

## استنباط برای توزیع نیمه‌لوژستیک بر اساس نمونه‌های سانسور هیبرید فراینده نوع دو

اکبر اصغرزاده<sup>۱</sup>، مینا عزیزپور<sup>۱</sup>، رضا ولی‌اللهی<sup>۲</sup>

<sup>۱</sup> گروه آمار، دانشگاه مازندران

<sup>۲</sup> گروه آمار، دانشگاه سمنان

تاریخ دریافت: ۱۳۹۱/۱۱/۳ تاریخ آخرین بازنگری: ۱۳۹۳/۸/۲۶

چکیده: یکی از نقایص سانسور فراینده نوع دو، نامحدود بودن زمان انجام آزمایش است. به همین دلیل طرح جدید سانسور هیبرید فراینده نوع دو در سال‌های اخیر مورد توجه آماردانان قرار گرفته است. در این مقاله تحلیل داده‌های سانسور هیبرید فراینده نوع دو، زمانی که داده‌ها از توزیع نیمه‌لوژستیک پیروی کنند ارائه می‌شود. برآوردهای ماکسیمم درستنمایی و ماکسیمم درستنمایی تقریبی پارامتر و برآورد بیزی پارامتر با دو روش تقریب لیندلی و زنجیر مارکوفی مونت کارلو محاسبه می‌شود. بازه‌های اطمینان مجانی، بوت استرپ و بیزی ارائه می‌شوند. با استفاده از روش شبیه‌سازی مونت کارلو، برآوردهای مختلف نقطه‌ای و بازه‌ای پارامتر مقایسه می‌شوند. به علاوه نحوه کاربست روش‌های برآورد معروفی شده در یک مثال عددی نشان داده می‌شود.

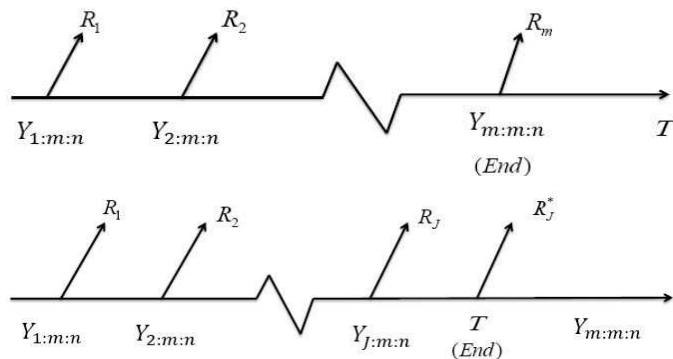
واژه‌های کلیدی: برآورد ماکسیمم درستنمایی، برآورد بیز، بازه اطمینان مجانی، سانسور هیبرید فراینده نوع دو.

آدرس الکترونیک مسئول مقاله: اکبر اصغرزاده، a.asgharzadeh@umz.ac.ir  
کد موضوع بنای ریاضی (۲۰۱۰): ۶۲N۰۱

## استنباط برای توزیع نیمه‌لوژستیک

در بسیاری از مطالعات طول عمر با مواردی مواجه می‌شویم که واحدهای آزمایشی قبیل از مشاهده زمان شکست آنها از آزمون طول عمر کنار گذاشته می‌شوند. در بسیاری از موارد حذف واحدهای آزمایشی، عمده و از قبل طراحی شده است که به منظور صرفه‌جویی در زمان و هزینه آزمایش انجام می‌شود. داده‌های حاصل از چنین آزمایش‌هایی را داده‌های سانسور شده می‌نامند. سانسورهای معمولی نوع یک و دو، رایج ترین نوع سانسورها هستند. ترکیبی از سانسورهای معمولی نوع یک و دو، سانسور هیبرید نامیده می‌شود. از ایرادات وارد بر سانسورهای هیبرید و معمولی نوع یک و دو، این است که اجازه حذف واحدهای آزمایشی در زمان‌هایی غیر از زمان خاتمه آزمایش داده نمی‌شود. هر چند سانسور فزاینده نوع دو دارای این ایراد نیست، اما ایراد نامحدود بودن زمان انجام آزمایش را دارد. برای رفع آن، کوندو و جواردر (۲۰۰۶) سانسور هیبرید فزاینده نوع دو را معرفی کردند که ترکیبی از سانسور فزاینده نوع دو و سانسور هیبرید است و این اطمینان را می‌دهد که زمان انجام آزمایش از زمان از پیش تعیین شده  $T$  تجاوز نمی‌کند. در این آزمایش طول عمر  $n$  مولفه را در نظر بگیرید. مقادیر صحیح  $m < n$  و  $R_1, \dots, R_m$  قبل از شروع آزمایش ثابت در نظر گرفته می‌شوند، به‌طوری که  $\sum_{i=1}^m R_i = n$ . زمان  $T$  نیز قبل از شروع آزمون توسط آزمونگر ثابت در نظر گرفته می‌شود. به محض مشاهده اولین شکست،  $Y_{1:m:n}$  مولفه از  $1 - n$  مولفه سالم به‌طور تصادفی از آزمون کنار گذاشته می‌شوند. به‌طور مشابه در زمان مشاهده دومین شکست،  $Y_{2:m:n}$  مولفه از  $2 - R_1 - n$  مولفه سالم باقیمانده به‌طور تصادفی از آزمون کنار گذاشته می‌شوند و به همین‌طور الی آخر. اگر  $m$  امین شکست، قبل از زمان  $T$  رخ دهد در زمان  $Y_{m:m:n}$  تعداد  $R_m = n - R_1 - R_2 - \dots - R_{m-1} - m$  مولفه سالم باقیمانده سانسور و آزمون در زمان  $Y_{m:m:n}$  خاتمه می‌یابد. از طرفی دیگر اگر  $m$  امین شکست قبل از زمان  $T$  اتفاق نیفت و تنها  $J$  شکست قبل از زمان  $T$  رخ دهد ( $J < m$ )، در زمان  $T$  همه  $R_j^* = n - \sum_{i=1}^J R_i - J$  مولفه سالم باقیمانده حذف و آزمایش در زمان  $T$  خاتمه می‌یابد. این دو حالت به ترتیب، حالت اول و

حالت دوم و این سانسور، سانسور هیبرید فرایینده نوع دو نامیده می‌شود. به صورت شماتیک دو حالت سانسور هیبرید فرایینده نوع دو در شکل ۱ نمایش داده شده‌اند. با



شکل ۱: طرح سانسور هیبرید فرایینده نوع دو، بالا: حالت اول و پایین: حالت دوم

توجه به شکل ۱ بردار زمان‌های شکست مشاهده شده برای حالت‌های اول و دوم به ترتیب به صورت

$$\{Y_{1:m:n}, Y_{2:m:n}, \dots, Y_{m:m:n}\}$$

$$\{Y_{1:m:n}, Y_{2:m:n}, \dots, Y_{J:m:n}\}$$

خواهد بود. لازم به ذکر است که در حالت دوم

$$Y_{J:m:n} < T < Y_{J+1:m:n} < \dots < Y_{m:m:n}$$

و  $Y_{J:m:n}, \dots, Y_{m:m:n}$  مشاهده نمی‌شوند. همچنین در بازه  $(Y_{J:m:n}, T)$  هیچ شکستی رخ نمی‌دهد. توجه شود که مقدار  $J$  با استفاده از نامساوی  $Y_{J:m:n} < T < Y_{J+1:m:n}$  به دست می‌آید. انتخاب  $T$  در طرح سانسور هیبرید فرایینده نوع دو به حداکثر زمانی که آزمونگر برای ادامه آزمون در اختیار دارد وابسته است. علاوه بر آن، زمان انجام آزمون نیز متناهی است. سانسور هیبرید، سانسور فرایینده نوع دو و سانسورهای معمولی نوع یک و دو، حالت‌های خاص از سانسور هیبرید فرایینده نوع دو هستند. از جمله کسانی که در چند سال اخیر به مطالعه سانسور هیبرید فرایینده نوع دو پرداخته‌اند می‌توان به جواردر و همکاران (۲۰۰۹) و

## ۱۸ ..... استنباط برای توزیع نیمه‌لوژستیک

بیات مختاری و همکاران (۲۰۱۱) اشاره کرد. برای مطالعه بیشتر روی سانسور هیبرید و سانسور هیبرید فراینده نوع دو می‌توان به بالاکریشنان و کوندو (۲۰۱۳) مراجعه کرد.

توزیع نیمه‌لوژستیک<sup>۱</sup> یکی از توزیع‌های رایج در مدل‌بندی توزیع‌های طول عمر است. متغیر تصادفی نیمه‌لوژستیک هم توزیع با قدر مطلق متغیری تصادفی با توزیع لوژستیک است. فرض کنید متغیر تصادفی  $Y$  دارای توزیع نیمه‌لوژستیک با تابع چگالی

$$g(y; \lambda) = \frac{2\lambda e^{-\lambda y}}{(1 + e^{-\lambda y})^2}, \quad y \geq 0, \quad \lambda > 0 \quad (1)$$

و تابع توزیع تجمعی

$$G(y; \lambda) = \frac{1 - e^{-\lambda y}}{1 + e^{-\lambda y}}, \quad y \geq 0, \quad \lambda > 0 \quad (2)$$

باشد. تابع نرخ خطر<sup>۲</sup> توزیع نیمه‌لوژستیک به صورت

$$h(y; \lambda) = \frac{\lambda}{1 + e^{-\lambda y}}, \quad y \geq 0, \quad \lambda > 0$$

است که بر حسب  $\lambda$  تابعی صعودی است. این ویژگی بیانگر آن است که احتمال خرابی قطعات در فواصل زمانی آینده بیشتر از احتمال خرابی آنها در زمان گذشته است. به همین دلیل توزیع نیمه‌لوژستیک مدلی مناسب در آزمایشات مربوط به طول عمر قطعات مکانیکی است که با گذشت زمان فرسوده می‌شوند. برای اطلاع بیشتر از تحقیقات انجام شده در زمینه توزیع نیمه‌لوژستیک می‌توان به بالاکریشنان و پوتنپورا (۱۹۸۶)، بالاکریشنان و وانگ (۱۹۹۱)، بالاکریشنان و چان (۱۹۹۲)، بالاکریشنان و اصغرزاده (۲۰۰۵)، بالاکریشنان و صالح (۲۰۱۱) و کیم و هان (۲۰۱۰) مراجعه کرد.

فرض کنید  $X = \lambda Y$ ، بنابراین  $X$  دارای توزیع نیمه‌لوژستیک استاندارد با تابع چگالی

$$f(x) = \frac{2e^{-x}}{(1 + e^{-x})^2}, \quad x \geq 0 \quad (3)$$

<sup>۱</sup> Half-Logistic

<sup>۲</sup> Hazared rate function

## وتابع توزیع تجمعی

$$F(x) = \frac{1 - e^{-x}}{1 + e^{-x}}, \quad x \geq 0 \quad (4)$$

خواهد بود. لازم به ذکر است که

$$g(y; \lambda) = \lambda f(\lambda y), \quad G(y; \lambda) = F(\lambda y) \quad (5)$$

همچنین با استفاده از روابط (۳) و (۴) داریم

$$f(x) = \frac{1}{\lambda} \{1 - F(x)\} \{1 + F(x)\} \quad (6)$$

در این مقاله، مسئله برآوردهای پارامتر توزیع نیمه‌لوزیستیک با داده‌های سانسور هیبرید فراینده نوع دو مورد مطالعه قرار می‌گیرد. در بخش ۲ برآوردهای ماکسیمم درستنما می‌<sup>۲</sup> (MLE)، برآوردهای ماکسیمم درستنما می‌تقریبی<sup>۴</sup> (AMLE) و بیزی<sup>۳</sup> ارائه می‌شوند. برآوردهای بیزی از دو روش تقریب لیندلی<sup>۵</sup> و روش MCMC محاسبه می‌شوند. بازه‌های اطمینان مختلفی در بخش ۳ ارائه شده‌اند. در بخش ۴ با استفاده از شبیه‌سازی مونت کارلو، کارایی روش‌های مختلف برآوردهای مقایسه می‌شوند و سرانجام در بخش ۵ یک مثال عددی برای تشریح روش‌های برآوردهای می‌شود.

## ۲ برآوردهای نقطه‌ای

فرض کنید متغیرهای تصادفی  $Y_1, \dots, Y_n$  طول‌های عمر  $n$  مولفه باشند که از توزیع نیمه‌لوزیستیک پیروی می‌کنند. در این بخش برآوردهای نقطه‌ای پارامتر  $\lambda$  بر اساس نمونه سانسور هیبرید فراینده نوع دو به دست آورده می‌شوند.

<sup>۲</sup> Maximum Likelihood Estimator

<sup>۴</sup> Approximate Maximum Likelihood Estimator

<sup>۵</sup> Lindley approximation

## ۱.۲ برآورده‌گر ماقسیم درستنما

تابع درستنما ای زمان های شکست مشاهده شده در سانسور هیبرید فزاینده نوع دو برای دو حالت اول و دوم به ترتیب عبارتند از:

$$L_1(\lambda) = C_1 \prod_{i=1}^m g(y_{i:m:n}; \lambda)[1 - G(y_{i:m:n}; \lambda)]^{R_i},$$

$$L_2(\lambda) = C_2 \prod_{i=1}^J g(y_{i:m:n}; \lambda)[1 - G(y_{i:m:n}; \lambda)]^{R_i}[1 - G(T; \lambda)]^{R_J^*}$$

که در آنها

$$C_1 = \prod_{i=1}^m [n - \sum_{l=1}^{i-1} (1 + R_l)]$$

$$C_2 = \prod_{i=1}^J [n - \sum_{l=1}^{i-1} (1 + R_l)]$$

با ترکیب تابع درستنما ای در دو حالت سانسور هیبرید فزاینده نوع دو، تابع درستنما ای زمان های شکست مشاهده شده را می‌توان به صورت

$$L(\lambda) = C \prod_{i=1}^D g(y_{i:m:n}; \lambda)[1 - G(y_{i:m:n}; \lambda)]^{R_i}[1 - G(T; \lambda)]^{R_{(J)}^*} \quad (\forall)$$

نوشت، که در آن

$$D = \begin{cases} m & X_{m:m:n} < T \\ J & X_{J:m:n} < T < X_{J+1:m:n}, \end{cases}$$

$$C = \prod_{i=1}^D [n - \sum_{l=1}^{i-1} (1 + R_l)],$$

$$R_{(J)}^* = \begin{cases} \circ & X_{m:m:n} < T \\ R_J^* & X_{J:m:n} < T < X_{J+1:m:n}. \end{cases}$$

با استفاده از روابط (۵) و (۶) تابع درستنما ای (۷) را می‌توان به صورت

$$L(\lambda) = C \left(\frac{\lambda}{\gamma}\right)^D \prod_{i=1}^D [1 - F(x_{i:m:n})]^{1+R_i} [1 + F(x_{i:m:n})][1 - F(S)]^{R_{(J)}^*}$$

## ۲۱ ..... اکبر اصغرزاده و همکاران

بازنویسی کرد، که در آن  $S = \lambda T$  و  $x_{i:m:n} = \lambda y_{i:m:n}$ . به منظور سهولت در نمادگذاری از  $x_i$  و  $y_i$  به جای  $x_{i:m:n}$  و  $y_{i:m:n}$  استفاده می‌شود. بنابراین لگاریتم تابع درستنمایی به صورت

$$\begin{aligned}\ln L(\lambda) &\propto D \ln \lambda + \sum_{i=1}^D (\lambda + R_i) \ln[\lambda - F(x_i)] + \sum_{i=1}^D \ln[\lambda + F(x_i)] \\ &+ R_{(J)}^* \ln[\lambda - F(S)]\end{aligned}$$

به دست می‌آید، که با مشتق‌گیری از آن نسبت به  $\lambda$  داریم

$$\begin{aligned}\frac{\partial \ln L(\lambda)}{\partial \lambda} &= \frac{D}{\lambda} - \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^D (\lambda + R_i) x_i \frac{f(x_i)}{\lambda - F(x_i)} + \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^D x_i \frac{f(x_i)}{\lambda + F(x_i)} \\ &- \frac{1}{\lambda} R_{(J)}^* S \frac{f(S)}{\lambda - F(S)} = 0\end{aligned}$$

با استفاده مجدد از رابطه (۶)، معادله درستنمایی به صورت

$$\begin{aligned}\frac{\partial \ln L(\lambda)}{\partial \lambda} &= \frac{D}{\lambda} - \frac{1}{\lambda} \left[ \sum_{i=1}^D (R_i + 2) x_i F(x_i) + R_{(J)}^* S F(S) \right] \\ &- \frac{1}{\lambda} \left[ \sum_{i=1}^D R_i x_i + R_{(J)}^* S \right] = 0\end{aligned}\tag{۸}$$

حاصل می‌شود، که با حل آن به روش‌های عددی مانند روش نیوتن-رافسون<sup>۶</sup> می‌توان MLE پارامتر  $\lambda$  را محاسبه کرد. همچنین پارامتر  $\lambda$  را می‌توان از حل معادله

$$h(\lambda) = \lambda \tag{۹}$$

به روش تکراری نقطه ثابت<sup>۷</sup> نیز محاسبه نمود، که در آن

$$h(\lambda) = \frac{D}{\frac{1}{\lambda} \left[ \sum_{i=1}^D (R_i + 2) x_i F(x_i) + R_{(J)}^* S F(S) \right] - \frac{1}{\lambda} \left[ \sum_{i=1}^D R_i x_i + R_{(J)}^* S \right]}$$

<sup>۶</sup> Newton-Raphson method

<sup>۷</sup> Fixed point

است. از آنجا که

$$\frac{\partial^2 \ln L(\lambda)}{\partial \lambda^2} = -\frac{D}{\lambda^2} - \sum_{i=1}^D (R_i + 2) \frac{y_i e^{-\lambda y_i}}{(1 + e^{-\lambda y_i})^2} - R_{(J)}^* \frac{T^2 e^{-\lambda T}}{(1 + e^{-\lambda T})^2} < 0.$$

تابع درستنمایی مقعر لگاریتمی است. به علاوه

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \ln L(\lambda) = -\infty,$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \ln L(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\ln L(\lambda)}{\lambda} \lambda = -\infty$$

بنابراین تابع درستنمایی تک مدی است و MLE پارامتر  $\lambda$  یکتا است.

## ۲.۲ برآوردگر مаксیمم درستنمایی تقریبی

در این بخش با استفاده از تقریب معادله درستنمایی برآورد ماسیمم درستنمایی تقریبی (AMLE) پارامتر  $\lambda$  به فرم بسته‌ای به دست آورده خواهد شد. در روش درستنمایی تقریبی ابتدا تابع درستنمایی نمونه به وسیله تابع دیگری (به نام تابع درستنمایی تقریبی) تقریب زده می‌شود و سپس این تابع ماسیمم می‌شود. به همین علت برآوردگرهایی که از این روش به دست می‌آیند، کلیه خواص مطلوب MLE‌ها همچون سازگاری، مجانب نرمال بودن و مجانب کارا بودن را دارا می‌باشند. برای مطالعه بیشتر می‌توان به تیکو و آکایا (۲۰۰۴) مراجعه کرد. روش‌های تقریبی ماسیمم درستنمایی توسط محققان زیادی مورد مطالعه قرار گرفته است. برای مثال می‌توان به بالاکریشنان (۲۰۰۷)، بالاکریشنان و آگاروالا (۲۰۰۰) و بالاکریشنان و وانگ (۱۹۹۱) اشاره کرد.

معادله درستنمایی (۸) غیر خطی است و به دلیل وجود عبارات  $F(x_i)$  و  $F(S)$  جواب صریحی برای  $\lambda$  به دست نمی‌دهد. عبارت  $F(x_i)$  با بسط سری تیلور آن حول نقطه

$$\nu_{i:m:n} = E(X_{i:m:n}) \approx F^{-1}(\alpha_{i:m:n}), \quad i = 1, \dots, m$$

که در آن

$$\alpha_{i:m:n} = 1 - \prod_{j=m-i+1}^m \frac{j + R_{m-j+1} + \dots + R_m}{j + 1 + R_{m-j+1} + \dots + R_m}, \quad i = 1, \dots, m$$

تقریب زده می شود. همچنین  $F(S)$  با بسط سری تیلور آن حول نقطه

$$\xi_{J:m:n} \approx F^{-1}\left(\frac{\alpha_{J:m:n} + \alpha_{J+1:m:n}}{2}\right)$$

تقریب زده می شود (بالاکریستان و کوندو ۱۳۰۲؛ جواردر و همکاران، ۱۹۹۰).

وارونتابع توزیع تجمعی توزیع نیمه لوزیستیک برابر است با

$$F^{-1}(u) = \ln\left(\frac{1+u}{1-u}\right)$$

حال با تقریب توابع  $F(x_i)$  و  $F(S)$  به ترتیب حول نقاط  $\nu_{i:m:n}$  و  $\xi_{J:m:n}$  و نگه داشتن تنها دو جمله اول داریم:

$$\begin{aligned} F(x_i) &\approx F(\nu_{i:m:n}) + (x_i - \nu_{i:m:n})f(\nu_{i:m:n}), \\ &= \gamma_i - \delta_i x_i \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} F(S) &\approx F(\xi_{J:m:n}) + (S - \xi_{J:m:n})f(\xi_{J:m:n}), \\ &= \gamma_d^* + \delta_d^* S \end{aligned} \quad (11)$$

که در آنها

$$\gamma_i = F(\nu_{i:m:n}) - \nu_{i:m:n}f(\nu_{i:m:n}), \quad i = 1, \dots, m$$

$$\delta_i = f(\nu_{i:m:n}) \geq 0$$

$$\gamma_d^* = F(\xi_{J:m:n}) - \xi_{J:m:n}f(\xi_{J:m:n})$$

$$\delta_d^* = f(\xi_{J:m:n}) \geq 0$$

با جایگذاری (۱۰) و (۱۱) در رابطه (۸) معادله درستنمایی تقریبی به صورت

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln L(\lambda)}{\partial \lambda} &\approx \frac{D}{\lambda} - \frac{1}{2\lambda} \left\{ \sum_{i=1}^D [R_i + (R_i + 2)\gamma_i]x_i + [R_{(J)}^* + R_{(J)}^*\gamma_d^*]S \right\} \\ &- \frac{1}{2\lambda} \left\{ \sum_{i=1}^D (R_i + 2)\delta_i x_i^T + R_{(J)}^* S^T \delta_d^* \right\} = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

به دست می آید. با توجه به اینکه  $S = \lambda T$  و  $x_i = \lambda y_i$ ، معادله (۱۲) را می توان به صورت

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln L(\lambda)}{\partial \lambda} &\approx \frac{D}{\lambda} + \frac{1}{\gamma} \left\{ \sum_{i=1}^D [R_i + (R_i + \gamma) \gamma_i] y_i + [R_{(J)}^* + R_{(J)} \gamma_d^*] T \right\} \\ &- \frac{\lambda}{\gamma} \left\{ \sum_{i=1}^D (R_i + \gamma) \delta_i y_i + R_{(J)}^* T \delta_d^* \right\} = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

بازنویسی کرد. اکنون با ضرب کردن  $\lambda$  در معادله (۱۳)، معادله درجه دو

$$A\lambda^2 - B\lambda - 2D = 0 \quad (14)$$

حاصل می شود، که در آن

$$\begin{aligned} A &= \sum_{i=1}^D (R_i + \gamma) \delta_i y_i + R_{(J)}^* \delta_d^* T \\ B &= \sum_{i=1}^D [R_i + (R_i + \gamma) \gamma_i] y_i + [R_{(J)}^* + R_{(J)} \gamma_d^*] T \end{aligned}$$

از حل معادله درجه دوم (۱۴)، پارامتر  $\lambda$  می شود

$$\tilde{\lambda} = \frac{-B + \sqrt{B^2 + 4AD}}{2A} \quad (15)$$

با توجه به مثبت بودن  $\delta_i$  و  $\delta_d^*$  و در نتیجه مثبت بودن عبارت  $A$  تنها یکی از دو جواب معادله (۱۴) قابل قبول است. برآورده ماقسیموم درستنمایی تقریبی (۱۵) می تواند مقدار اولیه مناسبی را برای حل معادله (۸) به روش های عددی فراهم کند.

## ۳.۲ برآورده بیزی

در این بخش برآورده بیزی پارامتر  $\lambda$  تحت تابع زیان درجه دو به دست آورده می شود. فرض کنید  $\lambda$  دارای توزیع پیشین گاما  $GAMMA(a, b)$  با تابع چگالی

$$\pi(\lambda) \propto \lambda^{a-1} e^{-\lambda b}, \quad \lambda > 0 \quad (16)$$

باشد که در آن  $a$  و  $b$  مقادیری مثبت و معולם‌اند. با جایگذاری (۱) و (۲) در (۷)، تابع درستنمایی براساس نمونه سانسور هیبرید فراینده نوع دو به صورت

$$L(\lambda|\underline{y}) \propto \frac{\lambda^D e^{-\lambda \{ \sum_{i=1}^D (R_i + 1)y_i + TR_{(J)}^* \}}}{e^{\sum_{i=1}^D (R_i + 2) \ln(1+e^{-\lambda y_i}) + R_{(J)}^* \ln(1+e^{-\lambda T})}} \quad (17)$$

حاصل می‌شود. در این صورت تابع چگالی پسین  $\lambda$  به صورت

$$\begin{aligned} \pi(\lambda|\underline{y}) &\propto L(\lambda|\underline{y}) \cdot \pi(\lambda) \\ &\propto \frac{\lambda^{D+a-1} e^{-\lambda \{ \sum_{i=1}^D (R_i + 1)y_i + TR_{(J)}^* + b \}}}{e^{\sum_{i=1}^D (R_i + 2) \ln(1+e^{-\lambda y_i}) + R_{(J)}^* \ln(1+e^{-\lambda T})}} \end{aligned}$$

حاصل می‌شود. برآورد بیزی هر تابعی از پارامتر مانند  $(\lambda|U)$  تحت تابع زیان درجه دو از روی توزیع پسین به صورت

$$\hat{U}(\lambda)_{BS} = E(U(\lambda)|\underline{y}) = \frac{\int U(\lambda)\pi(\lambda|\underline{y})d\lambda}{\int \pi(\lambda|\underline{y})d\lambda} \quad (18)$$

است. از آنجایی که حل رابطه (۱۸) به صورت تحلیلی غیر ممکن است، در اینجا برای محاسبه آن دو تقریب لیندلی و <sup>۸</sup>MCMC ارائه می‌شوند.  
تقریب لیندلی: لیندلی (۱۹۸۰) روشی برای تقریب انتگرال‌های دوگانه ارائه داد.  
بالین روش تقریب لیندلی برای (۱۸) به صورت

$$E(U(\lambda)|\underline{y}) = U(\lambda) + \frac{1}{2}[U_2 + 2U_1\rho_1]\sigma^2 + \frac{1}{2}\ell_2 U_1(\sigma^2)^2 \quad (19)$$

است که در آن  $(\lambda|\underline{y})$  برای  $\ell_i(\lambda)$   $i = 1, 2, 3$  لگاریتم تابع درستنمایی،  $\ell_1 = \frac{\partial^i}{\partial \lambda^i} \ell(\lambda)$ ،  $U_1 = \frac{\partial}{\partial \lambda} \ell(\lambda)$ ،  $\rho_1 = \frac{\partial}{\partial \lambda} \ell_1(\lambda)$ ،  $U_2 = \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} \ell(\lambda)$ ،  $\rho_2 = \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} \ell_1(\lambda)$ ،  $U_3 = \frac{\partial^3}{\partial \lambda^3} \ell(\lambda)$ ،  $\rho_3 = \frac{\partial^3}{\partial \lambda^3} \ell_1(\lambda)$  اوردن تقریب لیندلی ابتدا مشتق سوم لگاریتم تابع درستنمایی نسبت به  $\lambda$  به صورت

$$\ell_3 = \frac{2D}{\lambda^3} + \lambda^3 \left\{ \sum_{i=1}^D (R_i + 2) \frac{e^{-\lambda y_i} (e^{-\lambda y_i} - 1)}{(1+e^{-\lambda y_i})^3} + R_{(J)}^* \frac{e^{-\lambda T} (e^{-\lambda T} - 1)}{(1+e^{-\lambda T})^3} \right\} \quad (20)$$

به دست آورده می‌شود. از چگالی پیشین (۱۶) داریم:

$$\rho_1 = \frac{a-1}{\lambda} - b \quad (21)$$

---

<sup>۸</sup> Monte Carlo Markov Chain

با قرار دادن (۲۰) و (۲۱) در (۱۹) و قراردادن  $\lambda = U(\lambda)$  برآورد بیزی پارامتر  $\lambda$  با روش تقریبی لیندلی به صورت

$$\hat{\lambda}_B = \hat{\lambda} + \left( \frac{a-1}{\hat{\lambda}} - b \right) Var(\lambda)|_{\lambda=\hat{\lambda}} + \frac{1}{2} \ell_2|_{\lambda=\hat{\lambda}} (Var(\lambda))^2 |_{\lambda=\hat{\lambda}}$$

حاصل می‌شود، که در آن  $Var(\lambda)$  واریانس مجذوبی و  $\hat{\lambda}$  برآوردگر ماکسیمم درستنمایی پارامتر  $\lambda$  است.

روش MCMC: در اینجا از الگوریتم گیز برای تولید نمونه از چگالی  $\pi(\lambda|\underline{y})$  و محاسبه برآورد بیزی و بازه اطمینان بیزی پارامتر استفاده می‌شود. برای این منظور ابتدا نشان داده می‌شود که  $\pi(\lambda|\underline{y})$  مقعر لگاریتمی است. داریم

$$\begin{aligned} \ln \pi(\lambda|\underline{y}) &\propto (D+a-1) \ln(\lambda) - \lambda \left\{ \sum_{i=1}^D (R_i+1)y_i + R_{(J)}^* T + b \right\} \\ &- \sum_{i=1}^D (R_i+1) \ln(1+e^{-\lambda y_i}) + R_{(J)}^* \ln(1+e^{-\lambda T}) \end{aligned}$$

چون

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \ln \pi(\lambda|\underline{y})}{\partial \lambda^2} &= -\frac{D+a-1}{\lambda^2} - \sum_{i=1}^D (R_i+1) \frac{y_i e^{-\lambda y_i}}{(1+e^{-\lambda y_i})^2} \\ &- R_{(J)}^* \frac{T e^{-\lambda T}}{(1+e^{-\lambda T})^2} < 0 \end{aligned}$$

لذا  $\pi(\lambda|\underline{y})$  مقعر لگاریتمی است. گام‌های الگوریتم گیز عبارتند از:

گام ۱:  $\lambda_1$  از چگالی مقعر لگاریتمی  $\pi(\lambda|\underline{y})$  تولید می‌شود.

گام ۲: گام ۱،  $M$  بار تکرار می‌شود و  $\lambda_i, i = 1, 2, \dots, M$  به دست آورده می‌شود.

گام ۳: برآورد بیزی پارامتر  $\lambda$  تحت تابع زیان درجه دو محاسبه شود:

$$\hat{\lambda}_{Bayes} = \hat{E}(\lambda|\underline{y}) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \lambda_i$$

برای تولید  $\lambda$  از چگالی پسین مقعر لگاریتمی  $\pi(\lambda|\underline{y})$  می‌توان از الگوریتم دور روی<sup>۹</sup> (دور روی، ۱۹۹۴) استفاده کرد:

---

<sup>۹</sup> Devroye method

گام ۱: قرار دهید  $c = \pi(m|\underline{y})$  نمای <sup>۱۰</sup> چگالی  $\pi(\lambda|\underline{y})$  است.

گام ۲:  $U$  را از توزیع  $(0, U)$  و  $V$  را از توزیع  $(0, V)$  تولید کنید.

گام ۳: اگر  $1 \leq U$ ، آنگاه قرار دهید  $U = \lambda$  و  $V = T$ . در غیر این صورت قرار

$$\text{دهید } T = V(U - 1) \text{ و } \lambda = 1 - \ln(U - 1)$$

گام ۴: قرار دهید:  $\lambda = m + \frac{\Delta}{c}$

گام ۵: اگر  $T \leq \frac{\pi(\lambda|\underline{y})}{c}$  آنگاه  $\lambda$  مشاهدهای از  $\pi(\lambda|\underline{y})$  است، در غیر این صورت به

گام دوم برگردید.

### ۳ بازه‌های اطمینان مختلف

در این بخش بازه‌های اطمینان مختلف برای پارامتر  $\lambda$  به دست آورده می‌شود.

#### ۱.۳ بازه اطمینان مجانية

برآورده‌گر ماکسیمم درستنما می‌باشد که از حل معادله درستنما می‌باشد می‌آید، تحت شرایط مطلوب (تیکو و آکایا، ۲۰۰۴)، به‌طور مجانية دارای توزیع نرمال است، یعنی

$$\hat{\lambda} \rightarrow N(\lambda, I^{-1})$$

که در آن  $I^{-1}$  وارون اطلاع فیشر مشاهده شده است و به صورت

$$I^{-1} = -\left(\frac{\partial^2 \ln L(\lambda)}{\partial \lambda^2}\right)^{-1}$$

تعریف می‌شود. چون محاسبه اطلاع فیشر مورد انتظار از نظر تئوری مشکل است برای به دست آوردن بازه اطمینان مجانية از اطلاع فیشر مشاهده شده استفاده می‌شود. با استفاده از معادله درستنما (۸) داریم:

$$\frac{\partial^2 \ln L(\lambda)}{\partial \lambda^2} = -\frac{D}{\lambda^2} - \frac{1}{2\lambda^2} \left\{ \sum_{i=1}^D (R_i + 2)x_i^T f(x_i) + R_{(J)}^* S^T f(S) \right\} \quad (22)$$

## ۲۸ ..... استنباط برای توزیع نیمه لوژستیک

همچنین با استفاده از معادله درستنمایی تقریبی (۱۲) نتیجه می شود:

$$\frac{\partial^2 \ln L(\lambda)}{\partial \lambda^2} = -\frac{D}{\lambda^2} - \frac{1}{2\lambda^2} \left\{ \sum_{i=1}^D (R_i + 2)x_i^2 \delta_i + R_{(J)}^* S^2 \delta_d^* \right\} \quad (23)$$

اکنون روابط (۲۲) و (۲۳) را می توان به صورت

$$-\frac{\partial^2 \ln L(\lambda)}{\partial \lambda^2} = \frac{V}{\lambda^2} - \frac{\lambda^2 \ln L(\lambda)}{\partial \lambda^2} \approx \frac{V^*}{\lambda^2}$$

نوشت، که در آن

$$V = D + \frac{1}{2} \left\{ \sum_{i=1}^D (R_i + 2)x_i^2 f(x_i) + R_{(J)}^* S^2 f(S) \right\}$$

$$V^* = D + \frac{1}{2} \left\{ \sum_{i=1}^D (R_i + 2)x_i^2 \delta_i + R_{(J)}^* S^2 \delta_d^* \right\}$$

حال با استفاده از کمیت های محوری

$$Q_1 = \frac{\hat{\lambda}_{ML} - \lambda}{\sqrt{\frac{\lambda^*}{V}}} \sim N(0, 1) \quad Q_2 = \frac{\hat{\lambda}_{AML} - \lambda}{\sqrt{\frac{\lambda^*}{V^*}}} \sim N(0, 1)$$

بازه های اطمینان تقریبی  $(1 - \alpha) \times 100$ ٪ براساس توزیع های مجانبی MLE و AMLE برای  $\lambda$  به ترتیب عبارتند از:

$$\left( \hat{\lambda}_{ML} - z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{\lambda}_{ML}^*}{V}}, \hat{\lambda}_{ML} + z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{\lambda}_{ML}^*}{V}} \right)$$

$$\left( \hat{\lambda}_{AML} - z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{\lambda}_{AML}^*}{V^*}}, \hat{\lambda}_{AML} + z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{\lambda}_{AML}^*}{V^*}} \right)$$

### ۲.۳ بازه اطمینان بر اساس آزمون نسبت درستنمایی

بازه اطمینان براساس آزمون نسبت درستنمایی اولین بار توسط لاولس (۲۰۰۳) برای محاسبه بازه اطمینان پارامتر های توزیع گاما به کار گرفته شد. می توان نشان داد که این بازه اطمینان اندکی بهتر از بازه اطمینان براساس توزیع مجانبی برآورد گر درستنمایی است (میکر و اسکوبار، ۱۹۹۸). آزمون فرضیه

$$H_0 : \lambda = \lambda_0 \quad \text{در مقابل} \quad H_1 : \lambda \neq \lambda_0.$$

را در سطح معناداری  $\alpha$  در نظر بگیرید. آماره آزمون نسبت درستنماهی برابر است با:

$$\Lambda = \frac{\sup_{\lambda \in \Lambda_0} L(\lambda)}{\sup_{\lambda \in \Lambda} L(\lambda)} = \frac{L(\lambda_0)}{L(\hat{\lambda})},$$

که در آن  $\Lambda$  فضای پارامتر تحت فرض صفر و  $\Lambda$  فضای پارامتر کل است. تحت فرض صفر برای اندازه نمونه‌های بزرگ، کمیت  $-2 \ln \Lambda = -2[\ln L(\lambda_0) - \ln L(\hat{\lambda})]$  به طور تقریبی دارای توزیع کای-اسکور با یک درجه آزادی است. با توجه به اینکه بر اساس آزمون نسبت درستنماهی داریم

$$\begin{aligned} RH_0 &\iff -2 \ln \Lambda > \chi^2_{1, 1-\alpha} \\ &\iff -2[\ln L(\lambda_0) - \ln L(\hat{\lambda})] > \chi^2_{1, 1-\alpha} \end{aligned}$$

بنابراین بازه اطمینان  $(1 - \alpha) 100$ ٪ بر اساس آزمون نسبت درستنماهی می‌شود

$$\begin{aligned} S(\lambda) &= \{\lambda : -2[\ln L(\lambda_0) - \ln L(\hat{\lambda})] \leq \chi^2_{1, 1-\alpha}\} \\ &= \{\lambda : \ln L(\lambda) \geq \ln L(\hat{\lambda}) - \frac{1}{2}\chi^2_{1, 1-\alpha}\}, \end{aligned}$$

که در آن  $\chi^2_{1, 1-\alpha}$  صدک  $(1 - \alpha) 100$ ٪ توزیع  $\chi^2$  با یک درجه آزادی است و  $L(\lambda)$  در رابطه (۱۷) تعریف شده است. از آنجایی که  $L(\lambda)$  تابعی تک‌مدى است بنابراین به‌ازای هر  $\alpha$  مشخص،  $S(\lambda)$  یک بازه اطمینان یکتا خواهد بود.

### ۳.۳ بازه اطمینان بوت استرپ

با استفاده از ماتریس اطلاع فیشر می‌توان واریانس  $\hat{\lambda}$  را برآورد کرد و یک بازه اطمینان مجانبی برای  $\lambda$  پیدا کرد، اما بازه‌های اطمینان به‌دست آمده با استفاده از خواص مجانبی برآورده کر ماقسیمم درستنماهی برای نمونه‌های با حجم کوچک چندان خوب عمل نمی‌کنند و نسبتاً دارای احتمال پوشش پایینی هستند. هنگامی که توزیع آماره‌ای نامشخص یا پیچیده یا حجم نمونه کوچک باشد، روش بوت استرپ روشی ساده برای به‌دست آوردن بازه اطمینان است. روش بازنمونه‌گیری بوت استرپ نخستین بار توسط افرون (۱۹۷۹) پیشنهاد شد. این روش مبتنی بر تولید یک

نمونه از جامعه است. با استفاده از اطلاعات این نمونه، تعدادی نمونه هم اندازه از جامعه شبیه‌سازی شده و از این نمونه‌ها برای برآورده مشخصه‌های مختلف همچون میانگین و واریانس استفاده می‌شود. در این مقاله به روش بوت استرپ پارامتری می‌پردازیم. در این بخش دو بازه اطمینان پارامتری بوت استرپ برای پارامتر  $\lambda$  ارائه می‌شوند. دو روش بوت استرپ که در عمل به‌طور گستره‌های مورد استفاده قرار می‌گیرند عبارتند از:

بوت استرپ درصدی<sup>۱۱</sup> (افرون، ۱۹۸۲): بازه اطمینان بوت استرپ درصدی با استفاده از الگوریتم زیر به‌دست می‌آید:

گام ۱:  $\lambda$  از رابطه (۸) یا (۹) برآورده و با  $\hat{\lambda}$  نشان داده می‌شود،

گام ۲: با استفاده از  $\hat{\lambda}$  و  $R_1, \dots, R_m$  و  $T$ ، نمونه بوت استرپ

$\{X_{1:m:n}^*, \dots, X_{D:m:n}^*\}$  تولید و با استفاده از این نمونه، برآورده بوت استرپ  $\lambda$  به‌دست آورده با  $\hat{\lambda}^*$  نشان داده می‌شود،

گام ۳: گام ۲ را  $B$  مرتبه تکرار کنید تا  $\hat{\lambda}_1^*, \dots, \hat{\lambda}_B^*$  به‌دست آید.

گام ۴:  $\hat{\lambda}_1^*, \dots, \hat{\lambda}_B^*$  را به صورت  $(\hat{\lambda}_{(B)}^*, \dots, \hat{\lambda}_{(1)}^*)$  مرتب کنید.

بازه اطمینان  $\lambda$  برای  $\alpha = 1 - 100\%$  عبارتست از:

$$(\hat{\lambda}_{Boot-p(\frac{\alpha}{2})}^*, \hat{\lambda}_{Boot-p(1-\frac{\alpha}{2})}^*), \quad (24)$$

که در آن  $\hat{\lambda}_{Boot-p(\frac{\alpha}{2})}^*$  اصدقک  $\frac{\alpha}{2}$  در نمونه بوت استرپ درصدی است.

بوت استرپ روش تی<sup>۱۲</sup> (هال، ۱۹۸۸): بازه اطمینان بوت

استرپ روش تی با استفاده از الگوریتم زیر به‌دست می‌آید:

گام ۱:  $\lambda$  از رابطه (۸) یا (۹) برآورده و با  $\hat{\lambda}$  نشان داده شود،

گام ۲: با استفاده از  $\hat{\lambda}$  و  $R_1, \dots, R_m$  و  $T$ ، نمونه بوت استرپ

$\{X_{1:m:n}^*, \dots, X_{D:m:n}^*\}$  تولید و با استفاده آن برآورده بوت استرپ  $\lambda$  محاسبه و با  $\hat{\lambda}^*$  نشان داده شود. همچنین  $\hat{V}(\hat{\lambda}^*) = \frac{\hat{\lambda}^*}{V}$  را برای  $D > 0$  به‌دست آورده می‌شود.

<sup>۱۱</sup> Boot-p

<sup>۱۲</sup> Boot-t

### ۳۱ ..... اکبر اصغرزاده و همکاران

گام ۳: مقدار آماره  $T^* = \frac{(\hat{\lambda}^* - \hat{\lambda})}{\sqrt{\hat{V}(\lambda^*)}}$  محاسبه شود.

گام ۴: گام های ۲ و ۳ را مرتبه تکرار کنید و  $T_1^*, \dots, T_B^*$  را به دست آورید،

گام ۵:  $T_1^*, \dots, T_B^*$  را به صورت صعودی  $T_{(1)}^*, \dots, T_{(B)}^*$  مرتب کنید،

باشه اطمینان  $\% (1 - \alpha)$  دو طرفه برای  $\lambda$  عبارتست از:

$$(\hat{\lambda} + T_{[Boot-t(\frac{\alpha}{2})]}^* \sqrt{\frac{\hat{\lambda}^2}{V}}, \hat{\lambda} + T_{[Boot-t(\frac{1-\alpha}{2})]}^* \sqrt{\frac{\hat{\lambda}^2}{V}}).$$

#### ۴.۳ باشه اطمینان بیزی

در این بخش، از الگوریتم گیبز برای به دست آوردن باشه اطمینان بیزی به صورت زیر استفاده می شود.

گام ۱:  $\lambda_1$  را با استفاده از روش دور روی از چگالی مقعر لگاریتمی  $(\lambda|y)^\pi$  تولید کنید.

گام ۲: گام ۱ را  $M$  بار تکرار کنید و  $M, \dots, M_i = 1, \dots, i$  را به دست آورید.

گام ۳: میانگین پسین تقریبی یا برآورد بیزی پارامتر  $\lambda$  تحت تابع زیان درجه دو عبارتست از:

$$\hat{\lambda}_{Bayes} = \hat{E}(\lambda|x) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \lambda_i$$

گام ۴: واریانس پسین تقریبی  $\lambda$  عبارتست از:

$$\hat{V}(\lambda|y) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \{\lambda_i - \hat{E}(\lambda|y)\}^2$$

گام ۵: به منظور به دست آوردن باشه اطمینان بیزی مقادیر  $\lambda_M, \dots, \lambda_1$  را به صورت صعودی  $\lambda_{(1)}, \dots, \lambda_{(M)}$  مرتب کنید. با توجه به  $M$  و  $\lambda$  های تولید شده، از روش چن و شائو (۱۹۹۹) یک باشه اطمینان بیزی  $\% (1 - \alpha)$  برای  $\lambda$  عبارتست از:

$$(\lambda_{M(\frac{\alpha}{2})}, \lambda_{M(1-\frac{\alpha}{2})})$$

با تکرار این روش می توان بازه های اطمینان زیادی برای  $\lambda$  به دست آورد. آن بازه های که دارای کوتاه ترین طول باشد یک باشه اطمینان با بالاترین چگالی پسین

<sup>۱۳</sup> Highest Posterior Density

(HPD)، خواهد بود.

#### ۴ مطالعه شبیه‌سازی

در این بخش به کمک شبیه‌سازی مونت کارلو برآوردهای مختلف ارائه شده مقایسه می‌شوند. با استفاده از الگوریتم معرفی شده در بالاکریشنان و ساندهو (۱۹۹۵) و با استفاده از مقادیر از قبل تعیین شده  $R_1, \dots, R_m$  و  $T_{m:n}$ ، نمونه‌های سانسور فزاینده نوع دو از توزیع نیمه‌لوژستیک استاندارد تولید می‌شود. اگر  $T < Y_{m:m:n}$ ، بنابراین با حالت اول روبرو هستیم و نمونه سانسور هیبرید فراینده نوع دو عبارتست از:  $\{(Y_{1:m:n}, R_1), \dots, (Y_{m:m:n}, R_m)\}$ . اگر  $Y_{m:m:n} > T > Y_{J:m:n}$  آنگاه با حالت دوم مواجه هستیم و مقدار  $J$  از رابطه  $Y_{J:m:n} < T < Y_{J+1:m:n}$  محاسبه می‌شود. بنابراین نمونه سانسور هیبرید فزاینده نوع دو مربوطه در این حالت عبارتست از:  $\{(Y_{1:m:n}, R_1), \dots, (Y_{J:m:n}, R_J), \dots, (Y_{m:m:n}, R_m)\}$  و  $R_j^*$  که قبلاً تعریف شده است.

با توجه به نمونه حاصل، AMLE پارامتر  $\lambda$  از رابطه (۱۵) محاسبه می‌شود. با استفاده از مقدار AMLE به عنوان جواب اولیه با حل معادله (۸) یا (۹) به صورت عددی، MLE پارامتر  $\lambda$  به دست آورده می‌شود. در این مطالعه شبیه‌سازی، مقادیر مختلف  $n$  و  $m$  را در نظر می‌گیریم. از دو طرح

$$R_1 = \dots = R_{m-1} = 0, R_m = n - m \quad \text{طرح یک:}$$

$$R_1 = n - m, R_2 = \dots = R_m = 0 \quad \text{طرح دو:}$$

استفاده می‌شود. هر مورد ۱۰۰۰ بار تکرار می‌شود و میانگین اریبی‌ها و میانگین توان‌های دوم خطای (MSE)، همچنین میانگین طول بازه‌های اطمینان و احتمال‌های پوشش محاسبه می‌شود. در هر تکرار اگر تعداد شکست‌ها صفر باشد آن نمونه در نظر گرفته نخواهد شد. میانگین اریبی‌های AMLE و برآوردهای MLE بیزی با تقریب‌های لیندلی و MCMC پارامتر  $\lambda$  در جدول ۳ گزارش شده‌اند. برای به دست آوردن برآورد بیزی، فرض می‌شود پارامتر  $\lambda$  دارای توزیع پیشین گاما  $GAMMA(a, b)$  باشد. برای محاسبه برآورد بیزی، دو توزیع پیشین

$$\pi_1 : a = b = 0 \quad \pi_2 : a = b = 1$$

را در نظر می‌گیریم. ملاحظه می‌شود  $\pi_1$  یک توزیع پیشین ناآگاهی بخش و  $\pi_2$  یک توزیع پیشین آگاهی بخش است. برآورده‌گر بیزی به دست آمده با تقریب لیندلی با استفاده از توزیع پیشین ناآگاهی بخش و آگاهی بخش به ترتیب با NBEL و IBEL نشان داده می‌شوند. به طور مشابه برآورده‌گر بیزی به دست آمده با تقریب MCMC با استفاده از توزیع‌های پیشین ناآگاهی بخش و آگاهی بخش به ترتیب با NBEM و IBEM نشان داده می‌شوند. همچنین با استفاده از شبیه‌سازی، بازه‌های اطمینان مختلف براساس توزیع مجانبی MLE، توزیع مجانبی AMLE، بازه اطمینان بر اساس آزمون نسبت درستنمایی LRT، بازه‌های اطمینان بیزی بر اساس توزیع‌های پیشین معرفی شده (NBIM و IBIM) محاسبه شده‌اند. دو بازه اطمینان بوت استرپ (Boot-p و Boot-t) نیز برای پارامتر  $\lambda$  محاسبه شده است. طول‌های بازه‌های اطمینان مختلف و احتمال‌های پوشش آنها در جدول ۲ گزارش شده‌اند.

## ۵ مثال عددی

داده‌های جدول ۳ میزان پیش روی آب رودخانه می‌سی‌سی‌پی را در واحد اینچ<sup>۱۴</sup> در ماه مارس<sup>۱۵</sup> در شهر مینیاپولیس<sup>۱۶</sup> ایالت متوجه امریکا نشان می‌دهد. این داده‌ها اولین بار توسط هینکلی (1977) به کار گرفته شدند. با انجام آزمون کلموگروف-اسمیرنوف<sup>۱۷</sup> (K-S)، برای توزیع نیمه‌لوژستیک با پارامتر  $K = 8117$  و  $S = 0.8117$ ، مقدار آماره K-S و p-مقدار<sup>۱۸</sup> متناظر عبارتند از  $K - S = 0.1694$  و  $p - value = 0.3254$ . بنابراین توزیع نیمه‌لوژستیک برآش خوبی برای داده‌ها ارائه می‌دهد.

با در نظر گرفتن دو طرح زیر

$$(R_1, \dots, R_m) = (0, \dots, 0, 10), \quad T = 1/90, \quad m = 20 \quad \text{طرح ۱:}$$

$$(R_1, \dots, R_m) = (0, \dots, 0, 10), \quad T = 1/50, \quad m = 20 \quad \text{طرح ۲:}$$

<sup>۱۴</sup> Inch

<sup>۱۵</sup> March

<sup>۱۶</sup> Minneapolis/St Paul

<sup>۱۷</sup> Kolmogorov-Smirnov

<sup>۱۸</sup> p-value

جدول ۱: اریبی و توان دوم خطای تجربی برآوردهای مختلف

$T = 0/75$		$T = 0/25$		روش	طرح	$m$	$n$
$MSE$	$Bias$	$MSE$	$Bias$				
۰/۱۴۷	-۰/۲۲۷	۰/۱۹۸	-۰/۳۶۸	MLE		۵	۱۵
۰/۱۴۷	-۰/۲۲۷	۰/۱۹۸	-۰/۳۶۸	AMLE			
۰/۱۲۱	-۰/۲۳۷	۰/۰۶۵	-۰/۲۲۴	IBEL	(۰, ۰, ۰, ۰, ۱۰)		
۰/۱۶۷	-۰/۲۶۹	۰/۲۲۶	-۰/۴۰۹	NBEL			
۰/۱۶۹	-۰/۳۲۷	۰/۰۳۲	-۰/۱۶۰	IBEM			
۰/۲۲۶	-۰/۳۸۱	۰/۲۲۶	-۰/۴۵۸	NBEM			
۰/۱۳۱	-۰/۲۱۶	۰/۲۷۹	-۰/۳۵۱	MLE			
۰/۱۳۱	-۰/۲۱۶	۰/۲۷۸	-۰/۳۵۳	AMLE			
۰/۰۳۱	-۰/۱۶۱	۰/۱۷۹	-۰/۳۲۳	IBEL	(۱۰, ۰, ۰, ۰, ۰)		
۰/۱۴۶	-۰/۲۷۲	۰/۳۱۶	-۰/۴۱۱	NBEL			
۰/۰۲۷	-۰/۰۲۱	۰/۱۸۸	-۰/۳۷۸	IBEM			
۰/۱۱۹	-۰/۲۸۱	۰/۳۶۳	-۰/۵۳۱	NBEM			
۰/۱۳۱	-۰/۲۱۶	۰/۳۵۹	-۰/۵۵۹	MLE		۱۰	۲۵
۰/۱۳۱	-۰/۲۱۶	۰/۳۵۹	-۰/۵۵۹	AMLE			
۰/۱۲۰	-۰/۱۶۱	۰/۱۸۸	-۰/۴۰۹	IBEL	(۰, ..., ۰, ۱۵)		
۰/۱۴۹	-۰/۲۷۲	۰/۳۸۱	-۰/۵۸۰	NBEL			
۰/۱۰۱	-۰/۰۲۱	۰/۴۶۶	-۰/۶۶۲	IBEM			
۰/۱۲۸	-۰/۲۸۱	۰/۴۲۵	-۰/۶۴۸	NBEM			
۰/۲۲۴	-۰/۳۶۶	۰/۲۹۵	-۰/۴۸۷	MLE			
۰/۲۲۴	-۰/۳۶۷	۰/۲۹۵	-۰/۴۸۷	AMLE			
۰/۱۸۷	-۰/۳۴۵	۰/۱۲۵	-۰/۳۲۲	IBEL	(۱۵, ۰, ..., ۰)		
۰/۲۶۰	-۰/۴۰۳	۰/۳۱۶	-۰/۵۱۳	NBEL			
۰/۲۷۴	-۰/۴۴۶	۰/۴۲۸	-۰/۶۴۴	IBEM			
۰/۳۵۷	-۰/۵۱۸	۰/۳۱۶	-۰/۵۵۰	NBEM			
۰/۱۴۱	-۰/۳۵۹	۰/۵۲۰	-۰/۷۱۵	MLE		۱۰	۵۰
۰/۱۴۱	-۰/۳۵۹	۰/۵۲۰	-۰/۷۱۵	AMLE			
۰/۱۲۵	-۰/۳۵۲	۰/۲۹۰	-۰/۶۱۴	IBEL	(۰, ..., ۰, ۴۰)		
۰/۱۵۰	-۰/۳۷۱	۰/۵۴۴	-۰/۷۲۵	NBEL			
۰/۱۴۶	-۰/۳۷۳	۰/۳۰۱	-۰/۵۲۷	IBEM			
۰/۱۵۱	-۰/۳۸۰	۰/۴۷۱	-۰/۶۶۱	NBEM			
۰/۳۰۱	-۰/۴۷۹	۰/۴۷۶	-۰/۶۶۸	MLE			
۰/۳۰۱	-۰/۴۸۰	۰/۴۷۶	-۰/۶۶۸	AMLE			
۰/۲۴۹	-۰/۴۴۲	۰/۲۸۹	-۰/۵۱۳	IBEL	(۴۰, ۰, ..., ۰)		
۰/۲۲۴	-۰/۵۰۵	۰/۴۹۱	-۰/۶۸۰	NBEL			
۰/۱۶۸	-۰/۳۵۴	۰/۲۱۹	-۰/۴۲۲	IBEM			
۰/۲۲۱	-۰/۴۰۵	۰/۴۵۹	-۰/۶۳۹	NBEM			
۰/۰۹۶	-۰/۲۵۹	۰/۵۰۹	-۰/۶۹۵	MLE		۲۰	۵۰
۰/۰۹۶	-۰/۲۵۹	۰/۵۰۹	-۰/۶۹۵	AMLE			
۰/۰۹۴	-۰/۲۵۹	۰/۳۷۵	-۰/۵۹۸	IBEL	(۰, ..., ۰, ۳۰)		
۰/۱۰۲	-۰/۲۷۰	۰/۵۲۳	-۰/۷۰۶	NBEL			
۰/۱۰۱	-۰/۲۸۰	۰/۲۸۶	-۰/۵۱۱	IBEM			
۰/۱۰۶	-۰/۲۸۷	۰/۴۴۸	-۰/۶۳۹	NBEM			
۰/۱۷۵	-۰/۳۴۸	۰/۵۲۰	-۰/۷۹۷	MLE			
۰/۱۷۵	-۰/۳۴۸	۰/۵۲۰	-۰/۷۹۷	AMLE			
۰/۱۵۸	-۰/۳۳۷	۰/۳۳۸	-۰/۵۶۰	IBEL	(۳۰, ۰, ..., ۰)		
۰/۱۸۸	-۰/۳۶۸	۰/۵۳۵	-۰/۷۰۹	NBEL			
۰/۱۱۴	-۰/۳۰۱	۰/۲۶۷	-۰/۴۸۳	IBEM			
۰/۱۲۷	-۰/۳۱۲	۰/۴۹۱	-۰/۶۶۲	NBEM			

جدول ۲: طول و درصد پوشش بازه‌های اطمینان مختلف ۹۵ درصد

$T = 0/75$	$CP$	$Length$	$T = 0/25$	$CP$	$Length$	روش	طرح	$m$	$n$
۰/۹۴۸		۱/۹۲۴۳	۰/۹۹۷		۲/۸۷۰۵	MLE		۵	۱۵
۰/۹۴۷		۱/۹۱۹۹	۰/۹۹۷		۲/۸۴۳۵	AMLE			
۰/۸۴۹		۲/۷۳۹۲	۰/۹۷۵		۲/۷۴۶۲	Boot - t			
۰/۹۴۹		۲/۶۸۲۵	۰/۹۹۸		۲/۷۵۹۲	Boot - p	(۰, ۰, ۰, ۰, ۱۰)		
۰/۹۵۱		۱/۱۸۳۰	۰/۹۳۴		۱/۲۳۰۰	LRT			
۰/۹۴۰		۱/۰۵۳۰	۰/۹۰۸		۱/۱۲۳۰	IBIM			
۰/۸۸۵		۱/۵۰۷۰	۰/۸۴۰		۱/۴۵۱۰	IBIM			
۰/۹۴۲		۲/۵۲۸۸	۰/۹۹۷		۴/۱۰۰۲	MLE			
۰/۹۲۳		۲/۳۵۶۴	۰/۹۹۸		۴/۵۳۹۳	AMLE			
۰/۹۷۱		۲/۷۷۶۴	۰/۹۷۲		۴/۲۴۷۹	Boot - t			
۰/۹۵۷		۲/۶۳۷۲	۰/۹۷۸		۴/۱۹۴۱	Boot - p	(۱۰, ۰, ۰, ۰, ۰)		
۰/۸۹۹		۱/۸۳۸۰	۰/۹۴۰		۱/۸۱۳۰	LRT			
۰/۹۱۰		۱/۵۲۳۰	۰/۹۱۳		۱/۹۱۰	IBIM			
۰/۸۲۵		۲/۰۱۸۰	۰/۸۶۰		۱/۹۶۷۰	IBIM			
۰/۹۱۷		۱/۲۳۹۱	۰/۸۲۹		۲/۰۱۳۲	MLE		۱۰	۲۵
۰/۹۲۷		۱/۲۳۰۸	۰/۸۴۸		۲/۰۵۸۳	AMLE			
۰/۸۹۷		۱/۴۷۰۰	۰/۹۰۷		۱/۷۹۸۷	Boot - t			
۰/۸۹۷		۱/۴۸۷۲	۰/۸۷۸		۱/۴۴۲۹	Boot - p	(۰, ..., ۰, ۱۵)		
۰/۹۷۷		۰/۶۵۸۲	۰/۹۳۴		۰/۶۳۰۳	LRT			
۰/۹۵۳		۰/۶۲۰۷	۰/۹۲۸		۰/۶۲۲۷	IBIM			
۰/۹۴۰		۱/۱۶۰۰	۰/۹۲۰		۱/۱۶۱۰	IBIM			
۰/۹۲۷		۱/۷۷۲۷	۰/۹۸۳		۳/۰۸۶۶	MLE			
۰/۹۲۲		۱/۷۳۷۷	۰/۹۸۴		۳/۱۰۰۰	AMLE			
۰/۹۳۴		۱/۷۴۸۱	۰/۹۸۳		۲/۶۶۴۵	Boot - t			
۰/۹۳۴		۱/۷۷۷۵	۰/۹۷۹		۲/۶۰۳۸	Boot - p	(۱۵, ۰, ..., ۰)		
۰/۹۲۰		۱/۲۲۷۰	۰/۹۰۸		۱/۲۲۴۰	LRT			
۰/۹۰۸		۱/۱۰۹۰	۰/۹۳۸		۱/۰۸۱۰	IBIM			
۰/۸۸۵		۱/۶۲۰۰	۰/۹۲۰		۱/۶۳۱۰	IBIM			
۰/۹۵۲		۱/۲۴۸۷	۰/۹۲۸		۱/۴۴۷۱	MLE		۱۰	۵۰
۰/۹۵۲		۱/۲۸۱۱	۰/۹۴۹		۱/۵۲۳۵	AMLE			
۰/۹۱۵		۱/۴۰۷۹	۰/۹۰۰		۱/۵۸۴۲	Boot - t			
۰/۹۰۹		۱/۴۹۸۴	۰/۹۰۶		۱/۵۸۴۴	Boot - p	(۰, ..., ۰, ۴۰)		
۰/۹۷۷		۰/۶۸۷۱	۰/۹۴۱		۰/۷۱۴۳	LRT			
۰/۹۵۹		۰/۶۳۹۸	۰/۹۲۸		۰/۶۶۶۱	IBIM			
۰/۹۵۵		۱/۲۱۰۰	۰/۹۲۰		۱/۲۱۷۰	IBIM			
۰/۹۲۷		۱/۷۹۳۴	۰/۹۴۷		۲/۹۲۱۷	MLE			
۰/۹۳۰		۱/۷۷۲۲	۰/۹۴۷		۲/۹۲۴۷	AMLE			
۰/۹۲۹		۱/۷۷۷۷	۰/۹۸۲		۲/۶۶۲۷	Boot - t			
۰/۹۴۴		۱/۷۴۶۰	۰/۹۷۸		۲/۶۵۱۶	Boot - p	(۴۰, ۰, ..., ۰)		
۰/۹۵۱		۱/۱۷۹۰	۰/۹۱۶		۱/۱۵۰	LRT			
۰/۹۴۰		۱/۰۶۲۰	۰/۸۹۷		۱/۰۸۹۰	IBIM			
۰/۹۲۰		۱/۵۸۹۰	۰/۸۸۰		۱/۵۶۵۰	IBIM			
۰/۹۴۱		۰/۸۴۱۸	۰/۹۰۴		۱/۴۶۲۱	MLE		۲۰	۵۰
۰/۹۴۲		۰/۸۳۸۹	۰/۹۵۸		۱/۴۵۷۰	AMLE			
۰/۹۱۱		۰/۹۴۷۷	۰/۸۹۹		۱/۷۷۷۲	Boot - t			
۰/۹۱۸		۰/۹۲۸۷	۰/۸۹۷		۱/۲۵۱۱	Boot - p	(۰, ..., ۰, ۳۰)		
۰/۹۷۷		۰/۲۷۴۷	۰/۹۷۷		۰/۲۵۱۷	LRT			
۰/۹۷۰		۰/۲۵۷۹	۰/۹۰۴		۰/۲۳۴۸	IBIM			
۰/۹۵۰		۰/۸۳۳۰	۰/۹۴۰		۰/۸۲۵۹	IBIM			
۰/۹۳۶		۱/۲۶۸۱	۰/۹۰۳		۲/۹۴۷	MLE			
۰/۹۳۰		۱/۲۴۵۸	۰/۹۲۰		۲/۱۸۰۶	AMLE			
۰/۹۲۷		۱/۲۴۵۶	۰/۹۴۸		۱/۹۰۲۹	Boot - t			
۰/۹۴۱		۱/۲۷۲۷	۰/۹۳۵		۱/۸۹۸۷	Boot - p	(۳۰, ۰, ..., ۰)		
۰/۹۶۶		۰/۷۱۶۹	۰/۹۸۴		۰/۷۲۵۱	LRT			
۰/۹۴۵		۰/۶۶۹۷	۰/۹۷۵		۰/۶۴۹۷	IBIM			
۰/۹۴۰		۱/۲۶۸۰	۰/۹۷۵		۱/۲۳۸۰	IBIM			

جدول ۳: داده‌های پیش روی آب رودخانه می سی سی بی در واحد اینچ

۰/۳۲	۰/۴۷	۰/۵۲	۰/۵۹	۰/۷۷	۰/۸۱	۰/۸۱	۰/۹۰
۰/۹۶	۱/۱۸	۱/۲۰	۱/۲۰	۱/۳۱	۱/۳۵	۱/۴۳	۱/۵۱
۱/۶۲	۱/۷۴	۱/۸۷	۱/۸۹	۱/۹۵	۲/۰۵	۲/۱۰	۲/۲۰
۲/۴۸	۲/۸۱	۳/۰۰	۳/۰۹	۳/۲۷	۴/۷۵		

برای طرح اول،  $m$  امین شکست قبل از زمان  $T$  رخ می‌دهد. بنابراین با حالت اول سانسور هیبرید فراینده نوع دو مواجه هستیم و داده‌ها عبارتند از

۰/۳۲	۰/۴۷	۰/۵۲	۰/۵۹	۰/۷۷	۰/۸۱	۰/۸۱	۰/۹۰
۰/۹۶	۱/۱۸	۱/۲۰	۱/۲۰	۱/۳۱	۱/۳۵	۱/۴۳	۱/۵۱
۱/۶۲	۱/۷۴	۱/۸۷	۱/۸۹	۱/۹۵	۲/۰۵	۲/۱۰	۲/۲۰

با استفاده از داده‌های فوق، مقادیر  $A$  و  $B$  به ترتیب برابرند با

$$A = \sum_{i=1}^{20} (R_i + 2) \delta_i y_i^2 = 34/0.822$$

$$B = \sum_{i=1}^{20} [R_i + (R_i + 2) \gamma_i] y_i = 24/0.829$$

بنابراین AMLE پارامتر  $\lambda$  برابر است با

$$\tilde{\lambda} = \frac{-24/0.829 + \sqrt{24/0.829^2 + 8 \times 20 \times 34/0.822}}{2 \times 34/0.822} = 0/7626$$

با استفاده از  $0/7626$  به عنوان جواب اولیه برای حل معادله عددی (۸)، مقدار MLE برابر است با  $0/7857 = \hat{\lambda}$ . از آنجایی که هیچ اطلاعی از پارامتر  $\lambda$  در اختیار نیست از توزیع پیشین ناگاهی بخش برای به دست آوردن برآورد بیز  $\lambda$  استفاده می‌شود. BEM و BEL پارامتر  $\lambda$  عبارتند از:

### اکبر اصغرزاده و همکاران ۳۷.....

$\hat{\lambda}_{BEL} = ۰/۷۵۹۴$  و  $\hat{\lambda}_{BEM} = ۰/۷۵۱۷$ . برآوردهای بازه‌ای پارامتر  $\lambda$  براساس توزیع‌های مجانبی AMLE و MLE به ترتیب عبارتند از:  $(۰/۴۷۸۲, ۱/۰۴۶۹)$  و  $(۰/۵۰۴۲, ۱/۰۴۷۰)$ . بازه اطمینان براساس آزمون نسبت درستنما می‌برابر است با  $(۰/۵۲۴۹, ۱/۰۸۳۶)$  و بازه‌های اطمینان براساس دو روش بوت استرپ درصدی و تی به ترتیب عبارتند از:  $(۰/۴۵۵۱, ۱/۴۰۹۰)$  و  $(۰/۴۶۶۵, ۱/۵۰۴۵)$ . همچنین بازه اطمینان بیزی پارامتر  $\lambda$  برابر است با  $(۰/۷۵۱۷۴۸۱۲, ۰/۷۵۱۷۴۸۳۵)$ .

برای طرح دوم، امین شکست بعد از زمان  $T$  رخداده است. بنابراین با حالت دوم سانسور هیبرید فزاینده نوع دو رو برو هستیم و  $J = ۱۵$  و  $R_J^* = ۱۵$  و نمونه سانسور هیبرید فزاینده نوع دو عبارتند از:

$$\begin{array}{cccccccccc} ۰/۳۲ & ۰/۴۷ & ۰/۵۲ & ۰/۵۹ & ۰/۷۷ & ۰/۸۱ & ۰/۸۱ & ۰/۹۰ \\ \hline ۰/۹۶ & ۱/۱۸ & ۱/۲۰ & ۱/۲۰ & ۱/۲۱ & ۱/۳۵ & ۱/۴۳ & \end{array}$$

با استفاده از داده‌های فوق، مقادیر A و B به ترتیب برآورند با:

$$A = \sum_{i=1}^{15} (R_i + ۲) \delta_i y_i^* + ۱۵ \times \delta_d^* \times (۱/۵۰)^2 = ۲۷/۲۸۲۱$$

$$B = \sum_{i=1}^{15} [R_i + (R_i + ۲) \gamma_i] y_i + [۱۵ + ۱۵ \times \gamma_d^*] \times (۱/۵۰) = ۲۲/۲۱۳۹$$

بنابراین AMLE پارامتر  $\lambda$  برابر است با

$$\tilde{\lambda} = \frac{-۲۲/۲۱۳۹ + \sqrt{۲۲/۷۱۳۹۲ + ۸ \times ۱۵ \times ۲۷/۲۸۲۱}}{۲ \times ۲۷/۲۸۲۱} = ۰/۶۹۶۱$$

با حل معادله عددی (۸) مقدار MLE برآور است با  $\hat{\lambda} = ۰/۷۰۳۲$ . برآوردهای BEL و BEM پارامتر  $\lambda$  عبارتند از:  $\hat{\lambda}_{BEL} = ۰/۶۷۰۱$  و  $\hat{\lambda}_{BEM} = ۰/۶۶۵۹$ . بازه‌های اطمینان برای  $\lambda$  براساس توزیع‌های مجانبی AMLE و MLE به ترتیب عبارتند از:  $(۰/۴۰۴۱, ۱/۰۰۲۲)$  و  $(۰/۳۸۶۲, ۰/۹۹۳۲)$ .

بازه اطمینان بر اساس آزمون نسبت درستنمایی برابر است با  $(1/\sqrt{5166}, 1/\sqrt{958})$  و بازه‌های اطمینان به روش بوت استرپ درصدی و تی به ترتیب عبارتند از:  $(1/\sqrt{3552}, 1/\sqrt{2188})$  و  $(1/\sqrt{3595}, 1/\sqrt{2412})$ . همچنین بازه اطمینان بیزی پارامتر  $\lambda$  برابر است با  $(0.6658, 0.6660)$ .

### بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله برآوردهای مختلف نقطه‌ای و بازه‌ای پارامتر توزیع نیمه‌لوژستیک بر اساس داده‌های سانسور هیبرید فزاینده محاسبه و به کمک شبیه‌سازی مقایسه شده‌اند. از جدول ۱ ملاحظه می‌شود که در اغلب حالت‌ها برای همه برآوردها، زمانی که  $n$  و طرح ثابت در نظر گرفته شوند و  $T$  افزایش داده شود اریبی و  $MSE$  کاهش می‌یابند.  $MLE$  و  $AMLE$  از نظر اریبی و  $MSE$  عملکرد مشابه دارند. با افزایش  $m$  و ثابت نگه داشتن سایر فاکتورهای موثر، مقادیر اریبی و  $MSE$  در بیشتر موارد کاهش می‌یابد. برآوردهای بیزی آگاهی بخش بهتر از برآوردهای کلاسیک  $MLE$  و  $AMLE$  است، مگر اینکه  $m$  و  $n$  کوچک باشند. برآوردهای بیزی به دست آمده با تقریب  $MCMC$  عملکرد بهتری نسبت به برآوردهای بیزی به دست آمده با تقریب لیندلی دارد.

از جدول ۲ مشاهده می‌شود که در اغلب موارد، روش‌های مختلف ارائه شده از نظر طول و درصد پوشش خوب عمل می‌کنند. زمانی که  $n$  و  $m$  و طرح ثابت در نظر گرفته شوند، با افزایش  $T$  طول بازه اطمینان کاهش و درصد پوشش افزایش می‌یابد مگر اینکه  $n$  و  $m$  بسیار کوچک باشند. بازه‌های اطمینان براساس توزیع‌های مجانبی  $MLE$  و توزیع مجانبی  $AMLE$  از نظر طول بازه اطمینان و درصد پوشش بسیار مشابه عمل می‌کنند. بازه اطمینان بیزی براساس توزیع پیشین آگاهی بخش بهتر از بازه اطمینان بیزی بر اساس توزیع پیشین ناآگاهی بخش است. زمانی که  $n$  و  $m$  کوچک باشند، بازه‌های اطمینان بوت استرپ بهتر از بازه‌های اطمینان مجانبی عمل می‌کنند، اما زمانی که  $n$  و  $m$  افزایش می‌یابد، بسیار نزدیک به هم یا بازه‌های مجانبی بهتر از بوت استرپ عمل می‌کنند.

### تقدیر و تشکر

نویسنده‌گان مقاله از پیشنهادات داوران محترم که باعث بهبودی مقاله گردید، کمال تشکر و قدردانی را دارند.

### مراجع

- Balakrishnan, N. (2007), Progressive Censoring Methodology: An Appraisal (with Discussion), *Test*, **16**, 211-296.
- Balakrishnan, N. and Aggarwala, R. (2000), *Progressive Censoring: Theory, Methods and Applications*, Birkhauser, Boston.
- Balakrishnan, N. and Asgharzadeh, A. (2005), Inference for the Scaled Half-Logistic Distribution Based on Progressively Type II Censored Samples, *Communication in Statistics-Theory and Methods*, **34**, 73-87.
- Balakrishnan, N. and Chan, P. S. (1992), Estimation for the Scaled Half Logistic Distribution Under Type II Censoring, *Computational Statistics and Data Analysis*, **13**, 123-141.
- Balakrishnan, N. and Kundu, D. (2013), Hybrid Censoring: Models, Inferential Results and Applications, *Computational Statistics and Data Analysis*, **57**, 166-209.
- Balakrishnan, N. and Puthenpura, S. (1986), Best Linear Unbiased Estimators of Location and Scale Parameters of the Half Logistic Distribution, *Journal of Statistical Computation and Simulation*, **25**, 193-204.

## استنباط برای توزیع نیمه لوژستیک ..... ۴۰

- Balakrishnan, N. and Saleh, H. M. (2011), Relations for Moments of Progressively Type II Censored Order Statistics From Half Logistic Distribution with Applications to Inference, *Computational Statistics and Data Analysis*, **55**, 2775-2792.
- Balakrishnan, N. and Sandhu, R. A. (1995), A Simple Simulational Algorithm for Generating Progressive Type II Censored Samples, *Journal of the American Statistical Association*, **49**, 229-230.
- Balakrishnan, N. and Wong, K. H. T. (1991), Approximate MLEs for the Location and Scale Parameters of the Half Logistic Distribution with Type II Right Censoring, *IEEE Transactions on Reliability*, **40**, 140-145.
- Bayat Mokhtari, E., Habibi Rad, A. and Yousefzadeh, F. (2011), Inference for Weibull Distribution Based on Progressively Type II Hybrid Censored Data, *Journal of Statistical Planning and Inference*, **141**, 2824-2838.
- Chen, M. H. and Shao, Q. M. (1999), Monte Carlo Estimation of Bayesian Credible and HPD Intervals, *Journal of Computational and Graphical Statistics*, **8**, 69-92.
- Devroye, L. (1994), A Simple Algorithm for Generating Random Variates with a Log-Concave Density, *Computing*, **33** , 247-257.
- Efron, B. (1979), Bootstrap Methods: Another Look at the Jackknife, *The Annals of Statistics*, **7**, 1-26.
- Efron, B. (1982), The Jackknife, the Bootstrap and Other Resampling Plans, *CBMSNSF Regional Conference Series in Applied Mathematics*, **38**, SIAM, Philadelphia, PA.

۴۱ ..... اکبر اصغرزاده و همکاران

Hall, P. (1988), Theoretical Comparison of Bootstrap Confidence Intervals,  
*Annals of Statistics* , **16** , 927-953.

Hinkley, D. (1977), On Quick Choice of Power Transformation, *The American Statistician* , **26**, 67-69.

Joarder, A., Krishna, H. and Kundu. D. (2009), On Type II Progressively Hybrid Censoring, *Journal of Modern Applied Statistical Methods*, **8**, 534-546

Kim, C. and Han, K. (2010), Estimation of the Scale Parameter of the Half-Logistic Distribution Under Progressively Type II Censored Sample, *Statistical Papers*, **51**, 375-387.

Kundu, D. and Joarder, A. (2006), Analysis of Type II Progressively Hybrid Censored Data, *Computational Statistics and Data Analysis*, **50**, 2509-2528.

Lawless, F. J. (2003), *Statistical Models and Methods for Lifetime Data*, 2nd Ed., John Wiley, New York.

Lindley, D. V. (1980), Approximation Bayesian Method, *Trabajos de Estadistica* , **31** , 223-237.

Meeker, W. Q. and Escobar, L. A. (1998), *Statistical Methods for Reliability Data*, John Wiley, New York.

Tiku, M. L., Akkaya A. D. (2004), *Robust Estimation and Hypothesis Testing*, New Age International , New Delhi.