

خاصیت کاوش پسا مرحله‌ای تصویر طرح پلاکت-برمن ۱۲ اجرایی

نیز اسمعیلزاده، هوشنگ طالبی

گروه آمار، دانشگاه اصفهان

تاریخ دریافت: ۱۳۸۷/۱۰/۱۰ تاریخ آخرین بازنگری: ۱۳۸۷/۱۲/۱۸

چکیده: طرح‌های پلاکت-برمن در ادبیات مربوط به طرح به عنوان طرح‌های کسری نامنظم اشباع شده برای غربال‌کردن عامل‌های فعال شناخته می‌شدند. در دو دهه اخیر با معرفی تصویر پنهان این طرح ظرفیت آنها در برآورد اثرات متقابل دو عاملی توسط محققین متعددی مطالعه و ارایه شده است. در این تحقیق با استفاده از اصل تنک بودن اثرات قابلیت‌های جدید این طرح در شناسایی و برآورد اثرات متقابل سه عاملی مورد بررسی قرار گرفته است. برای این منظور طرح کاوش پسا مرحله‌ای معرفی شده است. این طرح امکان شناسایی و برآورد یک اثر متقابل سه عاملی را همراه با برآورد اثرات اصلی و اثرات متقابل دو عاملی که در مرحله قبل به عنوان اثرات فعال شناخته شده‌اند فراهم می‌آورد. نشان داده شده است که تصویر طرح پلاکت-برمن با ۱۲ اجرا روی ۴ و ۵ عامل یک طرح پسا مرحله‌ای است.

واژه‌های کلیدی: طرح پلاکت-برمن، طرح کاوش، تصویر یک طرح.

آدرس الکترونیک مسئول مقاله: هوشنگ طالبی، h-talebi@sci.ui.ac.ir
کد موضوع بنای ریاضی (۲۰۰۰): ۶۲K۱۵

۱ مقدمه

در آزمایش‌های 2^m برای صرفه‌جویی در تعداد مشاهدات و در نتیجه هزینه‌ها ابتدا با اجرای کسری از ترکیبات تیماری عامل‌های فعال از میان تمامی عامل‌های مورد مطالعه غریال می‌شوند. غریال‌سازی عامل‌ها در طرح‌های کسری با فرض صفربودن تمامی اثرات متقابل انجام می‌گیرد. پس از تعیین عامل‌های فعال با اجرای آزمایش‌های جدید یا با استفاده از داده‌های آزمایش‌های اولیه جزئیات دقیق‌تری از جمله بررسی اثرات متقابل، که در آزمایش اولیه صفر فرض شده بودند، روی عامل‌های فعال انجام می‌شود. محدود کردن آزمایش به زیر مجموعه‌ای از عامل‌ها را تصویر طرح روی آن عامل‌ها گویند. طرح‌های کسری هستند که با تعیین روابط تقسیم کرده‌اند. طرح‌های منظم، کسری از ترکیبات تیماری هستند که با تعیین روابط معرف^۱ بدست می‌آیند. طرح‌های کسری که از این ویژگی برخوردار نباشند را طرح‌های نامنظم گویند. طرح‌های پلاکت-برمن^۲ (PB) (پلاکت و برمن، ۱۹۴۶) نمونه‌ای از این طرح‌ها هستند، که با N اجرا به عنوان طرح‌های اشباع شده برای غریال کردن $1 - m = N$ عامل مورد استفاده قرار می‌گیرند. تصویر طرح‌های کسری را در طرح‌های منظم تصویر هندسی گویند که با مفهوم وضوح^۳ هم معنی است. تصویر در طرح‌های نامنظم را تصویر پنهان^۴ (وانگ و وو، ۱۹۹۵) می‌نامند. در دهه گذشته برخی مزیت‌های جدید طرح‌های PB که نشان از ظرفیت بالای این طرح برای برآورد اثرات متقابل دو عاملی است، توسط محققین بدست آمده است. این ویژگی طرح، مربوط به ساختار هم‌اثری^۵ اثرات، که نوعی هم‌اثری جزئی است، می‌شود. در این نوع هم‌اثری، برخلاف هم‌اثری در طرح‌های کسری منظم که ضرایب صفر یا یک هستند، ضرایب هم‌اثری بین صفر و یک هستند. هاماً و وو (۱۹۹۲) نشان دادند که می‌توان از داده‌های آزمایش اولیه با اجرای این طرح‌ها، برای برآورد اثرات اصلی و تعدادی از اثرات متقابل دو عاملی، وقتی که طرح روی

^۱ Defining Relations

^۲ Plackett-Burman

^۳ Resolution

^۴ Hidden Projection

^۵ Aliasing

زیر مجموعه‌ای از عامل‌های فعال تصویر شود، استفاده کرد. باید توجه داشت که براساس اصل تنک بودن اثرات^۶ معمولاً تعداد اثرات اصلی و متقابل معنی‌دار اندک هستند. حال ماتریس طرح پلاکت-برمن با ۱۲ اجرا (PB12) را، که در ۱۱ ستون اول جدول ۱ با علایم + و - داده شده است، در نظر بگیرید. مسئله تصویر PB12 خواص مربوط به تعامد اثرات و همچنین ظرفیت برآورد اثرات توسط محققین متعددی از جمله لین و دراپر (۱۹۹۲)، وانگ و وو (۱۹۹۵) و میلر و سیتر (۲۰۰۴) مورد مطالعه قرار گرفته است.

جدول ۱: طرح پلاکت-برمن با ۱۲ اجرا.

مشاهدات												
۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱		
+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	۸/۵۶۷۴	
-	-	-	+	-	+	+	-	+	-	+	-۲۴/۶۶۵۶	
+	-	-	-	+	+	+	-	-	+	-	۹/۱۲۵۳	
+	+	-	-	-	-	+	+	-	-	+	۷۷/۲۸۷۷	
+	+	+	-	-	+	-	-	+	-	-	۲۳/۸۵۳۵	
-	+	+	+	-	-	+	-	-	+	-	۰/۱۹۰۹	
+	-	+	+	+	-	-	-	-	-	+	۸۰/۱۸۹۲	
-	+	+	+	+	+/-	+	-	-	-	-	۱۴/۹۶۲۴	
-	-	+	-	+	-	+	+	+	-	-	۵۹/۳۲۷۳	
+	-	-	+	-	-	-	+	+	+	-	۳۵/۱۷۴۶	
-	+	-	-	+	-	-	-	+	+	+	۳۶/۸۱۳۳	
-	-	+	-	-	+	-	+	-	+	+	-۳۶/۲۷۴۲	

دو طرح را هم ارز ترکیبیاتی^۷ گویند هرگاه یکی را بتوان از دیگری با جابجایی سطرها، ستون‌ها یا تغییر علامت یک یا چند ستون بدست آورد. طرح PB12 را روی $11 < m \leq 7$ عامل تصویر می‌کنیم. سان و همکاران (۲۰۰۲) نشان دادند برای $4 \leq m < 11$ فقط یک ردۀ از طرح‌های هم ارز ترکیبیاتی وجود دارد، در حالی که برای $m = 5, 6$ دقیقاً دو ردۀ وجود دارند. طرح‌های ساخته شده از تصویر ستون‌های ۱ تا ۵ (PB12_{۱۵}) در جدول ۱ غیرهم ارز با طرح‌های ساخته شده از

^۶ Sparsity Principle of Effects^۷ Combinatorial Isomorphic

ستون‌های ۷ تا ۱۱ (PB12_{۵.۲}) هستند. هم‌ارز بودن طرح‌های تصویر شده بررسی ویژگی‌های این طرح‌ها را آسان‌تر می‌کند. در حقیقت طرح‌های هم‌ارز خواص آماری و ظرفیت یکسانی در برآوردهای پارامترهای مدل تحت بررسی دارند.

برای تصویر روی $m = 4$ عامل، PB12_۴، هامادا و وو (۱۹۹۲) نشان دادند که با طرح‌های بدست آمده در این ردۀ هم‌ارزی می‌توان علاوه بر برآورد اثرات اصلی تمامی شش اثر متقابل بین هر دو عامل را برآورد کرد. میلر و سیتر (۲۰۰۴) ظرفیت برآورده^۸ در تصویر روی $m = 5$ عامل را مطالعه کردند و نشان دادند که با طرح‌های در دو ردۀ هم‌ارزی می‌توان علاوه بر پنج اثر اصلی، تعدادی از اثرات متقابل دو عاملی را برآورد کرد. با طرح‌های هم‌ارز در PB12_{۵.۱} و PB12_{۵.۲} می‌توان به ترتیب تا پنج و شش اثر متقابل دو عاملی را به همراه تمامی اثرات اصلی برآورد کرد. برای جزئیات بیشتر و همچنین ظرفیت برآوردهای اصلی و متقابل دو عاملی در مورد تصویر روی ۵ و ۶ عامل می‌توان به میلر و سیتر (۲۰۰۴)، جدول (۳) مراجعه نمود.

در همه این مطالعات فرض شده است اثرات متقابل سه عاملی و مراتب بالاتر صفرند. بدیهی است در صورت وجود تنها یک اثر متقابل غیر صفر از این مجموعه، اثرات برآورده شده اریب هستند. این در حالی است که بر اساس اصل تنک بودن تنها تعداد محدودی از اثرات متقابل دو عاملی غیر صفرند و در این صورت نیازی به برآورده تمامی یا تعداد زیادی از آنها نیست. این واقعیت می‌تواند محقق را به مطالعه قابلیت برآورده تعداد اندکی از اثرات متقابل، احتمالاً غیر صفر، مرتبه بالاتر با رعایت اصل سلسله مراتبی^۹، ترغیب نماید. این در حالی است که با توجه به ثابت نگه داشتن N و در نتیجه محدودیت درجه آزادی باید ظرفیت برآورده طرح به تعداد کمتری از اثرات متقابل دو سه عاملی محدود شود. این نکته را نیز باید مد نظر داشت که اثرات متقابل دو سه عاملی غیر صفر از پیش تعیین شده نیستند. از این رو مسئله جدید در این تحقیق بررسی قابلیت طرح PB در شناسایی و ظرفیت برآورده اثرات متقابل سه عاملی همراه با زیر مجموعه‌ای از اثرات متقابل دو عاملی و تمامی اثرات اصلی است. در این مقاله به طرحی که قادر به حل این مسئله باشد پرداخته،

^۸ Estimation Capacity

^۹ Hierarchical Principle of Effects

آن را طرح کاوش پسا مرحله‌ای^{۱۰} نامیده و نشان خواهیم داد که تصویرهای طرح PB12 روی m برابر ۴ و ۵ عامل طرح‌های کاوش پسا مرحله‌ای هستند. طرح‌های کاوش را ابتدا سریواستاوا (۱۹۷۵) معرفی کرد و جزئیات بیشتر آنها در بخش ۲ خواهد آمد. در بخش ۳ مسئله کاوش و برآورد اثرات سه عاملی را همراه با برآورد اثرات فعال اصلی و متقابل دو عاملی مورد مطالعه قرار می‌دهیم. در بخش آخر نیز به بحث و نتیجه‌گیری پرداخته خواهد شد.

۲ طرح کاوش

برای بردار مشاهدات $(1 \times N) y$ مدل خطی

$$y = A_1 \xi_1 + A_2 \xi_2 + e, \quad \text{Var}(e) = \sigma^2 I, \quad (1)$$

را در نظر می‌گیریم، که در آن $A_1(N \times \nu_1)$ و $A_2(N \times \nu_2)$ ماتریس‌های معلوم طرح، $(1 \times \nu_1) \times ۶$ و $(1 \times \nu_2) \times ۶$ بردار پارامترها و $(1 \times ۱) e(N \times ۱)$ بردار خطای I ماتریس همانی است. فرض می‌کنیم بردار ξ_1 شامل میانگین عمومی و اثراتی است که در هر حالت می‌خواهیم آنها را برآورد کنیم و ξ_2 شامل اثرات نامعلومی است که تنها تعداد اندکی از آنها غیر صفر هستند. همچنین فرض می‌کنیم حداقل k تا از این اثرات، که نمی‌دانیم کدام یک، غیر صفر باشند. k نسبت به ν_2 کوچک است. مسئله برآورد پارامترهای بردار ξ همراه با شناسایی و برآورد k پارامتر غیر صفر بردار ξ است. طرحی که قادر به حل این مسئله باشد تحت عنوان طرح کاوش^{۱۱} توسط سریواستاوا (۱۹۷۵) معرفی و مدل (۱) نیز مدل خطی کاوش نامیده شده است.

قضیه ۱ (سریواستاوا، ۱۹۷۵): فرض کنید مدل (۱) بدون اختشاش، یعنی $\sigma^2 = ۰$ باشد. طرح T یک طرح کاوش است اگر و تنها اگر برای هر زیر ماتریس $A_{22}(N \times 2k)$ از A_{22} داشته باشیم

$$\text{rank}[A_1; A_{22}] = \nu_1 + 2k. \quad (2)$$

^{۱۰} Post-Stage

^{۱۱} Search Design

۱۵۴ خاصیت کاوش پسا مرحله‌ای تصویر طرح پلاکت سیمن ۱۲ اجرایی

اگر چه حالت $\sigma^2 = \sigma_1^2$ در عمل هرگز اتفاق نمی‌افتد، با این وجود قضیه ۱ در ساختن طرح‌های کاوش از اهمیت زیادی برخوردار است. در حقیقت شرط (۲) در حالت $\sigma^2 > \sigma_1^2$ (اغتشاش) نیز یک شرط لازم است. بنابراین در این مقاله منظور از طرح کاوش طرحی است که شرط (۲) برای آن برقرار باشد. حال اگر $(\frac{\eta}{k})$ زیر مدل‌های ممکن از مدل (۱) که شامل بردار $\mathbf{1}_k$ و k تا از پارامترهای بردار $\mathbf{2}_k$ باشند را در نظر بگیرید، شرط (۲) تحت شرایط قضیه ۱ مارا قادر به برآورد پارامترها و تمایز بین هر دو مدل از رده مدل‌های ممکن می‌سازد. بنابراین یک طرح کاوش، قادر به کاوش و شناسایی مدل درست، شامل k اثر غیر صفر $\mathbf{2}_k$ و سپس برآورد آنها همراه با اثرات بردار $\mathbf{1}_k$ است. در حالت $\sigma^2 > \sigma_1^2$ سریواستاوا از مجموع توان‌های دوم خطای (SSE) مدل‌ها برای شناسایی مدل درست استفاده کرد. برای این منظور در فرایند کاوش، مجموع توان‌های دوم خطای تمامی $(\frac{\eta}{k})$ مدل ممکن محاسبه و مدل دارای کمترین مقدار SSE به عنوان مدل درست انتخاب می‌شود.

حال تصویر PB12 روی ۴ ستون را در نظر بگیرید. همه $= ۳۳۰$ $(\frac{\eta}{k})$ طرح با طرح ایجاد شده از تصویر ۴ ستون اول جدول ۱ هم ارز هستند. حال فرض کنید در مدل (۱) بردار $\mathbf{1}_k$ شامل میانگین عمومی و اثرات اصلی و بردار $\mathbf{2}_k$ شامل اثرات متقابل دو و سه عاملی باشد. در این طرح‌ها، شرط (۲) با $\mathbf{5}_1 = ۵$ و $\mathbf{7}_1 = ۷$ برقرار است. اثباتی ساده از برقراری شرط (۲) در طالبی و اسمعیل‌زاده (۲۰۱۰) آمده است. برای $m = ۵$ رده طرح‌های هم ارز با PB12 $_{5.1}$ طرح کاوش برای $k = ۱$ هستند. همچنین اگر بردار $\mathbf{2}_k$ را فقط محدود به اثرات متقابل دو عاملی کنیم، طرح‌های هم ارز (PB12 $_{5.2}$) طرح کاوش برای $k = ۱$ هستند. در همین حالت برای $m = ۶$ تمامی طرح‌های هم ارز با طرح حاصل از تصویر روی ستون‌های ۶ تا ۱۱ طرح کاوش برای $k = ۱$ هستند. برنامه‌ای در محیط نرم افزار MATLAB برای بررسی شرط (۲) در ضمیمه آمده است.

۳ خاصیت کاوش پسا مرحله‌ای تصویر PB12

حل مسئله کاوش در مرحله سوم، که آن را پسا مرحله‌ای می‌نامیم، پس از طی دو مرحله غربال‌سازی و سپس تعیین اثرات متقابل دو عاملی فعال در مرحله دوم انجام

می شود. توجه داشته باشید که در هیچ یک از مراحل قبلی اثر اصلی و متقابل خاصی از قبیل تعیین نشده است. در حقیقت، در هر مرحله نوعی کاوش برای تشخیص اثرات مهم همراه با برآورده آنان صورت می‌گیرد. در همه این مراحل برآورده اثرات با رعایت اصل‌های سلسله مراتبی و توارث اثرات^{۱۲} انجام می‌پذیرد. حال، خاصیت کاوش و برآورده در پسما مرحله‌ای را برای طرح‌های تصویر PB12₄ و PB12_{5,1} بررسی می‌کنیم.

حالت ۴ = m: فرض کنید در مرحله غربال‌کردن چهار عامل از ۱۱ عامل به عنوان عوامل فعال شناسایی شوند. می‌دانیم که تصویر PB12 روی هر ۴ ستون تشکیل یک ردۀ از طرح‌های همارز را می‌دهند. بنابراین، این که کدام یک از چهار عامل فعال باشند و PB12 را روی ۴ ستون مربوط به آنها تصویر کنیم از نظر خواص طرحی تفاوتی نمی‌کند. در مرحله دوم اثرات اصلی و اثرات متقابل دو عاملی بین این ۴ عامل را در نظر می‌گیریم. نشان داده شده است که تمامی $\frac{6}{(2)}$ اثر متقابل دو عاملی به شرط قابل اغماض بودن اثرات متقابل سه عاملی و بالاتر، قابل برآورده هستند. برای اثبات این موضوع می‌توان از نتایج کلی چانگ (۱۹۹۵) در مورد تصویر طرح‌های 2^m متعامد نیز استفاده کرد. پس ظرفیت برآورده طرح PB12₄ در این حالت کامل است. اگر چه با این نتیجه می‌توان همه اثرات متقابل دو عاملی را برآورده کرد، اما با توجه به اصل تنک بودن، به دلیل صفر بودن تعدادی از آنها لزومی به برآورده تمامی آنها نیست. از سوی دیگر از میان اثرات متقابل سه عاملی ممکن است حداقل یک اثر غیر صفر باشد. کاوش پسما مرحله‌ای در اینجا به این معنی است که در ازای آزادسازی تعدادی درجه آزادی به دلیل صفر بودن تعدادی از اثرات متقابل دو عاملی می‌توان اثر یا اثرات متقابل سه عاملی غیر صفر را کاوش و برآورده کرد. طرحی که از عهده انجام کاوش پسما مرحله‌ای برآید را طرح کاوش پسما مرحله‌ای گویند. به عبارتی دیگر، فرض کنید A_1, A_2, \dots, A_k مجموعه‌ای شامل t و k اثر به ترتیب از اثرات متقابل دو عاملی و سه عاملی و A_{k+1}, \dots, A_{2t} ستون‌های مربوط به آنها در ماتریس مدل A_2 در (۱) باشند. شرط کاوش پسما مرحله‌ای در قالب رابطه (۲) به شرح زیر است.

^{۱۲} Heredity Principle of Effects

۱۵۶ خاصیت کاوش پسا مرحله‌ای تصویر طرح پلاکت سیمن ۱۲ اجرایی

تعريف ۱ : یک طرح را طرح کاوش پسا مرحله‌ای گویند هرگاه برای آن رابطه

$$rank[A_1; A_{1i}; A_{1j}] = m + 1 + t + 2k, i = 1, \dots, \binom{w_2}{t}, j = 1, \dots, \binom{w_2}{k}, \quad (3)$$

برقرار باشد، که در آن $w_2 = \binom{m}{2}$ و $w_1 = \binom{m}{3}$

اگر $k = 1$ فرض شود می‌توان نشان داد برای $t \geq 4$ شرط (۳) برای PB12_۴ برقرار نیست. برای حالت $t < 4$ قضیه و نتایج زیر برقرار است.

قضیه ۲ : طرح PB12_۴ یک طرح کاوش پسا مرحله‌ای برای $t = 3$ است.

برهان برای اثبات باید نشان داده شود رابطه (۳) برای A_1 ، هر زیر ماتریس (12×3) از A_2 ؛ (12×2) از A_{2j} از ستون‌های اثرات متقابل دو عاملی و هر زیر ماتریس (12×2) از ستون‌های اثرات متقابل سه عاملی در A_2 برقرار است. تعداد حالات ممکن در این قضیه برابر با $\binom{4}{2} \times \binom{3}{2}$ است. با استفاده از برنامه نویسی کامپیوتری این حالات کنترل و برقراری رابطه (۳) قابل دسترسی است و اثبات کامل است.

فرع ۱ : قضیه برای $t < 3$ برقرار است.

فرع ۲ : اگر $2 \leq t \leq 4$ بردار پارامترهای اثرات سه عاملی و بالاتر باشد برای $k = 1$ رابطه (۳) برقرار است.

حالت ۵ : طرح تصویر PB12_{۵.۱} را در نظر بگیرید. میلر و سیتر (۲۰۰۴) نشان دادند، طرح‌های هم ارز این رده قادرند تمامی اثرات را در مدل‌هایی که شامل کلیه اثرات اصلی همراه با هر سه اثر متقابل دو عاملی باشند، برآورد نمایند. نشان می‌دهیم که PB12_{۵.۱} دارای خاصیت کاوش پسا مرحله‌ای برای یک اثر ($k = 1$) متقابل سه عاملی، برای $t = 3$ است. برای این شرط با استفاده از برنامه نوشتہ شده در نرم افزار MATLAB قابل حصول است. پس قضیه زیر برقرار است.

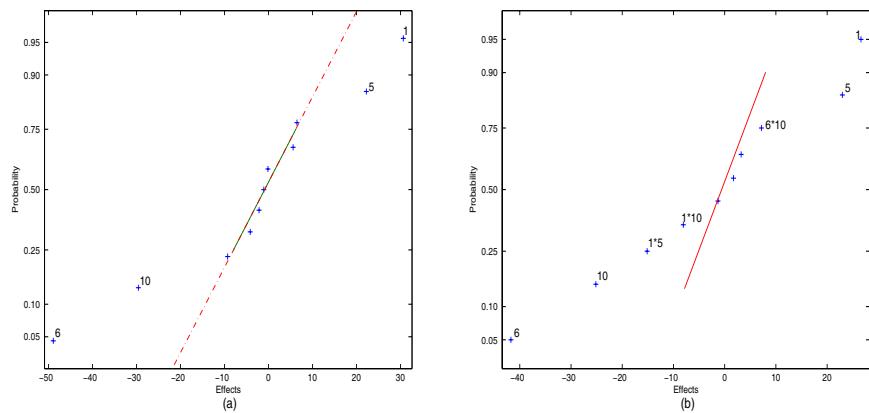
قضیه ۳ : طرح PB12_{۵.۱} یک طرح کاوش پسا مرحله‌ای برای $t = 3$ ، وقتی $k = 1$ است.

فرع ۱ نیز در اینجا صادق است. در ادامه به منظور تشریح نتایج مربوط به خاصیت طرح پلاکت-برمن مثالی می‌آوریم. این مثال برای $m = 4$ وقتی سه اثر متقابل دو عاملی، که از قبل تعیین نشده باشند، غیر صفرند ارایه شده است.

مثال ۱: ستون مشاهدات ساختگی و شبیه‌سازی شده براساس ماتریس طرح جدول ۱ را در نظر بگیرید. این داده‌ها به نحوی ساخته شده‌اند که ۴ عامل، ۳ اثر متقابل ۲-عاملی و حداقل یک اثر متقابل ۳-عاملی، معنی‌دار (غیر صفر) باشند. برآورد اثرات اصلی ۱ تا ۱۱ به ترتیب برابر $\frac{30}{47}$, $\frac{6}{47}$, $\frac{2}{15}$, $\frac{9}{29}$, $\frac{22}{24}$, $\frac{4}{15}$, $\frac{5}{59}$, $\frac{1}{56}$, $\frac{4}{107}$, $\frac{5}{12}$ و $\frac{1}{10}$ است. از نمودار احتمال نرمال اثرات شکل ۱(a) مشاهده می‌شود که اثرات اصلی ۱، ۵، ۶ و ۱۰ اثرات فعال هستند. در مرحله دوم، با استفاده از نمودار احتمال نرمال شکل ۱(b)، برای اثرات فعال و اثرات متقابل دو عاملی متناظر آنها، اثرات 1×5 , 1×10 و 6×10 به عنوان سه اثر متقابل دو عاملی فعال، شناسایی می‌شوند. حال از قضیه ۲ می‌توان وجود یک اثر متقابل سه عاملی غیر صفر را کاوش و شناسایی کرد. در این مرحله، مدل شامل اثر متقابل $10 \times 6 \times 1$ ، دارای کمترین SSE است، پس فرایند کاوش سریواستاوا مدل زیر را به عنوان مدل درست انتخاب می‌کند:

$$\begin{aligned} y = & 23/1 + 13/9x_1 + 10/1x_5 - 20/5x_1 - 11/8x_{10} - 8/81x_1x_5 \\ & - 3/19x_1x_{10} + 4/25x_6x_{10} + 1/90x_1x_6x_{10}. \end{aligned}$$

تذکر ۱: مثال ۱ خاصیت مهمی را در طرح پلاکت-برمن روشن می‌سازد. یعنی، اگر به جای ۴ عامل ۱، ۵ و ۱۰ هر چهار عامل دیگر یا هر سه اثر متقابل دو عاملی دیگر به همراه یک اثر متقابل سه عاملی در مدل منظور شوند ماتریس مدل پرتبه است. این خاصیت ما را قادر به برآورد پارامترهای مدل یعنی اثرات می‌سازد.



شکل ۱: نمودار احتمال نرمال اثرات

بحث و نتیجه‌گیری

طرح‌های PB که بر پایه ماتریس‌های هادامارد ساخته می‌شوند، از مزیت‌های متعددی در طرح آزمایش‌ها برخوردارند، که خاصیت ظرفیت برآورد اثرات بوسیله آنها یکی از مهمترین خواص آنها است. ظرفیت برآورد اثرات متقابل بین دو عامل در تصویر طرح‌های PB، روی عامل‌های فعال که در مرحله غربال‌سازی معین شده‌اند، در این دو دهه بخش وسیعی از تحقیقات را در زمینه طرح به خود اختصاص داده است. در این زمینه هدایت و پسوتان (۱۹۹۷ و ۲۰۰۷) نیز ساختن طرح‌هایی را بر اساس ماتریس-g برای برآورد یکی از اثرات متقابل دو عاملی از پیش تعیین شده به همراه اثرات اصلی بیان و طرح بهینه را ارایه کردند. در تمامی این تحقیقات ظرفیت برآورد به اثرات اصلی و متقابل دو عاملی محدود می‌شود. هر چند در میلر و سیتر (۲۰۰۴) به خاصیت شناسایی اثرات غیر صفر، که به نوعی طرح کاوش را تداعی می‌کند اشاره شده است، لیکن باز هم این خاصیت برای کاوش به اثرات متقابل دو عاملی محدود شده است. طالبی و اسماعیل‌زاده (۲۰۱۰) خاصیت کاوش را در این طرح برای اثرات دو و سه عاملی، برای $m = 4$ ، مطالعه و ارایه کردند، اما در آن از ظرفیت برآورد بالقوه طرح استفاده نکردند. در این مقاله با

معرفی طرح کاوش پسا مرحله‌ای قابلیت کاوش طرح برای یک اثر متقابل سه عاملی همراه با استفاده از ظرفیت طرح در برآورد اثرات متقابل دو عاملی ارایه شده است. کار هدایت و پسوتان (۱۹۹۷ و ۲۰۰۷) ساختن و ارایه طرحی است که در آن برآورد اثر متقابل دو عاملی از پیش تعیین شده‌ای را برای $m \leq 8$ مدنظر قرار می‌دهد. لیکن در مورد تصویر طرح PB12 روی m عامل $6 \leq m \leq 8$ ، محدودیت از پیش تعیین بودن اثر متقابل دو عاملی وجود ندارد. این مزیت به علاوه خاصیت کاوش پسا مرحله‌ای، که نتیجه این تحقیق است، کارایی و ظرفیت طرح PB12 را از دو نقطه نظر، شناسایی و برآورده نشان می‌دهد. در حقیقت، نشان داده شد که تصویر طرح PB12 روی $m = 4, 5$ قادر است علاوه بر داشتن ظرفیت شناسایی و برآورده یک اثر متقابل سه عاملی، تمامی اثرات اصلی و حداقل تا سه اثر از اثرات متقابل دو عاملی، که احتمالاً غیر صفرند، را برآورده نماید.

تقدیر و تشکر

نویسنده‌گان مراتب قدردانی خود را از داوران محترم برای ارایه نقطه نظر اشان و هیئت تحریریه محترم مجله علوم آماری اعلام می‌دارند. همچنین از حمایت دفتر تحصیلات تکمیلی دانشگاه اصفهان سپاسگزاریم. نویسنده اول از دانشگاه کردستان به خاطر حمایتشان سپاسگزار است.

مراجع

- Cheng, C. S., (1995), Some Projection Properties of Orthogonal Arrays, *Annals of Statistics*, **23**, 1223-1233.
- Hamada, M. and Wu, C. F. J., (1992), Analysis of Designed Experiments with Complex Aliasing, *Journal of Quality Technology*, **24**, 130-137.

۱۶۰ خاصیت کاوش پسما مرحله‌ای تصویر طرح پلاکت-برمن ۱۲ اجرایی

- Hedayat, A. S. and Pesotan, H., (1997), Designs for Two-Level Factorial Experiments with Linear Models Containing Main Effects and Selected Two Factor Iterations, *Journal of Statistical Planning and Inference*, **64**, 109-124.
- Hedayat, A. S. and Pesotan, H., (2007), Tools for Constructing Optimal Two-Level Factorial Designs for a Linear Model Containing Main Effects and One Two-Factor Interaction, *Journal of Statistical Planning and Inference*, **137** , 1452-1463.
- Lin, D. K. J. and Draper, N., (1992), Projection Properties of Plackett and Burman Designs, *Technometrics*, **34**, 423-428.
- Miller, A. and Sitter, R. R., (2004), Choosing Columns from the 12-run Plackett-Burman Design, *Statistics and Probability Letters*, **67**, 193-201.
- Plackett, R. L. and Burman, J. P., (1946), The Design of Optimum Multifactorial Experiments, *Biometrika*, **33**, 305-325.
- Srivastava, J. N. (1975), Designs for Searching Non-Negligible Effects, In: Srivastava, J. N. (Ed.), A Survey of Statistical Design and Linear Models, North-Holland, Elsevier, Amsterdam, 507-519.
- Sun, D., Li, W. and Ye, K. Q., (2002), An Algorithm for Sequentially Constructing Non-Isomorphic Orthogonal Designs and its Applications, Technical Report, Department of Applied Mathematics and Statistics, State University of New York at Stony Brook, SUNYSB-AMS-01-13
<http://www.ams.sunysb.edu/papers/papers02.html>.

نیز اسماعیلزاده، هوشنگ طالبی ۱۶۱.....

Talebi, H. and Esmailzadeh, N., (2010), Weighted Searching Probability for Classes of Equivalent Search Designs Comparison, *Communication in Statistics-Theory and Methods*, In Press.

Wang, J. C. and Wu, C. F. J., (1995), A Hidden Projection Property of Plackett-Buraman and Related Designs, *Statistica Sincia*, 5, 235-250.

ضمیمه

```
function result = Srivastava(A1,A2,k, rnk)
    m_size = size(A2);
    m_rows = m_size(1);
    m_cols = m_size(2);
    ns = [1:m_cols];
    combs = combnk(ns,2*k);
    combs_size = size(combs);
    combs_rows = combs_size(1);
    ma_size=size(A1);
    ma_cols=ma_size(2);
    out = zeros(m_rows, (2*k+ma_cols));
    c1=0;
    for i = 1:combs_rows
        out(:,(1:(2*k+ ma_cols))) = [A1 m(:,combs(i,:))];
        if (rank(out) ~= rnk)
            break;
        end
        c1=c1+1;
    end
    if (c1==combs_rows)
        fprintf( 'It is a search design %d\n\n');
    else
        fprintf( 'It is NoT a search design %d\n\n');
    end
end
```