مجله علوم آماری، بهار ۱۳۸۶

جلد ۱، شماره ۱، ص ۴۵-۵۹

پیشگویی بیز تجربی برای داده‌های فضایی-زمانی تحت مدل تفکیک‌پذیر

فیروزه ریواز، محسن محمدزاده، مجید جعفری خالدی

گروه آمار، دانشگاه تربیت مدرس

تاریخ دریافت: ۱۳۸۵/۴/۲۰ تاریخ آخرین بازنگری: ۱۳۸۵/۷/۱۰

چکیده : برای پیشگویی بیزی یک مدل فضایی-زمانی گاوسی، پارامترهای نامعلوم مدل بعنوان متغیرهای تصادفی با توزیعهای پیشین معلوم در نظر گرفته می‌شود و با گسسته سازی فضای پارامتر، توزیعهای پسین و پیشگوی بیزی تقریبی تعیین می‌شوند. در این مقاله با فرض پارامتری بودن توزیع‌های پیشین و اتخاذ رهیافت بیز تجربی توزیع پیشین را برآورد نموده و با جایگذاری آن در توزیع پیشگوی بیزی، پیشگوی فضایی-زمانی بیز تجربی و واریانس پیشگویی محاسبه می‌شوند. سپس در یک مثال کاربردی نحوه محاسبه این پیشگو و واریانس پیشگویی ارائه می‌شود. به علاوه بر اساس معیار اعتبار سنجی متقابل دقت این پیشگو مورد ارزیابی قرار می‌گیرد.

واژه‌های کلیدی : د اده‌های فضایی-زمانی، پیشگویی، روش بیز تجربی.

° آدرس الکترونیک مسئول مقاله: فیروزه ریواز، rivaz@modares.ac.ir

محسن محمدزاده، عضو هسته‌ی قطب علمی آنالیز داده‌های ترتیبی و فضایی دانشگاه فردوسی مشهد.

[Downloaded from jss.irstat.ir on 2026-09-21]

[DOR: 20.1001.1.17358183.1386.1.1.12.9]

۱ مقدمه

در برخی مطالعات محیطی تحلیل داده‌هایی مورد نظر است که در طول زمان و بر حسب موقعیت و مکان قرار گرفتن آنها در فضای مورد مطالعه همبسته هستند. یکی از موضوعات مهم در تحلیل اینگونه داده‌ها که داده‌های فضایی‌ـزمانی نامیده می‌شوند، پیشگویی مقدار نامعلوم کمیت مورد مطالعه در مکانها و زمانهای دلخواه بر اساس مشاهدات می‌باشد. برای این منظور، معمولاً فرض می‌شود داده‌ها از یک میدان تصادفی گاوسی با توابع میانگین و کواریانس پارامتری پیروی می‌کنند. با فرض معلوم بودن پارامترهای مدل، شامل میانگین، واریانس و همبستگی فضایی‌ـزمانی، پیشگوی بهینه و میانگین توان دوم خطای آن بسادگی تعیین می‌شوند. هنگامی که پارامترهای مدل نامعلوم هستند، در روش بسامدی برآورد ماکسیمم درستنمایی آنها تعیین و در پیشگوی بهینه جایگذاری می‌شوند (ماردیا و گودال، ۱۹۹۳، اسمیت، ۱۹۹۶). لازم به ذکر است برای محاسبه برآوردها، روشهای عددی مبتنی بر الگوریتم‌های مکرر مورد استفاده قرار می‌گیرد. اما همگرایی الگوریتمها، چند مدی بودن تابع درستنمایی و شناسایی ناپذیر بودن برآوردها از مسائل جدی در این خصوص بشمار می‌روند (لو و زیمرمن، ۲۰۰۴). برای رفع این مسائل، با در نظر گرفتن پارامترهای مدل به عنوان متغیرهای تصادفی، می‌توان روش بیزی را برای تعیین پیشگوی فضایی‌ـزمانی بکار برد. در سالهای اخیر بدنبال رشد و توسعه روشهای مونت کارلوی زنجیر مارکوفی، تحلیل بیزی داده‌های فضایی‌ـزمانی مورد توجه قرار گرفته است. از جمله ویکل و همکاران (۱۹۹۸ و ۲۰۰۱) و بدنبال آنها بانرجی و همکاران (۲۰۰۴) با روش بیز سلسله مراتبی، که در آن توزیع‌هایی معلوم برای ابر پارامترهای توزیع پیشین در نظر گرفته می‌شود، پیشگوی فضایی‌ـزمانی را با الگوریتم نمونه‌گیری گیبس تعیین کردند. ساهو و همکاران (۲۰۰۵) برای رفع مشکلات محاسباتی ناشی از ابعاد زیاد پارامترها، پیشگوی بیزی را به ازای مقادیر مشخص پارامترها بدست آورده و سپس با استفاده از معیار اعتبار سنجی متقابل مقادیر مناسب پارامترها را برای پیشگویی اختیار نموده‌اند. اما در این روش عدم حتمیت پارامترها در پیشگویی منظور نمی‌گردد. به

[Downloaded from jss.irstat.ir on 2026-09-21]

[DOR: 20.1001.1.17358183.1386.1.1.12.9]

علاوه پیشگویی بیز سلسله مراتبی ممکن است به توزیع ابر پارامترها حساس باشد، لذا در این مقاله با اتخاذ رهیافت بیز تجربی ابر پارامترهای نامعلوم به روشی که سادگی محاسبات را نیز به همراه دارد برآورد شده و در توزیع پیشگوی بیزی جایگزین می‌گردند. سپس با نمونه‌گیری از این توزیع، پیشگوی فضایی‌ـزمانی بیز تجربی و واریانس پیشگویی تعیین می‌شوند. در انتها با استفاده از یک مثال کاربردی نحوه انجام این روش پیشگویی ارائه و دقت آن مورد ارزیابی قرار می‌گیرد.

در بخش ۲ مدل فضایی‌ـزمانی گاوسی معرفی می‌شود. در بخش ۳ پیشگوی فضایی‌ـزمانی با استفاده از رهیافت بیز تجربی تعیین می‌شود. در بخش ۴، برای نمایش نحوه کاربست پیشگویی فضایی‌ـزمانی بیز تجربی در مسائل کاربردی، متوسط ماهیانه گاز منوکسید کربن در ۱۱ ایستگاه سنجش آلاینده‌های هوای شهر تهران مورد تجزیه و تحلیل قرار می‌گیرد. نهایتاً بحث و نتیجه‌گیری در بخش ۵ ارائه می‌شود.

۲ مدل آماری

فرض کنید $\{Z(s,t)\ ;\ s \in D \subseteq R^d\ ,\ t \in T \subseteq [0,\infty)\}$، $d \geq 1$، یک میدان تصادفی گاوسی حقیقی مقدار با توابع میانگین و کوواریانس تفکیک پذیر

$$\begin{aligned} E(Z(s,t)) &= f'(s,t)\beta \\ Cov(Z(s_1,t_1),Z(s_2,t_2)) &= \sigma^2 \rho_S(s_1,s_2;\theta_S)\rho_T(t_1,t_2;\theta_T) \end{aligned} \qquad (1)$$

باشد، که در آن $f(s,t) = (f_1(s,t),\cdots,f_p(s,t))'$ یک بردار $p \times 1$ از توابع معلوم، $\beta = (\beta_1,\cdots,\beta_p) \in R^p$ پارامترهای رگرسیونی، $\sigma^2 = Var(Z(s,t))$ واریانس، $\rho_S(\cdot,\cdot;\theta_S)$ تابع همبستگی فضایی میدان با بردار پارامترهای q_1 بعدی θ_S و $\rho_T(\cdot,\cdot;\theta_T)$ تابع همبستگی زمانی با بردار پارامترهای q_2 بعدی θ_T است. اگر مقادیر میدان تصادفی $Z(\cdot,\cdot)$ در موقعیت‌های $s_1,\cdots,s_n$ و زمان‌های $t_1,\cdots,t_m$ با بردار nm مولفه‌ای $Z = (Z(s_1,t_1),\cdots,Z(s_n,t_m))'$ نمایش داده شود، در این صورت

$$Z \sim N_{nm}(X\beta, \sigma^2(\Sigma_{\theta_S} \otimes \Sigma_{\theta_T}))$$

[Downloaded from jss.irstat.ir on 2026-09-21]

[DOR: 20.1001.1.17358183.1386.1.1.12.9]

که در آن $X = (f'(s_1,t_1),\cdots,f'(s_n,t_m))'$، $\Sigma_{\theta_S} = (\rho_S(s_i,s_j;\theta_S))$ و $\Sigma_{\theta_T} = (\rho_T(t_i,t_j,\theta_T))$ می‌باشد. همچنین علامت $\otimes$، ضرب کرونه‌کر ماتریس‌ها را نمایش می‌دهد. با فرض اینکه ماتریس $nm \times p$ بعدی X پر رتبه و ماتریس‌های همبستگی Σ_{θ_S} و Σ_{θ_T} همیشه مثبت باشند، لگاریتم تابع درستنمایی بعد از حذف ضرایب ثابت بصورت

$$\begin{aligned} \ell(\phi;z) &= -\frac{mn}{2}\ln\sigma^2 - \frac{n}{2}\ln|\Sigma_{\theta_S}| - \frac{m}{2}\ln|\Sigma_{\theta_T}| \\ &- \frac{1}{2\sigma^2}(z-X\beta)'(\Sigma_{\theta_T}^{-1}\otimes\Sigma_{\theta_S}^{-1})(z-X\beta) \end{aligned} \quad (2)$$

خواهد بود، که در آن $\phi = (\beta,\sigma^2,\theta_S,\theta_T)'$ بردار $p+q_1+q_2+1$ بعدی پارامترهای مدل است. مسئله اساسی، پیشگویی مقدار نامعلوم میدان تصادفی در موقعیت (s_0,t_0)، یعنی $Z(s_0,t_0)$، براساس بردار مشاهدات $z = (z(s_1,t_1),\cdots,z(s_n,t_m))'$ می‌باشد. با توجه به گاوسی بودن میدان تصادفی $Z(\cdot,\cdot)$، توزیع پیشگو یعنی توزیع $Z(s_0,t_0)$ بشرط Z و ϕ نرمال با میانگین و واریانس

$$\begin{aligned} E(Z(s_0,t_0)|z,\phi) &= f'(s_0,t_0)\beta + r'_{ST}(\Sigma_{\theta_T}^{-1}\otimes\Sigma_{\theta_S}^{-1})(Z-X\beta) \quad (3) \\ Var(Z(s_0,t_0)|z,\phi) &= \sigma^2[1 - r'_{ST}(\Sigma_{\theta_T}^{-1}\otimes\Sigma_{\theta_S}^{-1})r_{ST}] \end{aligned}$$

خواهد بود، که در آن بردار $r'_{ST} = (\rho_S(s_0,s_i,\theta_S)\rho_T(t_0,t_i;\theta_T))$ می‌باشد. بنابراین برای تابع زیان درجه دوم و با فرض معلوم بودن ϕ، پیشگوی بهینه و واریانس پیشگویی بترتیب امید و واریانس توزیع پیشگو خواهند شد. همانطور که ملاحظه می‌شود، پیشگوی بهینه (۳) به بردار پارامترهای ϕ بستگی دارد. اگر ϕ نامعلوم باشد، پیشگوی فضایی‌ـزمانی و واریانس پیشگویی در بخش بعد با استفاده از رهیافت بیز تجربی، تعیین می‌شوند.

۳ پیشگوی بیز تجربی

برای بکارگیری روش بیزی لازم است توزیع پیشین پارامترهای مدل تعیین شود. با فرض آنکه پارامتر همبستگی فضایی θ_S و پارامتر همبستگی زمانی θ_T از یکدیگر و

[Downloaded from jss.irstat.ir on 2026-09-21]

[DOR: 20.1001.1.17358183.1386.1.1.12.9]

از پارامترهای (β,σ^2) نیز مستقل باشند، توزیع پیشین توام پارامترهای مدل را می‌توان بصورت

$$\pi(\phi)=\pi(\beta,\sigma^2,\theta_S,\theta_T)=\pi(\beta,\sigma^2)\pi(\theta_S)\pi(\theta_T)$$

نوشت. از آنجا که توزیع‌های پیشین ناسره برای پارامترهای همبستگی فضایی‌ـزمانی ممکن است منجر به توزیع پسین ناسره گردد (برگر و همکاران، ۲۰۰۱)، در این مقاله برای آنها توزیع‌های سره‌ای بصورت $\pi(\theta_S|\lambda_S)$ و $\pi(\theta_T|\lambda_T)$ که در آنها فرم توزیع‌ها معلوم و λ_S و λ_T ابر پارامترهای نامعلوم هستند، در نظر گرفته می‌شود. در اینصورت اگر توزیع پیشین $\pi(\beta,\sigma^2)\propto\frac{1}{\sigma^2}$ اختیار شود، می‌توان نشان داد

$$\begin{aligned}[\beta|z,\sigma^2,\theta_S,\theta_T] &\sim N(\hat{\beta},\sigma^2\hat{V})\\ [\sigma^2|z,\theta_S,\theta_T] &\sim Inv\chi^2(mn-p,S^2)\end{aligned}$$

که در آن

$$\begin{aligned}\hat{\beta} &= (X'(\Sigma_{\theta_T}^{-1}\otimes\Sigma_{\theta_S}^{-1})X)^{-1}X'(\Sigma_{\theta_T}^{-1}\otimes\Sigma_{\theta_S}^{-1})z\\ \hat{V} &= (X'(\Sigma_{\theta_T}^{-1}\otimes\Sigma_{\theta_S}^{-1})X)^{-1}\\ S^2 &= \frac{Z'(\Sigma_{\theta_T}^{-1}\otimes\Sigma_{\theta_S}^{-1})Z-\hat{\beta}'\hat{V}\hat{\beta}}{mn-p}\end{aligned}$$

و توزیع پسین حاشیه‌ای θ_S و θ_T بصورت

$$\begin{aligned}\pi(\theta_S,\theta_T|z,\lambda_S,\lambda_T) &\propto \frac{f(z|\phi)\pi(\beta|\sigma^2)\pi(\sigma^2)\pi(\theta_S|\lambda_S)\pi(\theta_T|\lambda_T)}{\pi(\beta|z,\sigma^2,\theta_S,\theta_T)\pi(\sigma^2|z,\theta_S,\theta_T)}\\ &\propto g(z|\theta_S,\theta_T)\pi(\theta_S|\lambda_S)\pi(\theta_T|\lambda_T) \qquad (۴)\end{aligned}$$

می‌باشد، که در آن

$$g(z|\theta_S,\theta_T)=|\Sigma_{\theta_S}|^{-\frac{m}{2}}|\Sigma_{\theta_T}|^{-\frac{n}{2}}|\hat{V}|^{\frac{1}{2}}(S^2)^{-\frac{mn-p}{2}}$$

است. چون طرف راست عبارت (۴)، یک توزیع احتمال استاندارد نیست تعیین توزیع پسین بسیار دشوار و بعضاً غیر ممکن خواهد بود. لذا با گسسته سازی فضای

[Downloaded from jss.irstat.ir on 2026-09-21]

[DOR: 20.1001.1.17358183.1386.1.1.12.9]

پارامتر بگونه‌ای که مقادیر $\{\theta_{Si}\}_{i=1}^{I}$ و $\{\theta_{Tj}\}_{j=1}^{J}$ به طور متناظر از مجموعه تکیه‌گاه پیشین‌های $\pi(\theta_S|\lambda_S)$ و $\pi(\theta_T|\lambda_T)$ انتخاب شوند، توزیع پسین تقریبی بصورت

$$\pi(\theta_{Si},\theta_{Tj}|z,\lambda_S,\lambda_T)=\frac{g(z|\theta_{Si},\theta_{Tj})\pi(\theta_{Si}|\lambda_S)\pi(\theta_{Tj}|\lambda_T)}{\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}g(z|\theta_{Si},\theta_{Tj})\pi(\theta_{Si}|\lambda_S)\pi(\theta_{Tj}|\lambda_T)} \quad (۵)$$
$$i=1,\cdots,I\ ,\ j=1,\cdots,J$$

بدست می‌آید. بنابراین توزیع پیشگوی بیزی تقریبی بصورت

$$f(z_0|z,\lambda_S,\lambda_T)=\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}f(z_0|z,\theta_{Si},\theta_{Tj})\pi(\theta_{Si},\theta_{Tj}|z,\lambda_S,\lambda_T) \quad (۶)$$

خواهد شد، که در آن $f(z_0|z,\theta_S,\theta_T)$ تابع چگالی توزیع تی‌ـاستودنت غیرمرکزی $T_{mn-p}(\mu,S^2\rho)$ با پارامترهای

$$\begin{aligned}\mu &= (f'(s_0,t_0)-r'_{ST}(\Sigma_{\theta_T}^{-1}\otimes\Sigma_{\theta_S}^{-1})X)\hat{\beta}+r'_{ST}(\Sigma_{\theta_T}^{-1}\otimes\Sigma_{\theta_S}^{-1})Z\\ \rho &= (1-r'_{ST}(\Sigma_{\theta_T}^{-1}\otimes\Sigma_{\theta_S}^{-1})r_{ST})\\ &+ (f'(s_0,t_0)-r'_{ST}(\Sigma_{\theta_T}^{-1}\otimes\Sigma_{\theta_S}^{-1})X)\hat{V}(f'(s_0,t_0)-r'_{ST}(\Sigma_{\theta_T}^{-1}\otimes\Sigma_{\theta_S}^{-1})X)'\end{aligned}$$

می‌باشد. چون توزیع‌های تقریبی پسین و پیشگوی بیزی به ابرپارامترهای نامعلوم λ_S و λ_T وابسته می‌باشند، در این مقاله با اتخاذ روش بیز تجربی، برآورد آنها تعیین شده و در روابط (۵) و (۶) جایگذاری می‌گردد. از آنجا که تعیین توزیع حاشیه‌ای

$$\begin{aligned}m(z|\lambda_S,\lambda_T) &= \int f(z|\theta_S,\theta_T)\pi(\theta_S,\theta_T|\lambda_S,\lambda_T)d\theta_S d\theta_T\\ &\propto \int g(z|\theta_S,\theta_T)\pi(\theta_S|\lambda_S)\pi(\theta_T|\lambda_T)d\theta_S d\theta_T\end{aligned}$$

مستلزم حل یک انتگرال q_1+q_2 بعدی می‌باشد، برآورد ابر پارامترهای λ_S و λ_T بسیار دشوار و بعضاً غیر ممکن است. لذا روشی ساده برای برآورد این ابر پارامترها پیشنهاد می‌شود، که در آن پارامتر θ_S براساس بردار مشاهدات $\mathbf{z}(t_j)=(z(s_1,t_j),\cdots,z(s_n,t_j))'$ در هر یک از زمانهای نمونه‌ای t_j، $j=1,\cdots,m$، برآورد می‌شود. سپس با در نظر گرفتن این برآوردها بعنوان تحققهایی از توزیع پیشین $\pi(\theta_S|\lambda_S)$ که با $\hat{\theta}_{S_1},\cdots,\hat{\theta}_{S_m}$ نشان داده می‌شوند، با

[Downloaded from jss.irstat.ir on 2026-09-21]
[DOR: 20.1001.1.17358183.1386.1.1.12.9]

روشی مناسب λ_S برآورد می‌گردد. بطور مشابه می‌توان λ_T را نیز برآورد نمود. اکنون با نمونه‌گیری از توزیع پسین $\pi(\theta_S, \theta_T|z, \hat{\lambda}_S, \hat{\lambda}_T)$ و جایگذاری در توزیع $f(z_\circ|z, \hat{\lambda}_S, \hat{\lambda}_T)$ می‌توان توزیع پیشگوی بیز تجربی $f(z_\circ|z, \theta_S, \theta_T)$ را بدست آورد. سپس با نمونه‌گیری از این توزیع می‌توان یک نمونه i.i.d بصورت $\{z_\circ^{(l)}\}_{l=1}^{L}$ تولید کرد. بر اساس این نمونه، پیشگوی فضایی‌ـزمانی بیزتجربی و واریانس پیشگویی بترتیب بصورت

$$\hat{Z}_{EB}(s_\circ, t_\circ) = E[Z(s_\circ, t_\circ)|z, \hat{\lambda}_S, \hat{\lambda}_T] = \frac{1}{L}\sum_{l=1}^{L} z_\circ^{(l)} \qquad (۷)$$

$$Var[Z(s_\circ, t_\circ)|z, \hat{\lambda}_S, \hat{\lambda}_T] = \frac{1}{L}\sum_{i=1}^{L}(z_\circ^{(l)})^2 - [\frac{1}{L}\sum_{i=1}^{L} z_\circ^{(l)}]^2 \qquad (۸)$$

قابل محاسبه‌اند.

۴ مثال کاربردی

مطالعات محیطی نشان می‌دهند یکی از مهمترین منابع آلودگی هوای شهر تهران گاز منوکسید کربن (CO) است، که میزان غلظت آن بر حسب ppm در ۱۱ ایستگاه سنجش آلودگی هوا توسط سازمان محیط زیست و شرکت کنترل کیفیت هوای تهران، بطور ساعتی ثبت و گزارش می‌شود. در این مثال متوسط ماهانه میزان غلظت این گاز مربوط به سال ۱۳۸۳ بعنوان داده‌های فضایی‌ـزمانی مورد تجزیه و تحلیل قرار می‌گیرند. شکل ۱ موقعیت این ایستگاهها و جدول ۱ طول و عرض جغرافیایی آنها را در شهر تهران نمایش می‌دهد. برای تحلیل فضایی‌ـزمانی داده‌های غلظت CO، ابتدا ماهیت اولیه مشاهدات از نظر همگنی در واریانس، مانایی در فضا و زمان و نرمال بودن آنها مورد بررسی قرار می‌گیرد. برای تشخیص همگنی در واریانس، واریانس مشاهدات ایستگاهها در مقابل میانگین متناظر آنها در شکل ۲ رسم گردیده است. چون با افزایش میانگین، واریانس مشاهدات افزایش می‌یابد، واریانس میدان تصادفی نمی‌تواند همگن باشد. لذا لازم است با انتخاب تبدیلی مناسب از داده‌ها، واریانس را همگن نمود. با بررسی تبدیل‌های مختلف، جذر داده‌ها بعنوان تبدیل همگن ساز واریانس در نظر گرفته شده است. همان طور که در شکل ۲.ب ملاحظه

[Downloaded from jss.irstat.ir on 2026-09-21]

[DOR: 20.1001.1.17358183.1386.1.1.12.9]

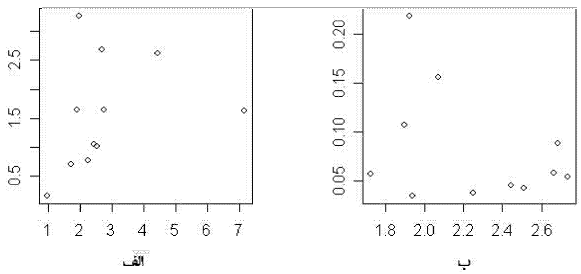
شکل ۱: نقشه محل قرار گیری ایستگاههای شهر تهران

جدول ۱: موقعیت جغرافیایی ایستگاه‌ها در مقیاس درجه و دقیقه

نام ایستگاه	طول جغرافیایی	عرض جغرافیایی
ویلا	۵۱ ۲۵	۳۵ ۴۲
سرخه حصار	۵۱ ۳۵	۳۵ ۴۲
آزادی	۵۱ ۲۰	۳۵ ۴۲
تجریش	۵۱ ۲۶	۳۵ ۴۸
قلهک	۵۱ ۲۶	۳۵ ۴۶
بهمن	۵۱ ۲۳	۳۵ ۳۵
پردیسان	۵۱ ۲۲	۳۵ ۴۴
بازار	۵۱ ۲۵	۳۵ ۴۰
فاطمی	۵۱ ۲۴	۳۵ ۴۳
مهرآباد	۵۱ ۱۹	۳۵ ۴۱
اقدسیه	۵۱ ۲۹	۳۵ ۴۸

[Downloaded from jss.irstat.ir on 2026-09-21]

[DOR: 20.1001.1.17358183.1386.1.1.12.9]



شکل ۲: واریانس در مقابل میانگین داده‌های اصلی و جذر آنها

می‌شود، الگوی خاصی در نمودار میانگین در مقابل واریانس جذر داده‌ها وجود ندارد. لذا تحلیل‌ها بر اساس جذر داده‌ها صورت گرفته و در انتها برای راحتی در تفسیر نتایج، پیشگوئی‌ها بر مبنای مقیاس اولیه داده‌ها ارائه می‌شود. برای تشخیص مانایی تابع میانگین در فضا، نمودار مقادیر $\bar{z}(s_i) = \frac{1}{12}\sum_{t=1}^{12} z(s_i,t)$ در مقابل طول و عرض جغرافیایی در شکل ۳ رسم گردیده‌اند. چون الگوی منظمی در این دو نمودار مشاهده نمی‌شود، می‌توان مانایی میانگین در فضا را نتیجه گرفت. برای شناسایی تابع میانگین در زمان، نمودار جعبه‌ای غلظت CO برای هر یک از ۱۲ ماه در شکل ۴ رسم شده است. بدلیل وجود الگوهای فصلی در طی ماههای متفاوت، مانایی در زمان نتیجه نمی‌شود. بمنظور مدل‌بندی اثرات ماهانه، تابع میانگین بصورت

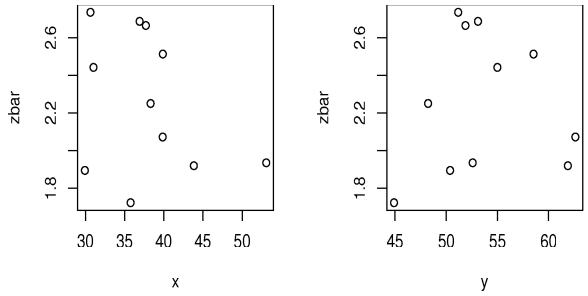
$$\mu(s,t) = \beta_0 + \sum_{m=1}^{12} \beta_m I(t,m)\ , \quad t = 1,\cdots,12$$

در نظر گرفته می‌شود، که در آن

$$I(t,m) = \begin{cases} 1 & \text{اگر زمان } t \text{ ماه } m\text{ام باشد} \\ 0 & \text{در غیر اینصورت} \end{cases}$$

تعریف می‌شود. نمودارهای الف و ب در شکل ۵ بترتیب، نمودارهای نرمال میزان متوسط غلظت CO در هر یک از ایستگاهها و ماه‌های مختلف را نشان می‌دهند. بر

[Downloaded from jss.irstat.ir on 2026-09-21]
[DOR: 20.1001.1.17358183.1386.1.1.12.9]



شکل ۳: نمودار $Z(s)$ در مقابل x و y

مبنای این نمودارها و دو pـمقدار ۰/۳۲۶ و ۰/۴۹۲ برای آزمون شاپیرو ویلک، فرض نرمال بودن توزیع‌های حاشیه‌ای معنی‌دار است. برای مدل‌بندی هم‌تغییرنگار میدان تصادفی به فرم (۱)، معمولا مدلهایی پارامتری برای توابع همبستگی ρ_S و ρ_T در نظر گرفته می‌شود. در این مثال، مدلهای نمایی

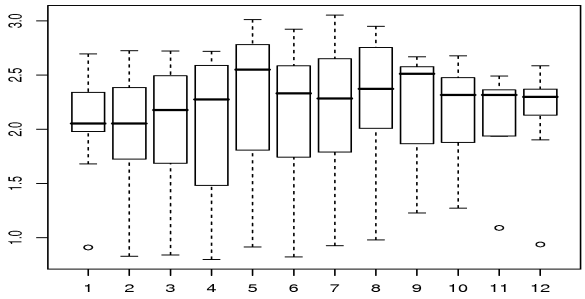
$$\begin{aligned} \rho_S(h_S;\theta_S) &= \exp\{-\frac{||h_S||}{\theta_S}\} & \theta_S > ۰ \\ \rho_T(h_T;\theta_T) &= \exp\{-\frac{|h_T|}{\theta_T}\} & \theta_T > ۰ \end{aligned}$$

که در آنها پارامترهای θ_S و θ_T بترتیب دامنه همبستگی فضایی و زمانی هستند، در نظر گرفته می‌شود. از آنجا که معمولاً با افزایش فاصله بین داده‌ها، دامنه وابستگی کاهش می‌یابد. لذا مقادیر کوچک همبستگی فضایی شانس وقوع بیشتری دارند. بهمین منظور توزیع پیشین نمایی $Exp(\lambda_S)$ برای θ_S در نظر گرفته می‌شود. بطریق مشابه برای θ_T توزیع پیشین نمایی $Exp(\lambda_T)$ اختیار می‌شود. برای پیشگویی فضایی‌ـزمانی بیز تجربی، لازم است برآورد ابرپارامترهای λ_S و λ_T تعیین شوند. برای این منظور ابتدا همبستگی‌نگار تجربی در تمام تاخیرهای نمونه‌ای ماه tام، یعنی $h_{S_t}(۱),\cdots,h_{S_t}(k)$ بصورت

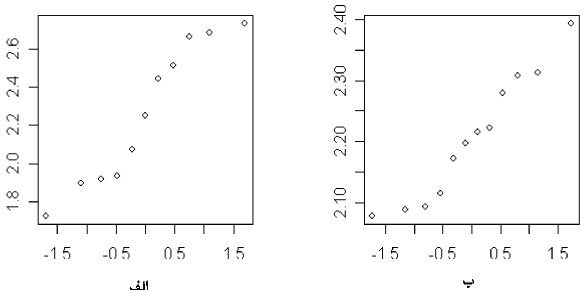
$$\hat{\rho}_t(h_S) = \frac{۱}{|N(h_S)|\sigma^۲(h_S,t)}[\sum_{N(h_S)} z(s_i,t)\times z(s_j,t) - |N(h_S)|M^۲(h_S,t)]$$
$$t = ۱,\cdots,۱۲$$

[Downloaded from jss.irstat.ir on 2026-09-21]

[DOR: 20.1001.1.17358183.1386.1.1.12.9]



شکل ۴: نمودار جعبه‌ای غلظت CO در ماههای مختلف



شکل ۵: نمودار $Q-Q$ برای بررسی نرمال بودن غلظت CO در ماهها و ایستگاهها

[Downloaded from jss.irstat.ir on 2026-09-21]

[DOR: 20.1001.1.17358183.1386.1.1.12.9]

محاسبه می‌شوند، که در آن $N(h_S)$ مجموعه زوج نقاط متمایز به فاصله h_S، $M(h_S,t)$ میانگین و $\sigma(h_S,t)$ انحراف معیار مقادیر متغیر در این نقاط می‌باشند. سپس برآورد کمترین توانهای دوم موزون $\hat{\theta}_{S_t}(wls)$ با کمینه کردن

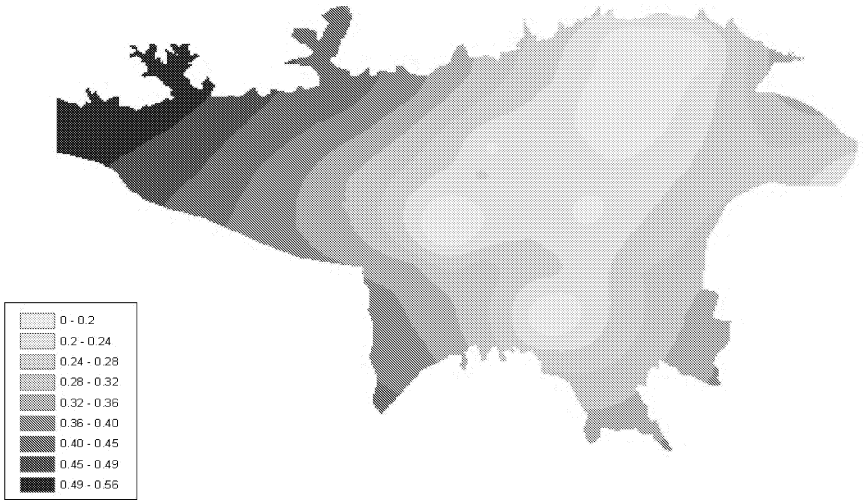
$$\sum_{i=1}^{k} \frac{[\hat{\rho}_t(h_S(i)) - \rho_t(h_S(i);\theta_{S_t})]^2}{\rho_t(h_S(i);\theta_{S_t})}; \quad t = 1,\cdots,12$$

تعیین می‌شود (کرسی، ۱۹۹۳). با در نظر گرفتن $\hat{\theta}_{S_1}(wls),\cdots,\hat{\theta}_{S_{12}}(wls)$ بعنوان تحقق‌هایی از توزیع نمایی $Exp(\lambda_S)$، برآورد ابر پارامتر بصورت $\hat{\lambda}_S = \frac{1}{12}\sum_{t=1}^{12}\hat{\theta}_{S_t}(wls)$ اختیار می‌شود. بطریق مشابه ابر پارامتر توزیع نمایی $Exp(\lambda_T)$ نیز بصورت $\hat{\lambda}_T = \frac{1}{9}\sum_{i=1}^{9}\hat{\theta}_{T_i}(wls)$ قابل برآورد است. با جایگذاری برآورد ابرپارامترها در رابطه (۶)، توزیع پیشگوی بیز تجربی $f(z_0|z,\hat{\lambda_S},\hat{\lambda_T})$ تعیین می‌شود. سپس با تولید نمونه از این توزیع، پیشگوی بیز تجربی و واریانس پیشگویی با استفاده از روابط (۷) و (۸) محاسبه می‌شوند. برای ارزیابی این روش پیشگویی، پیشگوهای فضایی‌ـزمانی بیز تجربی برای هر یک از موقعیت‌ها و زمان‌های نمونه‌ای براساس سایر مشاهدات محاسبه گردیده و میانگین توان دوم خطای اعتبار سنجی متقابل برابر ۰/۹۴۷ بدست آمد. کوچک بودن این معیار نشانگر مناسب بودن روش پیشنهاد شده برای پیشگویی می‌باشد. اکنون با محاسبه پیشگوی فضایی‌ـزمانی بیز تجربی و انحراف معیار پیشگویی در موقعیتهای مختلف یک شبکه منظم محیط بر نقشه شهر تهران، رویه پیشگویی و انحراف معیار پیشگویی برای اسفند ماه سال ۱۳۸۳ در شکل‌های ۶ و ۷ رسم شده‌اند. همان طور که در شکل ۶ مشاهده می‌شود، بیشترین میزان غلظت CO مربوط به نواحی مرکز شهر تهران است که می‌تواند به دلیل ازدیاد تردد خودروها در این مناطق باشد. با توجه به شکل ۷، انحراف معیار پیشگویی‌ها در مرکز شهر تهران نسبت به مناطق مرزی کوچکترند. نظر به اینکه پیشگویی میزان آلودگی هوا در مناطق مرکزی شهر از حساسیت بیشتری برخوردارند، کوچک بودن مقادیر انحراف معیار دال بر دقت مناسب مقادیر پیشگوئی‌ها در این مناطق می‌باشد.

[Downloaded from jss.irstat.ir on 2026-09-21]

[DOR: 20.1001.1.17358183.1386.1.1.12.9]

شکل ۶: نقشه پیشگویی فضایی-زمانی بیز تجربی در ماه اسفند



شکل ۷: نقشه انحراف استاندارد پیشگویی در ماه اسفند

[Downloaded from jss.irstat.ir on 2026-09-21]

[DOR: 20.1001.1.17358183.1386.1.1.12.9]

۵ بحث و نتیجه گیری

با توجه به مسائل و مشکلاتی که پیشگویی فضایی‌ـزمانی به روشهای بسامدی، بیزی و بیز سلسله مراتبی با آنها مواجه است، در این مقاله روش بیز تجربی پیشنهاد گردید و با استفاده از یک مثال کاربردی، مناسب بودن روش نشان داده شد. هر چند در این مثال مدل‌های نمایی برای توابع همبستگی تفکیک‌پذیر اختیار شد، اما می‌توان مدلهای مختلف در نظر گرفت و با استفاده از معیار اعتبار سنجی متقابل یک مدل مناسب برای پیشگویی انتخاب کرد. علاوه بر این، لازم به ذکر است که نظریه ارائه شده را می‌توان بطریق مشابه برای مدلهای تفکیک ناپذیر توسعه داد.

تقدیر و تشکر

نویسندگان از اصلاحالت پیشنهادی داوران محترم مجله که موجب بهبود این مقاله گردید، کمال تشکر و قدردانی را دارند.

مراجع

Banerjee, S., Carlin, B., and Gelfand, A., (2004), *Hierarchical Modeling and Analysis for Spatial Data*, CRC Press, Chapman and Hall.

Berger, J. O., de Oliveira, and V. Sanso, B. (2001), Objective Bayesian Analysis of Spatially Correlated Data, *Journal of the American Statistical Association*, **96**, 1361-1374.

Cressie, N. (1993), *Statistics for Spatial Data*, Wiley, New York.

Lu, N., and Zimmerman, D. L., (2004), On Likelihood-Based Inference for a Separable Covariance Matrix, Technical Report **337**, Department of Statistics and Actuarial Science, University of Iowa.

[Downloaded from jss.irstat.ir on 2026-09-21]

[DOR: 20.1001.1.17358183.1386.1.1.12.9]

Mardia, K. V. and Goodall, C. R. (1993), Spatial-Temporal Analysis of Multivariate Environmental Monitoring Data. *In Multivariate Environmental Statistics*, 347-386, North-Holland, Amsterdam.

Sahu, S. K., Gelfand, A. E., and Holland, D. M., (2005), Spatio-Temporal Modeling of Fine Particulate Matter, *Journal of Agricultural, Biological and Environmental Statatistics*, **11**, 61-86.

Smith, R. L., (1996), Estimating Nonstatianary Spatial Correlations, Technical Report, Cambridge University, UK.

Wikle, C. K., Berliner, L. M., and Cressie, N., (1998), Hierarchical Bayesian Space-Time Models. *Environmental and Ecological Statistics*, **5**, 117-154.

Wikle, C. K., Milliff, R. F., Nychka, and D., Berliner, L. M., (2001), Spatiotemporal Hierarchical Bayesian Modeling. Tropical Ocean Surface Winds, *Journal of the American Statistical Association*, **96**, 382-397.

[Downloaded from jss.irstat.ir on 2026-09-21]

[DOR: 20.1001.1.17358183.1386.1.1.12.9]