

## برآورد موجکی تابع چگالی چندک به روش آستانه‌ای بلوکی تحت تابع زیان $L_2$

اسماعیل شیرازی

گروه آمار، دانشکده علوم پایه و فنی مهندسی، دانشگاه گنبد کاووس

تاریخ دریافت: ۱۳۹۷/۰۵/۱۰ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۸/۰۹/۰۹

**چکیده:** در این مقاله یک برآوردگر سازوار از تابع چگالی چندک به روش آستانه‌ای بلوکی معرفی می‌شود و سرعت همگرایی این برآوردگر تحت تابع زیان  $L_2$  روی کلاس بزرگی از توابع فضای بسوف بدست می‌آید. این مقاله تعمیمی بر نتایج بدست آمده در چسنو و همکاران (۲۰۱۶) دارد و نشان داده می‌شود که برآوردگر بلوکی سرعت همگرایی بهتری (بهینه) نسبت به برآوردگرهای معرفی شده توسط چسنو و همکاران (۲۰۱۶) دارد. همچنین در یک مطالعه شبیه‌سازی کارایی برآوردگر بلوکی معرفی شده مورد ارزیابی و مقایسه قرار می‌گیرد.

**واژه‌های کلیدی:** برآورد سازوار، تابع چگالی چندکی، روش آستانه‌ای بلوکی، فضای تابعی بسوف و موجک.

## ۱ مقدمه

در آمار کلاسیک، بسیاری توزیع‌ها بر حسب تابع توزیع تجمعی یا تابع چگالی احتمال تعریف می‌شوند. اما برخی از توزیع‌ها وجود دارند که نمایش مشخصی برای تابع توزیع یا تابع چگالی خود ندارند، اما شکلی از تابع چندک آنها در دسترس است. از آن جمله می‌توان به توزیع لامبدای تعمیم یافته<sup>۱</sup> و توزیع چوله لوژستیک (گلیکریست، ۲۰۰۰)، که کاربرد زیادی دارند، اشاره کرد. کارین و دودیکس (۲۰۰۰) اهمیت توزیع‌های مختلف لامبدا در مدل‌سازی داده‌های زمان شکست را نشان دادند. به دلیل اینکه اندازه‌های چندکی کمتر

آدرس الکترونیکی نویسنده مسئول مقاله: اسماعیل شیرازی، shirazi.esmaeel@gmail.com

کد موضوع‌بندی ریاضی (۲۰۱۰): 62G07

<sup>۱</sup>Generalized Lambda distribution

تحت تاثیر مشاهدات پرت قرار می‌گیرند، تابع چندک می‌تواند به عنوان یک جایگزین مناسب برای تابع توزیع داده‌های طول عمر در توزیع‌هایی با دم‌های سنگین در نظر گرفته شود. همچنین گاهی اوقات برای آن دسته از توزیع‌ها که معیارهای اندازه‌گیری قابلیت اطمینان آنها دارای شکل مشخصی نیستند، ویژگی‌های قابلیت اطمینان آنها می‌تواند از روی تابع چندک آنها نمایش داده شود.

استفاده از اطلاعات موجود در چندک‌ها در برخی تحلیل‌های آماری همواره یکی از موضوعات مهم و پرکاربرد در مبحث برآورد توابع بوده است. این موضوع در بحث تحلیل اکتشافی داده‌ها<sup>۲</sup> در مباحث قابلیت اطمینان و تحلیل بقا و سایر شاخه‌های آمار کاربردی، استفاده فراوان دارد. از جمله پژوهش‌های انجام شده در این زمینه می‌توان به مقالات رید (۱۹۸۱)، اسلود و همکاران (۱۹۸۴)، سو و وی (۱۹۹۳)، نایر و سانکاران (۲۰۰۹)، سانکاران و نایر (۲۰۰۹) و حق‌پناه و همکاران (۲۰۱۷)، اشاره کرد. اخیراً برخی نویسندگان به طور خاص برآورد تابع چگالی چندک<sup>۳</sup> را بررسی کرده‌اند که از آن جمله می‌توان مقالات چسنو و همکاران (۲۰۱۶)، سونی و همکاران (۲۰۱۲)، نایر و همکاران (۲۰۰۹)، گلیکریست (۲۰۰۰) و فریمر و همکاران (۱۹۸۸) را نام برد. از دیگر زمینه‌های کاربردی چندک‌ها می‌توان به مبحث مدل‌بندی توابع مخاطره رقابتی<sup>۴</sup> اشاره کرد که در این زمینه مقالات پنگ و فاین (۲۰۰۷)، جیونگ و فاین (۲۰۰۹) و سانکاران و همکاران (۲۰۱۵) منتشر شده است.

فرض کنید  $X$  یک متغیر تصادفی پیوسته با تابع توزیع تجمعی  $F(x)$ ، تابع چگالی  $f(x)$  و تابع خطر  $r(x)$  باشد. آنگاه تابع چندک  $X$  به صورت زیر

$$Q(x) = F^{-1}(x) = \inf\{y \in \mathbb{R}; F(y) > x\}; \quad x \in [0, 1]$$

تعریف می‌شود، که بر اساس این تعریف رابطه  $F(Q(x)) = x$  برقرار است. پارزن (۱۹۷۹) و جونز (۱۹۹۲)، تابع  $g(x) = Q'(x)$  را به عنوان تابع چگالی چندک معرفی کردند که این تابع مرتبط با تابع چندک  $Q(x)$  است. بر این اساس می‌توان نشان داد

$$g(x) = \frac{1}{f(Q(x))}, \quad x \in [0, 1] \quad (1)$$

توجه شود که بر اساس تعریف (۱) مجموع دو تابع چگالی چندک دوباره خود یک تابع چگالی چندک است

<sup>۲</sup>Exploratory data analysis

<sup>۳</sup>Quantile density function

<sup>۴</sup>Modelling competing risk models

که این ایده در بحث مدل‌بندی داده‌ها بسیاری کاربردی و مفید است (مراجعه شود به سونی و همکاران (۲۰۱۲)). همچنین تعریف زیر توسط نایر و سانکاران (۲۰۰۹) برای بیان تابع خطر چندک مورد استفاده قرار گرفت.

$$R(x) = r(Q(x)) = \frac{f(Q(x))}{1 - F(Q(x))}$$

$$= \frac{1}{(1-x)g(x)}, \quad x \in (0, 1).$$

بر اساس این تعریف، تابع چگالی چندک  $g(x)$  در تابع خطر چندک  $R(x)$  نیز حضور دارد و می‌توان چنین نتیجه‌گیری کرد که یک برآورد ناپارامتری از تابع چگالی چندک منجر به یک برآورد از تابع خطر چندک نیز خواهد شد. از طرف دیگر دو جامعه دارای تابع خطر چندک یکسان خواهند بود اگر و تنها اگر تابع چگالی چندک آنها با هم برابر باشد که این مهم می‌تواند در بحث انجام آزمون برابری نرخ شکست برای دو نمونه مستقل مورد استفاده قرار گیرد (پنگ و فاین، ۲۰۰۷). موجک‌ها از دیرباز به عنوان ابزاری قدرتمند در بحث برآورد ناپارامتری توابع بوده‌اند و در سالهای اخیر مورد توجه پژوهشگران بسیاری قرار گرفته‌اند که از آن جمله می‌توان به هال و همکاران (۱۹۹۸)، آنتونیادیس و همکاران (۲۰۱۲) و شیرازی و دوستی (۲۰۱۵) اشاره کرد. در این مقاله برآورد تابع چگالی چندک  $g(x)$  به کمک ابزار موجک‌ها و به روش آستانه‌ای بلوکی<sup>۵</sup> معرفی می‌شود و سپس تحت تابع زیان  $L_2$  سرعت همگرایی برآوردگر معرفی شده به دست می‌آید. همچنین نشان داده خواهد شد که برآوردگر بلوکی معرفی شده در مقایسه با سایر برآوردگرها از جمله برآوردگر آستانه‌ای چسنو و همکاران (۲۰۱۶)، نرخ همگرایی بهینه را بدست خواهد آورد.

در بخش بعد ابتدا مروری بر برخی مفاهیم اساسی در ارتباط با موجک‌ها و فضاها تابعی مرتبط با آنها خواهیم داشت. سپس برآوردگر آستانه‌ای بلوکی به روش موجک برای تابع چگالی چندک معرفی می‌شود. در بخش ۳ به بیان قضیه اساسی در خصوص نرخ همگرایی برآوردگر معرفی شده پرداخته خواهد شد. در بخش ۴ به کمک یک مطالعه شبیه‌سازی، میزان دقت برآوردگر بلوکی معرفی شده نسبت به برآوردگرهای خطی و آستانه‌ای چسنو و همکاران (۲۰۱۶)، مورد بررسی قرار خواهد گرفت. همچنین اثبات قضایا و نتایج بدست آمده در بخش ضمیمه ارائه خواهد شد.

<sup>۵</sup>Block Thresholding method

## ۲ برآوردگر موجکی تابع چگالی چندک

در این بخش ابتدا مروری مختصر بر روی موجک‌ها<sup>۶</sup> و فضای تابعی بسوف<sup>۷</sup> صورت خواهد گرفت و برخی مفاهیم اساسی مرتبط با مباحث آماری، بیان خواهد شد. خواننده می‌تواند برای مطالعه جزئیات بیشتر به کوهن و همکاران (۱۹۹۳) و ملات (۲۰۰۹) مراجعه کند.

### ۱.۲ موجک‌ها

موجک‌ها مجموعه‌ای نامتناهی از توابع پایه یکامتعامل<sup>۸</sup> با ویژگی‌های مفیدی هستند که از تبدیل مقیاس و مکان تابع موجک پدر و مادر<sup>۹</sup>  $\phi(x)$  و  $\psi(x)$  بدست آمده‌اند. فرض می‌شود توابع  $\phi(x)$  و  $\psi(x)$  کراندار، محمل فشرد<sup>۱۰</sup> و به صورت پیوسته مشتق‌پذیر باشند. همچنین تابع  $\psi$  منظم از مرتبه  $r$  نامیده می‌شود هرگاه  $\psi$  یک تابع با  $r$  گشتاور صفر و مشتقات پیوسته تا مرتبه  $r$  داشته باشد. در این صورت برای هر  $x \in R$  می‌توان نشان داد

$$\phi_{ij}(x) = 2^{i/2} \phi(2^i x - j), \quad \psi_{ij}(x) = 2^{i/2} \psi(2^i x - j),$$

بر این اساس با تعریف فضای تابعی  $L_2[0, 1]$  به صورت

$$L_2[0, 1] = \left\{ h : [0, 1] \longrightarrow R; \int_{[0, 1]} h^2(x) dx < \infty \right\},$$

می‌توان نشان داد که مجموعه

$$\mathfrak{N} = \left\{ \phi_{\ell, j}; j \in \{1, \dots, 2^\ell - 1\}, \psi_{i, j}; j \in \{1, \dots, 2^j - 1\}, i \geq \ell \right\},$$

یک پایه یکامتعامل برای فضای  $L_2[0, 1]$  است. بر این اساس، با فرض اینکه  $g \in L_2[0, 1]$  می‌توان برای هر مقدار ثابت  $\tau$ ، به طوری که  $\ell \geq \tau$  باشد، بسط موجکی تابع چگالی چندک  $g(x)$  را بر اساس

<sup>۶</sup>Wavelets

<sup>۷</sup>Besov space function

<sup>۸</sup>Orthogonal

<sup>۹</sup>Father and mother wavelets

<sup>۱۰</sup>Compact support

پایه‌های یکامتعاد مجموعه  $\mathfrak{A}$  به صورت

$$g(x) = \sum_{j=1}^{\ell-1} \alpha_{\ell j} \phi_{\ell j}(x) + \sum_{i \geq \ell} \sum_{j=1}^{i-1} \beta_{ij} \psi_{ij}(x), \quad x \in [0, 1]$$

نمایش داد، که ضرایب نامعلوم آن به صورت

$$\alpha_{\ell j} = \int_{[0,1]} g(x) \phi_{\ell j}(x) dx, \quad \beta_{ij} = \int_{[0,1]} g(x) \psi_{ij}(x) dx,$$

تعریف می‌شوند، که در آن‌ها با فرض اینکه تابع توزیع تجمعی  $F$  پیوسته و یکنوای اکید به صورت  $F: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  باشد و با تغییر متغیر  $x = F(y)$  برای  $y \in [0, 1]$ ، رابطه

$$\begin{aligned} \alpha_{\ell j} &= \int_{[0,1]} g(x) \phi_{\ell j}(x) dx = \int_{[0,1]} \frac{1}{f(F^{-1}(x))} \phi_{\ell j}(x) dx \\ &= \int_{[0,1]} \phi_{\ell j}(F(y)) dy, \end{aligned} \quad (2)$$

برقرار خواهد بود. به صورت مشابه می‌توان نشان داد

$$\beta_{ij} = \int_{[0,1]} \psi_{ij}(F(y)) dy \quad (3)$$

بنابراین برای برآورد ضرایب فوق باید یک برآورد برای تابع توزیع نامعلوم  $F$  معرفی شود. بدین منظور می‌توان از برآورد تجربی تابع توزیع  $F$  به صورت

$$\hat{F}_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I(X_i < x), \quad x \in [0, 1],$$

۲۰۰ ..... برآورد موجکی تابع چگالی چندک به روش آستانه‌ای بلوکی

بهره برد، که با بکارگیری برآورد تابع توزیع در تعریف ضرایب (۲) و (۳) می‌توان برآوردهای این ضرایب را به صورت

$$\hat{\alpha}_{\ell j} = \int_{[0,1]} \phi_{\ell j}(\hat{F}(x)) dx, \quad \hat{\beta}_{ij} = \int_{[0,1]} \psi_{ij}(\hat{F}(x)) dx, \quad (4)$$

معرفی نمود. روشن است که برآوردهای (۴) نااریب نیستند. اما با بکارگیری قضیه همگرایی تحت سلطه لبگ می‌توان نشان داد که این برآوردها به صورت مجانبی نااریب هستند. بر این اساس چسنو و همکاران (۲۰۱۶) با بکارگیری برآوردهای ضرایب از رابطه (۴) برآوردهای موجک خطی و غیرخطی (به روش آستانه‌ای سخت) برای برآورد تابع چگالی چندک  $g$ ، با تعریف یک مقدار آستانه بر روی ضرایب  $\hat{\beta}_{ij}$ ، به صورت

۱- برآوردگر خطی موجک

$$\hat{g}_L(x) = \sum_{j=1}^{2^{\ell}-1} \hat{\alpha}_{\ell j} \phi_{\ell j}(x).$$

۲- برآوردگر غیرخطی به روش آستانه‌ای سخت

$$\hat{g}_H(x) = \sum_{j=1}^{2^{\ell}-1} \hat{\alpha}_{\ell j} \phi_{\ell j}(x) + \sum_{i \geq \ell} \sum_{j=1}^{2^i-1} \hat{\beta}_{ij} I(|\hat{\beta}_{ij}| \geq \lambda_i) \psi_{ij}(x), \quad x \in [0, 1]$$

معرفی کردند و نشان دادند که با انتخاب مقدار آستانه به صورت

$$\lambda_i = K 2^{3i/2} \sqrt{2p} \sqrt{\frac{\ln n}{n}},$$

برای  $1 \leq p$  و با انتخاب  $K = \sup_{x \in [0,1]} |\psi'(x)|$ ، برآوردگر آستانه‌ای معرفی شده در قسمت ۲ تحت شرایط خاص نرخ همگرایی نزدیک به بهینه  $\left(\frac{\ln n}{n}\right)^{2s/(2s+4)}$  را بر روی زیر مجموعه‌ای از فضای تابعی  $L_2[0, 1]$  بدست می‌آورد. اما همان‌طور که بیان شد، در روش آستانه‌ای سخت، هر یک از ضرایب  $\hat{\beta}_{ij}$  به صورت جداگانه و جمله به جمله مورد آستانه‌سازی قرار می‌گیرد و این موضوع باعث از دست دادن برخی اطلاعات مفید در فرآیند برآورد تابع می‌شود. به همین دلیل نرخ همگرایی بهینه را بدست نمی‌آورد و دلیل

این موضوع به این نکته مربوط می‌شود که اصولاً ضرایبی که در همسایگی هم قرار می‌گیرند دارای اطلاعات تکمیلی بیشتری برای برآورد هر چه بهتر از یک تابع تحت بررسی هستند که با عمل آستانه‌سازی جمله به جمله این مهم در نظر گرفته نمی‌شود. به این ترتیب ممکن است برخی از ضرایب بدون حضور ضرایب همجوار در مدل نهایی وارد شوند.

در روش آستانه‌ای بلوکی ایراد مطرح شده مورد توجه قرار گرفته و در همین راستا ضرایبی که در یک همسایگی قرار می‌گیرند درون یک بلوک قرار داده شده و به صورت گروهی مورد آستانه‌سازی قرار می‌گیرند. بر این اساس اگر میانگین توان دوم ضرایب موجب برآورد شده بیش از مقدار آستانه معرفی شده قرار گیرد آنگاه کلیه ضرایب موجود در بلوک وارد مدل می‌شوند، در غیر این صورت کلیه ضرایب بلوک از مدل حذف می‌شوند. بنا بر آنچه در کای (۲۰۰۲) بیان شده می‌توان ضرایب تجربی موجب  $\hat{\beta}_{ij}$  را به صورت گروهی درون بلوک‌های متوالی قرار داد. بر همین اساس، در هر سطح تفکیک‌پذیری  $j$  مقادیر صحیح  $k$  را در بلوک‌های نامتداخل با طول  $\ell$ ، به صورت

$$\Gamma_{jt} = \{k : (t-1)\ell + 1 \leq k \leq t\ell, -\infty < t < \infty\}$$

قرار داده و سپس درون هر بلوک  $\Gamma_{jt}$  میانگین توان دوم ضرایب هر بلوک به صورت

$$\hat{A}_{jt} = \ell^{-1} \sum_{k \in B(t)} \hat{\beta}_{jk}^* \quad (5)$$

محاسبه می‌شود و با یک مقدار آستانه جدید  $\lambda$  مقایسه می‌شود. در اینجا  $B(t)$  نشان دهنده مجموعه اندیس‌های  $k$  است که در بلوک  $\Gamma_{kt}$  قرار دارند. در صورتی که میانگین توان دوم ضرایب مربوط به یک بلوک خاص از مقدار آستانه مدل بیشتر باشد، کلیه ضرایب موجود در بلوک، در مدل باقی می‌مانند، در غیر این صورت از مدل حذف می‌شوند. بنابراین بر اساس دستورالعمل حذف ضرایب موجب در کای (۲۰۰۲) ، می‌توان برآوردگر موجب تابع چگالی چندک به روش آستانه‌ای بلوکی به صورت

$$\hat{g}_n(x) = \sum_{j=1}^{2^{\ell}-1} \hat{\alpha}_{\ell j} \phi_{\ell j}(x) + \sum_{j=\ell}^R \sum_t \sum_{k \in B(t)} \hat{\beta}_{jk} I(|\hat{A}_{tk}| > \lambda) \psi_{jk}(x) \quad (6)$$

۲۰۲ ..... برآورد موجکی تابع چگالی چندک به روش آستانه‌ای بلوکی

تعریف نمود به طوری که پارامتر هموارسازی<sup>۱۱</sup>  $R$ ، مرتبط با بالاترین سطح تفکیک پذیری جزئیات<sup>۱۲</sup> و مقدار آستانه  $\lambda$  برابر  $C \cdot n^{-1}$  در نظر گرفته شده است که  $C$  یک ثابت آستانه نامیده می‌شود. در انتها و طبق روال معمول برآوردهای موجکی فرض می‌شود که تابع چگالی چندک  $g(x)$  متعلق به زیر مجموعه‌ای از فضای تابعی بسوف باشد که در ادامه این فضای تابعی را به صورت زیر بیان خواهیم نمود.

تعریف ۱: فضای تابعی بسوف کراندار  $B_{pq}^s$  با پارامتر هموارسازی  $s$  و پارامترهای نرم  $p$  و  $q$  برای  $p, q \in [1, \infty)$  و  $sp > 1$  به صورت

$$B_{pq}^s(M) = \{g : g \in B_{pq}^s, \|g\|_{B_{pq}^s} \leq M, \text{Supp } g \subseteq [\circ, 1]\},$$

تعریف می‌شود به طوری که  $\text{Supp } g = \{x \in \Omega | g(x) \neq \circ\}$  و دامنه تابع  $g$  است. بنابراین مجموعه  $B_{pq}^s(M)$  زیر مجموعه‌ای از توابع بسوف با محمل فشرده و نرم بسوف کراندار است. همچنین شرط  $sp > 1$  نشان می‌دهد که  $B_{pq}^s(M)$  شامل توابع پیوسته کراندار است. حال با توجه به تعریف ۱ و با در نظر گرفتن تابع موجک مادر  $\psi$  از مرتبه نظم  $s$ ،  $r > s$  می‌توان نمایش نرم بسوف تابع  $g$  را بر اساس دنباله نرم ضرایب موجک به صورت

$$\|g\|_{B_{pq}^s} = \left( \sum_k |\alpha_{j,k}|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left\{ \sum_{j=\circ}^{\infty} [2^{j\sigma} \left( \sum_k |\beta_{j,k}|^p \right)^{\frac{1}{p}}]^q \right\}^{\frac{1}{q}},$$

بیان نمود که در آن  $\sigma = s + 1/2 - 1/p$  (میر، ۱۹۹۲).

### ۳ خواص مجانبی برآوردگر بلوکی

در این بخش به مطالعه میزان عملکرد و خواص مجانبی برآوردگر بلوکی تابع چگالی چندک معرفی شده در رابطه (۶) خواهیم پرداخت و در همین راستا نرخ همگرایی این برآوردگر تحت تابع زیان  $L_2$  روی فضای بسوف کراندار  $B_{pq}^s(M)$  معرفی خواهد شد. ابتدا فرض می‌شود گزاره زیر برقرار است.

<sup>11</sup>Smoothing parameter

<sup>12</sup>Highest detail resolution



گزاره ۱: فرض کنید برای هر  $(x, y) \in [0, 1]^2$  وجود داشته باشد یک مقدار ثابت  $C$  به طوری که

$$|g(x) - g(y)| \leq C\sqrt{|x - y|}.$$

حال با پذیرش گزاره ۱ می‌توان به بیان قضیه مهم این بخش پرداخت.

قضیه ۱: اگر  $g \in B_{pq}^s(M)$  و  $\hat{g}_n$  برآوردگر موجک تابع چگالی چندک به روش بلوکی در رابطه (۶) با پارامترهای  $R = \lfloor \log_r(n\ell^{-2}) \rfloor$  و  $\ell = \lfloor \ln n \rfloor$  باشد و  $\phi$  و  $\psi$  توابع موجک منظم از مرتبه  $r$  باشند. آنگاه مقداری ثابت همانند  $C$  وجود دارد، به طوری که برای همه مقادیر  $1/p < s < r$  و  $q \in [1, \infty]$  و  $M \in (0, \infty)$  می‌توان نشان داد:

۱- اگر  $p \in [2, \infty]$ ، آنگاه

$$\sup_{g \in B_{pq}^s(M)} E\left(\int_{[0,1]} (\hat{g}_n(x) - g(x))^2 dx\right) \leq C n^{-2s/(1+2s)}$$

۲- اگر  $p \in [1, 2)$ ، آنگاه

$$\sup_{g \in B_{pq}^s(M)} E\left(\int_{[0,1]} (\hat{g}_n(x) - g(x))^2 dx\right) \leq C(\log_r n)^{\frac{2-p}{p(1+2s)}} n^{-2s/(1+2s)}.$$

برهان: برای مشاهده اثبات به بخش ضمیمه مراجعه شود.

ملاحظه ۱: نتایج قضیه ۱ می‌تواند بر روی هر بازه‌ای بجز  $[0, 1]$  همچون  $[a, b]$  با  $a < b$  تعمیم داده شود. این امر تنها با یک تغییر متغیر ساده  $x = F(y)$  برای  $y \in [a, b]$  امکان پذیر است. بر این اساس می‌توان نشان داد

$$\alpha_{ij} = \int_{[0,1]} g(x)\phi_{ij}(x)dx = \int_{[a,b]} \phi_{ij}(F(x))dx$$

ملاحظه ۲: در قضیه ۱، اندازه طول هر بلوک برابر  $\ell = \lfloor \ln n \rfloor$  در نظر گرفته شده است. این مقدار در مقاله هال و همکاران (۱۹۹۹) در بحث برآورد بلوکی توابع برابر  $\ell = (\ln n)^2$  است. البته کای (۲۰۰۲) ثابت کرد که طول  $\ell = \lfloor \ln n \rfloor$ ، یک مقدار بهینه برای هر دو قسمت قضیه ۱، برای کاهش مقدار خطای کلی در برآورد همزمان توابع در یک نقطه خواهد بود.

## ۴ مطالعه شبیه‌سازی

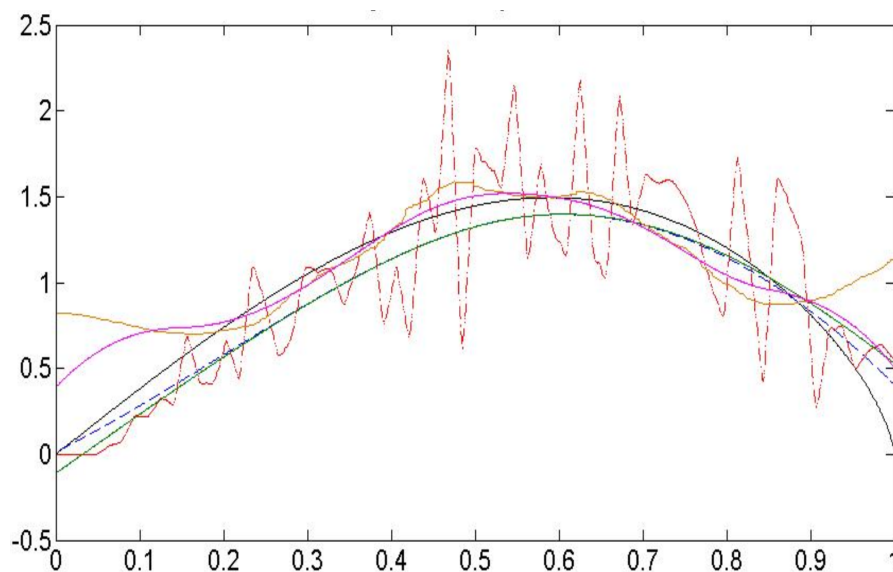
در این بخش عملکرد برآوردگر بلوکی (۶) نسبت به برآوردگرهای پیشنهادی چسنو و همکاران (۲۰۱۶) و برآوردگرهای هسته‌ای معرفی شده توسط سونی و همکاران (۲۰۱۲) و جونز (۱۹۹۲) ارزیابی خواهند شد. بر این اساس با انجام یک مطالعه شبیه‌سازی نمونه‌های تصادفی با اندازه‌های مختلف از روی دو تابع توزیع بتا و توزیع لاندای تعمیم یافته و با محاسبه دو معیار میانگین نرم خطاها<sup>۱۳</sup> (ANE) و میانگین مجموع توان دوم خطاها<sup>۱۴</sup> (MISE) دقت هر یک از برآوردگرها مورد بررسی قرار خواهد گرفت. نتایج این شبیه‌سازی با بکارگیری موجک‌های سایملت ۴ و کوايفلت ۲ و با در نظر گرفتن سطح تفکیک پذیری اولیه  $z_0 = 6$  در ۱۰۰۰ بار تکرار و با کدنویسی در نرم‌افزار متلب بدست آمده است.

لازم به یادآوری است که اگر پارامترهای توزیع بتا از روی بازه  $(0, 1)$  انتخاب شوند، آنگاه کلیه شروط مورد نیاز جهت اثبات نتایج برقرار خواهد بود. از طرفی دیگر توزیع لامبدای تعمیم یافته دارای چهار پارامتر  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$  است که به صورت  $GLD(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$  نمایش داده می‌شود به طوری که پارامترهای  $\lambda_1$  و  $\lambda_2$  به ترتیب پارامترهای مکان و مقیاس هستند و پارامترهای  $\lambda_3$  و  $\lambda_4$  میزان کشیدگی و چولگی توزیع را مشخص می‌کنند (کارین و دودیکس، ۲۰۰۰).

مثال ۱: نمونه‌های تصادفی با اندازه‌های مختلف از توزیع  $Beta(0.6, 0.5)$  و  $GLD(0.5, 1, 2, 6)$  تولید می‌شود. نتایج شبیه‌سازی در خصوص برآوردگر بلوکی و سایر برآوردگرهای موجکی ارائه شده است. در شکل ۱ برآوردگر هموار شده بلوکی (خط چین آبی) و برآوردگر هموار شده آستانه‌ای پیشنهادی توسط چسنو و همکاران چسنو و همکاران (۲۰۱۶) (خط چین سبز) نمایش داده شده است. همچنین برآوردگرهای هسته‌ای معرفی شده توسط سانی و همکاران سونی و همکاران (۲۰۱۲) و جونز جونز (۱۹۹۲) به ترتیب با (خطوط بنفش و قهوه‌ای) نمایش داده شده است. حال به صورت شهودی و با توجه به مقادیر جدول ۱، می‌توان مشاهده کرد که برآوردگر هموار شده بلوکی نسبت به برآوردگر هموار شده آستانه‌ای و برآوردگرهای هسته‌ای از کارایی بالاتری برخوردارند. همچنین برآوردگر بلوکی هموارسازی شده نسبت به برآوردگر بلوکی ساده دارای مقادیر معیار کمتری است که خود دلیل بر برتری این دسته از برآوردگرهاست. هر چند با افزایش حجم نمونه مقادیر معیارهای ارزیابی برآوردگرهای بلوکی، آستانه‌ای و هسته‌ای تا حد زیادی به یکدیگر نزدیک می‌شوند. همچنین با توجه به مقادیر جدول ۲ و با مشاهده شکل ۲ می‌توان نتایج مشابه در خصوص برآورد تابع چگالی چندک از روی مشاهدات توزیع بتا را برای تابع توزیع لاندای تعمیم یافته

<sup>13</sup> Average Norm Errors

<sup>14</sup> Mean Integrated Square Errors

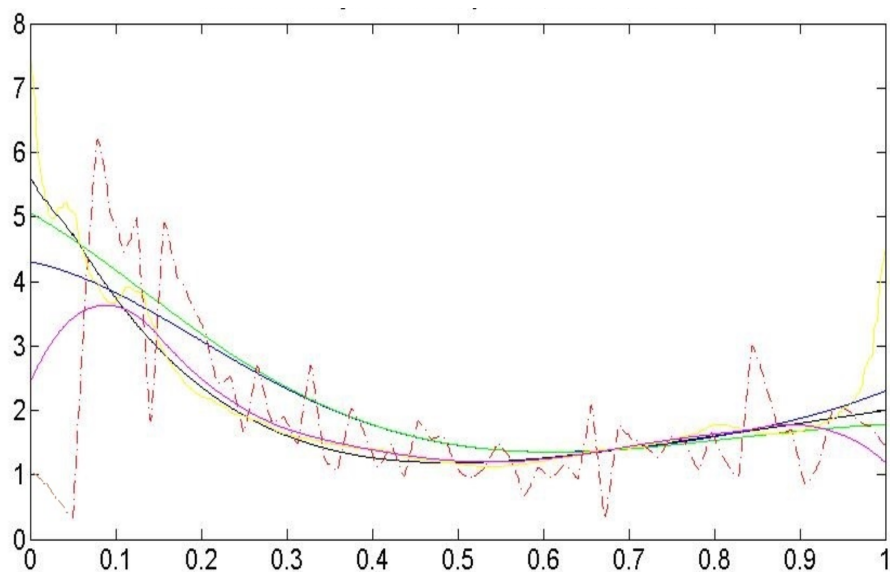


شکل ۱: تابع چگالی بتا و برآوردگرهای خطی ساده (خط چین قرمز)، هموار بلوکی (خط چین آبی)، هموار آستانه‌ای (خط سبز)، هسته‌ای جونز (خط قهوه‌ای) و هسته‌ای سانی (خط بنفش).

نیز نتیجه‌گیری نمود.

جدول ۱: مقادیر میانگین نرم خطاها و میانگین مجموع مربع خطاها برای توزیع  $Beta(0.5, 0.6)$

$n$					معیار	برآوردگر
۲۰۴۸	۱۰۲۴	۵۱۲	۲۵۶	۱۲۸		
۷/۹۷۳ ۰/۰۳۲	۴/۹۷۷ ۰/۰۲۵	۴/۱۹۸ ۰/۰۳۵	۱/۴۳۳ ۰/۰۴۱	۲/۰۸۹ ۰/۰۳۷	ANE MISE	هموار بلوکی $\hat{g}_{SB}(x)$
۸/۲۶۱ ۰/۰۳۳	۵/۹۳۵ ۰/۰۳۵	۴/۲۵۰ ۰/۰۳۵	۳/۲۵۲ ۰/۰۴۲	۲/۸۹۱ ۰/۰۶۸	ANE MISE	هموار آستانه‌ای $\hat{g}_{SH}(x)$
۸/۴۲۴ ۰/۰۳۵	۵/۸۸۰ ۰/۰۳۶	۴/۴۳۳ ۰/۰۵۸	۴/۷۳۴ ۰/۰۹۰	۳/۰۵۴ ۰/۰۷۸	ANE MISE	خطی ساده $\hat{g}_L$
۱۳/۵۷۹ ۰/۰۹۰	۹/۵۶۹ ۰/۰۸۹	۷/۰۷۴ ۰/۰۹۷	۵/۲۰۷ ۰/۱۰۶	۴/۱۴۷ ۰/۱۳۵	ANE MISE	هسته‌ای جونز $\hat{g}_{KJ}$
۸/۷۳۸ ۰/۰۳۸	۵/۶۳۷ ۰/۰۳۲	۴/۸۳۲ ۰/۰۴۶	۳/۶۴۷ ۰/۰۵۵	۲/۲۴۴ ۰/۰۴۳	ANE MISE	هسته‌ای سانی $\hat{g}_{KS}$



شکل ۲: تابع چگالی لاندای تعمیم‌یافته و برآوردگرهای خطی ساده (خط چین قرمز)، هموار بلوکی (خط چین آبی)، هموار آستانه‌ای (خط سبز)، هسته‌ای جونز (خط قهوه‌ای) و هسته‌ای سانی (خط بنفش).

جدول ۲: مقادیر میانگین نرم خطاها و میانگین مجموع مربع خطاها برای توزیع  $GLD(0.5, 1, 2, 6)$

$n$					معیار	برآوردگر
۲	۱۰۲۴	۵۱۲	۲۵۶	۱۲۸		
۲۱/۲۵۳ ۰/۲۱۳	۱۴/۹۹۹ ۰/۲۱۴	۱۱/۲۰۵ ۰/۲۳۸	۷/۷۷۱ ۰/۲۳۱	۷/۰۸۷ ۰/۳۸۶	ANE MISE	هموار بلوکی $\hat{g}_{SB}(x)$
۲۴/۵۵۷ ۰/۲۸۶	۱۷/۵۵۷ ۰/۲۹۲	۱۲/۵۴۶ ۰/۲۹۸	۸/۰۴۵ ۰/۲۴۹	۷/۱۰ ۰/۳۹۱	ANE MISE	هموار آستانه‌ای $\hat{g}_{SH}(x)$
۴۵/۶۶۲ ۰/۹۷۹	۲۷/۲۴۸ ۰/۶۹۹	۱۸/۵۸۵ ۰/۶۵۴	۱۳/۱۸۴ ۰/۶۷۳	۹/۶۶۳ ۰/۷۲۵	ANE MISE	خطی ساده $\hat{g}_L$
۲۴/۸۸۳ ۰/۲۹۳	۱۷/۲۹۸ ۰/۲۸۴	۱۲/۸۷۴ ۰/۳۱۵	۸/۲۰۲ ۰/۲۵۹	۷/۹۷۳ ۰/۴۹۵	ANE MISE	هسته‌ای جونز $\hat{g}_{KJ}$
۱۹/۷۲۳ ۰/۱۸۹	۱۴/۵۵۷ ۰/۲۱۲	۱۲/۱۴۹ ۰/۳۲۵	۱۲/۳۴۸ ۰/۷۲۴	۷/۴۴۸ ۰/۴۵۵	ANE MISE	هسته‌ای سانی $\hat{g}_{KS}$

## بحث و نتیجه‌گیری

در سالهای اخیر بحث برآورد ناپارامتری توابع آماری به کمک ابزار موجک از اهمیت ویژه‌ای برخوردار شده است و در این بین برآوردهای آستانه‌ای به شیوه آستانه‌سازی بلوکی، برآوردهای با کیفیت تری را ارائه نموده‌اند. همچنین به کارگیری شیوه هموارسازی موضعی بر روی برآوردهای موجکی می‌تواند باعث بالا بردن میزان کیفیت این برآوردها شود به طوری که تقریب‌های نهایی هموارتر و در حالت کلی، با دقت بیشتر حاصل شود. هر چند که لازم به ذکر است که با افزایش میزان حجم نمونه، استفاده از روش‌های هموارسازی ممکن است از دقت برآوردها بکاهد.

## ۵ ضمیمه

در این بخش با بکارگیری چند لم از چسبنو و همکاران (۲۰۱۶) به ارائه اثبات قضیه ۱ پرداخته می‌شود.

لم ۱: فرض کنید  $u \in R^n$  و داشته باشیم  $\|u\|_{\ell_p} = (\sum_i |u_i|^p)^{1/p}$ . آنگاه برای هر  $0 < p_1 \leq p_2 \leq \infty$  نامساوی  $\|u\|_{\ell_{p_2}} \leq n^{1/p_1 - 1/p_2} \|u\|_{\ell_{p_1}}$  برقرار است.

لم ۲: اگر  $\hat{\alpha}_{\ell j}$  و  $\hat{\beta}_{ij}$  برآوردهای ضرایب موجک معرفی شده در رابطه (۴) باشند، آنگاه به ازای هر مقدار  $p \geq 1$  وجود دارد یک مقدار ثابت  $C$  به طوری که

$$E(\hat{\alpha}_{\ell j} - \alpha_{\ell j})^2 \leq C n^{-1}, \quad E(\hat{\beta}_{jk} - \beta_{jk})^2 \leq C n^{-1}.$$

لم ۳: اگر  $\hat{\alpha}_{\ell j}$  و  $\hat{\beta}_{ij}$  برآوردهای ضرایب موجک معرفی شده در (۴) باشند، آنگاه به ازای هر  $p \geq 1$  یک مقدار ثابت  $C$  وجود دارد به طوری که

$$P\left((\ell^{-1} \sum_{k \in B(t)} (\hat{\beta}_{jk} - \beta_{jk})^2)^{1/2} \geq \lambda\right) \leq C n^{-2}.$$

با استفاده از نابرابری مینکوفسکی می‌توان نوشت  $E \int (\hat{g}_\tau - g_\tau)^2 \leq 4(T_1 + T_2 + T_3 + T_4)$

۲۰۸ ..... برآورد موجکی تابع چگالی چندک به روش آستانه‌ای بلوکی

در آن

$$\begin{aligned} T_1 &= E \left\| \sum_{j=1}^{\ell-1} (\hat{\alpha}_{\ell j} - \alpha_{\ell j}) \phi_{\ell j}(x) \right\|_2^2 \\ T_2 &= E \left\| \sum_{j=\ell}^R \sum_t \sum_{k \in B(t)} \beta_{jk} I(\hat{A}_{tk} < \lambda) \psi_{jk}(x) \right\|_2^2 \\ T_3 &= E \left\| \sum_{j=\ell}^R \sum_t \sum_{k \in B(t)} \hat{\theta}_{jk} I(\hat{A}_{tk} \geq \lambda) \psi_{jk}(x) \right\|_2^2 \\ T_4 &= E \left\| \sum_{j=R+1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\ell^j-1} \beta_{jk} \psi_{jk}(x) \right\|_2^2 \end{aligned}$$

و  $\hat{\theta}_{jk} = \hat{\beta}_{jk} - \beta_{jk}$ . حال نیازمند یافتن یک کران بالا برای هر یک از جملات  $T_1$  تا  $T_4$  است.

(۱) کران بالا برای  $T_1$ : با توجه به خاصیت یک متعامد بودن تابع  $\psi$  و با بکارگیری لم ۲، نابرابری

$$T_1 \leq C \sum_{j=1}^{\ell-1} E(\hat{\alpha}_{\ell j} - \alpha_{\ell j})^2 \leq C \ell n^{-1}$$

برقرار است که در آن با در نظر گرفتن  $\ell \simeq n^{1/(1+2s)}$  می‌توان نشان داد

$$T_1 = O(n^{-2s/(1+2s)}) \quad (7)$$

(۲) کران بالا برای  $T_4$ : با توجه به خاصیت یک متعامد بودن تابع  $\psi$ ، نابرابری

$$T_4 \leq C \sum_{j=R+1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\ell^j-1} \beta_{jk}^2 \quad (8)$$

برقرار است. حال با بکارگیری لم ۱ و استفاده از رابطه (۱) داریم

$$\sum_k \beta_{jk}^2 \leq \ell^{-2js} \quad (9)$$

که با قرار دادن (۹) در رابطه (۸) خواهیم داشت

$$T_{\Psi} \leq C \sum_{j=R+1}^{\infty} \Psi^{-\Psi js} \leq C \Psi^{-\Psi Rs} \leq C n^{-\Psi s/(1+\Psi s)}$$

سرانجام با در نظر گرفتن  $\Psi^R \simeq n(\log n)^{-\Psi}$  ثابت می‌شود

$$T_{\Psi} = O(n^{-\Psi s/(1+\Psi s)}). \quad (۱۰)$$

(۳) کران بالا برای  $T_{\Psi}$ : با استفاده از نابرابری مینکوفسکی و برخی نابرابریهای ابتدایی می‌توان نشان داد  $T_{\Psi} \leq \Psi(T_{\Psi_1} + T_{\Psi_2})$  که در آن

$$\begin{aligned} T_{\Psi_1} &= E \left\| \sum_{j=\ell}^R \sum_t \sum_{k \in B(t)} \beta_{jk} I(\hat{A}_{tk} < \lambda) I(A_{tk} \leq \lambda) \psi_{jk}(x) \right\|_{\Psi}^{\Psi} \\ T_{\Psi_2} &= E \left\| \sum_{j=\ell}^R \sum_t \sum_{k \in B(t)} \beta_{jk} I(\hat{A}_{tk} < \lambda) I(A_{tk} > \lambda) \psi_{jk}(x) \right\|_{\Psi}^{\Psi} \end{aligned}$$

(۴) کران بالا برای  $T_{\Psi_1}$ : با بکارگیری لم ۸.۵ از لی (۲۰۰۸) و با استفاده از (۹) داریم

$$\begin{aligned} T_{\Psi_1} &\leq C \left\| \sum_{j=\ell}^R \sum_t \sum_{k \in B(t)} \beta_{jk} I(A_{tk} \leq \lambda) \psi_{jk}(x) \right\|_{\Psi}^{\Psi} \\ &\leq C \sum_{j=\ell}^R \sum_k \beta_{jk}^{\Psi} \leq C \sum_{j=\ell}^R \Psi^{-\Psi js} \leq C \Psi^{-\Psi \ell s} \end{aligned}$$

که با در نظر گرفتن  $\Psi^{\ell} \simeq n^{1/(1+\Psi s)}$  نتیجه زیر حاصل می‌شود

$$T_{\Psi_1} = O(n^{-\Psi s/(1+\Psi s)}). \quad (۱۱)$$

۲۱۰ ..... برآورد موجکی تابع چگالی چندک به روش آستانه‌ای بلوکی

(۵) کران بالا برای  $T_{۲۲}$ : با بکارگیری لم ۸.۵ از لی (۲۰۰۸) و با استفاده از لم ۳ می‌توان نشان داد

$$\begin{aligned} T_{۲۲} &\leq C \left\| \left( \sum_{j=\ell}^R \sum_t \sum_{k \in B(t)} \beta_{jk}^{\vee} E(I(\hat{A}_{tk} < \lambda) I(A_{tk} > \lambda)) \psi_{jk}^{\vee}(x) \right)^{1/2} \right\|_{\vee}^2 \\ &\leq C \left\| \left( \sum_{j=\ell}^R \sum_t \sum_{k \in B(t)} \beta_{jk}^{\vee} P\left(\left(\frac{1}{\ell} \sum_{k \in B(t)} (\hat{\beta}_{jk} - \beta_{jk})^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \lambda\right) \psi_{jk}^{\vee}(x) \right)^{1/2} \right\|_{\vee}^2 \\ &\leq C n^{-2} \left\| \left( \sum_{j=\ell}^R \sum_t \sum_{k \in B(t)} \beta_{jk}^{\vee} \psi_{jk}^{\vee}(x) \right)^{1/2} \right\|_{\vee}^2 \\ &\leq C n^{-2} \sum_{j=\ell}^R \sum_k \beta_{jk}^{\vee} \leq C n^{-2} \sum_{j=\ell}^R 2^{-2js} \leq C n^{-2} 2^{-2\ell s} \end{aligned}$$

که نتیجه نهایی با بکارگیری لم ۱۰.A در لی (۲۰۰۸) و با بکارگیری (۹) نتیجه حاصل می‌شود. با در نظر گرفتن  $2^{\ell} \simeq n^{1/(1+2s)}$  می‌توان ثابت نمود

$$T_{۲۲} = O(n^{-2s/(1+2s)}). \quad (۱۲)$$

و با استفاده از (۱۱) و (۱۲)، نتیجه زیر حاصل خواهد شد.

$$T_{\vee} = O(n^{-2s/(1+2s)}). \quad (۱۳)$$

(۶) کران بالا برای  $T_{۳}$ : به طریقی مشابه  $T_{\vee}$  می‌توان بیان کرد  $T_{۳} \leq 2(T_{۳۱} + T_{۳۲})$ ، که در آن

$$\begin{aligned} T_{۳۱} &= E \left\| \sum_{j=\ell}^R \sum_t \sum_{k \in B(t)} \hat{\theta}_{jk}^{\vee} I(\hat{A}_{tk} \geq \lambda) I(A_{tk} < \lambda) \psi_{jk}^{\vee}(x) \right\|_{\vee}^2 \\ T_{۳۲} &= E \left\| \sum_{j=\ell}^R \sum_t \sum_{k \in B(t)} \hat{\theta}_{jk}^{\vee} I(\hat{A}_{tk} \geq \lambda) I(A_{tk} \geq \lambda) \psi_{jk}^{\vee}(x) \right\|_{\vee}^2 \end{aligned}$$

جال کافیت برای هر یک از جملات  $T_{۳۱}$  و  $T_{۳۲}$  یک کران بالا معرفی شود.

(۷) کران بالا برای  $T_{۳۱}$ : با استفاده از تعمیم نابرابری مینکوفسکی و لم‌های ۲ و ۳ می‌توان نشان داد

$$\begin{aligned} T_{۳۱} &\leq C E \left\| \left( \sum_{j=\ell}^R \sum_t \sum_{k \in B(t)} \hat{\theta}_{jk}^{\vee} I(\hat{A}_{tk} \geq \lambda) I(A_{tk} < \lambda) \psi_{jk}^{\vee}(x) \right)^{1/2} \right\|_{\vee}^2 \\ &\leq C \left\| \left( \sum_{j=\ell}^R \sum_t \sum_{k \in B(t)} E[\hat{\theta}_{jk}^{\vee} I(\hat{A}_{tk} \geq \lambda) I(A_{tk} < \lambda)] \psi_{jk}^{\vee}(x) \right)^{1/2} \right\|_{\vee}^2 \end{aligned}$$



با استفاده از نامساوی کوشی شوارتز و لم ۱۰A از لی (۲۰۰۸) می‌توان نشان داد

$$T_{\mathfrak{r}_1} \leq C \left\| \left( \sum_{j=\ell}^R \sum_t \sum_{k \in B(t)} E \left[ \hat{\theta}_{jk}^{\mathfrak{r}} I \left( \frac{1}{\ell} \sum_{k \in B(t)} (\hat{\beta}_{jk} - \beta_{jk})^{\mathfrak{r}} \right)^{\frac{1}{\mathfrak{r}}} \geq \lambda \right] \psi_{jk}^{\mathfrak{r}}(x) \right)^{\frac{1}{\mathfrak{r}}} \right\|_{\mathfrak{r}}^{\mathfrak{r}}$$

در ادامه با بکارگیری لم‌های ۲ و ۳، نابرابری

$$\begin{aligned} T_{\mathfrak{r}_1} &\leq C n^{-\mathfrak{r}} \left\| \left( \sum_{j=\ell}^R \sum_{k=\circ}^{\mathfrak{r}^j - 1} \psi_{jk}^{\mathfrak{r}}(x) \right)^{\frac{1}{\mathfrak{r}}} \right\|_{\mathfrak{r}}^{\mathfrak{r}} \leq C n^{-\mathfrak{r}} \left( \sum_{j=\ell}^R \mathfrak{r}^j \left\| \psi_{jk}(x) \right\|_{\mathfrak{r}}^{\mathfrak{r}} \right) \\ &\leq C n^{-\mathfrak{r}} \mathfrak{r}^R \left\| \psi_{jk}(x) \right\|_{\mathfrak{r}}^{\mathfrak{r}} \end{aligned}$$

حاصل خواهد شد. با توجه به یکامتعامد بودن  $\psi$  و در نظر گرفتن  $\mathfrak{r}^R \simeq n(\log_{\mathfrak{r}}^n)^{-\mathfrak{r}}$  داریم

$$T_{\mathfrak{r}_1} \leq C n^{-1} (\log_{\mathfrak{r}}^n)^{-\mathfrak{r}} \leq C n^{-\mathfrak{r}s/(1+\mathfrak{r}s)}, \quad (۱۴)$$

(۸) کران بالا برای  $T_{\mathfrak{r}_2}$ : با استفاده از تعمیم نابرابری مینکوفسکی و با بکارگیری لم‌های ۲ و ۳، نابرابری

$$\begin{aligned} T_{\mathfrak{r}_2} &\leq C E \left\| \left( \sum_{j=\ell}^R \sum_t \sum_{k \in B(t)} \hat{\theta}_{jk}^{\mathfrak{r}} I(\hat{A}_{tk} \geq \lambda) I(A_{tk} \geq \lambda) \psi_{jk}^{\mathfrak{r}}(x) \right)^{1/\mathfrak{r}} \right\|_{\mathfrak{r}}^{\mathfrak{r}} \\ &\leq C \left\| \left( \sum_{j=\ell}^R \sum_t \sum_{k \in B(t)} E \left[ \hat{\theta}_{jk}^{\mathfrak{r}} I(\hat{A}_{tk} \geq \lambda) I(A_{tk} \geq \lambda) \right] \psi_{jk}^{\mathfrak{r}}(x) \right)^{1/\mathfrak{r}} \right\|_{\mathfrak{r}}^{\mathfrak{r}} \end{aligned}$$

حاصل خواهد شد. بنابر نامساوی کوشی شوارتز و اینکه  $1 \geq A_{jt} C_{\circ} \mathfrak{r} n^{-1}$ ، می‌توان نشان داد

$$T_{\mathfrak{r}_2} \leq C \sum_{j=\ell}^R \sum_t \sum_{k \in B(t)} E(\hat{\theta}_{jk}^{\mathfrak{r}}) A_{jt} C_{\circ} \mathfrak{r} n$$

با استفاده از لم ۲، چون  $A_{jt} = \ell^{-1} \sum_{k \in B(t)} \beta_{jk}^{\mathfrak{r}}$  داریم

$$T_{\mathfrak{r}_2} \leq C \sum_{j=\ell}^R \sum_t \ln^{-1} \mathfrak{r} n \ell^{-1} \sum_{k \in B(t)} \beta_{jk}^{\mathfrak{r}} \leq C \sum_{j=\ell}^R \sum_k \beta_{jk}^{\mathfrak{r}} \leq C \mathfrak{r}^{-\mathfrak{r}ls}$$

۲۱۲ ..... برآورد موجکی تابع چگالی چندک به روش آستانه‌ای بلوکی

که با در نظر گرفتن  $2^\ell \simeq n^{1/(1+2s)}$  داریم

$$T_{22} = O(n^{-2s/(1+2s)}), \quad (15)$$

با استفاده از (۱۴) و (۱۵) ثابت می‌شود

$$T_2 = O(n^{-2s/(1+2s)}). \quad (16)$$

با ترکیب نتایج (۷)، (۱۳)، (۱۶) و (۸) برهان بخش اول قضیه ۱ کامل می‌شود. به ازای  $p \in [1, 2]$  با استدلالی مشابه با آنچه شیرازی و همکاران (۲۰۱۲، ۲۰۱۳) ارائه نموده‌اند و با در نظر گرفتن  $2^\ell \simeq n^{\frac{2-p}{p(1+2s)}} (\log_2 n)^{\frac{2-p}{p(1+2s)}}$ ، برهان بخش دوم قضیه ۱ نیز کامل می‌شود.

## تقدیر و تشکر

نویسنده مقاله ضمن تشکر از سر دبیر و ویراستار محترم مجله، از پیشنهادات و نظرات ارزشمند داوران محترم مقاله که باعث بهبود کیفیت مقاله شده است، کمال تشکر و قدردانی را دارد.

## مراجع

- Antoniadis, A., Gregoire, G. and McKeague, I. W. (2012), Wavelet Methods for Curve Estimation, *Journal of the American Statistical Association*, **89**, 1340-1353.
- Cai, T. (2002), On Block Thresholding in Wavelet Regression: Adaptivity, Block Size, and Threshold Level, *Statistic Sinica*, **12**, 1241–1273.
- Chesneau, C., Dewan, I. and Doosti, H. (2016), Nonparametric Estimation of a Quantile Density Function by Wavelet, *Computational Statistics and Data Analysis methods*, **94**, 161–174.
- Cohen, A., Daubechies, I., Jawerth, B. and Vial, P. (1993), Wavelets on The Interval and Fast Wavelet transforms, *Applied and Computational Harmonic Analysis*, **24**, 54-81.

- Freimer, M., Kollia, G., Mudholkar, G. S. and Lin, C. T. (1988), A Study of The Generalized Tukey Lambda Family, *Communications in Statistics - Theory and Methods*, **17**, 3547-3567.
- Gilchrist, W. (2000), *Statistical Modeling with Quantile Functions*, Chapman and Hall, New York.
- Haghpanah, B., Shirazi, A., Salari-Sharif, L., Izard, A. G. and Valdevit, L. (2017), Elastic Architected Materials With Extreme Damping Capacity, *Extreme Mechanics Letters*, **17**, 56–61.
- Hall, P., Kerkycharian, G. and Picard, D. (1998), Block Threshold Rules for Curve Estimation Using Kernel and Wavelet Method, *The Annals of Statistics*, **26**, 922–942.
- Hall, P., Kerkycharian, G. and Picard, D. (1999), On The Minimax Optimality of Block Thresholded Wavelet Estimators, *The Annals of Statistics*, **9**, 33–50.
- Jeong, J.H. and Fine, J. P. (2009), Parametric Regression on Cumulative Incidence Function, *Biostatistics*, **8**, 184-196.
- Jones, M.C. (1992), Estimating Densities, Quantiles, Quantile Densities and Density Quantiles, *Annals Institute Statistical Mathematics*, **44**, 4, 721-727.
- Karian, Z. A. and Dudewicz, E. J. (2000), *Fitting Statistical Distributions: The Generalized Lambda Distribution and Generalized Bootstrap Methods*, CRC, London.
- Li, L. (2008), On The Block Thresholding Wavelet Estimators With Censored Data, *Journal of Multivariate Analysis*, **99**, 1518–1543.
- Mallat, S. (2009), *A Wavelet Tour of Signal Processing (Third Edition)*, Academic Press, Amsterdam.
- Meyer, Y. (1992), *Wavelets and Operators*, Cambridge University Press, Cambridge.
- Nair N. U. Sankaran P. G. and Kumar B. V. (2008), Total Time on Test Transforms of Order  $n$  and Its Implications in Reliability Analysis *Journal of Applied Probability*, **45**, 1126-1135.
- Nair, N. U. and Sankaran, P. G. (2009), Quantile Based Reliability Analysis, *Communications in Statistics and Theory Methods*, **38**, 222-232.
- Parzen, E. (1979), Nonparametric Statistical Data Modeling, *Journal of American Statistical Association*, **74**, 105-122.

- Peng, L. and Fine, J. P. (2007), Nonparametric Quantile Inference with Competing Risks Data, *Biometrika*, **94**, 735-744.
- Ramirez, P. and Vidakovic, B. (2010), Wavelet Density Estimation for Stratified Size-Biased Sample, *Journal of Statistical Planning and Inference*, **140**, 419-432.
- Reid, N. (1981), Estimating The Median Survival Time, *Biometrika*, **68**, 601-608.
- Sankaran, P. G. and Nair N. U. (2009), Nonparametric Estimation of Hazard Quantile Function, *Journal of Nonparametric Statistics*, **21**, 757-767.
- Sankaran, P. G., Dewan, I. and Sreedevi E. P. (2015), A Nonparametric Test For Stochastic Dominance Using Total Time on Test Transform, *American Journal of Mathematical and Management Sciences*, **34**, 162-183.
- Shirazi, E., Chaubey, Y., Doosti, H. and Nirumand, H. A. (2012), Wavelet Based Estimation For The Derivative of A Density By Block Thresholding Under Random Censorship, *Journal of the Korean Statistical Society*, **41**, 199-211.
- Shirazi, E. and Doosti, H. (2015), Multivariate Wavelet-Based Density Estimation With Size-Biased Data, *Statistical Methodology*, **27**, 12-19.
- Shirazi, E., Doosti, H., Niroumand, H. A. and Hosseinioun, N. (2013), Nonparametric Regression Estimates With Censored Data Based on Block Thresholding Method, *Journal of Statistical Planning and Inference*, **143**, 1150-1165.
- Slud, E. V., Byar, D. P. and Green, S. B. (1984), A Comparison of Reflected Versus Testbased Confidence Intervals for The Median Survival Time, Based on Censored Data, *Biometrics*, **40**, 587-600.
- Soni, P., Dewan, I. and Jain, K. (2012), Nonparametric Estimation of Quantile Density Function, *Computational Statistics and Data Analysis*, **56**, 3876-3886.
- Su, J. Q. and Wei, L. J. (1993), Nonparametric Estimation for The Difference or Ratio of Median Failure Times, *Biometrics*, **49**, 603-607.