مجله علوم آماری، بهار و تابستان ۱۳۹۴
جلد ۹، شماره ۱، ص ۴۳-۶۰

آزمون نیکویی برازش بر مبنای آنتروپی k-رکوردها از توزیع پارتو تعمیم‌یافته

بهاره افهمی، محسن مددی، محسن رضاپور
گروه آمار، دانشگاه شهید باهنر کرمان

تاریخ دریافت: ۱۳۹۳/۳/۱۰ تاریخ آخرین بازنگری: ۱۳۹۳/۸/۱۹

چکیده : در این مقاله ابتدا به محاسبه آنتروپی k-رکوردها از توزیع پارتو تعمیم‌یافته پرداخته می‌شود و بر مبنای آن، آماره‌ای برای آزمون نیکویی برازش این توزیع ارائه می‌گردد. در پایان، عملکرد این آماره در مطالعه‌ای شبیه‌سازی و با استفاده از داده‌های واقعی مورد بررسی قرار می‌گیرد.

واژه‌های کلیدی : آ زمون نیکویی برازش، آنتروپی شانون، توزیع پارتو تعمیم‌یافته، k-رکوردها.

۱ مقدمه

مفهوم اساسی اطلاع شانون، مربوط به یک متغیر تصادفی توسط کلود شانون (۱۹۴۸) به‌صورت زیر تعریف شد.

آدرس الکترونیک مسئول مقاله: محسن مددی، madadi@uk.ac.ir
کد موضوع‌بندی ریاضی (۲۰۱۰): ۹۴A۱۷، ۶۲G۳۰

تعریف ۱ : اگر X یک متغیر تصادفی با تابع چگالی $f(x)$ باشد، آنگاه اطلاع شانون آن عبارت است از

$$H(X) = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ \ln f(x)dx$$

در طول شصت سال اخیر افرادی مانند رنی (۱۹۵۹)، کلبک (۱۹۵۹)، تسالیس (۱۹۸۸)، به تعمیم این تعریف پرداخته‌اند و اخیرا نیز برخی از محققان، مانند اسدی و همکاران (۲۰۰۴)، برات‌پور و همکاران (۲۰۰۷)، حبیبی‌راد و همکاران (۲۰۰۷)، یعقوبی اول ریابی و همکاران (۲۰۱۰) و یاری و محتشمی (۲۰۱۰) مطالعاتی را در این زمینه انجام داده‌اند.
دزیویدزیلا و کوپوسینسکی (۱۹۷۶) مقادیر k-رکورد را به‌عنوان تعمیمی از رکوردها در یک دنباله متغیرهای تصادفی هم‌توزیع و مستقل مشاهدات متوالی از k امین بزرگترین مقدار نمونه تعریف کرده‌اند. در واقع آن‌ها مقدار k-رکورد بالایی دنباله $\{X_i, i \geq ۱\}$ از متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع با تابع توزیع پیوسته F و تابع چگالی f را k امین بزرگ‌ترین مشاهده در یک نمونه‌گیری جزئی تعریف کردند.

تعریف ۲ : فرض کنید $X_{i:m}$ نشان دهنده i امین آماره ترتیبی از یک نمونه تصادفی به حجم m و $\{T_{۱,k}, T_{۲,k}, \ldots\}$ و $\{R_۱^{(k)}, R_۲^{(k)}, \ldots\}$ به ترتیب دنباله زمان‌های k-رکورد بالایی و مقادیر k-رکورد بالایی باشند، با تعریف $T_{۱,k} = k$ و

$$T_{m,k} = \min\{j : j > T_{m-۱,k}, X_j > X_{T_{m-۱,k}-k+۱:T_{m-۱,k}}\}, \quad m \geq ۲$$

داریم

$$R_m^{(k)} = X_{T_{m,k}-k+۱:T_{m,k}}, \qquad m \geq ۱$$

لم ۱ (آرنولد و همکاران، ۱۹۹۸) : فرض کنید $\{X_i, i \geq ۱\}$ دنباله متغیرهای تصادفی مستقل با تابع توزیع F و تابع چگالی f باشند. آنگاه
الف- تابع چگالی حاشیه‌ای k-رکورد iام عبارت است از

$$f_{R_i^{(k)}}(r_i) = \frac{k^i}{(i-۱)!}[-\ln(۱-F(r_i))]^{i-۱}[۱-F(r_i)]^{k-۱}f(r_i),\ i = ۱, \ldots$$

ب- تابع چگالی توام n، k-رکورد نخست که به‌صورت $\boldsymbol{R}_n^{(k)} = (R_1^{(k)}, \ldots, R_n^{(k)})$ نشان داده می‌شود عبارت است از

$$f_{\boldsymbol{R}_n^{(k)}}(\boldsymbol{r}) = k^n (\prod_{i=1}^{n} \frac{f(r_i)}{1 - F(r_i)})(1 - F(r_n))^k$$

که در آن $-\infty < r_1 < r_2 < \cdots < r_n < +\infty$.

ج- تابع چگالی حاشیه‌ای k-رکورد iام و jام این متغیرها برابر است با:

$$\begin{aligned} f_{R_i^{(k)}, R_j^{(k)}}(r_i, r_j) &= [-\ln(1 - F(r_j)) + \ln(1 - F(r_i))]^{j-i-1} f(r_j) \\ &\times \frac{k^j [-\ln(1 - F(r_i))]^{i-1}}{(i-1)!(j-i-1)!} \frac{f(r_i)}{1 - F(r_i)} [1 - F(r_j)]^{k-1} (1) \end{aligned}$$

برای $-\infty < r_i < r_j < +\infty$.

پیکاندز (۱۹۷۵) توزیع پارتو تعمیم‌یافته را معرفی کرد. امروزه این توزیع در زمینه‌های بسیاری از جمله بیمه کاربرد یافته است.

تعریف ۳ : متغیر تصادفی X دارای توزیع پارتو تعمیم‌یافته با پارامترهای (c, σ, λ) است، اگر تابع چگالی احتمال آن به‌صورت

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sigma}(1 + \lambda \frac{x-c}{\sigma})^{-(\frac{1}{\lambda}+1)}, & c < x < c - \frac{\sigma}{\lambda},\ \lambda < 0 \\ \frac{1}{\sigma} \exp(-\frac{x-c}{\sigma}), & x \geq c,\ \lambda = 0 \\ \frac{1}{\sigma}(1 + \lambda \frac{x-c}{\sigma})^{-(\frac{1}{\lambda}+1)}, & x \geq c,\ \lambda > 0 \end{cases}$$

باشد، که در آن $c \in R$ پارامتر مکان، $\sigma > 0$ پارامتر مقیاس و $\lambda \in R$ پارامتر شکل است. از این توزیع توزیع‌های یکنواخت، نمایی دو پارامتری و پارتو نوع II به‌دست می‌آیند.

مفهوم آنتروپی کاربردهای فراوانی در مباحث آماری نظیر نظریه اطلاع و آزمون‌های نیکویی برازش دارد و مطالعات زیادی در این زمینه انجام شده، برای مثال زمان‌زاده و ارقامی (۱۳۸۷) آزمون نیکویی برازش توزیع‌های نرمال و نمایی بر مبنای برآوردگرهای جدید آنتروپی، زمان‌زاده (۱۳۹۲) آزمون نیکویی برازش توزیع نمایی بر مبنای برآوردگرهای جدید آنتروپی، عباس‌نژاد و شکوری (۱۳۸۷) آزمون نیکویی برازش برای توزیع نمایی بر مبنای برآورد اطلاع رنی را ارئه داده‌اند. در این

مقاله به ارائه آماره آزمونی برای نیکویی برازش بر مبنای آنتروپی شانون در توزیع پارتو تعمیم‌یافته وقتی که تنها مقادیر k-رکورد در اختیار است پرداخته می‌شود.

۲ آنتروپی k-رکوردها از توزیع پارتو تعمیم‌یافته

با توجه به اینکه مقدار پارامتر مکان در آنتروپی تاثیری ندارد بدون کاستن از کلیت قرار می‌دهیم $c = ۰$ و $\boldsymbol{\theta} = (\sigma, \lambda)$. بنابراین از تابع چگالی حاشیه‌ای k-رکورد iام و تابع چگالی حاشیه‌ای k-رکورد iام و jام در توزیع پارتو تعمیم‌یافته داریم:

الف-

$$f_{R_i^{(k)}}(r_i;\boldsymbol{\theta}) = \frac{k^i}{(i-۱)!\sigma\lambda^{i-۱}}[\ln(۱+\frac{\lambda r_i}{\sigma})]^{i-۱}(۱+\frac{\lambda r_i}{\sigma})^{-(\frac{k}{\lambda}+۱)} \qquad (۲)$$

اگر $\lambda > ۰$، $r_i > ۰$ و اگر $\lambda < ۰$، $۰ < r_i < \frac{\sigma}{|\lambda|}$.

ب-

$$\begin{aligned} f_{R_i^{(k)},R_j^{(k)}}(r_i,r_j;\boldsymbol{\theta}) &= \frac{k^j}{(i-۱)!(j-i-۱)!\sigma^۲\lambda^{j-۲}}(۱+\frac{\lambda r_j}{\sigma})^{-(\frac{k}{\lambda}+۱)} \\ &\times [\ln(۱+\frac{\lambda r_i}{\sigma})]^{i-۱}[\ln\frac{\sigma+\lambda r_j}{\sigma+\lambda r_i}]^{j-i-۱}(۱+\frac{\lambda r_i}{\sigma})^{-۱} \qquad (۳) \end{aligned}$$

اگر $\lambda > ۰$، $۰ < r_i < r_j < +\infty$ و اگر $\lambda < ۰$، $۰ < r_i < r_j < \frac{\sigma}{|\lambda|}$.

ج- همچنین تابع چگالی توام n، k-رکورد نخست در توزیع پارتو تعمیم‌یافته

$$f_{\boldsymbol{R}_n^{(k)}}(\boldsymbol{r};\boldsymbol{\theta}) = (\frac{k}{\sigma})^n[\prod_{i=۱}^{n}(۱+\frac{\lambda r_i}{\sigma})^{b_i}] \qquad (۴)$$

که در آن

$$b_i = \begin{cases} -۱, & i = ۱,۲,\ldots,n-۱ \\ -(\frac{k}{\lambda}+۱), & i = n \end{cases}$$

اگر $\lambda > ۰$، $۰ \leq r_۱ < \cdots < r_n < +\infty$

و اگر $\lambda < ۰$، $۰ \leq r_۱ < \cdots < r_n < \frac{\sigma}{|\lambda|}$.

لم ۲ (مددی و تاتا ۲۰۱۱ و ۲۰۱۴) : فرض کنید $\boldsymbol{R}_n^{(k)}$ بردار مقادیر k–رکورد از توزیع پارتو تعمیم‌یافته باشد. آنگاه آنتروپی شانون این بردار عبارت است از

$$H(\boldsymbol{R}_n^{(k)}) = -n\ln\frac{k}{\sigma} + \frac{n\lambda(n-1)}{2k} + n(1+\frac{\lambda}{k}) \qquad (5)$$

فرع ۱ : اگر در لم ۲، $k = 1$ باشد، آنگاه آنتروپی رکوردهای توزیع پارتو تعمیم‌یافته به‌صورت

$$H(\boldsymbol{R}_n^{(1)}) = n\ln\sigma + n(1+\lambda) + \frac{\lambda n(n-1)}{2} \qquad (6)$$

نتیجه می‌شود. از آنجا که توزیع پارتو تعمیم‌یافته با پارامترهای $(c, \frac{\theta}{\alpha}, \frac{1}{\alpha})$ همان توزیع پارتو نوع II با پارامترهای (c, θ, α) است می‌توان از (۵) آنتروپی شانون k–رکوردها از توزیع پارتو نوع II را به‌دست آورد (افهمی و مددی ۲۰۱۳).

۳ آزمون نیکویی برازش توزیع پارتو تعمیم‌یافته بر مبنای آنتروپی شانون k–رکوردها

فرض کنید $(\boldsymbol{R}_1^{(k)}, \ldots, \boldsymbol{R}_\ell^{(k)})$، ℓ نمونه مستقل از k–رکوردها با حجم‌های نابرابر n_i باشند، که در آن برای $i = 1, \ldots, \ell$

$$\boldsymbol{R}_i^{(k)} = (R_{i,1}^{(k)}, \ldots, R_{i,n_i}^{(k)})$$

در این بخش بر مبنای آنتروپی این مقادیر k–رکورد آزمون نیکویی برازش با فرض صفر «نمونه‌هایی که بردارهای k–رکورد از آنها استخراج شده‌اند دارای توزیع پارتو تعمیم‌یافته هستند.» انجام می‌شود. برای این منظور کمیت محوری

$$T_{\widehat{\boldsymbol{\theta}}_n} = \frac{\sum_{i=1}^{\ell}(-\ln f_{\boldsymbol{R}_i^{(k)}}(\boldsymbol{R}_i^{(k)}; \widehat{\boldsymbol{\theta}}_n) - H(\boldsymbol{R}_i^{(k)}))}{\sqrt{\sum_{i=1}^{\ell} Var(-\ln f_{\boldsymbol{R}_i^{(k)}}(\boldsymbol{R}_i^{(k)}; \widehat{\boldsymbol{\theta}}_n))}} \qquad (7)$$

که در صورت صحیح بودن فرض صفر مقداری نزدیک صفر است پیشنهاد می‌شود، که در آن $\widehat{\boldsymbol{\theta}}_n$ برآورد ماکسیمم درستنمایی $\boldsymbol{\theta} = (\sigma, \lambda)$، $n = \sum_{s=1}^{\ell} n_s$ و $f_{\boldsymbol{R}_i^{(k)}}$ تابع

چگالی i امین بردار مقادیر k–رکورد از توزیع پارتو تعمیم‌یافته هستند. واضح است اگر مقادیر k–رکورد از توزیع پارتو تعمیم‌یافته آمده باشند مقدار آماره

$$\frac{1}{\ell}\sum_{i=1}^{\ell}(-\ln f_{\boldsymbol{R}_i^{(k)}}(\boldsymbol{R}_i^{(k)};\widehat{\boldsymbol{\theta}}_n))$$

تقریبا برابر با $H(\boldsymbol{R}_i^{(k)})$ است لذا آماره آزمون $T_{\widehat{\boldsymbol{\theta}}_n}$ مقدار کوچکی بوده و در نتیجه فرض صفر صحیح است.

در قضیه زیر نشان داده می‌شود تحت شرایطی خاص توزیع حدی آماره $T_{\widehat{\boldsymbol{\theta}}_n}$ نرمال استاندارد است. بنابراین ناحیه رد آزمون نیکویی برازش فوق به‌صورت $|T_{\widehat{\boldsymbol{\theta}}_n}| > z_{\frac{\alpha}{2}}$ است، که در آن z_α چندک $(1-\alpha)$ از توزیع نرمال استاندارد است.

لم ۳ : فرض کنید $\boldsymbol{R}_n^{(k)} = (R_1^{(k)},\ldots,R_n^{(k)})$ یک بردار n بعدی از k–رکوردهای توزیع پارتو تعمیم‌یافته باشد آنگاه:

$$Var(-\ln f_{\boldsymbol{R}_n^{(k)}}(\boldsymbol{R}_n^{(k)};\boldsymbol{\theta})) = \frac{\lambda^2 n^2}{2k^2}+\frac{n\lambda^2}{6k^2}+\frac{n^3\lambda^2}{3k^2}+n+\frac{n^2\lambda+n\lambda}{k}$$

برهان : با توجه به تابع چگالی (۴) داریم:

$$\begin{aligned} Var(-\ln f_{\boldsymbol{R}_n^{(k)}}(\boldsymbol{R}_n^{(k)};\boldsymbol{\theta})) &= \sum_{i=1}^{n} b_i^2 Var[\ln(1+\frac{\lambda R_i^{(k)}}{\sigma})] + 2\sum_{i<j} b_i b_j \\ &\times\ Cov[\ln(1+\frac{\lambda R_i^{(k)}}{\sigma}),\ln(1+\frac{\lambda R_j^{(k)}}{\sigma})] \qquad (8) \end{aligned}$$

و چون

$$Var[\ln(1+\frac{\lambda R_i^{(k)}}{\sigma})] = E[\ln(1+\frac{\lambda R_i^{(k)}}{\sigma})]^2 - [E(\ln(1+\frac{\lambda R_i^{(k)}}{\sigma}))]^2$$

لذا با توجه به رابطه (۲) و با تغییر متغیر $t_i = \ln(1+\frac{\lambda r_i}{\sigma})$ داریم

$$\begin{aligned} E[\ln(1+\frac{\lambda R_i^{(k)}}{\sigma})]^2 &= \frac{k^i}{(i-1)!\sigma\lambda^{i-1}}\int_0^{+\infty}[\ln(1+\frac{\lambda r_i}{\sigma})]^{i+1} \\ &\times\ (1+\frac{\lambda r_i}{\sigma})^{-(\frac{k}{\lambda}+1)}dr_i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{k^i}{(i-1)!\lambda^i}\int_0^{+\infty} t_i^{i+1} e^{-\frac{k}{\lambda}t_i}dt_i \\ &= \frac{(i+1)i\lambda^2}{k^2} \end{aligned}$$

اکنون از (۲) برای $\lambda > 0$ و قرار دادن $t_i = \ln(1+\frac{\lambda r_i}{\sigma})$، ملاحظه می‌شود که

$$\begin{aligned} E[\ln(1+\frac{\lambda R_i^{(k)}}{\sigma})] &= \frac{k^i}{(i-1)!\sigma\lambda^{i-1}}\int_0^{+\infty}[\ln(1+\frac{\lambda r_i}{\sigma})]^i \\ &\times (1+\frac{\lambda r_i}{\sigma})^{-(\frac{k}{\lambda}+1)}dr_i \\ &= \frac{\lambda i}{k} \end{aligned}$$

لذا

$$\begin{aligned} Var[\ln(1+\frac{\lambda R_i^{(k)}}{\sigma})] &= \frac{i(i+1)\lambda^2}{k^2} - \frac{\lambda^2 i^2}{k^2} \\ &= \frac{i\lambda^2}{k^2} \end{aligned}$$

با توجه به رابطه (۳) برای $r_i < r_j$

$$\begin{aligned} &E[\ln(1+\frac{\lambda R_i^{(k)}}{\sigma})\ln(1+\frac{\lambda R_j^{(k)}}{\sigma})] \\ &= \frac{k^j}{(i-1)!(j-i-1)!\sigma^2\lambda^{j-2}}\int_0^{+\infty}[\ln(1+\frac{\lambda r_i}{\sigma})]^i(1+\frac{\lambda r_i}{\sigma})^{-1} \\ &\times \int_{r_i}^{+\infty}\ln(1+\frac{\lambda r_j}{\sigma})[\ln\frac{\sigma+\lambda r_j}{\sigma+\lambda r_i}]^{j-i-1}(1+\frac{\lambda r_j}{\sigma})^{-(\frac{k}{\lambda}+1)}dr_j dr_i, \end{aligned}$$

اگر قرار دهیم $t_j = \ln(1+\frac{\lambda r_j}{\sigma}) - \ln(1+\frac{\lambda r_i}{\sigma})$ آنگاه

$$\begin{aligned} &\int_{r_i}^{+\infty}\ln(1+\frac{\lambda r_j}{\sigma})[\ln\frac{\sigma+\lambda r_j}{\sigma+\lambda r_i}]^{j-i-1}(1+\frac{\lambda r_j}{\sigma})^{-(\frac{k}{\lambda}+1)}dr_j \\ &= \int_{r_i}^{+\infty}\ln(1+\frac{\lambda r_j}{\sigma})[\ln(1+\frac{\lambda r_j}{\sigma}) - \ln(1+\frac{\lambda r_i}{\sigma})]^{j-i-1} \\ &\times (1+\frac{\lambda r_j}{\sigma})^{-(\frac{k}{\lambda}+1)}dr_j \\ &= \frac{\sigma}{\lambda}(1+\frac{\lambda r_i}{\sigma})^{-\frac{k}{\lambda}}\int_0^{+\infty} t_j^{j-i}e^{-\frac{k}{\lambda}t_j}dt_j + \frac{\sigma}{\lambda}(1+\frac{\lambda r_i}{\sigma})^{-\frac{k}{\lambda}}\ln(1+\frac{\lambda r_i}{\sigma}) \\ &\times \int_0^{+\infty} t_j^{j-i-1}e^{-\frac{k}{\lambda}t_j}dt_j \end{aligned}$$

$$= \frac{\sigma\lambda^{j-i-1}(j-i-1)!}{k^{j-i}}(1+\frac{\lambda r_i}{\sigma})^{-\frac{k}{\lambda}}[\frac{\lambda(j-i)}{k}+\ln(1+\frac{\lambda r_i}{\sigma})],$$

بنابراین

$$\begin{aligned} & E[\ln(1+\frac{\lambda R_i^{(k)}}{\sigma})\ln(1+\frac{\lambda R_j^{(k)}}{\sigma})] \\ = & \frac{k^{i-1}(j-i)}{(i-1)!\sigma\lambda^{i-2}}\int_0^{+\infty}[\ln(1+\frac{\lambda r_i}{\sigma})]^i(1+\frac{\lambda r_i}{\sigma})^{-(\frac{k}{\lambda}+1)}dr_i \\ + & \frac{k^i}{(i-1)!\sigma\lambda^{i-1}}\int_0^{+\infty}[\ln(1+\frac{\lambda r_i}{\sigma})]^{i+1}(1+\frac{\lambda r_i}{\sigma})^{-(\frac{k}{\lambda}+1)}dr_i, \end{aligned}$$

اگر قرار دهیم $t_i = \ln(1+\frac{\lambda r_i}{\sigma})$ آنگاه

$$\begin{aligned} E[\ln(1+\frac{\lambda R_i^{(k)}}{\sigma})\ln(1+\frac{\lambda R_j^{(k)}}{\sigma})] &= \frac{k^{i-1}(j-i)i}{\lambda^{i-1}(\frac{k}{\lambda})^{i+1}}+\frac{k^i i(i+1)}{\lambda^i(\frac{k}{\lambda})^{i+2}} \\ &= \frac{\lambda^2 i(j+1)}{k^2}. \end{aligned}$$

به این ترتیب

$$\begin{aligned} Cov[\ln(1+\frac{\lambda R_i^{(k)}}{\sigma}),\ln(1+\frac{\lambda R_j^{(k)}}{\sigma})] &= \frac{\lambda^2 i(j+1)}{k^2}-(\frac{\lambda i}{k})(\frac{\lambda j}{k}) \\ &= \frac{i\lambda^2}{k^2}. \end{aligned}$$

بنابراین رابطه (۸) را می‌توان به‌صورت زیر بازنویسی کرد

$$\begin{aligned} Var(-\ln f_{\boldsymbol{R}_n^{(k)}}(\boldsymbol{R}_n^{(k)};\boldsymbol{\theta})) &= \sum_{i=1}^{n} b_i^2\frac{i\lambda^2}{k^2}+2\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} b_i b_j\frac{i\lambda^2}{k^2} \\ = & \frac{n(n-1)\lambda^2}{2k^2}+\frac{n\lambda^2(k+\lambda)^2}{k^2\lambda^2}+\frac{2\lambda^2}{k^2}\sum_{i=1}^{n-1} i(n-1-i-1+1) \\ & +\frac{2n(n-1)\lambda^2(k+\lambda)}{2k^2\lambda} \\ = & \frac{\lambda^2 n^2}{2k^2}+\frac{n\lambda^2}{6k^2}+\frac{n^3\lambda^2}{3k^2}+n+\frac{n^2\lambda+n\lambda}{k}. \end{aligned}$$

قضیه ۱ : فرض کنید $(\boldsymbol{R}_1^{(k)},\ldots,\boldsymbol{R}_\ell^{(k)})$، ℓ نمونه مستقل از k-رکوردها با حجم‌های نابرابر n_i باشند، که در آن برای $i=1,...,\ell$، $\boldsymbol{R}_i^{(k)}=(R_{i,1}^{(k)},\ldots,R_{i,n_i}^{(k)})$ و $n=\sum_{s=1}^{\ell}n_s$ همچنین $\widehat{\boldsymbol{\theta}}_n$ برآوردگر سازگار $\boldsymbol{\theta}$ و $f_{\boldsymbol{R}_i^{(k)}}$ تابع چگالی i امین بردار مشاهده‌های k-رکورد از توزیع پارتو تعمیم‌یافته باشد، آنگاه آماره آزمون (۷) وقتی که $\ell\to+\infty$ دارای توزیع حدی نرمال استاندارد است.

برهان : فرض کنید $g(\boldsymbol{r}_i)=-\ln f_{\boldsymbol{R}_i^{(k)}}(\boldsymbol{r}_i;\widehat{\boldsymbol{\theta}}_n)-H(\boldsymbol{R}_i^{(k)})$، که در آن

$$f_{\boldsymbol{R}_i^{(k)}}(\boldsymbol{r}_i;\widehat{\boldsymbol{\theta}}_n)=(\frac{k}{\widehat{\sigma}})^{n_i}[\prod_{s=1}^{n_i}(1+\frac{\widehat{\lambda}r_{i,s}}{\widehat{\sigma}})^{b_s}],$$

تابع چگالی بردار مشاهده‌های k-رکوردها در نمونه i ام از توزیع پارتو تعمیم‌یافته است. بنابراین با توجه به قضیه ۲۷.۲، بلینگزلی (۱۹۹۵) کافی است نشان داده شود شرط لیاپانوف یا معادل آن شرط لیندبرگ برقرار است. اگر $\delta>1$ وجود داشته باشد به‌طوری که

$$\lim_{\ell\to+\infty}\frac{\sum_{i=1}^{\ell}E|g(\boldsymbol{R}_i^{(k)})|^{2+\delta}}{(\sum_{i=1}^{\ell}E|g(\boldsymbol{R}_i^{(k)})|^2)^{\delta}}=0. \qquad (9)$$

حال نشان داده می‌شود (۹) به‌ازای $\delta=6$ برقرار است. برای محاسبه صورت کسر در عبارت (۹) با توجه به معادله (۵)

$$H(\boldsymbol{R}_i^{(k)})=O(n_i^2),$$

که در آن، $O(g(x))=f(x)$ هر گاه مقادیر ثابت و مثبت M,δ موجود باشند به‌طوری که برای هر $|x-a|<\delta$، $|f(x)|\le M|g(x)|$ است. همچنین

$$\begin{aligned}E|g(\boldsymbol{R}_i^{(k)})|^{2+\delta}&=Eg(\boldsymbol{R}_i^{(k)})^8\\&=\sum_{j=0}^{8}\binom{8}{j}(-H(\boldsymbol{R}_i^{(k)}))^{8-j}E(-\ln f_{\boldsymbol{R}_i^{(k)}}(\boldsymbol{R}_i^{(k)};\widehat{\boldsymbol{\theta}}_n))^j.\end{aligned} \qquad (10)$$

اکنون

$$E(-\ln f_{\boldsymbol{R}_i^{(k)}}(\boldsymbol{R}_i^{(k)};\widehat{\boldsymbol{\theta}}_n))^j=E[-n_i\ln\frac{k}{\widehat{\sigma}}-\sum_{s=1}^{n_i}b_s\ln(1+\frac{\widehat{\lambda}R_{i,s}^{(k)}}{\widehat{\sigma}})]^j,$$

که در آن $R_{i,s}^{(k)}$، s امین مولفه از بردار $\boldsymbol{R}_i^{(k)}$ است.

$$\begin{aligned}
&E(-\ln f_{\boldsymbol{R}_i^{(k)}}(\boldsymbol{R}_i^{(k)};\widehat{\boldsymbol{\theta}}_n))^j\\
&= E\{\sum_{q=0}^{j}\binom{j}{q}n_i^q(-\ln\frac{k}{\widehat{\sigma}})^q[-\sum_{s=1}^{n_i}b_s\ln(1+\frac{\widehat{\lambda}R_{i,s}^{(k)}}{\widehat{\sigma}})]^{j-q}\}\\
&= \sum_{q=0}^{j}\binom{j}{q}n_i^q(-\ln\frac{k}{\widehat{\sigma}})^q E[-\sum_{s=1}^{n_i}b_s\ln(1+\frac{\widehat{\lambda}R_{i,s}^{(k)}}{\widehat{\sigma}})]^{j-q}\\
&\leq \sum_{q=0}^{j}\binom{j}{q}n_i^q(-\ln\frac{k}{\widehat{\sigma}})^q n_i^{j-q-1}\sum_{s=1}^{n_i}E[-b_s\ln(1+\frac{\widehat{\lambda}R_{i,s}^{(k)}}{\widehat{\sigma}})]^{j-q},
\end{aligned}$$

که در آن آخرین نابرابری از تمرین ۱۴ فصل ۳، چانگ (۲۰۰۱) نتیجه شده است.

با توجه به چگالی مقادیر k-رکورد در رابطه (۲) و با تغییر متغیر $t_s = \ln(1+\frac{\widehat{\lambda}r_{i,s}}{\widehat{\sigma}})$ داریم:

$$\begin{aligned}
E[-b_s\ln(1+\frac{\widehat{\lambda}R_{i,s}^{(k)}}{\widehat{\sigma}})]^{j-q} &= \int_0^{+\infty}[-b_s\ln(1+\frac{\widehat{\lambda}r_{i,s}}{\widehat{\sigma}})]^{j-q}\frac{k^s}{(s-1)!\widehat{\sigma}}\\
&\times \frac{1}{\widehat{\lambda}^{s-1}}[\ln(1+\frac{\widehat{\lambda}r_{i,s}}{\widehat{\sigma}})]^{s-1}(1+\frac{\widehat{\lambda}r_{i,s}}{\widehat{\sigma}})^{-(\frac{k}{\widehat{\lambda}}+1)}dr_{i,s}\\
&= \frac{(-b_s)^{j-q}\Gamma(s+j-q)\widehat{\lambda}^{j-q}}{(s-1)!k^{j-q}}.
\end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned}
&E(-\ln f_{\boldsymbol{R}_i^{(k)}}(\boldsymbol{R}_i^{(k)};\widehat{\boldsymbol{\theta}}_n))^j\\
&\leq n_i^{j-1}\sum_{q=0}^{j}\binom{j}{q}(-\ln\frac{k}{\widehat{\sigma}})^q\sum_{s=1}^{n_i}\frac{(-b_s)^{j-q}\Gamma(s+j-q)\widehat{\lambda}^{j-q}}{(s-1)!k^{j-q}}\\
&= n_i^{j-1}\sum_{q=0}^{j}c(j,k,\widehat{\sigma},\widehat{\lambda})\sum_{s=1}^{n_i}(-b_s)^{j-q}\frac{\Gamma(s+j-q)}{(s-1)!},
\end{aligned}$$

که در آن

$$c(j,k,\widehat{\sigma},\widehat{\lambda}) = \binom{j}{q}(-\ln\frac{k}{\widehat{\sigma}})^q\frac{\widehat{\lambda}^{j-q}}{k^{j-q}},$$

بنابه تقریب استرلینگ $n! \approx \sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n$ اما

$$\lim_{s\to+\infty}(1+\frac{j-q}{s-1})^{s+j-q-1} = e^{j-q},$$

پس برای n_iهای به اندازه کافی بزرگ

$$\begin{aligned}
\frac{\Gamma(s+j-q)}{(s-1)!} &= \frac{(s+j-q-1)!}{(s-1)!} \sim \frac{\sqrt{2\pi(s+j-q-1)}}{\sqrt{2\pi(s-1)}} \\
&\times \frac{(\frac{s+j-q-1}{e})^{s+j-q-1}}{(\frac{s-1}{e})^{s-1}} \\
&= \sqrt{1+\frac{j-q}{s-1}}e^{q-j}(1+\frac{j-q}{s-1})^{s+j-q-1}(s-1)^{j-q} \\
&\leq \sqrt{9}e^{q-j}(1+\frac{j-q}{s-1})^{s+j-q-1}(n_i-1)^{j-q} \\
&\leq \sqrt{9}(n_i-1)^{j-q} \leq O(n_i^j),
\end{aligned}$$

در نتیجه

$$E(-\ln f_{\boldsymbol{R}_i^{(k)}}(\boldsymbol{R}_i^{(k)};\widehat{\boldsymbol{\theta}}_n))^j = O(n_i^{2j}). \tag{11}$$

به این ترتیب با قرار دادن (۳) و (۱۱) در (۱۰)

$$E(g(\boldsymbol{R}_i^{(k)}))^8 = \sum_{j=0}^{8}\binom{8}{j}(O(n_i^2))^{8-j}O(n_i^{2j}). \tag{12}$$

برای محاسبه مخرج کسر در عبارت (۹)

$$\begin{aligned}
(\sum_{i=1}^{\ell}E|g(\boldsymbol{R}_i^{(k)})|^2)^6 &= (\sum_{i=1}^{\ell}Var(-\ln f_{\boldsymbol{R}_i^{(k)}}(\boldsymbol{R}_i^{(k)};\widehat{\boldsymbol{\theta}}_n)))^6 \\
&= [\sum_{i=1}^{\ell}(\frac{\lambda^2 n_i^2}{2k^2}+\frac{n_i\lambda^2}{6k^2}+\frac{n_i^3\lambda^2}{3k^2}+n_i+\frac{n_i^2\lambda+n_i\lambda}{k})]^6 \\
&= O(\sum_{i=1}^{\ell}n_i^{18}).
\end{aligned} \tag{13}$$

به این ترتیب با بازنویسی رابطه (۹) با استفاده از روابط (۱۲) و (۱۳)

$$\lim_{\ell\to+\infty}\frac{\sum_{i=1}^{\ell}E(g(\boldsymbol{R}_i^{(k)}))^8}{(s_n^2)^6} = \lim_{\ell\to+\infty}\frac{\sum_{i=1}^{\ell}O(n_i^{16})}{\sum_{i=1}^{\ell}O(n_i^{18})} = 0.$$

در نتیجه رابطه (۹) و قضیه اثبات می‌شوند.

۴ مثال‌های عددی

در این بخش ابتدا آنتروپی شانون رکوردها و ۳-رکوردها در توزیع پارتو تعمیم‌یافته را محاسبه کرده، سپس با استفاده از شبیه‌سازی و داده‌های واقعی، عملکرد آماره آزمون ارائه شده ارزیابی می‌شود.

۱.۴ آنتروپی شانون k-رکوردها از توزیع پارتو تعمیم‌یافته

مقادیر آنتروپی جدول ۱ با توجه به رابطه (۶) برای نمونه‌هایی به حجم‌های ۳، ۵، ۷ و ۹ و مقادیر جدول ۲ با توجه به رابطه (۵) با قرار دادن $k=۳$ برای مقادیر مشابه حجم‌های نمونه‌ای حاصل شده است. همان‌طور که ملاحظه می‌شود، با افزایش حجم نمونه و پارامترهای λ و σ مقدار آنتروپی افزایش و با افزایش k از ۱ به ۳ مقدار آنتروپی کاهش می‌یابد.

۲.۴ مطالعه شبیه‌سازی

در این زیر بخش ابتدا الگوریتمی برای شبیه‌سازی آماره آزمون (۷) به‌ازای $k=۱$ معرفی می‌شود.

۱- برای نمونه‌ی iام مقادیر رکورد

$$\boldsymbol{r}_i = (r_{i,۱}, \ldots, r_{i,n_i}), \qquad i = ۱, \ldots, \ell$$

به‌صورت زیر محاسبه می‌شوند:

الف) یک مشاهده از توزیع پارتو تعمیم‌یافته شبیه‌سازی و به‌عنوان اولین رکورد در نظر گرفته می‌شود. به‌عنوان مثال در ردیف نهم جدول ۳ به‌ازای $\lambda=۱$ و $\sigma=۲$ مشاهدات با استفاده از نرم‌افزار R تولید شده‌اند.

ب) مشاهده دیگری از توزیع پارتو تعمیم‌یافته شبیه‌سازی شده، در صورتی که بزرگتر از رکورد sام، $(s = ۱, \ldots, n_i - ۱)$، باشد به‌عنوان رکورد $(s + ۱)$ام انتخاب می‌شود.

جدول ۱: آنتروپی شانون مقادیر رکورد توزیع پارتو تعمیم‌یافته

n	λ	σ = ۰/۵	۰/۷۵	۱	۲	۵
	۰/۵	۳/۹۲	۵/۱۴	۶	۸/۰۸	۱۰/۸۲
	۰/۷۵	۵/۴۲	۶/۶۴	۷/۵۰	۹/۵۸	۱۲/۳۳
۳	۱	۶/۹۲	۸/۱۴	۹	۱۱/۰۸	۱۳/۸۳
	۲	۱۲/۹۲	۱۴/۱۴	۱۵	۱۷/۰۸	۱۹/۸۳
	۵	۳۰/۹۲	۳۲/۱۴	۳۳	۳۵/۰۸	۳۷/۸۳
	۱۰	۶۰/۹۲	۶۲/۱۴	۶۳	۶۵/۰۸	۶۷/۸۳
	۰/۵	۹/۰۳	۱۱/۰۶	۱۲/۵	۱۵/۹۷	۲۰/۵۵
	۰/۷۵	۱۲/۷۸	۱۴/۸۱	۱۶/۲۵	۱۹/۷۲	۲۴/۳۰
۵	۱	۱۶/۵۳	۱۸/۵۶	۲۰	۲۳/۴۷	۲۸/۰۵
	۲	۳۱/۵۳	۳۳/۵۶	۳۵	۳۸/۴۷	۴۳/۰۵
	۵	۷۶/۵۳	۷۸/۵۶	۸۰	۸۳/۴۷	۸۸/۰۵
	۱۰	۱۵۱/۵۳	۱۵۳/۵۶	۱۵۵	۱۵۸/۴۷	۱۶۳/۰۵
	۰/۵	۱۶/۱۵	۱۸/۹۹	۲۱	۲۵/۸۵	۳۲/۲۷
	۰/۷۵	۲۳/۱۵	۲۵/۹۹	۲۸	۳۲/۸۵	۳۹/۲۷
۷	۱	۳۰/۱۵	۳۲/۹۹	۳۵	۳۹/۸۵	۴۶/۲۷
	۲	۵۸/۱۵	۶۰/۹۹	۶۳	۶۷/۸۵	۷۴/۲۷
	۵	۱۴۲/۱۵	۱۴۴/۹۹	۱۴۷	۱۵۱/۸۵	۱۵۸/۲۷
	۱۰	۲۸۲/۱۵	۲۸۴/۹۹	۲۸۷	۲۹۱/۸۵	۲۹۸/۲۷
	۰/۵	۲۵/۲۶	۲۸/۹۱	۳۱/۵۰	۳۷/۷۴	۴۵/۹۹
	۰/۷۵	۳۶/۵۱	۴۰/۱۶	۴۲/۷۵	۴۸/۹۹	۵۷/۲۴
۹	۱	۴۷/۷۶	۵۱/۴۱	۵۴	۶۰/۲۴	۶۸/۴۹
	۲	۹۲/۷۶	۹۶/۴۱	۹۹	۱۰۵/۲۴	۱۱۳/۴۹
	۵	۲۲۷/۷۶	۲۳۱/۴۱	۲۳۴	۲۴۰/۲۴	۲۴۸/۴۹
	۱۰	۴۵۲/۷۶	۴۵۶/۴۱	۴۵۹	۴۶۵/۲۴	۴۷۳/۴۸

ج) مرحله (ب) برای $s = ۱, \ldots, n_i - ۱$ آنقدر تکرار می‌شود تا آخرین رکورد در هر نمونه به‌دست آید. بدین ترتیب ℓ بردار مقادیر رکورد با حجم‌های $n_۱, \ldots, n_\ell$ حاصل می‌شود.

۲- برآورد ماکسیمم درستنمایی پارامترهای λ و σ بر اساس بردارهای رکورد

$$(r_{۱,۱}, r_{۱,۲}, \ldots, r_{۱,n_۱}), \ldots, (r_{\ell,۱}, r_{\ell,۲}, \ldots, r_{\ell,n_\ell})$$

به‌دست آورده می‌شوند. این کار با استفاده از برنامه‌ای در $MATLAB$ انجام شده است. در مثال بالا نتیجه به‌صورت $\widehat{\lambda}$ =۱/۰۸ و $\widehat{\sigma}$ =۲/۲۰ حاصل شده است.

۳- با استفاده از این ℓ بردار رکورد و مقادیر $\widehat{\lambda}$ و $\widehat{\sigma}$، آماره آزمون (۷) و p-مقدار محاسبه شده‌اند. در مثال این مقادیر برابراند با: T =-۱/۰۶ و p =۰/۲۸۶۰-مقدار. در نتیجه فرض صفر «نمونه‌هایی که بردارهای رکورد از آنها استخراج شده‌اند دارای

جدول ۲: آنتروپی شانون مقادیر ۳–رکورد توزیع پارتو تعمیم‌یافته

n	λ	σ = ۰/۵	۰/۷۵	۱	۲	۵
	۰/۵	−۱/۳۸	−۰/۱۶	۰/۷۰	۲/۷۸	۵/۵۳
	۰/۷۵	−۰/۸۸	۰/۳۴	۱/۲۰	۳/۲۸	۶/۰۳
۳	۱	−۰/۳۸	۰/۸۴	۱/۷۰	۳/۷۸	۶/۵۳
	۲	۱/۶۳	۲/۸۴	۳/۷۰	۵/۷۸	۸/۵۳
	۵	۷/۶۳	۸/۸۴	۹/۷۰	۱۱/۷۸	۱۴/۵۳
	۱۰	۱۷/۶۳	۱۸/۸۴	۱۹/۷۰	۲۱/۷۸	۲۴/۵۳
	۰/۵	−۱/۴۶	۰/۵۷	۲/۰۱	۵/۴۷	۱۰/۰۵
	۰/۷۵	−۰/۲۱	۱/۸۲	۳/۲۶	۶/۷۲	۱۱/۳۰
۵	۱	۱/۰۴	۳/۰۷	۴/۵۱	۷/۹۷	۱۲/۵۵
	۲	۶/۰۴	۸/۰۷	۹/۵۱	۱۲/۹۷	۱۷/۵۵
	۵	۲۱/۰۴	۲۳/۰۷	۲۴/۵۱	۲۷/۹۷	۳۲/۵۵
	۱۰	۴۶/۰۴	۴۸/۰۷	۴۹/۵۱	۵۲/۹۷	۵۷/۵۵
	۰/۵	−۰/۸۸	۱/۹۶	۳/۹۸	۸/۸۳	۱۵/۲۴
	۰/۷۵	۱/۴۶	۴/۳۰	۶/۳۱	۱۱/۱۶	۱۷/۵۸
۷	۱	۳/۹۷	۶/۶۳	۸/۶۴	۱۳/۵۰	۱۹/۹۱
	۲	۱۳/۱۲	۱۵/۹۶	۱۷/۹۸	۲۲/۸۳	۲۹/۲۴
	۵	۴۱/۱۲	۴۳/۹۶	۴۵/۹۸	۵۰/۸۳	۵۷/۲۴
	۱۰	۸۷/۷۹	۹۰/۶۳	۹۲/۶۴	۹۷/۴۹	۱۰۳/۹۱
	۰/۵	۰/۳۷	۴/۰۲	۶/۶۱	۱۲/۸۵	۲۱/۱۰
	۰/۷۵	۴/۱۲	۷/۷۷	۱۰/۳۶	۱۶/۶۰	۲۴/۸۵
۹	۱	۷/۸۷	۱۱/۵۲	۱۴/۱۱	۲۰/۳۵	۲۸/۶۰
	۲	۲۲/۸۷	۲۶/۵۲	۲۹/۱۱	۳۵/۳۵	۴۳/۶۰
	۵	۶۷/۸۷	۷۱/۵۲	۷۴/۱۱	۸۰/۳۵	۸۸/۶۰
	۱۰	۱۴۲/۸۷	۱۴۶/۵۲	۱۴۹/۱۱	۱۵۵/۳۵	۱۶۳/۶۰

توزیع پارتو تعمیم‌یافته هستند.» را در سطح ۰/۰۵ نمی‌توان رد کرد.

جدول ۳ نشان می‌دهد مقدار واقعی پارامترها و مقدار برآورد شده بسیار نزدیک به هم بوده و آزمون پیشنهادی در همه موارد دارای p–مقدار بیشتر از ۰/۰۵ بوده و در نتیجه فرض صفر رد نمی‌شود یعنی با توجه به شبیه‌سازی‌های انجام شده آزمون پیشنهادی عملکرد مناسبی دارد.

۳.۴ مثال عددی

در این زیر بخش با استفاده از داده‌های مربوط به ارزش پول کشور بولیوی در برابر یورو اروپا بین سال‌های ۲۰۰۲ تا ۲۰۱۰ که از (http://www.oanda.com/currency/historical-rates/) گرفته شده، عملکرد

جدول ۳: شبیه‌سازی آزمون برای توزیع پارتو تعمیم‌یافته

p–مقدار	T	$\hat{\sigma}$	$\hat{\lambda}$	σ	λ	n
۰/۴۲۷۴	۰/۰۷۹۳۷	۰/۸۲	۰/۵۱	۰/۷۵	۰/۵	
۰/۰۸۱۲	۱/۱۷۴۳۱	۰/۸۷	۰/۸۹	۱	۰/۷۵	
۰/۵۴۷۰	۰/۶۰۲۳	۲/۹۰	۱	۲	۱	۵۰۰
۰/۷۳۴۸	−۰/۳۳۸۸	۲/۸۰	۲/۲۴	۱	۲	
۰/۰۸۰۷	−۱/۷۴۶۷	۴/۰۳	۲/۲۷	۵	۳	
۰/۳۸۱۹	−۰/۰۸۷۴	۵/۶۲	۳/۶۹	۳	۵	
۰/۳۱۹۶	−۰/۹۹۵۳	۱/۰۸	۰/۴۶	۰/۷۵	۰/۵	
۰/۳۰۱۴	−۱/۰۳۳۵	۱/۶۰	۰/۷۱	۱	۰/۷۵	
۰/۲۸۶۰	−۱/۰۶۷۰	۲/۲۰	۱/۰۸	۲	۱	۱۰۰۰
۰/۹۲۵۷	−۰/۰۹۳۲	۱/۴۴	۲/۱۰	۱	۲	
۰/۲۹۳۸	−۱/۰۴۹۸	۵/۵۰	۳/۱۸	۵	۳	
۰/۲۹۲۴	−۱/۰۵۲۸	۱۰/۵۰	۵/۱۶	۳	۵	
۰/۳۰۶۵	−۱/۰۲۲۵	۱/۰۵	۰/۵۰	۰/۷۵	۰/۵	
۰/۲۹۳۷	−۱/۰۵۰۰	۱/۵۲	۰/۷۶	۱	۰/۷۵	
۰/۲۸۳۹	−۱/۰۷۱۵	۳/۲۹	۱/۰۳	۲	۱	۳۰۰۰
۰/۲۷۴۸	−۱/۰۹۲۰	۲/۰۹	۲/۱۱	۱	۲	
۰/۲۷۷۷	−۱/۰۸۵۵	۱۱/۴۸	۳/۲۳	۵	۳	
۰/۲۱۶۰	−۱/۲۳۷۳	۶	۴/۵۰	۳	۵	

آماره آزمون (۷) برای $k=$ ۳ بررسی می‌شود.

این داده‌ها با استفاده از بسته gPdtest در نرم‌افزار R بررسی شد که از توزیع پارتو تعمیم‌یافته با پارامترهای شکل و مقیاس ۰/۱۵۹۷ و ۰/۰۱۳۶ پیروی می‌کنند. p–مقدار آزمون نیکویی برازش این داده‌ها برابر ۰/۲۷۹۵ است و در نتیجه فرض پیروی داده‌ها از توزیع پارتو تعمیم‌یافته با پارامتر مثبت را نمی‌توان رد کرد. حال تعداد مشخصی ۳–رکورد این داده‌ها در نظر گرفته می‌شوند (به این صورت که بین i مشاهده اول ($i=$ ۳, ۴,...)، سومین بزرگترین مشاهده به عنوان i امین ۳–رکورد در نظر گرفته می‌شود) بر مبنای این بردار از مقادیر ۳–رکورد برآورد ماکسیمم درستنمایی پارامترهای توزیع به‌دست آورده، که نتیجه می‌شود $\hat{\lambda}=$ ۰/۱ و $\hat{\sigma}=$ ۰/۳۰. همان‌طور که ملاحظه می‌شود پارامترهای برآورده شده در این حالت با مقدار واقعی

تفاوت چندانی ندارند. آماره آزمون (۷) برابر با ۱/۴۶۲۲- است و در ناحیه پذیرش قرار می‌گیرد. این موضوع قدرت آزمون ارائه شده را به‌صورت تجربی نشان می‌دهد.

بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله ابتدا آنتروپی شانون مقادیر k-رکورد برای توزیع پارتو تعمیم‌یافته بیان، سپس بر مبنای این آنتروپی یک آماره برای آزمون نیکویی برازش پیشنهاد کرده و نشان داده شد توریع حدی آن نرمال استاندارد است. سپس در مطالعه‌ای شبیه‌سازی و با استفاده از داده‌های واقعی نشان داده شد عملکرد آماره آزمون پیشنهادی برای آزمون نیکویی برازش مناسب است. محاسبه توان آزمون پیشنهادی و ارائه آماره‌ای برای آزمون نیکویی برازش بر مبنای آنتروپی مقادیر k-رکورد سایر توزیع‌ها می‌تواند موضوع پژوهش‌های آتی باشد.

تقدیر و تشکر

نویسندگان مقاله نهایت تشکر و قدردانی را از خانم دکتر تاتا برای نظرات ارزشمندشان دارند. همچنین از سردبیر، هیئت تحریریه و داوران محترم مجله علوم آماری که با پیشنهادات گران‌بهای خود باعث بهبود مطالب ارائه شده در این مقاله شدند سپاسگزاری می‌نمایند.

مراجع

زمان‌زاده، ا. (۱۳۹۲)، آزمون نیکویی برازش توزیع نمایی بر مبنای برآوردگرهای جدید آنتروپی، مجله علوم آماری، جلد **۷**، ۶۱-۷۵.

زمان‌زاده، ا.، ارقامی، ن. ر. (۱۳۸۷)، آزمون نیکویی برازش توزیع‌های نرمال و نمایی بر مبنای برآوردگرهای جدید آنتروپی، مجله علوم آماری، جلد **۲**، ۱۷۹-۲۰۰.

عباس‌نژاد، م.، شکوری، م. (۱۳۸۷)، آزمون نیکویی برازش برای توزیع نمایی بر مبنای برآورد اطلاع رنی، مجله علوم آماری، جلد **۲**، ۲۰۱-۲۱۱.

Afhami, B. and Madadi, M. (2013), Shannon Entropy in Generalized Order Statistics from Pareto-Type Distributions, *International Journal of Nonlinear Analysis and Applications*, **4**, 79-91.

Arnold, B. C., Balakrishnan, N. and Nagaraja, H. N. (1998), *Records*, John Wiley, New York.

Asadi, M., Ebrahimi, N., Hamedani, G. G. and Soofi, E. S. (2004), Maximum Dynamic Entropy Models, *Journal of Applied Probability*, **41**, 379-390.

Baratpour, S., Ahmadi, J. and Arghami, N. R. (2007), Some Characterizations Based on Entropy of Order Statistics and Record Values, *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **36**, 47-57.

Billingsley, P. (1995), *Probability and Measure*, 3rd Ed, John Wiley, New York.

Chung, K. L. (2001), *A Course in Probability Theory*, 3rd Ed, Academic Press, San Diego, CA.

Dziubdziela, W. and Kopocinski, B. (1976), Limiting Properties of the kth-Record Value, *Zastosowania Mathematyki*, **15**, 187-190.

Habibi Rad, A., Yousefzadeh, F., Amini, M. and Arghami, N. R. (2007), Testing Exponentiality Based on Record Values, *Journal of Iranian Statistical Society*, **6**, 77-87.

Kullback, S. (1959), *Information Theory and Statistics*, John Wiley, New York.

Madadi, M. and Tata, M. (2011), Shannon Information in Record Data, *Metrika*, **74**, 11-31.

Madadi, M. and Tata, M. (2014), Shannon Information in k-Records, *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **43**, 3286-3301.

Pickands, J. (1975), Statistical Inference Using Extreme Order Statistics, *Annals of Statistics*, **3**, 119-131.

Renyi, A. (1959), On the Dimension and Entropy of Probability Distribution, *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungarica*, **10**, 193-215.

Shannon, C. (1948), A Mathematical Theory of Communication, *Bell System Technical Journal*, **27**, 379-423.

Tsallis, C. (1988), Possible Generalization of Boltzmann-Gibbs Statistics, *Journal of Statistical Physics*, **52**, 479-487.

Yaghoobi Avval Riabi, M., Mohtashami Borzadaran, G. R. and Yari, G. H. (2010), β-Entropy for Pareto-type Distributions and Related Weighted Distributions, *Statistics and Probability Letters*, **80**, 1512-1519.

Yari, G. H. and Mohtashami Borzadaran, G. R. (2010), Entropy for Pareto-types and its Order Statistics Distributions, *Communications in Information and Systems*, **10**, 193-202.