مجله علوم آماری، پاییز و زمستان ۱۴۰۰
جلد ۱۵، شماره ۲، ص ۴۰۷ – ۴۲۵
DOI: 10.29252/jss.15.2.407
مقاله پژوهشی

کارایی برخی برآوردگرهای انقباضی پارامتر شکل توزیع پارتو–رایلی

مهدی بالوئی[۱]، عین‌اله دیری[۲]، فرشین هرمزی‌نژاد[۱]، عزت الله بالوئی جامخانه[۲]

[۱]گروه آمار، واحد اهواز، دانشگاه آزاد اسلامی

[۲]گروه آمار، واحد قائم‌شهر، دانشگاه آزاد اسلامی

تاریخ دریافت: ۱۳۹۹/۰۷/۱۹ تاریخ پذیرش و انتشار: ۱۴۰۰/۰۶/۲۰

چکیده: در اغلب موارد کاربردی برای افزایش دقت برآورد پارامترها نیاز به برآوردگری داریم که دارای کمترین مخاطره باشد. در این میان برآوردگرهای انقباضی نقش بسیار مهمی ایفا می‌کنند. هدف اصلی ما در این مقاله، بررسی کارایی برخی برآوردگرهای انقباضی پارامتر شکل توزیع پارتو –رایلی تحت دو کلاس از برآوردگرهای انقباضی است. در این تحقیق کارایی برآوردگرهای پیشنهادی را با برآوردگر نااریب که تحت تابع زیان درجه دوم خطا بدست آمده‌اند، مقایسه می‌شوند. رابطه بین دو کلاس از برآوردگرهای انقباضی بدست آمده پارامتر شکل توزیع پارتو–رایلی مورد بررسی قرارگرفته و نهایتا با استفاده از شبیه سازی، کارایی نسبی برآوردگرهای پیشنهادی مورد بحث و نتیجه گیری قرار می‌گیرند.

واژه‌های کلیدی: برآوردگر انقباضی، توزیع پارتو–رایلی، میانگین توان دوم خطا.

۱ مقدمه

برای انجام استنباط آماری درباره هر جامعه ابتدا از شاخص‌های توصیفی آن جامعه می‌توان استفاده کرد. در این زمینه برآوردگرهای نااریب نقش مهمی را ایفا کرده و بیشترین کاربردها را داشته‌اند. اما ناگفته نماند که استفاده از برآوردگرهای اریب با کمترین توان دوم خطای MSE خیلی بهتر از برآوردگرهای نااریب با کمترین

آدرس الکترونیکی نویسنده مسئول مقاله: عین اله دیری، e.deiri53@qaemiau.ac.ir
کد موضوع‌بندی ریاضی (۲۰۱۰): 62J07 ,82B80 .

توان دوم خطای MSE عمل می‌کنند. به همین منظور تحقیقات متعددی در این زمینه بر روی برآوردگرهای اریب با کمترین توان دوم خطا برای پارامتر مجهول جامعه صورت گرفته است. با رویکرد انقباضی تامپسون (۱۹۶۸)، برای بهترین برآوردگر نااریب خطی BLUE عامل انقباض را به صورت ضربی تعریف کرده و توانست برآوردگری تولید کند که دارای میانگین توان دوم خطای کمتری نسبت به BLUE است. مطالعات مهم دیگری در این زمینه انجام شده که به عنوان مثال، استاین (۱۹۸۶) در تجزیه و تحلیل بیزی از برآوردگرهای انقباضی استفاده کرد. دانیلز و کیس (۲۰۰۱)، برآوردگرهای انقباضی را برای ماتریس‌های کوواریانس مطالعه کردند. پاسکال و همکاران (۲۰۰۱)، برآوردگرهای انقباضی استوار را بررسی کردند. لدیوت و میشل (۲۰۱۲)، برآوردگرهای انقباضی غیرخطی ماتریس‌های کوواریانس در ابعاد بزرگ را بررسی کردند. همچنین می‌توان به مهتا و سرینی‌واسان (۱۹۷۱)، گاوین داراجولا و ساهای (۱۹۷۲)، داس (۱۹۷۵)، سری واستاوا و همکاران (۱۹۸۰)، رائو و سینگ (۱۹۸۲)، باتناگار (۱۹۸۶)، کروکلیس (۱۹۹۴)، سینگ و همکاران (۱۹۹۶)، سینگ و ساکسینا (۲۰۰۳)، فلاح پور و احمد (۲۰۱۴)، کرمی و آرشی (۱۳۹۳)، سنجری و رشیدی و پیشدست (۱۳۹۴)، کیاپور (۱۳۹۶)، ابجیل و اوزدمیر (۲۰۱۶)، اشاره کرد.

۱.۱ کلاس برآوردگرهای انقباضی

اولین کلاس برآوردگرهای انقباضی برای پارامتر مقیاس توزیع نمایی توسط جانی (۱۹۹۱) به صورت

$$T_{(p)} = \theta_{\circ}\left[1 + k\left(\frac{\theta_{\circ}}{\hat{\theta}}\right)^{p}\right] \tag{۱}$$

پیشنهاد شد، که در آن $\theta_{\circ}$ یک مقدار از پیش تعیین شده از فضای پارامتر Θ، k یک عامل انقباضی است که مقدار MSE را کمینه می‌کند، p یک عدد حقیقی غیر صفر است و $\widehat{\theta}$ برآوردگر نااریب (گشتاوری، درستنمایی ماکسیمم، بهترین برآوردگر نااریب با کمترین واریانس به طور یکنواخت، بهترین برآوردگر خطی نااریب، بیز) پارامتر θ است. دومین کلاس برآوردگرها برای برآورد واریانس جامعه نرمال توسط جانی (۱۹۹۱) به صورت

$$\widetilde{\sigma}^{2}_{(p)} = \sigma^{2}_{\circ}\left[1 + \omega\left(\frac{s^{2}}{\sigma^{2}_{\circ}}\right)^{p}\right] \tag{۲}$$

پیشنهاد شد، که در آن σ_0^2 یک مقدار از پیش تعیین شده از فضای پارامتر σ^2، ω یک عامل انقباضی است که مقدار MSE را کمینه می کند، p یک عدد حقیقی غیر صفر است و s^2 برآوردگر نااریب پارامتر σ^2 است. در این تحقیق کلاس برآوردگرهای اریبی که MSE، کوچکتری نسبت به برآوردگرهای نااریب، برای پارامتر شکل توزیع پارتو–رایلی دارند، با استفاده از کلاس برآوردگرهای (۱) و (۲) بدست می‌آیند. از طرف دیگر ، توزیع پارتو در توصیف پدیده های اجتماعی، علمی، ژئوفیزیکی، فشاری و سایر انواع پدیده مشاهده می‌شود. $c.d.f$ توزیع پارتو به صورت $F(x|\alpha,\sigma) = 1-\left(\frac{\sigma}{x}\right)^{-\alpha}, \quad x>0, \sigma>0, \alpha>0$ است. این توزیع با توزیع های دیگر رابطه دارد. به عنوان مثال، اگر متغیر تصادفی X توزیع یکنواخت استاندارد داشته باشد، آنگاه متغیر تصادفی $Z=\sigma X^{-\frac{1}{\alpha}}$ توزیع پارتو دارد. توزیع پارتو توسط برخی از نویسندگان مورد بررسی قرارگرفت. مالیک (۱۹۷۰)، برآورد پارامترهای توزیع پارتو را مورد مطالعه قرار داد. یکی از سلسله مراتب توزیع پارتو، توزیع لوماکس با $c.d.f$ $F(x|\alpha,\sigma) = 1-\left(1+\frac{x}{\sigma}\right)^{-\alpha}, x>0, \sigma>0, \alpha>0$ است. تعمیم‌های مختلفی از توزیع پارتو مانند توزیع بتا–پارتو وجود دارد که آکینست و همکاران (۱۹۸۶) خواص این توزیع را مورد بررسی قرار دادند.

تابع توزیع رایلی به صورت $F(x|\alpha) = 1-e^{-\frac{x^2}{2\alpha^2}}, x>0, \alpha>0$ است. این توزیع برای نمایش توزیع داده‌هایی با مشاهدات کوتاه مدت مانند، ارتفاعات امواج دریا و همچنین در پزشکی، علوم اجتماعی و علوم طبیعی استفاده می شود. آلزااتره و همکاران (۲۰۱۳)، توزیع پارتو – رایلی را به عنوان نمونه‌ای از خانواده توزیع‌های تبدیل شونده معرفی کردند. توزیع پارتو–رایلی توسط محققان زیادی مورد مطالعه قرار گرفت. به طور مثال دیری و مالکی (۲۰۲۰)، کاراترین برآوردگرهای $p.d.f$ و $c.d.f$ را مورد مطالعه قرار دادند. توابع $p.d.f$ و $c.d.f$ توزیع پارتو – رایلی به صورت $f(x|\alpha,\sigma) = \frac{\alpha}{\sigma^2}x(1+\frac{x^2}{2\sigma^2})^{-\alpha-1}, x>0, \sigma>0, \alpha>1$ و $F(x|\alpha,\sigma) = 1-(1+\frac{x^2}{2\sigma^2})^{-\alpha-1}, x\geq 0, \sigma>0, \alpha>1$ تعریف می‌شوند. با توجه کاربردهای متعدد توزیع پارتو–رایلی، هدف مطالعه حاضر، بررسی دو کلاس مختلف از برآوردگرهای انقباضی برای پارامتر شکل توزیع پارتو–رایلی است.

در بخش ۲، برآوردگرهای انقباضی پیشنهادی تحت کلاس‌های (۱)، (۲)و برآوردگرهای MLE و UMVUE برای پارامتر شکل توزیع پارتو–رایلی و خواص آنها ارایه شده است. نتایج مقایسه کارایی برآوردگرها و مطالعات شبیه‌سازی در بخش ۳ ارائه شده است. در بخش ۴ بحث و نتیجه‌گیری و پیشنهادها ارایه می‌شوند.

۲ برآوردگرهای پارامتر شکل

گوییم متغیر تصادفی X دارای توزیع پارتو-رایلی با پارامترهای مقیاس σ و شکل α است هرگاه تابع چگالی احتمال آن به صورت

$$f\left(x|\sigma,\alpha\right)=\begin{cases} \frac{\alpha}{\sigma^{۲}}x\left[۱+\frac{x^{۲}}{۲\sigma^{۲}}\right]^{-(\alpha+۱)} & x>۰,\sigma>۰,\alpha>۰ \\ ۰ & \text{جاهای دیگر} \end{cases} \quad (۳)$$

اگر متغیر تصادفی X دارای تابع چگالی احتمال پارتو-رایلی داده شده در معادله (۳) باشد، آنگاه برآوردگر ماکسیمم درستنمایی پارامتر شکل توزیع پارتو-رایلی به صورت $\widehat{\alpha}=n[\sum\limits_{i=۱}^{n}\log[1+\frac{X_i^{۲}}{۲\sigma^{۲}}]^{-۱}$ بدست می‌آید، که با استفاده از آن یک UMVUE برای α به صورت

$$\widetilde{\alpha}=\frac{n-۱}{\mathrm{n}}\widehat{\alpha} \quad (۴)$$

با واریانس $Var\left(\widetilde{\alpha}\right)=\frac{۱}{n-۲}\alpha^{۲}$ و گشتاور مرتبه دوم $E\left(\widetilde{\alpha}^{۲}\right)=\frac{n-۱}{n-۲}\alpha^{۲}$ حاصل می‌شود.

قضیه ۱. کلاس برآوردگرهای انقباضی برای پارامتر شکل توزیع پارتو-رایلی تحت معادله (۱) به صورت

$$\alpha^{*}_{(\mathrm{p})}=\alpha_{۰}+\left(\widetilde{\alpha}-\alpha_{۰}\right)k(p) \quad (۵)$$

است، که در آن $\widetilde{\alpha}$، UMVUE پارامتر α و $\alpha_{۰}$ مقداری تعیین شده است و ضریب انقباض به صورت

$$k(p)=\frac{(n-p-۱)!}{(n-۲p-۱)!}(n-۱)^{p} \quad (۶)$$

تعریف شده، که در آن p عددی حقیقی غیر صفر است. میانگین توان دوم خطای برآوردگر انقباضی برابر

$$MSE\left(\alpha^{*}_{(p)}\right)=\frac{1}{n-۲}\alpha^{۲}\left[k^{۲}(p)+(n-۲)(۱-\lambda)^{۲}\left(۱-k\left(p\right)\right)^{۲}\right] \quad (۷)$$

است، که در آن $\lambda = \frac{\alpha_\circ}{\alpha}$. علاوه بر این میزان اریبی کلاس برآورگرهای $\alpha^*_{(p)}$ عبارت است از

$$Bias\big(\alpha^*_{(p)}\big) = \big(\alpha_\circ - \alpha\big)\big(۱ - k(p)\big) \qquad (۸)$$

برهان: کلاس برآوردگرهای انقباضی پارامتر شکل توزیع پارتو-رایلی را به صورت

$$\alpha^*_{(p)} = \alpha_\circ\big[۱ + k\big(\frac{\alpha_\circ}{\widetilde{\alpha}}\big)^p\big] \qquad (۹)$$

در نظر می‌گیریم، به سادگی گشتاور مرتبه jp از UMVUE به صورت

$$E\big[\big(\frac{۱}{\widetilde{\alpha}}\big)^{jp}\big] = \frac{\Gamma\big(n+jp\big)}{\Gamma\big(n\big)\big(n-۱\big)^{jp}}\alpha^{-jp}, \quad j = ۱, ۲$$

بدست می‌آید. بنابراین برای گشتاور مرتبه اول و دوم از کلاس برآوردگرهای انقباضی $\alpha^*_{(p)}$ داریم،

$$\begin{aligned} E\big[\alpha^*_{(p)}\big] &= \alpha_\circ\big[۱+k\alpha_\circ{}^p E\big(\frac{۱}{\widetilde{\alpha}}\big)^p\big] \\ &= \alpha_\circ\big[۱+k\Big(\frac{\alpha_\circ}{\alpha}\Big)^p \frac{\big(n+p-۱\big)!}{\big(n-۱\big)!\big(n-۱\big)^p}\big] \\ E\big[(\alpha^*_{(p)})^۲\big] &= \alpha_\circ^۲\big[۱+۲k\alpha_\circ{}^p E\big(\frac{۱}{\widetilde{\alpha}}\big)^p + k^۲\alpha_\circ{}^{۲p} E\big(\frac{۱}{\widetilde{\alpha}}\big)^{۲p}\big] \\ &= \alpha_\circ^۲\big[۱+۲k\big(\frac{\alpha_\circ}{\alpha}\big)^p \frac{\big(n+p-۱\big)!}{\big(n-۱\big)!\big(n-۱\big)^p} + k^۲\big(\frac{\alpha_\circ}{\alpha}\big)^{۲p} \frac{\big(n+۲p-۱\big)!}{\big(n-۱\big)!\big(n-۱\big)^{۲p}}\big] \end{aligned}$$

قرار می‌دهیم $\lambda = \frac{\alpha_\circ}{\alpha}$، در این صورت MSE کلاس برآوردگرهای انقباضی $\alpha^*_{(p)}$ به صورت

$$\begin{aligned} MSE\big(\alpha^*_{(p)}\big) &= \alpha^۲ - ۲\alpha\alpha_\circ\big[۱+k\big(\frac{\alpha_\circ}{\alpha}\big)^p \frac{\big(n+p-۱\big)!}{\big(n-۱\big)!\big(n-۱\big)^p}\big] \\ &\quad + \alpha_\circ{}^۲\big[۱+۲k\big(\frac{\alpha_\circ}{\alpha}\big)^p \frac{\big(n+p-۱\big)!}{\big(n-۱\big)!\big(n-۱\big)^p} + k^۲\big(\frac{\alpha_\circ}{\alpha}\big)^{۲p} \frac{\big(n+۲p-۱\big)!}{\big(n-۱\big)!\big(n-۱\big)^{۲p}}\big] \end{aligned}$$

بدست می‌آید. طول کمترین مقدار این تابع برابر ریشه مشتق مرتبه اول آن نسبت به k است. بنابراین با

مشتق گیری و ساده کردن داریم،

$$k=\left(\frac{\alpha-\alpha_\circ}{\alpha_\circ}\right)\left(\frac{\alpha}{\alpha_\circ}\right)^p\frac{(n+p-۱)\,!}{(n+۲p-۱)\,!}\,(n-۱)^p=(\frac{۱}{\lambda}-۱)\lambda^{-p}k\,(p)$$

که در آن $\lambda=\frac{\alpha_\circ}{\alpha}$ و $k(p)=\frac{(n+p-۱)!}{(n+۲p-۱)!}(n-۱)^p$، پس به ازای مقدار k بدست آمده، میانگین توان دوم خطای کلاس برآوردگرهای انقباضی به حداقل می‌رسند. عامل انقباضی که به دست آمد، تابعی از پارامتر α است، چون در عمل α نامعلوم است جایگزین کردن برآوردگرهای نااریب به جای آن، پیشنهاد می‌شود. در این صورت

$$\tilde{k}=\left(\frac{\widetilde{\alpha}-\alpha_\circ}{\alpha_\circ}\right)\left(\frac{\widetilde{\alpha}}{\alpha_\circ}\right)^p\frac{(n+p-۱)\,!}{(n+۲p-۱)\,!}\,(n-۱)^p \qquad (۱۰)$$

نهایتا، کلاس برآوردگرهای انقباضی پارامتر شکل توزیع پارتو-رایلی به صورت

$$\begin{aligned}\alpha^*_{(p)} &= \alpha_\circ\big[۱+\big(\frac{\widetilde{\alpha}-\alpha_\circ}{\alpha_\circ}\big)\big(\frac{\widetilde{\alpha}}{\alpha_\circ}\big)^p\frac{(n+p-۱)!}{(n+۲p-۱)!}(n-۱)^p\big(\frac{\alpha_\circ}{\widetilde{\alpha}}\big)^p\big]\\ &= \alpha_\circ+(\widetilde{\alpha}-\alpha_\circ)k(p)\end{aligned}$$

حاصل می‌شود. بنابراین

$$\begin{aligned}MSE(\alpha^*_{(p)}) &= E\big[\alpha_\circ+(\widetilde{\alpha}-\alpha_\circ)k(p)-\alpha\big]^۲\\ &=\frac{۱}{n-۲}\alpha^۲k^۲(p)+(\alpha-\alpha_\circ)^۲(۱-k(p))^۲,\\ &=\frac{۱}{n-۲}\alpha^۲\big[k^۲(p)+(n-۲)\,(۱-\lambda)^۲(۱-k(p))^۲\big],\end{aligned}$$

که در آن $\lambda=\frac{\alpha_\circ}{\alpha}$ و اریبی برآوردگر $Bias(\alpha^*_{(p)})=(\alpha_\circ-\alpha)\,(۱-k(p))$ است. کارایی نسبی کلاس برآوردگرهای انقباضی نسبت به برآوردگر نااریب با کمترین واریانس به طور یکنواخت $\widetilde{\alpha}$ به صورت

$$\frac{MSE(\alpha^*_{(p)})}{Var(\widetilde{\alpha})}=k^۲(p)+(n-۲)(۱-\lambda)^۲(۱-k(p))^۲ \qquad (۱۱)$$

بدست می‌آید. کارایی کلاس برآوردگرهای انقباضی $\alpha^*_{(p)}$ نسبت به UMVUE بهتر است هرگاه رابطه (۱۱) کوچکتر از یک باشد، به عبارت دیگر، $MSE(\alpha^*_{(p)})<Var(\widetilde{\alpha})$.

فرع ۱. در رابطه‌های (۶) و (۷) فرض کنید $p=1$، در این صورت برآوردگر انقباضی $\alpha^*_{(1)}$ به صورت

$$\alpha^*_{(1)}=\alpha_0+(\widetilde{\alpha}-\alpha_0)\Big(\frac{n-1}{n+1}\Big)$$

بدست می‌آید. بنابر (۸) با قراردادن $p=1$، داریم

$$MSE(\alpha^*_{(1)})=\frac{1}{n-2}\alpha^2\Big[\Big(\frac{n-1}{n+1}\Big)^2+(n-2)(1-\lambda)^2\Big(1-\frac{n-1}{n+1}\Big)^2\Big]$$

همچنین کارایی نسبی برآوردگر انقباضی $\alpha^*_{(1)}$ نسبت به UMVUE برابر است با،

$$\frac{MSE(\alpha^*_{(1)})}{Var(\widetilde{\alpha})}=\Big(\frac{n-1}{n+1}\Big)^2+(n-2)(1-\lambda)^2\Big(\frac{2}{n+1}\Big)^2$$

واضح است که برآوردگر انقباضی $\alpha^*_{(1)}$ کاراتر از برآوردگر $\widetilde{\alpha}$ است هرگاه نابرابری $\frac{MSE(\alpha^*_{(1)})}{Var(\widetilde{\alpha})}<1$ برقرار باشد. به عبارت دیگر

$$\Big(\frac{n-1}{n+1}\Big)^2+(n-2)(1-\lambda)^2\Big(\frac{2}{n+1}\Big)^2<1 \quad \rightarrow \quad 0<\lambda<1+\sqrt{\frac{n}{n-2}}$$

پس به ازای تمام مقادیر λ که در نامساوی بالا صدق کند برآوردگر انقباضی $\alpha^*_{(1)}$ بهتر از UMVUE خواهد بود. علاوه بر این هرگاه n به سمت بی نهایت میل کند نابرابری فوق به صورت $0<(1-\lambda)^2<1$ تبدیل می‌شود، پس از ساده کردن، نابرابری به صورت $0<\lambda<2$ بدست می‌آید.

فرع ۲. در رابطه‌های (۶) و (۷) فرض کنید $p=2$، در این صورت برآوردگر انقباضی به صورت $\alpha^*_{(1)}=\alpha_0+(\widetilde{\alpha}-\alpha_0)\frac{(n-1)^2}{(n+2)(n+3)}$ بدست می‌آید، بنابر (۸) با قراردادن $p=2$، داریم

$$MSE(\alpha^*_{(2)})=\frac{\alpha^2}{n-2}\Big[\Big(\frac{(n-1)^2}{(n+2)(n+3)}\Big)^2+(n-2)(1-\lambda)^2\Big(1-\frac{(n-1)^2}{(n+2)(n+3)}\Big)^2\Big]$$

همچنین کارایی نسبی برآوردگر انقباضی $\alpha^*_{(۲)}$ نسبت به UMVUE برابر است با

$$\frac{MSE\big(\alpha^*_k(۲)\big)}{Var\big(\widetilde{\alpha}\big)}=\Big(\frac{(n-۱)^۲}{(n+۲)(n+۳)}\Big)^۲+(n-۲)\big(۱-\lambda\big)^۲\Big(\frac{۷n+۵}{(n+۲)(n+۳)}\Big)^۲$$

واضح است که برآوردگر انقباضی $\alpha^*_{(۲)}$ کاراتر از برآوردگر $\widetilde{\alpha}$ است هرگاه نابرابری $\frac{MSE\left(\alpha^*_{(۲)}\right)}{Var\left(\widetilde{\alpha}\right)}<۱$ برقرار باشد. پس به ازای مقادیر $۰<\lambda<۱+\sqrt{\frac{\left(۲n^۲+۳n+۷\right)}{(n-۲)\left(۷n+۵\right)}}$، برآوردگر انقباضی $\alpha^*_{(۲)}$ بهتر از UMVUE خواهد بود. علاوه بر این هرگاه n به سمت بی نهایت میل کند نابرابری فوق به صورت $۱-\sqrt{\frac{۲}{۷}}<\lambda<۱+\sqrt{\frac{۲}{۷}}$ بدست می‌آید.

قضیه ۲. کلاس برآوردگرهای انقباضی، پارامتر شکل توزیع پارتو-رایلی تحت کلاس (۲) به صورت

$$\alpha^*_\omega(p)=\alpha_۰+\big(\widetilde{\alpha}-\alpha_۰\big)\omega(p) \qquad (۱۲)$$

است، که در آن

$$\omega_{(p)}=\frac{(n-p-۱)!}{(n-۲p-۱)!(n-۱)^p} \qquad (۱۳)$$

ضریب انقباضی است. با قرار دادن $\lambda=\frac{\alpha_۰}{\alpha}$، MSE و اریبی برآوردگرهای انقباضی به ترتیب عبارتند از

$$\begin{aligned}&MSE\big(\alpha^*_{(p)}\big)=\alpha^۲\Big[\frac{۱}{n-۲}\omega^۲(p)+\big(۱-\lambda\big)^۲\big(۱-\omega(p)\big)^۲\Big]\\&Bias\big(\alpha^*_\omega(p)\big)=\big(\alpha_۰-\alpha\big)\,\big(۱-\omega(p)\,\big)\end{aligned} \qquad (۱۴)$$

برهان: بنابر (۲)، کلاس برآوردگرهای انقباضی برابرند با $\alpha^*_\omega(p)=\alpha_۰\left[۱+\omega\left(\frac{\widetilde{\alpha}}{\alpha_۰}\right)^p\right]$. گشتاور مرتبه (jp) از UMVUE به صورت $E\left[\widetilde{\alpha}^{jp}\right]=\frac{\Gamma\left(n-jp\right)}{\Gamma\left(n\right)}\left(n-۱\right)^{jp}\alpha^{jp},\quad j=۱,۲$ بدست می‌آید،

همچنین گشتاورهای مرتبه اول و دوم این برآوردگرها عبارتند از

$$\begin{aligned} E\big[\alpha^*_\omega(p)\big] &= \alpha_\circ\big[1+\omega E\big(\frac{\widetilde{\alpha}}{\alpha_\circ}\big)^p\big] = \alpha_\circ\big[1+\omega\big(\frac{\alpha}{\alpha_\circ}\big)^p\frac{(n-p-1)!}{(n-1)!}(n-1)^p\big] \\ E\big[\big(\alpha^*_\omega(p)\big)^2\big] &= \alpha_\circ^2\big[1+2\omega E\big(\frac{\widetilde{\alpha}}{\alpha_\circ}\big)^p+\omega^2 E\big(\frac{\widetilde{\alpha}}{\alpha_\circ}\big)^{2p}\big] \\ &= \alpha_\circ^2\big[1+2\omega\big(\frac{\alpha}{\alpha_\circ}\big)^p\frac{(n-p-1)!}{(n-1)!}(n-1)^{\mathrm{p}} \\ &+ \omega^2\big(\frac{\alpha}{\alpha_\circ}\big)^{2p}\frac{(n-2p-1)!}{(n-1)!}(n-1)^{2p}\big] \end{aligned}$$

این توابع برای محاسبه MSE کلاس برآوردگرهای انقباضی مورد نیاز است زیرا با قرار دادن $\lambda=\frac{\alpha_\circ}{\alpha}$،

$$\begin{aligned} MSE\big(\alpha^*_\omega(p)\big) &= \alpha^2-2\alpha\alpha_\circ\big[1+\omega\big(\frac{\alpha}{\alpha_\circ}\big)^p\frac{(n-p-1)!}{(n-1)!}(n-1)^p\big] \\ &+ \alpha_\circ^2\big[1+2\omega\big(\frac{\alpha}{\alpha_\circ}\big)^p\frac{(n-p-1)!}{(n-1)!}(n-1)^p \\ &+ \omega^2\big(\frac{\alpha}{\alpha_\circ}\big)^{2p}\frac{(n-2p-1)!}{(n-1)!}(n-1)^{2p}\big] \end{aligned} \qquad (۱۵)$$

طول کمترین مقدار این تابع برابر با ریشه معادله مشتق مرتبه اول نسبت به ω است، بنابراین با مشتق گیری داریم،

$$\omega=\big(\frac{\alpha-\alpha_\circ}{\alpha_\circ}\big)\big(\frac{\alpha_\circ}{\alpha}\big)^p\frac{(n-p-1)!}{(n-2p-1)!(n-1)^{\mathrm{p}}}=\big(\frac{1}{\lambda}-1\big)(\lambda)^{-p}\omega(p)$$

به ازای این ω، مقدار $\mathrm{MSE}\big(\alpha^*_\omega(p)\big)$ به حداقل می‌رسد. چون عامل انقباضی تابعی از پارامتر نامعلوم α است عملا نمی‌توان، آن را بدست آورد، بنابراین روش جایگزینی برآوردگرهای ناریب، به جای پارامترهای موجود پیشنهاد می‌شود. در این صورت مقدار ωبه صورت

$$\widetilde{\omega}=\big(\frac{\widetilde{\alpha}-\alpha_\circ}{\alpha_\circ}\big)\big(\frac{\alpha_\circ}{\widetilde{\alpha}}\big)^p\frac{(n-p-1)!}{(n-2p-1)!(n-1)^{\mathrm{p}}} \qquad (۱۶)$$

برآورد می‌شود. در نتیجه، وقتی اصلاحات و تغییرات لازم صورت گرفت، کلاس برآوردگرهای انقباضی برای پارامتر شکل توزیع پارتو-رایلی و MSE آن بترتیب به صورت

$$\begin{aligned} \alpha_\omega^*(p) &= \alpha_\circ\big[1+\big(\frac{\widetilde{\alpha}-\alpha_\circ}{\alpha_\circ}\big)\big(\frac{\alpha_\circ}{\widetilde{\alpha}}\big)^p\frac{(n-p-۱)!}{(n-۲p-۱)!(n-۱)^{\mathrm{p}}}\big(\frac{\widetilde{\alpha}}{\alpha_\circ}\big)^p\big] \\ &= \alpha_\circ+(\widetilde{\alpha}-\alpha_\circ)\omega(p) \\ MSE(\alpha_\omega^*(p)) &= \frac{۱}{n-۲}\alpha^۲\omega^۲(p)+(\alpha-\alpha_\circ)^۲(۱-\omega(p))^۲ \end{aligned} \tag{۱۷}$$

نتیجه فوق با کمی محاسبات از (۱۵) بدست می‌آید. حال با جایگذاری $\lambda=\frac{\alpha_\circ}{\alpha}$ در (۱۷) داریم

$$\begin{aligned} &MSE(\alpha_\omega^*(p))=\frac{۱}{n-۲}\alpha^۲\left[\omega^۲(p)+(n-۲)(۱-\lambda)^۲(۱-\omega(p))^۲\right] \\ &Bias(\alpha_\omega^*(p))=E(\alpha_\omega^*(p))-\alpha=(\alpha_\circ-\alpha)(۱-\omega(p)) \end{aligned}$$

کارایی نسبی کلاس برآوردگرهای انقباضی $\alpha_\omega^*(p)$ نسبت به برآوردگر نااریب با کمترین واریانس به طور یکنواخت $\widetilde{\alpha}$ به صورت

$$\frac{MSE(\alpha_\omega^*(p))}{Var(\widetilde{\alpha})}=\omega^۲(p)+(n-۲)(۱-\lambda)^۲(۱-\omega(p))^۲ \tag{۱۸}$$

بدست می‌آید. کارایی کلاس برآوردگرهای انقباضی $\alpha_\omega^*(p)$ نسبت به UMVUE بیشتر است، هرگاه رابطه (۱۸) کوچکتر از یک باشد، به عبارت دیگر، $MSE(\alpha_\omega^*(p))<Var(\widetilde{\alpha})$.

فرع ۳. در رابطه های (۱۲) و (۱۳) فرض کنید $p=۱$، در این صورت برآوردگر انقباضی $\alpha_\omega^*(۱)$ به صورت $\alpha_\omega^*(۱)=\alpha_\circ+(\widetilde{\alpha}-\alpha_\circ)\frac{n-۲}{n-۱}$ بدست می‌آید. بنابر (۱۷) با قرار دادن $p=۱$، داریم

$$MSE(\alpha_\omega^*(۱)) = \frac{\alpha^۲}{n-۲}\big[\big(\frac{n-۲}{n-۱}\big)^۲+(n-۲)(۱-\lambda)^۲\big(۱-\frac{n-۲}{n-۱}\big)^۲\big]$$

همچنین کارایی نسبی برآوردگر انقباضی $\alpha_\omega^*(۱)$ نسبت به UMVUE برابر است با

$$\frac{MSE(\alpha_\omega^*(۱))}{Var(\widetilde{\alpha})} = \big(\frac{n-۲}{n-۱}\big)^۲+(n-۲)(۱-\lambda)^۲\big(۱-\frac{n-۲}{n-۱}\big)^۲$$

واضح است که برآوردگر انقباضی $\alpha^*_\omega(۱)$ کاراتر از برآوردگر $\widetilde{\alpha}$ است هرگاه نابرابری $\frac{MSE\big(\alpha^*_\omega(۱)\big)}{Var\big(\widetilde{\alpha}\big)}<۱$ برقرار باشد. پس داریم $۱ > \big(\frac{n-۲}{n-۱}\big)^۲ + (n-۲)(۱-\lambda)^۲\big(\frac{۱}{n-۱}\big)^۲$. با بازنویسی نابرابری فوق و محاسبات ساده خواهیم داشت، $۰ < \lambda < ۱ + \sqrt{\frac{۲n-۳}{n-۲}}$. پس به ازای تمام مقادیر λ که در رابطه فوق صدق کنند برآوردگر انقباضی $\alpha^*_\omega(۱)$ بهتر از UMVUE خواهد بود. علاوه بر این، هرگاه n به سمت بی نهایت میل کند نابرابری فوق به صورت $۲ > (\lambda-۱)^۲$ تبدیل می‌شود، پس از ساده کردن، نابرابری فوق به صورت $۰ < \lambda < ۱ + \sqrt{۲}$ بدست می‌آید.

فرع ۴. به ازای $p = ۲$، با توجه به (۱۲) و (۱۳) و قضیه ۲ برآوردگر انقباضی و MSE آن عبارتند از

$$\begin{aligned}
\alpha^*_\omega(۲) &= \alpha_۰ + (\widetilde{\alpha} - \alpha_۰)\frac{(n-۳)(n-۴)}{(n-۱)^۲}\\
MSE\big(\alpha^*_\omega(۲)\big) &= \frac{\alpha^۲}{n-۲}\Big[\Big(\frac{(n-۳)(n-۴)}{(n-۱)^۲}\Big)^۲\\
&+ (n-۲)(۱-\lambda)^۲\Big(۱-\frac{(n-۳)(n-۴)}{(n-۱)^۲}\Big)^۲\Big]
\end{aligned}$$

همچنین کارایی نسبی برآوردگر انقباضی $\alpha^*_\omega(۲)$ نسبت به UMVUE برابر است با

$$\frac{MSE\big(\alpha^*_\omega(۲)\big)}{Var\big(\widetilde{\theta}\big)} = \Big(\frac{(n-۳)(n-۴)}{(n-۱)^۲}\Big)^۲ + (n-۲)(۱-\lambda)^۲\Big(۱-\frac{(n-۳)(n-۴)}{(n-۱)^۲}\Big)^۲$$

واضح است که برآوردگر انقباضی $\alpha^*_\omega(۲)$ کاراتر از برآوردگر $\widetilde{\alpha}$ است هرگاه نابرابری $\frac{MSE(\alpha^*_\omega(۲))}{Var(\widetilde{\alpha})}<۱$ برقرار باشد. پس $۱ > (\lambda-۱)^۲\frac{(n-۲)(۵n+۱۱)^۲}{(n-۱)^۴} + \frac{\big((n-۳)(n-۴)\big)^۲}{(n-۱)^۴}$ و در نتیجه

$$۱ - \sqrt{\frac{(۲n^۲-۹n+۱۳)}{(n-۲)(۵n-۱۱)}} < \lambda < ۱ + \sqrt{\frac{(۲n^۲-۹n+۱۳)}{(n-۲)(۵n-۱۱)}}.$$

پس به ازای تمام مقادیر λ که در رابطه فوق صدق کنند برآوردگر انقباضی $\alpha^*_\omega(۲)$ بهتر از UMVUE خواهد بود. علاوه بر این، هرگاه n به سمت بی نهایت میل کند نابرابری فوق به صورت $1-\sqrt{\frac{۲}{۵}}<\lambda<۱+\sqrt{\frac{۲}{۵}}$ یا $۰/۳۷ < \lambda < ۱/۶۳$ تبدیل می‌شود،

تذکر ۱. کلاس برآوردگرهای پیشنهادی جانی (۱۹۹۱) در (۱) به طور مستقیم با کلاس برآوردگرهای

پیشنهادی سینگ و سینگ (۱۹۹۷) در (۲) برای پارامتر شکل توزیع پارتو-رایلی به صورت $k\left(p\right) = \omega\left(-p\right)$ ارتباط دارد.

۳ مقایسه برآوردگرها

در این بخش، کارایی نسبی کلاس برآوردگرهایی انقباضی با UMVUE برای پارامتر شکل توزیع پارتو-رایلی با استفاده از مقادیر مختلف n ، p و λ مورد بررسی قرار می‌گیرد. تحت اولین کلاس برآوردگرهای انقباضی که توسط جانی (۱۹۹۱) پیشنهاد شد، کارایی نسبی کلاس برآوردگرهای انقباضی (۶) نسبت به UMVUE (۵) برای مقادیر مختلف n، p و λ با کمک (۱۱) محاسبه می‌شوند. جدول ۱ نشان می‌دهد که برآوردگر انقباضی $\alpha^*_{(p)}$ به ازای مقادیر $\frac{-۱}{۲} \leq p \leq \frac{۱}{۲}$ بهتر از برآوردگرهای نااریب برای تمام مقادیر λ است. و به ازای مقادیر $۰/۱۲۵ < \lambda \leq ۱/۵$ برآوردگرهای انقباضی $\alpha^*_{(\frac{-۳}{۲})}$ ، $\alpha^*_{(-۱)}$ $\alpha^*_{(۱)}$ و به ازای مقادیر $۰/۵ \leq \lambda \leq ۱/۵$ برآوردگرهای انقباضی $\alpha^*_{\left(\frac{۳}{۲}\right)}$ $\alpha^*_{(-۲)}$ کاراتر از برآوردگر نااریب هستند. همچنین، به ازای $\lambda =۱$ ، همه برآوردگرهای انقباضی پیشنهادی بهتر از برآوردگرهای نااریب هستند. از این رو با توجه به مقادیر مختلف λ ، هر چه مقدار پیش بینی شده $\alpha_۰$ به مقدار واقعی α نزدیکتر باشد کارایی برآوردگرهای پیشنهادی بهتر از UMVUE خواهد شد. علاوه بر این، افزایش مقدار p، باعث کاهش کارآیی کلاس برآوردگرهای انقباضی نسبت به برآوردگر نااریب می‌شود.

به طور متشابه، کارایی نسبی کلاس برآوردگرهای انقباضی داده شده در (۱۲) با توجه به برآوردگر پیشنهادی (۵) برای مقادیر مختلف n ، p و λ با کمک (۱۸) محاسبه می‌شود. نتایج جدول ۲ نشان می‌دهد که برآوردگر انقباضی $\alpha^*_{(p)}$ به ازای مقادیر $\frac{-۱}{۲} \leq p \leq \frac{۱}{۲}$ بهتر از برآوردگرهای نااریب برای تمام مقادیر λ است، و به ازای مقادیر $۰/۱۲۵ < \lambda \leq ۱/۵$ برآوردگرهای انقباضی $\alpha^*_{(\frac{۳}{۲})}$، $\alpha^*_{(-۱)}$، $\alpha^*_{(۱)}$ و به ازای مقادیر $۰/۵ \leq \lambda < ۲/۵$ برآوردگر انقباضی $\alpha^*_{(\frac{-۳}{۲})}$ و $\alpha^*_{(\frac{۳}{۲})}$ کاراتر از برآوردگر نااریب هستند . همچنین، به ازای $\lambda =۱$ ، همه برآوردگرهای انقباضی پیشنهادی بهتراز برآوردگرهای نااریب هستند. از این رو با توجه به مقادیر مختلف λ، هر چه مقدار پیش بینی شده $\alpha_۰$ از پارامتر به مقدار واقعی α نزدیکتر باشد (λ به یک نزدیک باشد) کارایی برآوردگرهای پیشنهادی بهتر از UMVUE خواهد شد. علاوه براین، افزایش مقدار p، باعث افزایش کارآیی کلاس برآوردگرهای انقباضی نسبت به برآوردگر نااریب می‌شود.

با مقایسه کارایی کلاس برآوردگرهای انقباضی نسبت به برآوردگرهای نااریب در جداول ۱ و ۲ ملاحظه می‌شوند که محدوده کارآیی کلاس برآوردگرهای انقباضی پیشنهادیی (۱۲) نسبت به برآوردگر نااریب (۵)،

جدول ۱. کارایی نسبی کلاس برآوردگر پیشنهادی (۶) در مقابل برآوردگر (۵)

λ	برآوردگر	n: ۵	۱۰	۱۵	۲۵	۵۰
	$\alpha_k^*(-2)$	۱/۷۷۴۲	۱/۶۸۸۸	۱/۵۱۴۸	۱/۳۳۳۱	۱/۱۷۵۰
	$\alpha_k^*(-\frac{3}{2})$	۰/۹۵۷۵	۰/۹۹۴۸	۰/۹۹۸۷	۱/۰۰۰۱	۱/۰۰۰۳
	$\alpha_k^*(-1)$	۰/۷۰۶۰	۰/۸۶۵۷	۰/۹۱۳۰	۰/۹۴۹۰	۰/۹۷۵۰
۰/۱۲۵	$\alpha_k^*(-\frac{1}{2})$	۰/۹۴۱۷	۰/۹۷۳۸	۰/۹۸۳۱	۰/۹۹۰۱	۰/۹۹۵۱
	$\alpha_k^*(\frac{1}{2})$	۰/۷۹۸۴	۰/۹۰۲۲	۰/۹۳۵۴	۰/۹۶۱۵	۰/۹۸۰۹
	$\alpha_k^*(1)$	۰/۶۹۹۶	۰/۸۷۱۹	۰/۹۲۱۱	۰/۹۵۶۳	۰/۹۷۹۶
	$\alpha_k^*(\frac{3}{2})$	۰/۸۸۶۱	۱/۱۱۳۹	۱/۱۳۶۹	۱/۱۱۹۰	۱/۰۷۶۱
	$\alpha_k^*(2)$	۱/۲۵۳۵	۱/۶۸۵۳	۱/۶۹۶۴	۱/۵۷۸۸	۱/۳۶۸۷
	$\alpha_k^*(-2)$	۰/۵۸۹۸	۰/۷۳۲۵	۰/۸۰۰۱	۰/۸۶۸۶	۰/۹۲۹۷
	$\alpha_k^*(-\frac{3}{2})$	۰/۴۲۸۹	۰/۶۷۵۸	۰/۷۷۶۸	۰/۸۶۳۰	۰/۹۳۰۴
	$\alpha_k^*(-1)$	۰/۶۰۹۴	۰/۸۱۴۸	۰/۸۷۸۸	۰/۹۲۸۴	۰/۹۶۴۶
۰/۵	$\alpha_k^*(-\frac{1}{2})$	۰/۹۴۰۳	۰/۹۷۳۰	۰/۹۸۲۶	۰/۹۸۹۸	۰/۹۹۵۰
	$\alpha_k^*(\frac{1}{2})$	۰/۷۷۳۳	۰/۸۸۵۷	۰/۹۲۳۶	۰/۹۵۴۱	۰/۹۷۷۰
	$\alpha_k^*(1)$	۰/۵۲۷۸	۰/۷۳۵۵	۰/۸۱۶۴	۰/۸۸۶۱	۰/۹۴۱۶
	$\alpha_k^*(\frac{3}{2})$	۰/۴۳۰۰	۰/۶۶۶۷	۰/۷۶۴۷	۰/۸۵۱۹	۰/۹۲۳۱
	$\alpha_k^*(2)$	۰/۴۶۴۳	۰/۷۳۱۹	۰/۸۳۰۲	۰/۹۰۶۵	۰/۹۵۸۱
	$\alpha_k^*(-2)$	۰/۰۱۵۶	۰/۲۶۸۹	۰/۴۵۳۶	۰/۶۴۳۳	۰/۸۱۰۸
	$\alpha_k^*(-\frac{3}{2})$	۰/۱۷۲۶	۰/۵۲۱۲	۰/۶۶۹۲	۰/۷۹۶۶	۰/۸۹۶۶
	$\alpha_k^*(-1)$	۰/۵۶۲۵	۰/۷۹۰۱	۰/۸۶۲۲	۰/۹۱۸۴	۰/۹۵۹۶
۱/۰	$\alpha_k^*(-\frac{1}{2})$	۰/۹۳۹۶	۰/۹۷۲۶	۰/۹۸۲۳	۰/۹۸۹۶	۰/۹۹۴۹
	$\alpha_k^*(\frac{1}{2})$	۰/۷۶۱۰	۰/۸۷۷۸	۰/۹۱۷۹	۰/۹۵۰۴	۰/۹۷۵۱
	$\alpha_k^*(1)$	۰/۴۴۴۴	۰/۶۶۹۴	۰/۷۶۵۶	۰/۸۵۲۱	۰/۹۲۳۱
	$\alpha_k^*(\frac{3}{2})$	۰/۲۰۸۸	۰/۴۴۹۹	۰/۵۸۴۲	۰/۷۲۲۴	۰/۸۴۸۹
	$\alpha_k^*(2)$	۰/۰۸۱۶	۰/۲۶۹۶	۰/۴۱۰۳	۰/۵۸۰۵	۰/۷۵۹۰
	$\alpha_k^*(-2)$	۰/۵۸۹۸	۰/۷۳۲۵	۰/۸۰۰۱	۰/۸۶۸۶	۰/۹۲۹۷
	$\alpha_k^*(-\frac{3}{2})$	۰/۴۲۸۹	۰/۶۷۵۹	۰/۷۷۶۸	۰/۸۶۳۰	۰/۹۳۰۴
	$\alpha_k^*(-1)$	۰/۶۰۹۴	۰/۸۱۴۸	۰/۸۷۸۸	۰/۹۲۸۴	۰/۹۶۴۶
۱/۵	$\alpha_k^*(-\frac{1}{2})$	۰/۹۴۰۳	۰/۹۷۳۰	۰/۹۸۲۶	۰/۹۸۹۸	۰/۹۹۵۰
	$\alpha_k^*(\frac{1}{2})$	۰/۷۷۳۳	۰/۸۸۵۷	۰/۹۲۳۶	۰/۹۵۴۱	۰/۹۷۷۰
	$\alpha_k^*(1)$	۰/۵۲۷۸	۰/۷۳۵۵	۰/۸۱۶۴	۰/۸۸۶۱	۰/۹۴۱۶
	$\alpha_k^*(\frac{3}{2})$	۰/۴۳۰۰	۰/۶۶۶۷	۰/۷۶۴۷	۰/۸۵۱۹	۰/۹۲۳۱
	$\alpha_k^*(2)$	۰/۴۶۴۳	۰/۷۳۱۹	۰/۸۳۰۲	۰/۹۰۶۵	۰/۹۵۸۱
	$\alpha_k^*(-2)$	۵/۱۸۳۶	۴/۴۴۱۷	۳/۵۷۲۳	۳/۵۷۲۳	۱/۸۸۰۹
	$\alpha_k^*(-\frac{3}{2})$	۲/۴۷۹۳	۱/۹۱۳۰	۱/۶۳۷۴	۱/۶۳۷۴	۱/۲۰۱۴
	$\alpha_k^*(-1)$	۰/۹۸۴۴	۱/۰۱۲۳	۱/۰۱۱۵	۱/۰۱۱۵	۱/۰۰۴۶
۲/۵	$\alpha_k^*(-\frac{1}{2})$	۰/۹۴۵۹	۰/۹۷۶۰	۰/۹۸۴۶	۰/۹۸۴۶	۰/۹۹۵۶
	$\alpha_k^*(\frac{1}{2})$	۰/۸۷۱۰	۰/۹۴۹۴	۰/۹۶۹۳	۰/۹۶۹۳	۰/۹۹۲۰
	$\alpha_k^*(1)$	۱/۱۹۴۴	۱/۲۶۴۵	۱/۲۲۲۷	۱/۲۲۲۷	۱/۰۸۹۱۲
	$\alpha_k^*(\frac{3}{2})$	۲/۱۹۹۳	۲/۴۰۱۳	۲/۲۰۸۵	۲/۲۰۸۵	۱/۵۱۶۴
	$\alpha_k^*(2)$	۳/۵۲۵۵	۴/۴۳۰۱	۴/۱۹۰۱	۴/۱۹۰۱	۲/۵۵۰۹

جدول ۲. کارایی نسبی کلاس برآوردگر پیشنهادی شده (۱۲) در مقابل برآوردگر (۵)

λ	برآوردگر	n				
		۵	۱۰	۱۵	۲۵	۵۰
	$\alpha_{\omega}^{*}(-2)$	۱/۲۵۳۵	۱/۶۸۵۳	۱/۶۹۶۴	۱/۵۷۸۸	۱/۳۶۸۸
	$\alpha_{\omega}^{*}(-\frac{3}{2})$	۰/۸۸۶۱	۱/۱۱۳۹	۱/۱۳۶۹	۱/۱۱۹۰	۱/۰۷۶۱
	$\alpha_{\omega}^{*}(-1)$	۰/۶۹۹۶	۰/۸۷۱۹	۰/۹۲۱۱	۰/۹۵۶۳	۰/۹۷۹۶
۰/۱۲۵	$\alpha_{\omega}^{*}(-\frac{1}{2})$	۰/۷۹۸۴	۰/۹۰۲۲	۰/۹۳۵۴	۰/۹۶۱۵	۰/۹۸۰۹
	$\alpha_{\omega}^{*}(\frac{1}{2})$	۰/۹۴۱۷	۰/۹۷۳۸	۰/۹۸۳۱	۰/۹۹۰۱	۰/۹۹۵۱
	$\alpha_{\omega}^{*}(1)$	۰/۷۰۶۱	۰/۸۶۵۷	۰/۹۱۳۰	۰/۹۴۹۰	۰/۹۷۴۹
	$\alpha_{\omega}^{*}(\frac{3}{2})$	۰/۹۵۷۵	۰/۹۹۴۸	۰/۹۹۸۷	۱/۰۰۰۱	۱/۰۰۰۳
	$\alpha_{\omega}^{*}(2)$	۱/۷۷۴۲	۱/۶۸۸۸	۱/۵۱۴۸	۱/۳۳۳۱	۱/۱۷۵۰
	$\alpha_{\omega}^{*}(-2)$	۰/۴۶۴۳	۰/۷۳۱۹	۰/۸۳۰۲	۰/۹۰۶۵	۰/۹۵۸۱
	$\alpha_{\omega}^{*}(-\frac{3}{2})$	۰/۴۳۰۰	۰/۶۶۶۷	۰/۷۶۴۷	۰/۸۵۱۹	۰/۹۲۳۱
	$\alpha_{\omega}^{*}(-1)$	۰/۵۲۷۸	۰/۷۳۵۵	۰/۸۱۶۴	۰/۸۸۶۱	۰/۹۴۱۶
۰/۵	$\alpha_{\omega}^{*}(-\frac{1}{2})$	۰/۷۷۳۳	۰/۸۸۵۷	۰/۹۲۳۶	۰/۹۵۴۱	۰/۹۷۷۰
	$\alpha_{\omega}^{*}(\frac{1}{2})$	۰/۹۴۰۳	۰/۹۷۳۰	۰/۹۸۲۵۶	۰/۹۸۹۸	۰/۹۹۵۰
	$\alpha_{\omega}^{*}(1)$	۰/۶۰۹۴	۰/۸۱۴۸	۰/۸۷۸۸	۰/۹۲۸۴	۰/۹۶۴۶
	$\alpha_{\omega}^{*}(\frac{3}{2})$	۰/۴۲۸۹	۰/۶۷۵۸	۰/۷۷۶۸	۰/۸۶۳۰	۰/۹۳۰۴
	$\alpha_{\omega}^{*}(2)$	۰/۵۸۹۸	۰/۷۳۲۵	۰/۸۰۰۱	۰/۸۶۸۶	۰/۹۲۹۷
	$\alpha_{\omega}^{*}(-2)$	۰/۰۸۱۶	۰/۲۶۹۶	۰/۴۱۰۳	۰/۵۸۰۵	۰/۷۵۹۰
	$\alpha_{\omega}^{*}(-\frac{3}{2})$	۰/۲۰۸۸۳	۰/۴۴۹۹	۰/۵۸۴۲	۰/۷۲۲۴	۰/۸۴۸۹
	$\alpha_{\omega}^{*}(-1)$	۰/۴۴۴۴	۰/۶۶۹۴	۰/۷۶۵۶	۰/۸۵۲۱	۰/۹۲۳۱
۱/۰	$\alpha_{\omega}^{*}\left(-\frac{1}{2}\right)$	۰/۷۶۱۰۴۶۲۲	۰/۸۷۷۸	۰/۹۱۷۹	۰/۹۵۰۴	۰/۷۵۱
	$\alpha_{\omega}^{*}(\frac{1}{2})$	۰/۹۳۹۵۶	۰/۹۷۲۶	۰/۹۸۲۳	۰/۹۸۹۶	۰/۹۹۴۹
	$\alpha_{\omega}^{*}(1)$	۰/۵۶۲۵	۰/۷۹۰۱	۰/۸۶۲۲	۰/۹۱۸۴	۰/۹۵۹۶
	$\alpha_{\omega}^{*}(\frac{3}{2})$	۰/۱۷۲۶	۰/۵۲۱۲	۰/۶۶۹۲	۰/۷۹۶۶	۰/۸۹۶۶
	$\alpha_{\omega}^{*}(2)$	۰/۰۱۵۶	۰/۲۶۸۹	۰/۴۵۳۶	۰/۶۴۳۳	۰/۸۱۰۸
	$\alpha_{\omega}^{*}(-2)$	۰/۴۶۴۳	۰/۷۳۱۹	۰/۸۳۰۲	۰/۹۰۶۵	۰/۹۵۸۱
	$\alpha_{\omega}^{*}(-\frac{3}{2})$	۰/۴۳۰۰	۰/۶۶۶۷	۰/۸۳۰۲	۰/۸۵۱۹	۰/۹۲۳۱
	$\alpha_{\omega}^{*}(-1)$	۰/۵۲۷۸	۰/۷۳۵۵	۰/۷۶۴۷	۰/۸۸۶۱	۰/۹۴۱۶
۱/۵	$\alpha_{\omega}^{*}\left(-\frac{1}{2}\right)$	۰/۷۷۳۳	۰/۸۸۵۷	۰/۸۱۶۴	۰/۹۵۴۱	۰/۹۷۷۰
	$\alpha_{\omega}^{*}(\frac{1}{2})$	۰/۹۴۰۳	۰/۹۷۳۰	۰/۹۲۳۶	۰/۹۸۹۸	۰/۹۹۵۰
	$\alpha_{\omega}^{*}(1)$	۰/۶۰۹۴	۰/۸۱۴۸	۰/۸۷۸۸	۰/۹۲۸۴	۰/۹۶۴۶
	$\alpha_{\omega}^{*}(\frac{3}{2})$	۰/۴۲۸۹	۰/۶۷۵۸	۰/۷۷۶۸	۰/۸۶۳۰	۰/۹۳۰۴
	$\alpha_{\omega}^{*}(2)$	۰/۵۸۹۸	۰/۷۳۲۵	۰/۸۰۰۱	۰/۸۶۸۶	۰/۹۲۹۷
	$\alpha_{\omega}^{*}(-2)$	۳/۵۲۵۵	۴/۴۳۰۱	۴/۱۹۰۱	۳/۵۱۴۲	۲/۵۵۰۹
	$\alpha_{\omega}^{*}(-\frac{3}{2})$	۲/۱۹۹۳	۲/۴۰۱۳	۲/۲۰۸۵	۱/۸۸۸۰	۱/۵۱۶۴
	$\alpha_{\omega}^{*}(-1)$	۱/۱۹۴۴	۲/۴۰۱۳۳۵۲	۱/۲۲۲۶۵۶۲	۱/۱۵۸۳	۱/۰۸۹۲
۲/۵	$\alpha_{\omega}^{*}(-\frac{1}{2})$	۰/۸۷۱۰	۱/۲۶۴۵	۰/۹۶۹۱	۰/۹۸۳۰	۰/۹۹۲۰
	$\alpha_{\omega}^{*}(\frac{1}{2})$	۰/۹۴۵۹	۰/۹۷۶۰	۰/۹۸۴۶	۰/۹۹۱۰	۰/۹۹۵۶
	$\alpha_{\omega}^{*}(1)$	۰/۹۸۴۴	۱/۰۱۲۳	۱/۰۱۱۵	۱/۰۰۸۲	۱/۰۰۴۶
	$\alpha_{\omega}^{*}(\frac{3}{2})$	۲/۴۷۹۳	۱/۹۱۳۰	۱/۶۳۷۵	۱/۳۹۴۶	۱/۲۰۱۴
	$\alpha_{\omega}^{*}(2)$	۵/۱۸۳۶	۴/۴۴۱۷	۳/۵۷۲۳	۲/۶۷۰۴	۱/۸۸۰۹

جدول ۳. نسبت اریبی برآوردهای (۶) و (۱۲) برای مقادیر مختلف n، p

نسبت اریبی	n = ۵	۱۰	۱۵	۲۵	۵۰
-۲	۱/۲۲۵۰	۱/۰۰۱۵	۰/۹۰۸۳	۰/۸۳۱۲	۰/۷۷۲۸
$\frac{-۳}{۲}$	۱/۰۷۶۵	۰/۸۴۴۵	۰/۷۷۲۱	۰/۷۱۶۳	۰/۶۷۵۷
-۱	۰/۷۵۰۰	۰/۶۱۱۱	۰/۵۷۱۴	۰/۵۴۱۷	۰/۵۲۰۴
$\frac{-۱}{۲}$	۰/۲۴۰۵	۰/۲۱۸۵	۰/۲۱۲۰	۰/۲۰۷۰	۰/۲۰۳۵
$\frac{۱}{۲}$	۴/۱۵۸۵	۴/۵۷۶۹	۴/۷۱۷۵	۴/۸۳۰۳	۴/۹۱۵۱
۱	۱/۳۳۳۳	۱/۶۳۶۴	۱/۷۵۰۰	۱/۸۴۶۱	۱/۹۲۱۶
$\frac{۳}{۲}$	۰/۹۲۸۹	۱/۱۸۴۱	۱/۲۹۵۲	۱/۳۹۶۱	۱/۴۷۹۸
۲	۰/۸۱۶۳	۰/۹۹۸۵	۱/۱۰۰۹	۱/۲۰۳۰	۱/۲۹۴۰

بزرگتر از محدوده کلاس برآوردگرهای انقباضی پیشنهادی (۶) نسبت به برآوردگر نااریب (۵) است. اریبی نسبی را می‌توان با تقسیم اریبی کلاس برآوردگرهای انقباضی روابط (۱۵) و (۱۴) به صورت

$$\frac{Biase\left(\alpha^*_{(p)}\right)}{Biase\left(\alpha^*_{\omega}(p)\right)}=\frac{۱-k(p)}{۱-\omega(p)}$$

بدست آورد. در جدول ۳ ملاحظه می‌شود، به ازای هر p، مقادیر اریبی برآوردگرهای $\alpha^*_{(p)}$ کوچکتر از مقادیر اریبی برآوردگرهای $\alpha^*_{\omega}(p)$ است. اما این اختلاف با بزرگ شدن $|p|$ بتدریج کاهش می‌یابد.

در یک مطالعه شبیه‌سازی مونت کارلویی مجموعه‌ای از داده‌های تصادفی از توزیع پارتو–رایلی تولید شده است. کارایی نسبی کلاس برآوردگرهای انقباضی نسبت به برآوردگر نااریب، برای پارامتر شکل توزیع پارتو–رایلی بر اساس مقادیر مختلف n ، p و λ محاسبه شد. مقادیر MSE بر اساس ۲۵۰۰۰ تکرار شبیه‌سازی مونت کارلو محاسبه و نتایج حاصل در جدول ۴ نشان دهنده تشابه مقادیر کارایی نسبی از بخش قبلی در جدول ۳ است.

بحث و نتیجه‌گیری

UMVUE بهترین برآوردگر در کلاس برآوردگرهای نااریب هستند. ولی در بعضی موارد لازم است از برآوردگرهای اریب با کمترین MSE استفاده شود. به همین منظور هدف مطالعه حاضر، پیشنهاد استفاده از کلاس برآوردگرهای انقباضی (۱) و (۲) است. در بخش ۳ نشان داده شد، کلاس برآوردگرهای انقباضی

جدول ۴. کارایی نسبی برآوردگرهای اریب (۶) و (۱۲) نسبت به برآوردگر نااریب (۵)

λ	برآوردگر	n		
		۵	۱۰	۵۰
	$\alpha_k^*(-1)$	۰/۸۲۶۵	۰/۹۲۹۸	۰/۹۷۹۷
	$\alpha_\omega^*(-1)$	۰/۸۲۶۵	۰/۸۷۸۹	۰/۹۶۱۲
	$\alpha_k^*(-\frac{1}{2})$	۰/۹۶۹۵	۰/۹۹۱۱	۰/۹۹۷۴
۰/۵	$\alpha_\omega^*\left(-\frac{1}{2}\right)$	۰/۸۷۶۴	۰/۹۵۸۵	۰/۹۸۷۵
	$\alpha_k^*(\frac{1}{2})$	۰/۸۷۶۴	۰/۹۵۸۵	۰/۹۸۷۵
	$\alpha_\omega^*\left(\frac{1}{2}\right)$	۰/۹۶۹۵	۰/۹۹۱۱	۰/۹۹۷۴
	$\alpha_k^*(1)$	۰/۶۹۴۴	۰/۸۷۸۹	۰/۹۶۱۲
	$\alpha_\omega^*(1)$	۰/۷۶۵۶	۰/۹۲۹۸	۰/۹۷۹۷
	$\alpha_k^*(-1)$	۰/۵۶۲۵	۰/۸۶۲۲	۰/۹۵۹۶
	$\alpha_\omega^*(-1)$	۰/۴۴۴۴	۰/۷۶۵۶	۰/۹۲۳۱
	$\alpha_k^*(-\frac{1}{2})$	۰/۹۳۹۶	۰/۹۸۲۳	۰/۹۹۴۹
۱	$\alpha_\omega^*(-\frac{1}{2})$	۰/۷۶۱۰	۰/۹۱۷۹	۰/۹۷۵۱
	$\alpha_k^*(\frac{1}{2})$	۰/۷۶۱۰	۰/۹۱۷۹	۰/۹۷۵۱
	$\alpha_\omega^*(\frac{1}{2})$	۰/۹۳۹۶	۰/۹۸۲۳	۰/۹۹۴۹
	$\alpha_k^*(1)$	۰/۴۴۴۴	۰/۷۶۵۶	۰/۹۲۳۱
	$\alpha_\omega^*(1)$	۰/۵۶۲۵	۰/۸۶۲۲	۰/۹۵۹۶
	$\alpha_k^*(-1)$	۰/۱۴۰۶	۰/۶۷۴۷	۰/۹۰۰۶
	$\alpha_\omega^*(-1)$	۰/۰۲۷۸	۰/۴۷۲۶	۰/۸۱۳۵
	$\alpha_k^*(-\frac{1}{2})$	۰/۸۵۲۴	۰/۹۵۶۱	۰/۹۸۷۳
۲/۵	$\alpha_\omega^*(-\frac{1}{2})$	۰/۴۶۳۷	۰/۸۰۱۴	۰/۹۳۸۴
	$\alpha_k^*(\frac{1}{2})$	۰/۴۶۳۷	۰/۸۰۱۴	۰/۹۳۸۴
	$\alpha_\omega^*(\frac{1}{2})$	۰/۸۵۲۴	۰/۹۵۶۱	۰/۹۸۷۳
	$\alpha_k^*(1)$	۰/۰۲۷۸	۰/۴۷۲۷	۰/۸۱۳۵
	$\alpha_\omega^*(1)$	۰/۱۴۰۶	۰/۶۷۴۷	۰/۹۰۰۶

(۶) بهتر از UMVUE است زیرا در این موارد برآوردگرهای انقباضی شامل MSE کوچکتر از برآوردگر نااریب بودند. افزایش اختلاف مقدار پیش بینی α_0 از پارامتر α (با دور شدن λ از عدد یک)، باعث کاهش کارایی کلاس برآوردگرهای انقباضی (برآوردگرهای پیشنهادی) نسبت به برآوردگر نااریب می‌شود، این مورد حتی زمانی که کلاس برآوردگرهای اریب (۱۲) بهتر از برآوردگرهای نااریب است مشاهده می‌شود. با این حال با توجه به نتایج شبیه‌سازی جدول ۴ ، بکار گیری از کلاس برآوردگرهای انقباضی حتی با دور شدن λ از عدد یک پیشنهاد می‌شود. علاوه بر این، افزایش مقدار p موجب کاهش کارایی کلاس برآوردگرهای انقباضی نسبت به برآوردگر نااریب می‌شود. هر دو کلاس برآوردگرهای پیشنهادی تقریبا دارای محدوده کارایی یکسانی هستند. در نتیجه پیشنهاد می‌شود زمانی λ نزدیک به یک است، از برآوردگرهای انقباضی استفاده شود زیرا، هر دو کلاس دارای برآوردگرهای انقباضی هستند که دارای MSE کمتری نسبت به برآوردگر نااریب پارامتر شکل توزیع پارتو–رایلی است . همچنین استفاده از کلاس برآوردگرهای انقباضی

(۶) زمانی پیشنهاد می‌شود که p عددی منفی و نزدیک به صفر باشد در حالی که کلاس برآوردگرهای انقباضی
(۱۲) زمانی پیشنهاد می‌شود که p عددی مثبت و نزدیک به صفر باشد.

تقدیر و تشکر

نویسندگان مقاله از داوران محترم و ویراستار مجله برای ارائه پیشنهادات سازنده‌شان در بهبود این مقاله سپاسگزاری می‌نمایند.

مراجع

سنجری، ن. و رشیدی، ن. و پیشدست، آ. (۱۳۹۴)، مقایسه میانگین مربعات خطای برآوردگرهای انقباضی واریانس توزیع چوله - نرمال باضریب تغییرات معلوم، مجله علوم آماری، ۱، ۴۸-۴۳.

کرمی ، ح.، آرشی، م .(۱۳۹۳)، برآوردگر انقباضی در توزیع نرمال چند متغیره تحت فضای پارامتر محدود، مجله علوم آماری، ۸، ۹۲-۷۵.

کیاپور، آ. (۱۳۹۶) برآوردگر انقباضی بیزی برای پارامتر مقیاس توزیع نمایی بر اساس داده های سانسور شده، مجله علوم آماری، ۱، ۱۳۱-۱۱۹.

Akinset, A., Famoye, F., Lee, C. (2008), The Beta-Pareto Distribution, *Statistics*, **42**(6), 547-563.

Alzaatreh, A., Lee, C. Famoye, F. (2013), A New Method for Generating Families of Continuous Distributions, *Mtron*, **71**(1), 63-79.

Bhatnagar, S. (1986), On The Use of Population Variance in Estimating Mean, *Journal of The Indian Society of Agricultural Statistics*, **38**, 403-409.

Daniels, M. J., Kass, R. E.(2001), Shrinkage Estimators for Covariance Matrices, *Biometrics*, **57**(4), 73-84.

Das, B. (1975), Estimation of μ^2 in Normal Population, *Calcutta Statistical Association. Bulletin*, **24**, 135-140.

Deiri, E. Baloui, M. Hormozinejad,F. and Baloui, E. J. (2019), Two Different Shrinkage Estimator Classes for The Scale Parameter of Classical Rayleigh Distribution, *Microelectronic Engineering*, **223**, 111-149.

Deiri, E. Maleki, J. F. (2020), Estimation Methods for The Probability Density Function and The Cumulative Distribution Function of The Pareto-Rayleigh Distribution, *Statistics*, **54**(1), 135-151.

Ebegil, M., Ozdemir, S. (2016), Two Different Shrinkage Estimator Classes for The Shape Parameter of Classical Pareto Distribution, *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, **54**, 1231-1244.

Fallahpour, S. A, Ahmed, S. E. (2014), Shrinkage Estimation And Variable Selection in Multiple Regression Models With Random Coefficient Autoregressive Errors, *Statistics & Probability Letters*, **92**, 199-208.

Govindarajulu, Z., Sahai, H. (1972), Estimation of Parameters of a Normal Distribution With Known Coefficient of Variation, *Reports of Statistical Application Research Union of Japanese Scientists And Engineers*, **91**, 85-98.

Jani, P. N. (1991), A class of Shrinkage Estimators for The Scale Parameter of The Exponential Distribution, *IEEE Trans. Reliability*, **40**, 68-70.

Kourouklis, S. (1994), Estimation in The Two-Parameter Exponential Distribution With Prior Information, *IEEE Trans. Reliability*, **43**, 446-450.

Lediot, O. Michael, W. (2012), Nonlinear Shrinkage Estimation of Large-Dimensional Covariance Matrices, *Annals of Statistics*, **40**, 1024-1060.

Malik, H. J. (1970), Estimation of The Parameters of The Pareto Distribution, *Metrika*, **14**(1), 126-132

Mehta, J. S., Srinivasan, S. R. (1971), Estimation of The Mean By Shrinkage To a Point, *journal american statistical association*, **66**, 86-90.

Pascal, F., Chitour, Y., Quek, Y. (2014), Generalized Robust Shrinkage Estimator and Application To STAP Detection Problem, *IEEE Transactions on Signal Processing*, **62**(21), 5640-5651, DOI:10.1109/TSP.2014.2355779.

Rao, V. N., Singh, J. (1982), A Note on Estimation of μ^2 in Normal Density,*Journal of The Indian Society of Agricultural Statistics*, **34**, 82-84.

Singh, H. P., Saxena, S. (2003), A Class of Shrinkage Estimators for Variance of a Normal Population, *Brazilian Journal of Probability and Statistics*, **17**, 41-56.

Singh, D. C., Singh, P. and Singh, P. R. (1996), Shrunken Estimators for The Scale Parameter of Classical Pareto Distribution, *Micro Electron and Reliability*, **36**, 435-439.

Singh, H. P., Singh, R. A. (1997), Class of Shrinkage Estimators for The Variance of a Normal Population, *Micro Electron and Reliability*, **37**, 863-867.

Srivastava, V. K., Dwivedi, T. D. and Bhatnagar, S. (1980), Estimation of The Square of Mean in Normal Population, *Statistica, Anno XL*, **4**, 455-466.

Stein, c. (1986), Lectures on The Theory of Estimation of Many Parameters, *Journal of Soviet Mathematics*, **34**(1), 1373-1403.

Thompson, J. R. (1968), Accuracy Borrowing in The Estimation of The Mean By Shrinkage to an Interval, *Journal American Statistical Association*, **63**, 953-963.

Journal of Statistical Sciences, Autumn and Winter, 2021
Vol. 15, No. 2, pp 407-425
DOI: 10.29252/jss.15.2.407

The Efficiency of Some Shrinkage Estimators for Shape Parameter of the Pareto–Rayleigh Distribution

Balui، M.[1]، Deiri، E.[2*]، Hormozinejad، F.[1]، Baloui، E. B.[2]
[1]Department of Statistics, Islamic Azad University, Ahvaz Branch, Ahvaz, Iran.
[2]Department of Statistics, Qaemshahr Branch, Islamic Azad University, Qaemshahr, Iran.

Abstract: In most practical cases, to increase parameter estimation accuracy, we need an estimator with the least risk. In this, contraction estimators play a critical role. Our main purpose is to evaluate the efficiency of some shrinkage estimators of the shape parameter of the Pareto-Rayleigh distribution under two classes of shrinkage estimators. In this research, the purpose estimators' efficiency will be compared with the unbiased estimator obtained under the quadratic loss function. The relationship between these two classes of shrinkage estimators was examined, and then the relative efficiency of the proposed estimators was discussed and concluded via doing a Monte Carlo simulation.

Keywords: Mean Square Error, Pareto-Rayleigh Distribution Shrinkage Estimation.

Mathematics Subject Classification (2010): 82B80, 62J07.