامتر توزیع F و Θ فضای پارامتری باشد. تابع $H(\boldsymbol{X}_n, .) : \chi \times \Theta \longrightarrow [0,1]$ یک CD برای θ است هرگاه:

[1] Confidence Distribution

الف) برای $\boldsymbol{X}_n \in \chi$ داده شده، $H(\boldsymbol{X}_n, .)$ یک تابع پیوسته باشد.
ب) برای مقدار واقعی $\theta = \theta_\circ$، $H(\theta_\circ) = H(\boldsymbol{X}_n, \theta_\circ)$ دارای توزیع یکنواخت $U(\circ, ۱)$ باشد.

مثال ۲. فرض کنید $X_۱, \ldots, X_n$ نمونه‌ای تصادفی از توزیع نرمال $N(\mu, \sigma)$ باشد و توابع

$$H_\Phi(\mu) = \Phi(\frac{\sqrt{n}(\mu - \bar{X})}{\sigma}), \quad H_t(\mu) = F_{t_{(n-۱)}}(\frac{\sqrt{n}(\mu - \bar{X})}{S}),$$

را در نظر بگیرید، که در آن S انحراف معیار نمونه‌ای، $F_{t_{(n-۱)}}$ تابع توزیع تی با $(n-۱)$ درجه آزادی و Φ تابع توزیع نرمال استاندارد هستند. اگر $\mu_\circ$ پارامتر واقعی مدل باشد، آن‌گاه می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} H_\Phi(\mu_\circ) &= \Phi(\frac{\sqrt{n}(\mu_\circ - \bar{X})}{\sigma}) = ۱ - \Phi(\frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu_\circ)}{\sigma}) \\ &= ۱ - \Phi(Z^\star) \sim ۱ - \mathrm{U}(\circ, ۱) \sim \mathrm{U}(\circ, ۱), \end{aligned}$$

که در آن متغیر تصادفی $Z^\star$ دارای توزیع نرمال استاندارد است. بنابراین تابع H_Φ در شرایط تعریف ۲ صدق می‌کند، پس وقتی σ معلوم باشد، یک تابع CD برای پارامتر μ است. به طریق مشابه می‌توان نشان داد H_t نیز یک تابع CD است.

قضیه ۱. فرض کنید $(X_{i۱}, Y_{i۱}), \ldots, (X_{in_i}, Y_{in_i})$ نمونه‌ای تصادفی از توزیع نرمال دو متغیره با میانگین (μ_{xi}, μ_{yi})، انحراف معیار $(\sigma_{xi}, \sigma_{yi})$ و پارامتر همبستگی مشترک ρ و N_i متغیر تصادفی با توزیع نرمال استاندارد و مستقل از نمونه تصادفی باشد، آنگاه

$$H_i(\rho) = P(\tanh(\tanh^{-۱}(R_i) - \frac{N_i}{\sqrt{n_i - ۳}}) \ > \rho)$$

یک CD برای ρ است، که در آن R_i ضریب همبستگی نمونه‌ای (۳) و $\tanh$ و $\tanh^{-۱}$ به ترتیب توابع تانژانت هایپربولیک و تانژانت هایپربولیک معکوس هستند.

برهان: فیشر (۱۹۲۱) نشان داد

$$\sqrt{n_i - ۳}(\tanh^{-۱}(R_i) - \tanh^{-۱}(\rho)) \xrightarrow{\mathcal{D}} Z \sim N(\circ, ۱).$$

برای مقدار واقعی $\rho=\rho_۰$، می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} H_i(\rho_۰) &= P(\tanh(\tanh^{-۱}(R_i) - \frac{N_i}{\sqrt{n_i - ۳}}) > \rho_۰) \\ &= P(\tanh^{-۱}(R_i) - \frac{N_i}{\sqrt{n_i - ۳}} > \tanh^{-۱}(\rho_۰)) \\ &= P(\sqrt{n_i - ۳}(\tanh^{-۱}(R_i) - \tanh^{-۱}(\rho_۰)) > N_i) \\ &= ۱ - P(N(۰,۱) \leq N_i) \sim ۱ - \mathrm{U}(۰,۱) \sim \mathrm{U}(۰,۱). \end{aligned}$$

حال با ترکیب کردن توابع CD ارائه‌شده در قضیه ۱ برای ضریب همبستگی مشترک ρ، یک بازه اطمینان برای این پارامتر می‌توان بدست آورد. فرض کنید $H_۱(y), \ldots, H_k(y)$، k تابع CD مستقل با پارامتر واقعی مشترک $\theta_۰$ باشند. تابع پیوسته $g_c(u_۱, \ldots, u_k)$ از $[۰,۱]^k$ به $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ که در هر مولفه یکنوا باشد را در نظر بگیرید. سینگ و همکاران (۲۰۰۵) پیشنهاد کردند که می‌توان k تابع CD مستقل اولیه را به صورت

$$H_c(y) = G_c(g_c(H_۱(y), \ldots, H_k(y))), \quad (۱۱)$$

با هم ترکیب کرد، که در آن تابع G_c به صورت

$$G_c(t) = P(g_c(U_۱, \ldots, U_k) \leq t) \quad (۱۲)$$

تعریف می‌شود، طوری که $U_۱, \ldots, U_k$ نمونه‌ای تصادفی از توزیع $U(۰,۱)$ است. وقتی k تابع CD اولیه دارای پارامتر مشترک θ باشند، تابع H_c در (۱۱) خود یک تابع CD است (سینگ و همکاران ، ۲۰۰۵)، که می‌توان از آن برای استنباط θ استفاده کرد. در واقع تابع H_c تمام اطلاعات موجود در هر یک از k تابع CD اولیه مستقل را در خود دارد و به همین علت به آن تابع CD ترکیبی گویند. اگر $F_۰$ یک تابع توزیع پیوسته دلخواه و $F_۰^{-۱}$ تابع معکوس آن باشد، آن گاه می‌توان تابع g_c را از طریق

$$g_c(u_۱, \ldots, u_k) = F_۰^{-۱}(u_۱) + \ldots + F_۰^{-۱}(u_k).$$

بدست آورد، که در این حالت، تابع $G_c(\cdot)$ به صورت $G_c(\cdot) = F_۰ * \ldots * F_۰(\cdot)$ است، که در آن $*$

نماد پیچش است. با قرار دادن توابع توزیع متفاوت به جای $F_{\circ}$ می‌توان توابع CD ترکیبی تولید نمود. به عنوان نمونه اگر $F_{\circ}(t) = \Phi(x)$، آنگاه تابع CD ترکیبی H_c به صورت

$$H_N(\rho) = \Phi(\frac{1}{\sqrt{k}} \sum_{i=1}^{k} \Phi^{-1}(H_i(\rho))). \quad (۱۳)$$

حاصل می‌شود و اگر $F_{\circ}(t) = \exp(t)$، آنگاه تابع CD ترکیبی H_c به صورت

$$H_E(\rho) = P(\chi^2_{(2k)} \geq -2 \sum_{i=1}^{k} \log(H_i(\rho))). \quad (۱۴)$$

است (سینگ و همکاران ، ۲۰۰۵). اگر $h_{\alpha}^{-1}(R_1, \ldots, R_k)$ چندک α ام از توزیع اطمینان ترکیبی ارائه شده در (۱۳) و (۱۴) باشد، آن گاه

$$[h^{-1}_{\alpha/2}(R_1, \ldots, R_k), h^{-1}_{1-\alpha/2}(R_1, \ldots, R_k)] \quad (۱۵)$$

یک بازه اطمینان $1-\alpha$ درصد برای پارامتر ρ خواهد بود. در ادامه بازه‌های اطمینان بدست آمده از توابع CD ترکیبی در فرمول‌های (۱۳) و (۱۴) به ترتیب با CDN و CDE نمایش داده می‌شوند.

۲.۳ آزمون استقلال مشترک

در آزمون استقلال مشترک دو آزمون برابر بودن ضرایب همبستگی و صفر بودن ضریب همبستگی مشترک انجام می‌شود. در واقع، صفر بودن ضریب همبستگی مشترک چندین جامعه نرمال دو متغیره انجام می‌شود که فرضیه‌های آن به صورت $H_{\circ} : \rho = 0$ در مقابل $H_1 : \rho \neq 0$ است. دونر و روزنر (۱۹۸۰) یک آماره آزمون به صورت $T_s = R_s\sqrt{N-k-1}/\sqrt{1-R_s^2}$ ارائه کردند، که در آن N تعداد کل مشاهدات و $R_s = \sum_{i=1}^{k}(n_i-1)R_i/\sum_{i=1}^{k}(n_i-1)$ است. همچنین نشان دادند این آماره آزمون تحت فرض $H_{\circ}$ دارای توزیع تی با $N-k-1$ درجه آزادی است. پس ناحیه بحرانی در سطح α به صورت $|T_s| > t_{(N-k-1,\alpha/2)}$ است. آنها این روش را با روش‌های دیگر مورد مقایسه قرار دادند. اولین آماره آزمون با استفاده از تبدیل Z- فیشر به صورت $T_F = \bar{Z}_w\sqrt{N-3k}$ بدست می‌آید، که در آن $\bar{Z}_w = \sum_{i=1}^{k}(n_i-3)Z_i/\sum_{i=1}^{k}(n_i-3)$ و Z_i تبدیل Z-فیشر مربوط به R_i

است. دومین آماره آزمون براساس برآوردگر هتلینگ (هتلینگ ، ۱۹۵۳) برای ضریب همبستگی مشترک به صورت $T_H = \bar{Z}_H\sqrt{N-3k}$، فراهم می‌شود، که در آن $\bar{Z}_H = \bar{Z}_w - (R_F/(2n-9/2))$ و $R_F = \tanh(\bar{Z}_w)$.

ملاحظه ۱. دونر و روزنر (۱۹۸۰) بیان کردند که توزیع آماره های T_H و T_F تحت فرض H_0 به صورت توزیع نرمال استاندارد است. پس ناحیه‌های بحرانی در سطح α مربوط به T_H و T_F به ترتیب به صورت $|T_H| > Z_{(\alpha/2)}$ و $|T_F| > Z_{(\alpha/2)}$ هستند.

ملاحظه ۲. هتلینگ (۱۹۵۳) تاکید کرده است، آماره آزمون T_H تنها برای حالتی که اندازه‌های نمونه در تمام جامعه‌ها برابر باشند، قابل استفاده است.

ملاحظه ۳. با استفاده از بازه اطمینان (۱۵)، ناحیه بحرانی در سطح α برای آزمون استقلال مشترک به صورت $h^{-1}_{1-\alpha/2}(R_1,\ldots,R_k) < 0$ یا $h^{-1}_{\alpha/2}(R_1,\ldots,R_k) > 0$ بدست می‌آید. با روش CD می‌توان آزمون $H_0 : \rho = \rho_0$ در مقابل $H_1 : \rho \neq \rho_0$ را نیز انجام داد ولی انجام آن با روش T_s منجر به آزمونی با توان کم خواهد شد، زیرا این روش‌ها تنها برای آزمون فرض استقلال مشترک بکار برده می‌شوند. بنابراین روش CD از این لحاظ هم بر این روش‌های رقیب برتری دارد.

۳ مطالعات شبیه‌سازی

در این بخش، برای ارزیابی و مقایسه عملکرد روش‌های CD و GV در بدست آوردن بازه اطمینان برای ضریب همبستگی مشترک و عملکرد روش CD برای آزمون فرض استقلال مشترک، در مقابل روش‌های رقیب، از معیارهای احتمال پوشش (CP) و طول بازه مورد انتظار (EL) استفاده می‌شود. به ضریب اطمینان $1-\alpha$ اصطلاحا سطح اسمی گویند و معمولا مقدار ۰/۹۵ در نظر گرفته می‌شود. برای محاسبه احتمال پوشش، آزمایش به تعداد $B = 5000$، بار تکرار شده و در هر تکرار یک بازه اطمینان برای پارامتر مورد نظر بدست می‌آید. نسبت تکرارهایی که در آن پارامتر در بازه اطمینان قرار می‌گیرد، احتمال پوشش گفته می‌شود. طول بازه اطمینان در هر تکرار، محاسبه و میانگین آن‌ها به عنوان طول بازه مورد انتظار محاسبه می‌شود. عملکرد روشی مناسبتر است که مقدار احتمال پوشش آن به سطح اسمی بازه اطمینان نزدیک و دارای طول بازه مورد انتظار کمتری باشد. شبیه‌سازی‌ها به ازای $\rho = 0, 0.45, 0.95$ و تعداد جوامع $k = 3, 5$ انجام شده است. چون اکثر روش‌ها برای اندازه نمونه‌های بزرگ کارایی مناسبی دارند،

جدول ۱. احتمال پوشش و طول بازه اطمینان ۹۵٪ برای ρ با روش‌های GV، CDE و CDN.

			ρ					
			۰		۰٫۴۵		۰٫۹۰	
k	$n_1, \ldots, n_k$	روش	EL	CP	EL	CP	EL	CP
۳	۵, ۵, ۵	GV	۱٫۰۶۶	۰٫۹۳۴	۰٫۹۳۵	۰٫۹۳۸	۰٫۳۵۰	۰٫۹۴۶
		CDE	۱٫۲۶۶	۰٫۹۵۹	۱٫۰۸۷	۰٫۹۵۱	۰٫۳۶۹	۰٫۹۵۸
		CDN	۱٫۲۶۱	۰٫۹۵۶	۱٫۰۴۵	۰٫۹۴۵	۰٫۳۳۴	۰٫۹۴۸
	۵, ۵, ۱۰	GV	۰٫۹۱۸	۰٫۹۳۵	۰٫۷۹۱	۰٫۹۴۷	۰٫۲۵۶	۰٫۹۴۲
		CDE	۱٫۰۹۲	۰٫۹۵۰	۰٫۹۳۶	۰٫۹۵۷	۰٫۳۰۸	۰٫۹۴۸
		CDN	۱٫۰۲۸	۰٫۹۴۳	۰٫۸۳۵	۰٫۹۵۴	۰٫۲۵۳	۰٫۹۴۵
	۷, ۸, ۹	GV	۰٫۸۳۰	۰٫۹۵۲	۰٫۷۰۱	۰٫۹۴۵	۰٫۲۱۴	۰٫۹۵۹
		CDE	۰٫۹۳۸	۰٫۹۴۹	۰٫۷۹۱	۰٫۹۴۶	۰٫۲۲۹	۰٫۹۴۷
		CDN	۰٫۸۸۷	۰٫۹۴۸	۰٫۷۳۳	۰٫۹۴۶	۰٫۲۰۴	۰٫۹۴۶
۵	۵, ۵, ۵, ۵, ۵	GV	۰٫۸۸۷	۰٫۹۴۲	۰٫۷۵۹	۰٫۹۳۸	۰٫۲۴۴	۰٫۹۵۷
		CDE	۱٫۰۸۳	۰٫۹۴۴	۰٫۹۰۵	۰٫۹۵۴	۰٫۲۵۶	۰٫۹۴۵
		CDN	۱٫۰۲۳	۰٫۹۴۵	۰٫۸۴۸	۰٫۹۴۰	۰٫۲۳۱	۰٫۹۴۰
	۵, ۵, ۵, ۱۰, ۱۰	GV	۰٫۷۲۸	۰٫۹۴۷	۰٫۶۰۷	۰٫۹۴۸	۰٫۱۷۳	۰٫۹۴۲
		CDE	۰٫۸۸۸	۰٫۹۴۸	۰٫۷۴۶	۰٫۹۴۸	۰٫۱۹۷	۰٫۹۵۴
		CDN	۰٫۸۲۱	۰٫۹۴۴	۰٫۶۶۹	۰٫۹۴۸	۰٫۱۶۹	۰٫۹۴۱
	۶, ۷, ۸, ۹, ۱۰	GV	۰٫۶۶۹	۰٫۹۴۸	۰٫۵۵۷	۰٫۹۵۰	۰٫۱۵۶	۰٫۹۵۲
		CDE	۰٫۷۸۱	۰٫۹۴۶	۰٫۶۴۶	۰٫۹۵۴	۰٫۱۶۸	۰٫۹۴۶
		CDN	۰٫۷۲۱	۰٫۹۴۷	۰٫۵۸۸	۰٫۹۵۱	۰٫۱۴۷	۰٫۹۳۹

نتایج تنها برای اندازه نمونه‌های کوچک مورد ارزیابی قرار گرفته و در جدول ۱ ارائه شده‌اند. با توجه به اینکه به ازای $\rho = ۰$ روش GV از لحاظ CP عملکرد خوبی ندارد، در این حالت روش CDN روش برتر است. به ازای $\rho = ۰٫۴۵$ و $\rho = ۰٫۹$ بترتیب روش‌های GV و CDN برتر هستند.

برای ارزیابی توان آزمون استقلال مشترک با روش CD در مقابل روش‌های T_s، T_H و T_F، توان تجربی، یعنی نسبت تکرارهایی که در آنها فرض $H_۰ : \rho = ۰$ به درستی رد می‌شود، استفاده می‌شود. برای انجام شبیه‌سازی تعداد تکرارها $B = ۵۰۰۰$، تعداد جامعه‌های نرمال دومتغیره $k = ۳, ۵$، اندازه تمام نمونه‌ها یکسان به ازای $n_i = ۵, ۱۰, ۲۵, ۵۰$ و $\rho = ۰٫۱, \ldots ۰٫۹$ در نظر گرفته شده است. نتایج مطالعات شبیه‌سازی که به منظور اختصار در اینجا گزارش نشده‌اند نشان دادند که توان روش‌های T_F، T_H و CDE در مقابل روش‌های T_s و CDN کمتر است. نتایج در جدول ۲ نشان می‌دهد که توان CDN برای اندازه‌های نمونه $n_i = ۱۰, ۲۵, ۵۰$ از روش T_s بیشتر است و توان T_s تنها برای اندازه‌های نمونه $n_i = ۵$ در برخی وضعیت‌ها از روش CDN بیشتر است و هر اندازه مقدار ρ افزایش یابد عملکرد توان CDN بهتر از روش رقیب شده است. توان روش CDN بیشتر از توان روش T_s قرار گرفته است، یعنی روش ارائه شده CDN توانسته است توان آزمون فرض استقلال مشترک را بهبود بخشد. بنابراین توصیه

می‌شود برای انجام آزمون استقلال مشترک از روش CDN استفاده شود.

جدول ۲. مقادیر توان آزمون‌های CDN.

		$k=۳$				$k=۵$			
		n				n			
ρ	روش	۵	۱۰	۲۵	۵۰	۵	۱۰	۲۵	۵۰
۰/۱	CD	۰/۰۵۵	۰/۰۸۶	۰/۱۴۹	۰/۲۲۷	۰/۰۸۲	۰/۱۰۸	۰/۱۸۶	۰/۳۳۹
	T_s	۰/۰۵۷	۰/۰۸۱	۰/۱۳۲	۰/۲۱۲	۰/۰۶۸	۰/۰۹۱	۰/۱۷۳	۰/۳۳۷
۰/۲	CD	۰/۰۸۷	۰/۱۷۳	۰/۴۱۲	۰/۶۸۳	۰/۱۲۰	۰/۲۶۵	۰/۵۹۲	۰/۸۷۸
	T_s	۰/۰۹۱	۰/۱۶۳	۰/۴۰۰	۰/۶۷۵	۰/۱۲۵	۰/۲۵۹	۰/۵۷۹	۰/۸۷۳
۰/۳	CD	۰/۱۴۳	۰/۳۳۶	۰/۷۳۹	۰/۹۶۷	۰/۲۲۵	۰/۵۰۷	۰/۹۰۷	۰/۹۹۷
	T_s	۰/۱۵۶	۰/۳۳۰	۰/۷۳۱	۰/۹۶۳	۰/۲۳۱	۰/۴۹۴	۰/۹۰۴	۰/۹۹۷
۰/۴	CD	۰/۲۲۱	۰/۵۵۹	۰/۹۵۵	۱	۰/۳۶۴	۰/۷۶۹	۰/۹۹۸	۱
	T_s	۰/۲۳۸	۰/۵۴۲	۰/۹۵۱	۱	۰/۳۷۳	۰/۷۶۵	۰/۹۹۵	۱
۰/۵	CD	۰/۳۶۵	۰/۷۷۵	۰/۹۹۷	۱	۰/۵۶۰	۰/۹۴۶	۱	۱
	T_s	۰/۴۰۱	۰/۷۵۶	۰/۹۹۶	۱	۰/۵۷۱	۰/۹۴۳	۱	۱
۰/۶	CD	۰/۵۰۰	۰/۹۲۸	۱	۱	۰/۷۵۱	۱	۱	۱
	T_s	۰/۵۴۶	۰/۹۲۲	۱	۱	۰/۷۶۲	۱	۱	۱
۰/۷	CD	۰/۷۰۲	۰/۹۸۷	۱	۱	۰/۹۰۵	۱	۱	۱
	T_s	۰/۷۱۸	۰/۹۸۷	۱	۱	۰/۹۰۳	۱	۱	۱
۰/۸	CD	۰/۸۸۱	۱	۱	۱	۰/۹۸۸	۱	۱	۱
	T_s	۰/۸۸۵	۱	۱	۱	۰/۹۷۹	۱	۱	۱
۰/۹	CD	۰/۹۹۲	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱
	T_s	۰/۹۸۲	۱	۱	۱	۰/۹۹۸	۱	۱	۱

۴ مثال کاربردی

در این بخش با ذکر دو مثال کاربردی نحوه تشکیل بازه اطمینان برای ضریب همبستگی مشترک از چند جامعه مستقل با استفاده از روش‌های متغیر تعمیم‌یافته و توزیع اطمینان توضیح داده می‌شود.

مثال ۳. مجموعه داده شامل فشار خون دیاستولیک و سیستولیک مربوط به دختران پروپوزیته در گروه‌های سنی ۶–۸، ۹–۱۱ و ۱۲–۱۴ و با اندازه نمونه‌های به ترتیب ۷، ۶ و ۷ است که توسط میال و اولدهام (۱۹۵۱) منتشر شده است و هدف بررسی رابطه بین فشار خون دیاستولیک و سیستولیک در رده‌های مختلف سنی است. همبستگی‌های نمونه‌ای مربوط به سه گروه سنی به ترتیب ۰/۷۴۵۴، ۰/۶۳۹۱ و ۰/۷۳۷۹ هستند. تیان و ویلدینگ (۲۰۰۸) نشان دادند که آزمون همگن بودن ضرایب همبستگی این سه گروه با p–مقدار ۰/۹۶ قابل پذیرش است. بنابراین ارتباط بین فشار خون دیاستولیک و سیستولیک برای این سه گروه سنی یکسان است. بنابراین می‌توان در مورد ضریب همبستگی مشترک این سه گروه استنباط انجام داد.

برآورد نقطه‌ای برای ضریب همبستگی مشترک بر اساس رابطه (۴) برابر با ۰/۷۱۶۵ است. بازه اطمینان ۹۵٪ برای ضریب همبستگی مشترک بر اساس سه رویکرد GV، CDE و CDN به ترتیب (۰/۸۷۸۱، ۰/۲۸۱۷)، (۰/۹۲۰۸، ۰/۳۱۰۸) و (۰/۹۰۰۱، ۰/۳۰۲۸) است.

مثال ۴. داده‌های این مثال توسط بیلکر و همکاران (۲۰۰۴) فراهم شده و همبستگی بین نمره حافظه کلامی (v) و برتری جانبی جریان خون در دو ناحیه پیشانی (f) و زیرقشری (s) در دو گروه مردان و زنان توسط کریشنامورسی و ژیا (۲۰۰۷) مورد بررسی قرار گرفته است. در این پژوهش ۱۴ نفر از مردان و ۱۴ نفر از زنان انتخاب شده‌اند و ضرایب همبستگی بین متغیرهای v و f ($\rho_{v,f}$) و متغیرهای v و s ($\rho_{v,s}$)، در دو گروه مردان و زنان مقایسه می‌شوند. ضرایب همبستگی نمونه‌ای مربوط به $\rho_{v,f}$ و $\rho_{v,s}$ برای دو گروه مردان و زنان در جدول ۳ آورده شده‌اند. ابتدا تاثیر جنسیت بر ضرایب همبستگی $\rho_{v,f}$ و $\rho_{v,s}$ بررسی می‌شود. بررسی همبستگی بین متغیر نمره حافظه کلامی و متغیر زیر قشری در برتری جانبی جریان خون در دو گروه مردان وزنان کریشنامورسی و ژیا (۲۰۰۷) نشان دادند که تفاوت معنی‌داری بین ضرایب همبستگی $\rho_{v,f}$ و $\rho_{v,s}$ در دو گروه مردان و زنان وجود ندارد. بنابراین می‌توان ضرایب همبستگی مشترک $\rho_{v,f}$ و $\rho_{v,s}$ در دو گروه مردان و زنان را مورد استنباط قرار داد. در جدول ۴، بازه‌های اطمینان برای ضرایب همبستگی مشترک $\rho_{v,f}$ و $\rho_{v,s}$ بر اساس روش‌های GV، CDN و CDE ارائه شده‌اند.

جدول ۳. ضرایب همبستگی بین v و متغیرهای f و s

جنسیت	زیرقشری (s)	پیشانی (f)
مردان	۰/۶۴۱	−۰/۰۳۲
زنان	۰/۴۹۱	−۰/۲۱۲

جدول ۴. بازه اطمینان ضرایب همبستگی مشترک $\rho_{v,s}$ و $\rho_{v,f}$ در دو گروه مردان و زنان.

	$\rho_{v,s}$		$\rho_{v,f}$	
روش	کران پایین	کران بالا	کران پایین	کران بالا
GV	۰/۲۱۹۸	۰/۷۷۶۹	−۰/۴۸۰۴	۰/۲۶۲۳
CDN	۰/۲۳۲۱	۰/۷۸۷۵	−۰/۴۸۴۱	۰/۲۷۱۵
CDE	۰/۲۴۰۱	۰/۷۹۸۸	−۰/۴۶۵۸	۰/۳۱۵۷

بحث و نتیجه‌گیری

از روش توزیع اطمینان برای استنباط در مورد ضریب همبستگی مشترک استفاده شد. در این مقاله، یک تابع توزیع اطمینان ترکیبی برای ضریب همبستگی مشترک چندین جامعه نرمال دو متغیره مستقل بدست آورده شد. روش مورد نظر با روش قبلی متغیرهای تعمیم‌یافته مقایسه شد. نتایج شبیه‌سازی نشان داد که روش ارئه شده قابل رقابت با روش قبلی است و در بعضی موارد نسبت به آن از عملکرد بهتری برخوردار است. بنابراین توصیه می‌شود که در عمل از این روش کارا استفاده شود.

تقدیر و تشکر

نویسنده از سردبیر، هیئت تحریریه و ویراستار محترم مجله علوم آماری و همچنین از داوران ارجمند که توصیه‌ها و پیشنهادهای ارزشمندشان باعث اصلاح و بهبود ارائه این مقاله شد، قدردانی و تشکر می‌نماید.

مراجع

Bilker,W. B., Brensinger, C. and Gur, R. C. (2004), A Two Factor ANOVA-Like Test for Correlated Correlations: CORANOVA, *Multivariate Behavioral Res.*, **39**, 565-594.

David, F. N. (1938), *Tables of the Ordinates and Probability Integral of the Distribution of the Correlation Coefficients in Small Samples*, London, Cambridge University Press.

Donner, A., Rosner, B. (1980), On Inferences Concerning a Common Correlation Coefficient, *Applied Statistics*, **29**, 69-76.

Fisher, R. A. (1915), Frequency Distribution of the Values of the Correlation Coefficient in Samples from an Indefinitely Large Population, *Biometrika*, **10**, 507-521.

Fisher, R. A. (1921), On the ‘‘Probable Error’’ of a Coefficient of Correlation Deduced from a Small Sample, *Metron*, **1**, 3–32.

Hotelling, H. (1953), New Light on the Correlation Coefficient and its Transforms, *Journal of the Royal Statistical Society, B*, **15**, 193-232.

Kraemer, H. C. (1979), Tests of Homogeneity of Independent Correlation Coefficients, *Psychometrika*, **44**, 329-335.

Krishnamoorthy, K., Xia, Y. (2007), Inferences on Correlation Coefficients: One-Sample, Independent and Correlated Cases, *Journal of Statistical Planning and Inference*, **137**, 2362–-2379.

Liu, X. and Xu, X. (2015), A note on Combined Inference on the Common Coefficient of Variation using Confidence Distributions, *Electronic Journal of Statistics*, **9**, 219-233.

Liu, X., Li, N. and Hu, Y. (2015), Combining Inferences on the Common Mean of Several Inverse Gaussian Distributions Based on Confidence Distribution, *Statistics & Probability Letters*, **105**, 136-142.

Miall, W. E. and Oldham, P. D. (1951), A Study of Arterial Blood Pressure and its Inheritance in a Sample of the General Population, *Clinical Science*, **14**, 459-487.

Paul, S. R. (1988), Estimation of and Testing Significance for a Common Correlation Coefficient, *Communications in Statistics - Theory and Methods*, **17**, 39-53.

Paul, S. R. (1989), Test for the Equality of Several Correlation Coefficients, *The Canadian Journal of Statistics*, **17**, 217-227.

Pearson, K. (1933), On a Method of Determining whether a Sample of Size n Supposed to Have Been Drawn from a Parent Population Having a Known Probability Integral Has Probably Been Drawn at Random, *Biometrika*, **25**, 379–410.

Schweder, T. and Hjort, N. L. (2002), Confidence and Likelihood, *Scandinavian Journal of Statistics*, **29**, 309-332.

Singh, K., Xie, M, Strawderman, W.E. (2005), Combining Information from Independent Sources through Confidence Distributions, *Annals of Statistics*, **33**, 159-183.

Sun, Y. and Wong, A.C.M. (2007), Interval Estimation for the Normal Correlation Coefficient, *Statistics and Probability Letters*, **77**, 1652–-1661.

Tian, L. and Wilding, G. E. (2008), Confidence Interval Estimation of a Common Correlation Coefficient, *Computational Statistics and Data Analysis*, **52**, 4872-4877.

Tishler, P., Donner, A. (1977), Familial Aggregation of Blood Pressure in Very Young Children, *CVD Epidemiology Newsletter*, **22**, page 45.

Weerahandi, S. (1993), Generalized Confidence Intervals, *Journal of American Statistical Association*, **88**, 899-905.

Weerahandi, S. (1995), *Exact Statistical Methods for Data Analysis*, Springer, New York.

Weerahandi, S. and Berger, V. W. (1999), Exact Inference for Growth Curves with Intraclass Correlation Structure, *Biometrics*, **55**, 921-924.

Journal of Statistical Sciences, Spring and Summer, 2020
Vol. 14, No. 2, pp 471-504
DOI: 10.29252/jss.14.2.487

Inference of Common Correlation Coefficient Based on Confidence Distribution Concept

Kazemi, M. R.
Department of Statistics, Fasa University, Fasa, Iran.

Abstract: In this paper, we investigate the confidence interval for the parameter of the common correlation coefficient of several bivariate normal populations. To do this, we use the confidence distribution approach. By simulation studies and using the concepts of coverage probability and expected length, We compare this method with the generalized variable approach. Results of simulation studies show that the coverage probability of the proposed method is close to the nominal level in all situations and also, in most cases, the expected length of this method is less than that of the generalized variable approach. Finally, we present two real examples to apply this approach.

Keywords: Confidence Distribution, Confidence Interval, Coverage Probability, Fisher Z-Transformation, Generalized Variable.

Mathematics Subject Classification (2010): 62F40, 62F99.