مجله علوم آماری، بهار و تابستان ۱۳۹۹
جلد ۱۴، شماره ۱، ص ۲۳ – ۳۹
DOI: 10.29252/jss.14.1.23

بدترین تخصیص بیمه‌نامه‌های لایه‌ای برای ریسک‌های مستقل و هم‌توزیع نمایی

مسعود امیری و محی‌الدین ایزدی و بهاءالدین خالدی

گروه آمار، دانشگاه رازی

تاریخ دریافت: ۱۳۹۷/۰۲/۱۹ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۸/۰۵/۰۷

چکیده: در این مقاله، به بررسی بدترین تخصیص کسری‌پذیرها و حدها در بیمه‌نامه‌های لایه‌ای از منظر بیمه‌گر پرداخته می‌شود. اگر n ریسک مستقل و هم‌توزیع نمایی تحت پوشش بیمه‌نامه لایه‌ای قرار گیرند و مقدار حدها برابر باشند، نشان داده می‌شود بدترین تخصیص کسری‌پذیری از نگاه بیمه‌گر بردار $(d, ۰, \ldots, ۰)$ است.

واژه‌های کلیدی: بیشانیدن، بیمه‌نامه کسری‌پذیر، بیمه‌نامه محدود، تابع محدب–شور، ترتیب تصادفی.

۱ مقدمه

فرض کنید متغیر تصادفی نامنفی X نشان‌دهنده زیان پیش‌روی یک بیمه‌گذار باشد که ریسک نامیده می‌شود. معمولاً کل ریسک تحت پوشش بیمه قرار نمی‌گیرد. قراردادی که تنها بخشی از یک ریسک را تحت پوشش قرار می‌دهد، قراداد (یا بیمه‌نامه) لایه‌ای گفته می‌شود. حق بیمه این قراردادها به نسبت قراردادی که کل ریسک را پوشش می‌دهد کمتر است. همچنین، چون بخشی از این ریسک متوجه خود بیمه‌گذار است، بنابراین شخص برای کاهش احتمال بروز زیان، برخی از اقدامات پیشگیرانه را در نظر

آدرس الکترونیکی نویسنده مسئول مقاله: مسعود امیری، MasoudAmiri11@yahoo.com
کد موضوع‌بندی ریاضی (۲۰۱۰): 60E15، 62P05

خواهد گرفت. یک قرارداد لایه‌ای با پارامترهای d و ℓ براساس بازپرداخت به صورت

$$X(d,d+\ell] = \begin{cases} 0, & 0 < X \leq d, \\ X-d, & d < X \leq d+\ell, \\ \ell, & d+\ell < X. \end{cases}$$

تعریف می‌شود، که در آن $d \geq 0$ مقدار کسری‌پذیر و $\ell \geq 0$ مقدار حد نامیده می‌شود (وانگ ، ۲۰۰۰). در یک قرارداد لایه‌ای، مقدار زیان شرکت بیمه و بیمه‌گذار به ترتیب

$$X(d,d+\ell] = (X-d)_+ \wedge \ell$$
$$X - X(d,d+\ell] = X \wedge \ell + (X-d-\ell)_+$$

است، که در آن $x_+ = \max\{x, 0\}$ و $x \wedge \ell = \min\{x, \ell\}$. دو پوشش بیمه‌ای شناخته‌شده کسری‌پذیر و محدود حالت‌های خاصی از بیمه‌نامه‌های لایه‌ای هستند. اگر $d = 0$ بیمه‌نامه لایه‌ای تبدیل به بیمه‌نامه محدود با پارامتر حد ℓ و اگر $\ell = \infty$ بیمه‌نامه لایه‌ای تبدیل به بیمه‌نامه کسری‌پذیر با پارامتر d می‌شود. برای جزئیات بیشتر در مورد بیمه‌نامه‌های کسری‌پذیر و محدود به کلوگمن و همکاران (۲۰۰۴) مراجعه شود. خواص تصادفی و کاربردهای بیمه‌نامه‌های لایه‌ای در زمینه‌های مختلف بیم‌سنجی توسط بسیاری از پژوهشگران از جمله وانگ (۲۰۰۰)، گوارتز و دان (۱۹۹۸)، سانگ و همکاران (۲۰۱۱) و چیونگ و همکاران (۲۰۱۲) مورد مطالعه قرار گرفته است.

فرض کنید $X_1, \ldots, X_n$، زیان‌های تصادفی پیش‌روی یک بیمه‌گذار باشد. مقالات متعددی به بررسی کوچکترین، بزرگترین و مجموع ادعاها در یک دوره خاص برای تعیین حق بیمه (قیمت‌گذاری) پوشش‌های بیمه‌ای پرداخته‌اند که از جمله می‌توان به برمال‌زن و همکاران (۲۰۱۵، ۲۰۱۷) و برمال‌زن (۱۳۹۷، ۱۳۹۸) اشاره نمود. اکنون، فرض کنید کل زیان، $\sum_{i=1}^n X_i$، تحت پوشش یک بیمه‌نامه لایه‌ای به ترتیب با مقدار حد و کسری‌پذیری $\ell \geq 0$ و $d \geq 0$ و با حق بیمه مشخص P قرار گیرد. براساس این قرارداد، سهم شرکت بیمه $(\sum_{i=1}^n X_i - d)_+ \wedge \ell$ و مانده زیان، یعنی $\sum_{i=1}^n X_i - (\sum_{i=1}^n X_i - d)_+ \wedge \ell$، برعهده خود بیمه‌گذار است. معمولاً با همان حق بیمه مشخص شده، شرکت بیمه این امکان را به بیمه‌گذار می‌دهد که مقدارهای d و ℓ را بین n ریسک به طور دلخواه تقسیم کند. بنابراین، اگر برای $i = 1, \ldots, n$، d_i و ℓ_i به ترتیب مقدار کسری‌پذیر و حد تخصیص داده شده به ریسک X_i باشند، به گونه‌ای که $\sum_{i=1}^n d_i = d$ و $\sum_{i=1}^n \ell_i = \ell$،

آن‌گاه مقدار زیان شرکت بیمه $\sum_{i=1}^{n}(X_i-d_i)_+\wedge\ell_i$ و زیان بیمه‌گذار $\sum_{i=1}^{n}[X_i-(X_i-d_i)_+\wedge\ell_i]$ خواهد بود. اگر w ثروت بیمه‌گذار بعد از پرداخت حق بیمه مورد نیاز و حق بیمه مستقل از انتخاب $(d_1,\ldots,d_n)$ و $(\ell_1,\ldots,\ell_n)$ فرض شود، برای بیمه‌گذاران تعیین بردارهای بهینه $\boldsymbol{d}'$ و $\boldsymbol{\ell}'$ در مجموعه

$$s_n(d,\ell)=\{(d_1,\ldots,d_n),(\ell_1,\ldots,\ell_n)\mid\sum_{i=1}^{n}d_i=d,\sum_{i=1}^{n}\ell_i=\ell\}$$

به گونه‌ای که ثروت او بعد از پرداخت زیان، یعنی $w-\sum_{i=1}^{n}[X_i-(X_i-d_i)_+\wedge\ell_i]$، حداکثر شود، بسیار حائز اهمیت است. معیارهای بهینه‌سازی متعددی از قبیل به حداکثر رساندن مطلوبیت مورد انتظار، به حداقل رساندن واریانس، به حداقل رساندن احتمال ورشکستگی در مقالات برای حل چنین مسائل بهینه‌سازی پیشنهاد شده است. برای جزئیات بیشتر در مورد این معیارهای بهینه‌سازی، به ون هیرواردن و همکاران (۱۹۸۹) و دنوی و ورمندل (۱۹۹۸) مراجعه شود.

با استفاده از ترتیب‌های تصادفی و مفهوم بیشانیدن، چیونگ (۲۰۰۷)، هوا و چیونگ ($2008a$)، هوا و چیونگ ($2008b$)، ژانگ و همکاران (۲۰۰۹)، لو و منگ (۲۰۱۱)، زو و هو (۲۰۱۲)، هو و وانگ (۲۰۱۴)، فتحی‌منش و خالدی (۲۰۱۵) و فتحی‌منش و همکاران (۲۰۱۶) نتایج جالبی را برای حالت‌های خاص از بیمه‌نامه‌های لایه‌ای؛ یعنی بیمه‌نامه محدود $(d_i=0,i=1,\ldots,n)$ و بیمه‌نامه کسری‌پذیر $(\ell_i=\infty,i=1,\ldots,n)$ بدست آورده‌اند. مسئله تخصیص بهینه در بیمه‌نامه‌های لایه‌ای از منظر بیمه‌گذار اخیراً توسط امیری و همکاران (۲۰۱۸) بررسی شده است. برای هر تخصیص انتخابی توسط بیمه‌گذار، زیان حاصل از این ریسک‌ها برای بیمه‌گر متفاوت خواهد بود. بنابراین اطلاع بیمه‌گر از بدترین تخصیص، که تعیین آن هدف این مقاله است، مهم و ضروری است. تخصیص $(\boldsymbol{d}^*,\boldsymbol{\ell}^*)\in s_n(d,\ell)$ بدترین تخصیص از نظر شرکت بیمه است، اگر ثروت شرکت بعد از پرداخت زیان؛ یعنی $w_I+P-\sum_{i=1}^{n}(X_i-d_i)_+\wedge\ell_i$، به ازای آن به معنایی حداقل شود، که در آن w_I ثروت آغازین شرکت بیمه است. همان‌طور که قبلاً بیان شد، معیارهای بهینه‌سازی مختلفی توسط محققان معرفی شده است. یکی از پرکاربردترین معیارها، معیار حداقل کردن مطلوبیت مورد انتظار است که در این مقاله مورد استفاده قرار می‌گیرد. لذا، اگر $u(x)$ تابع مطلوبیت شرکت بیمه باشد، آن‌گاه مسئله بدترین تخصیص را می‌توان به صورت

$$\min_{(\boldsymbol{d},\boldsymbol{\ell})\in s_n(d,\ell)}E[u(w_I+P-\sum_{i=1}^{n}(X_i-d_i)_+\wedge\ell_i)],\qquad(1)$$

بیان نمود، که در آن u تابع مطلوبیت غیرنزولی است. لازم به ذکر است که این مسئله، هنگامی که تابع مطلوبیت مقعر و غیرنزولی است، توسط هوا و چیونگ (۲۰۰۸a) برای دو حالت خاص از بیمه‌نامه لایه‌ای؛ یعنی بیمه‌نامه کسری‌پذیر ($\ell_1 = \ldots = \ell_n = \infty$) و بیمه‌نامه محدود ($d_1 = \ldots = d_n = 0$) مورد بررسی قرار گرفته است. هر چند هوا و چیونگ (۲۰۰۸a) در ابتدای مقاله مسئله بدترین تخصیص را به گونه‌ای دیگر مطرح نموده‌اند، اما در ملاحظه ۳ اشاره کرده‌اند که مسئله بدترین تخصیص از نگاه شرکت بیمه همان حداقل کردن تابع مطلوبیت شرکت بیمه است. آن‌ها نشان داده‌اند اگر ترتیب نرخ خطر بین ریسک‌های مستقل برقرار باشد، در حالت بیمه‌نامه کسری‌پذیر؛ یعنی هنگامی که در بیمه‌نامه لایه‌ای $\ell_1 = \ldots = \ell_n = \infty$، آن‌گاه تخصیص کسری‌پذیر $(d, 0, \ldots, 0)$ بدترین تخصیص از نگاه شرکت بیمه است. در این مقاله نشان داده می‌شود که این نتیجه برای حالتی که $\ell_1 = \ldots = \ell_n = \ell' \leq \infty$، ریسک‌ها متغیرهای تصادفی مستقل هم‌توزیع نمایی و تابع مطلوبیت غیرنزولی باشد، نیز برقرار است. برای حل این مسئله از ترتیب‌های تصادفی و مفهوم بیشاندن استفاده می‌شود.

تعریف ۱: اگر برای هر بردار حقیقی $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ مقادیر مرتب شده با $x_{(1)} \leq \ldots \leq x_{(n)}$ نشان داده شود، آن‌گاه بردار $\mathbf{y} \in R^n$ تحت ترتیب بیشاندن بزرگتر از بردار $\mathbf{x} \in R^n$ گفته می‌شود ($\mathbf{x} \leq_m \mathbf{y}$ اگر برای هر $j = 1, \ldots, n-1$، $\sum_{i=1}^{j} x_{(i)} \geq \sum_{i=1}^{j} y_{(i)}$ و $\sum_{i=1}^{n} x_{(i)} = \sum_{i=1}^{n} y_{(i)}$).

تعریف ۲: تابع حقیقی مقدار ϕ تعریف شده روی مجموعه $A \subseteq R^n$ را شور-محدب (مقعر) گویند، اگر $\phi(\mathbf{x})(\geq) \leq \phi(\mathbf{y})$ برای هر $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in A$ که $\mathbf{x} \leq_m \mathbf{y}$.

برای جزئیات بیشتر درباره مفهوم بیشانیدن و توابع شور-محدب (مقعر) به مارشال و همکاران (۲۰۱۱) مراجعه شود. فرض کنید X و Y متغیرهای تصادفی به ترتیب با توابع توزیع F و G و توابع بقای $\bar{F}$ و $\bar{G}$ باشند.

تعریف ۳: متغیر تصادفی X کوچکتر از متغیر تصادفی Y در ترتیب تصادفی معمولی گفته می‌شود و با نماد $X \leq_{st} Y$ نشان داده می‌شود، هرگاه برای هر t، $\bar{F}(t) \leq \bar{G}(t)$. به طور معادل، $X \leq_{st} Y$ اگر و تنها اگر برای هر تابع غیرنزولی مانند g، $Eg(X) \leq Eg(Y)$، در صورتی که امید ریاضی‌ها موجود باشند.

برای جزئیات بیشتر درباره ترتیب‌های تصادفی به مولر و استویان (۲۰۰۲) و شیکد و شانتیکومار (۲۰۰۷) مراجعه شود. فرض کنید یک بیمه‌گذار در معرض n ریسک $X_1, \ldots, X_n$ باشد. زو و هو

(۲۰۱۲) نشان دادند اگر X_iها مستقل و هم‌توزیع باشند، آن‌گاه رابطه

$$\boldsymbol{d} \geq_m \boldsymbol{d}^* \Longrightarrow \sum_{i=1}^{n} \phi(X_i - d_i) \geq_{st} \sum_{i=1}^{n} \phi(X_i - d_i^*)$$

برقرار است، که در آن ϕ یک تابع محدب دلخواه است. فتحی‌منش و خالدی (۲۰۱۵) ثابت کردند که وقتی X_iها متغیرهای تصادفی تبادل‌پذیر با تابع چگالی توأم نزولی‌اند، رابطه

$$\boldsymbol{d} \geq_m \boldsymbol{d}^* \Longrightarrow \sum_{i=1}^{n} (X_i - d_i)_+ \geq_{st} \sum_{i=1}^{n} (X_i - d_i^*)_+ \tag{۲}$$

برقرار است. فتحی‌منش و همکاران (۲۰۱۶) نشان دادند اگر X_iها متغیرهای تصادفی تبادل‌پذیر با تابع چگالی توأم لگ-مقعر باشند، آن‌گاه

$$\boldsymbol{\ell} \geq_m \boldsymbol{\ell}^* \Longrightarrow \sum_{i=1}^{n} (X_i \wedge \ell_i) \leq_{st} \sum_{i=1}^{n} (X_i \wedge \ell_i^*). \tag{۳}$$

توزیع نمایی یکی از ساده‌ترین مدل‌ها برای ریسک‌های بیمه‌ای است که به طور گسترده در دفرونس و گربر (۱۹۸۸)، پنجر و ویلموت (۱۹۹۲)، چنگ و همکاران (۲۰۰۲)، برفکوف و دیکسون (۲۰۰۸) و جین و همکاران (۲۰۱۶) استفاده شده است. امیری و همکاران (۲۰۱۸) نشان دادند اگر $X_1, \ldots, X_n$ نمونه‌ای تصادفی از توزیع نمایی باشد، آن‌گاه

$$\boldsymbol{d} \geq_m \boldsymbol{d}^* \Longrightarrow \sum_{i=1}^{n} [X_i - (X_i - d_i)_+ \wedge \ell'] \leq_{st} \sum_{i=1}^{n} [X_i - (X_i - d_i^*)_+ \wedge \ell']$$
$$\boldsymbol{\ell} \geq_m \boldsymbol{\ell}^* \Longrightarrow \sum_{i=1}^{n} [X_i - (X_i - d')_+ \wedge \ell_i] \geq_{st} \sum_{i=1}^{n} [X_i - (X_i - d')_+ \wedge \ell_i^*].$$

نشان داده می‌شود اگر $X_1, \ldots, X_n$ نمونه‌ای تصادفی از توزیع نمایی باشد و $\ell_1 = \ldots = \ell_n = \ell'$،

آن‌گاه

$$\boldsymbol{d} \geq_m \boldsymbol{d}^* \Longrightarrow \sum_{i=1}^{n}[(X_i - d_i)_+ \wedge \ell_i] \geq_{st} \sum_{i=1}^{n}[(X_i - d_i^*)_+ \wedge \ell_i].$$

در واقع رابطه بالا تعمیمی از نتیجه (۲) است، هنگامی که ریسک‌ها متغیرهای تصادفی مستقل هم‌توزیع نمایی باشند. براساس این نتیجه، هر چه پراکندگی بردار تخصیص کسری‌پذیر (در حالتی که حدها یکسان هستند) بیشتر باشد، زیان بیمه‌گر به معنای ترتیب تصادفی بیشتر خواهد بود. بنابراین پاسخ حالتی از مسئله (۱) برای زیان‌های مستقل و هم‌توزیع نمایی با فرض برابری حدها، بردارهای

$$(d, 0, \ldots, 0) =_m \ldots =_m (0, \ldots, 0, d) \tag{۴}$$

است. با یک مثال نقض نشان داده می‌شود تعمیم (۳) به حالتی که $d_1 = \ldots = d_n = d'$؛ یعنی

$$\boldsymbol{\ell} \geq_m \boldsymbol{\ell}^* \Longrightarrow \sum_{i=1}^{n}[(X_i - d')_+ \wedge \ell_i] \leq_{st} \sum_{i=1}^{n}[(X_i - d')_+ \wedge \ell_i^*],$$

برقرار نیست.

۲ نتایج اصلی

لم ۱: فرض کنید X_1 و X_2 متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع نمایی با نرخ λ باشند. آن‌گاه برای $0 \leq d_1 \leq c$،

$$\bar{F}_{X_{d_1,c,\ell'}}(t) = \begin{cases} e^{-\lambda(c-d_1+t)} - e^{-\lambda(c+t)} + e^{-\lambda(d_1+t)} + t\lambda e^{-\lambda(c+t)}, & 0 \leq t < \ell', \\ (2\ell' - t)\lambda e^{-\lambda(c+t)} + e^{-\lambda(c+t)}, & \ell' \leq t < 2\ell', \\ 0, & 2\ell' \leq t. \end{cases}$$

برهان: می‌توان نشان داد برای $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+$،

$$x_{d_1,c,\ell'} = \begin{cases} 0, & x_1 \le d_1, x_2 \le c-d_1, \\ x_2-(c-d_1), & x_1 \le d_1, c-d_1 < x_2 \le c-d_1+\ell', \\ \ell', & x_1 \le d_1, c-d_1+\ell' < x_2, \\ x_1-d_1, & d_1 < x_1 \le d_1+\ell', x_2 \le c-d_1, \\ x_1+x_2-c, & d_1 < x_1 \le d_1+\ell', c-d_1 < x_2 \le c-d_1+\ell', \\ x_1-d_1+\ell', & d_1 < x_1 \le d_1+\ell', c-d_1+\ell' < x_2, \\ \ell', & d_1+\ell' < x_1, x_2 \le c-d_1, \\ x_2-(c-d_1)+\ell', & d_1+\ell' < x_1, c-d_1 < x_2 \le c-d_1+\ell', \\ 2\ell', & d_1+\ell' < x_1, c-d_1+\ell' < x_2. \end{cases}$$

برای محاسبه تابع بقای $X_{d_1,c,\ell'}$ می‌توان نوشت

$$\bar{F}_{X_{d_1,c,\ell'}}(t) = \int_0^\infty \int_0^\infty I(x_{d_1,c,\ell'} > t) f(x_1, x_2) dx_2 dx_1,$$

که در آن $I(\cdot)$ تابع نشانگر است. اگر $0 \le t < \ell'$، آن‌گاه

$$\begin{aligned} \bar{F}_{X_{d_1,c,\ell'}}(t) &= \int_0^{d_1} \int_{c-d_1+t}^{c-d_1+\ell'} \lambda^2 e^{-\lambda(x_1+x_2)} dx_2 dx_1 \\ &+ \int_0^{d_1} \int_{c-d_1+\ell'}^{\infty} \lambda^2 e^{-\lambda(x_1+x_2)} dx_2 dx_1 + \int_{d_1+t}^{d_1+\ell'} \int_0^{c-d_1} \lambda^2 e^{-\lambda(x_1+x_2)} dx_2 dx_1 \\ &+ \int_{d_1}^{d_1+t} \int_{c+t-x_1}^{c-d_1+\ell'} \lambda^2 e^{-\lambda(x_1+x_2)} dx_2 dx_1 + \int_{d_1+t}^{d_1+\ell'} \int_{c-d_1}^{c-d_1+\ell'} \lambda^2 e^{-\lambda(x_1+x_2)} dx_2 dx_1 \\ &+ \int_{d_1}^{d_1+\ell'} \int_{c-d_1+\ell'}^{\infty} \lambda^2 e^{-\lambda(x_1+x_2)} dx_2 dx_1 + \int_{d_1+\ell'}^{\infty} \int_0^{c-d_1} \lambda^2 e^{-\lambda(x_1+x_2)} dx_2 dx_1 \\ &+ \int_{d_1+\ell'}^{\infty} \int_{c-d_1}^{c-d_1+\ell'} \lambda^2 e^{-\lambda(x_1+x_2)} dx_2 dx_1 + \int_{d_1+\ell'}^{\infty} \int_{c-d_1+\ell'}^{\infty} \lambda^2 e^{-\lambda(x_1+x_2)} dx_2 dx_1 \end{aligned}$$

بنابراین،

$$
\begin{aligned}
&\bar{F}_{X_{d_1,c,\ell'}}(t) = \int_0^{d_1}\int_{c-d_1+t}^{\infty} \lambda^2 e^{-\lambda(x_1+x_2)}dx_2dx_1 \\
&+\int_{d_1+t}^{d_1+\ell'}\int_0^{c-d_1+\ell'} \lambda^2 e^{-\lambda(x_1+x_2)}dx_2dx_1 + \int_{d_1}^{d_1+t}\int_{c+t-x_1}^{c-d_1+\ell'} \lambda^2 e^{-\lambda(x_1+x_2)}dx_2dx_1 \\
&+\int_{d_1}^{d_1+\ell'}\int_{c-d_1+\ell'}^{\infty} \lambda^2 e^{-\lambda(x_1+x_2)}dx_2dx_1 + \int_{d_1+\ell'}^{\infty}\int_0^{\infty} \lambda^2 e^{-\lambda(x_1+x_2)}dx_2dx_1 \\
&= e^{-\lambda(c-d_1+t)} - e^{-\lambda(c+t)} + e^{-\lambda(d_1+t)} - e^{-\lambda(d_1+\ell')} \\
&-e^{-\lambda(c+t+\ell')} + e^{-\lambda(c+2\ell')} + t\lambda e^{-\lambda(c+t)} + e^{-\lambda(c+t+\ell')} \\
&-e^{-\lambda(c+\ell')} + e^{-\lambda(c+\ell')} - e^{-\lambda(c+2\ell')} + e^{-\lambda(d_1+\ell')} \\
&= e^{-\lambda(c-d_1+t)} - e^{-\lambda(c+t)} + e^{-\lambda(d_1+t)} + t\lambda e^{-\lambda(c+t)}
\end{aligned}
$$

اگر $\ell' \leq t < 2\ell'$، آن‌گاه

$$
\begin{aligned}
\bar{F}_{X_{d_1,c,\ell'}}(t) &= \int_{t+d_1-\ell'}^{d_1+\ell'}\int_{c+t-x_1}^{c-d_1+\ell'} \lambda^2 e^{-\lambda(x_1+x_2)}dx_2dx_1 \\
&+ \int_{t+d_1-\ell'}^{d_1+\ell'}\int_{c-d_1+\ell'}^{\infty} \lambda^2 e^{-\lambda(x_1+x_2)}dx_2dx_1 \\
&+ \int_{d_1+\ell'}^{\infty}\int_{t-\ell'+c-d_1}^{c-d_1+\ell'} \lambda^2 e^{-\lambda(x_1+x_2)}dx_2dx_1 \\
&+ \int_{d_1+\ell'}^{\infty}\int_{c-d_1+\ell'}^{\infty} \lambda^2 e^{-\lambda(x_1+x_2)}dx_2dx_1 \\
&= \int_{t+d_1-\ell'}^{d_1+\ell'}\int_{c+t-x_1}^{\infty} \lambda^2 e^{-\lambda(x_1+x_2)}dx_2dx_1 \\
&+ \int_{d_1+\ell'}^{\infty}\int_{t-\ell'+c-d_1}^{\infty} \lambda^2 e^{-\lambda(x_1+x_2)}dx_2dx_1 \\
&= (2\ell'-t)\lambda e^{-\lambda(c+t)} + e^{-\lambda(c+t)}.
\end{aligned}
$$

واضح است برای $t > 2\ell'$، $\bar{F}_{X_{d_1,c,\ell'}}(t) = 0$. بنابراین، اثبات کامل می‌شود.

لم ۲: فرض کنید X_1 و X_2 متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع نمایی با نرخ λ باشند. آن‌گاه

$$(d_1^*, c-d_1^*) \leq_m (d_1, c-d_1) \Longrightarrow X_{d_1^*,c,\ell'} \leq_{st} X_{d_1,c,\ell'}.$$

برهان: باید نشان داد که برای هر t، $\bar{F}_{X_{d_1,c,\ell'}}(t) \geq \bar{F}_{X_{d_1^*,c,\ell'}}(t)$. از لم ۱ به سادگی رابطه

$$\bar{F}_{X_{d_1,c,\ell'}}(t) - \bar{F}_{X_{d_1^*,c,\ell'}}(t) = \begin{cases} e^{-\lambda(c-d_1+t)} + e^{-\lambda(d_1+t)} & \\ -e^{-\lambda(c-d_1^*+t)} - e^{-\lambda(d_1^*+t)}, & 0 \leq t < \ell', \\ 0, & \ell' \leq t < 2\ell'. \end{cases}$$

بدست می‌آید. با استفاده از فرض $(d_1^*, c-d_1^*) \leq_m (d_1, c-d_1)$ و اینکه $g(x_1, x_2) = \sum_{i=1}^{2} e^{-\lambda x_i}$ تابعی شور-محدب است، نتیجه مطلوب بدست می‌آید.

قضیه ۱: فرض کنید $X_1, \ldots, X_n$ نمونه‌ای تصادفی از توزیع نمایی با نرخ λ باشد. آن‌گاه برای $\boldsymbol{d}, \boldsymbol{d}^* \in \mathbb{R}^{+n}$،

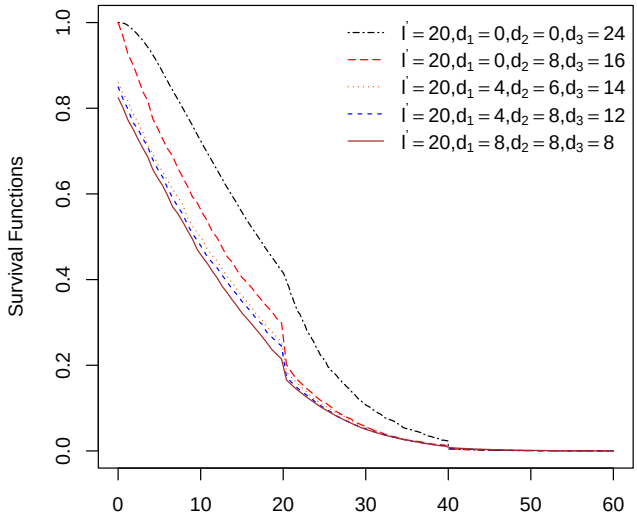
$$\boldsymbol{d} \geq_m \boldsymbol{d}^* \Longrightarrow \sum_{i=1}^{n} [(X_i - d_i)_+ \wedge \ell'] \geq_{st} \sum_{i=1}^{n} [(X_i - d_i^*)_+ \wedge \ell'].$$

برهان: با استفاده از لم $A \cdot 2 \cdot b \cdot 3$ در مارشال و همکاران (۲۰۱۱) کافی است نتیجه مورد نیاز برای حالتی که $\boldsymbol{d} = (d_1, \ldots, d_n)$، $\boldsymbol{d}^* = (d_1^*, \ldots, d_n)$ و $(d_1, d_2) \geq_m (d_1^*, d_2^*)$ ثابت شود. بدون از دست دادن کلیت مساله فرض کنید $d_1 + d_2 = c$ و $0 \leq d_1 \leq d_1^* \leq \frac{c}{2}$. بنابراین می‌توان $\boldsymbol{d}$ و $\boldsymbol{d}^*$ را به صورت $(d_1, c-d_1, d_3, \ldots, d_n)$ و $(d_1^*, c-d_1^*, d_3, \ldots, d_n)$ بازنویسی کرد. از لم ۲ نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} &[(X_1 - d_1)_+ \wedge \ell'] + [(X_2 - (c-d_1))_+ \wedge \ell'] \\ &\geq_{st} [(X_1 - d_1^*)_+ \wedge \ell'] + [(X_2 - (c-d_1^*))_+ \wedge \ell']. \end{aligned}$$

اکنون، نتیجه مورد نظر از قضیه $A \cdot 3 \cdot 1$ در شیکد و شانتیکومار (۲۰۰۷) حاصل می‌شود.

مثال ۱: فرض کنید X_1، X_2 و X_3 متغیرهای تصادفی نمایی با نرخ $\lambda = 0/1$ باشند. در شکل ۱، نمودار



شکل ۱: توابع بقای ریسک $X_{d_۱,d_۲,d_۳,\ell'}$ برای پنج تخصیص مختلف از کسری‌پذیرها و تخصیص حدهای یکسان برای متغیرهای تصادفی نمایی با نرخ $\lambda = ۰/۱$.

تابع بقای ریسک

$$X_{d_۱,d_۲,d_۳,\ell'} = [(X_۱ - d_۱)_+ \wedge \ell'] + [(X_۲ - d_۲)_+ \wedge \ell'] + [(X_۳ - d_۳)_+ \wedge \ell'],$$

برای پنج تخصیص کسری‌پذیر

$$(۸,۸,۸) \leq_m (۴,۸,۱۲) \leq_m (۴,۶,۱۴) \leq_m (۰,۸,۱۶) \leq_m (۰,۰,۲۴)$$

و $\ell' = ۲۰$ رسم شده است که نتیجه قضیه ۱ را تایید می‌کند.

چون $(d_۱,\ldots,d_n) \leq_m (\sum_{i=۱}^n d_i, ۰,\ldots,۰)$، بنابر قضیه ۱، اگر حدها یکسان باشند آن‌گاه $(\sum_{i=۱}^n d_i, ۰,\ldots,۰)$ متوسط مطلوبیت ثروت شرکت بیمه را حداقل می‌کند، بنابراین بدترین تخصیص است. دو ترتیب تصادفی نرخ خطر و نسبت درستنمایی ترتیب‌های قوی‌تر از ترتیب تصادفی معمولی هستند. فرض کنید X و Y متغیرهای تصادفی به ترتیب با توابع توزیع F و G، توابع بقای $\overline{F}$ و $\overline{G}$

و توابع چگالی f و g باشند. متغیر تصادفی X در ترتیب تصادفی نرخ خطر کوچکتر از متغیر تصادفی Y گفته می‌شود و با نماد $X \leq_{hr} Y$ نشان داده می‌شود، هرگاه $\frac{\overline{G}(x)}{\overline{F}(x)}$ نسبت به x صعودی باشد. به طور معادل، $X \leq_{hr} Y$ اگر و تنها اگر $\frac{1-F(G^{-1}(1-u))}{u}$ نسبت به $u \in (0,1)$ صعودی باشد که در آن $G^{-1}(u) = \sup\{x; G(x) \leq u\}$ (شیکد و شانتیکومار ، ۲۰۰۷). متغیر تصادفی X در ترتیب تصادفی نسبت درستنمایی کوچکتر از Y گفته می‌شود و با نماد $X \leq_{lr} Y$ نشان داده می‌شود، هرگاه $\frac{g(x)}{f(x)}$ نسبت به x صعودی باشد. رابطه ترتیب‌های تصادفی معمولی، نرخ خطر و نسبت درستنمایی به صورت

$$X \leq_{lr} Y \Longrightarrow X \leq_{hr} Y \Longrightarrow X \leq_{st} Y,$$

است. برای جزییات بیشتر در مورد ترتیب‌های تصادفی، به شیکد و شانتیکومار (۲۰۰۷) مراجعه شود.

مثال ۲: فرض کنید X_1 و X_2 ریسک‌های مستقل و هم‌توزیع نمایی با نرخ خطر یکسان ۰/۱ باشند. در قضیه ۱، فرض کنید $\ell' = 8$ و $\boldsymbol{d} = (0,16) \leq_m \boldsymbol{d}^* = (8,8)$ و H و H^* به ترتیب توابع توزیع

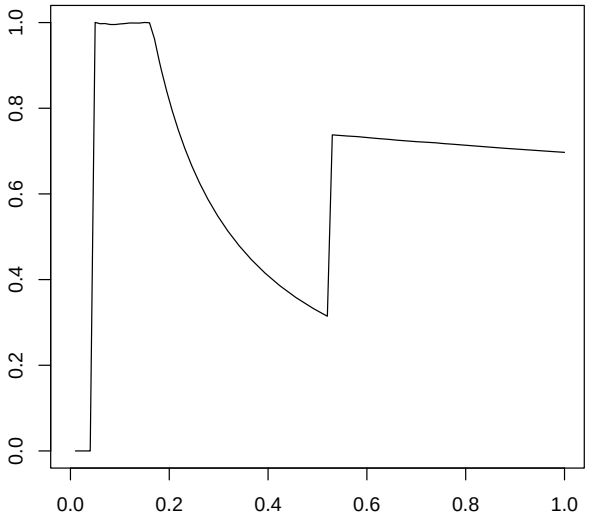
$$(X_1 - d_1)_+ \wedge \ell' + (X_2 - d_2)_+ \wedge \ell'$$
$$(X_1 - d_1^*)_+ \wedge \ell' + (X_2 - d_2^*)_+ \wedge \ell'$$

باشند. در شکل ۲، تابع $\frac{1-H^*(H^{-1}(1-u))}{u}$ رسم شده است. با توجه به این شکل، به وضوح مشخص است که ترتیب نرخ خطر برقرار نیست. بنابراین قضیه ۱ برای ترتیب تصادفی نرخ خطر و در نتیجه ترتیب تصادفی نسبت درستنمایی برقرار نیست.

فتحی‌منش و همکاران (۲۰۱۶) نشان دادند اگر X_iها متغیرهای تصادفی تبادل‌پذیر با تابع چگالی توأم لگ-مقعر باشند، آن‌گاه برای $d' = 0$،

$$\boldsymbol{\ell} \geq_m \boldsymbol{\ell}^* \Longrightarrow \sum_{i=1}^{n}[(X_i - d')_+ \wedge \ell_i] \leq_{st} \sum_{i=1}^{n}[(X_i - d')_+ \wedge \ell_i^*]. \qquad (5)$$

با توجه به این نتیجه و تعریف ترتیب بیشاندن، می‌توان نتیجه گرفت که اگر X_iها مستقل و هم‌توزیع نمایی باشند و $d' = 0$، آن‌گاه بدترین تخصیص حدها بردار $(\ell/n, \ldots, \ell/n)$ است. اکنون این سوال مطرح می‌شود که اگر X_iها مستقل و هم‌توزیع نمایی باشند، آیا نتیجه بالا برای حالتی که $d' \neq 0$ نیز برقرار است.



شکل ۲: نمودار تابع $\frac{(۱-H^*(H^{-۱}(۹-u)))}{u}$ مربوط به مثال ۲.

در زیر، با یک مثال نقض نشان داده می‌شود این مطلب همواره درست نیست.

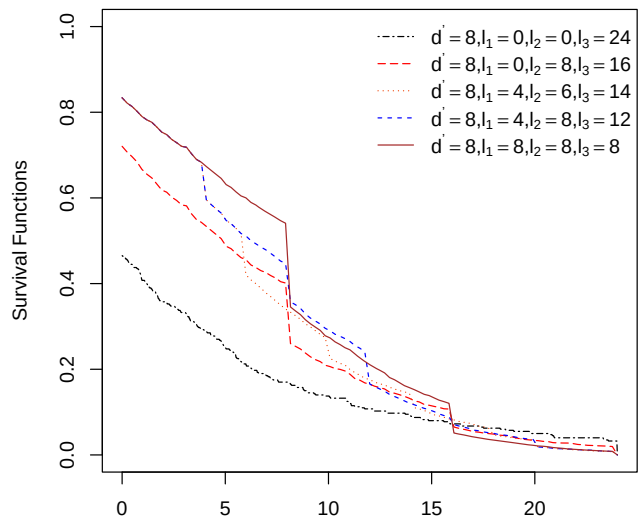
مثال ۳: فرض کنید $X_۱$، $X_۲$ و $X_۳$ متغیرهای تصادفی مستقل نمایی با نرخ $\lambda = ۰/۱$ باشند. در شکل ۳، نمودار تابع بقای

$$X_{d',\ell_۱,\ell_۲,\ell_۳} = [(X_۱ - d')_+ \wedge \ell_۱] + [(X_۲ - d')_+ \wedge \ell_۲] + [(X_۳ - d')_+ \wedge \ell_۳],$$

برای پنج تخصیص حدود

$$(۸,۸,۸) \leq_m (۴,۸,۱۲) \leq_m (۴,۶,۱۴) \leq_m (۰,۸,۱۶) \leq_m (۰,۰,۲۴),$$

هنگامی که $d' = ۸$، رسم شده است. همانطور که از شکل مشاهده می‌شود، در این حالت خاص رابطه (۵) برقرار نیست و این یعنی اگر $d' \neq ۰$، $(\ell/n,\ldots,\ell/n)$ همواره بدترین تخصیص حدها نیست. متغیر تصادفی X از نظر ترتیب زیان-بس کوچکتر از متغیر تصادفی Y گفته می‌شود و با نماد $X \leq_{sl} Y$



شکل ۳: توابع بقای ریسک $X_{d',\ell_1,\ell_2,\ell_3}$ برای پنج تخصیص مختلف از حدها و تخصیص کسری‌پذیرهای یکسان برای متغیرهای تصادفی نمایی با نرخ $\lambda = 0/1$.

نشان داده می‌شود، هرگاه برای هر $d \in \mathbb{R}^+$، $E(X-d)_+ \leq E(Y-d)_+$. چون ترتیب تصادفی معمولی ترتیب زیان-بس را نتیجه می‌دهد (شیکد و شانتیکومار، ۲۰۰۷)، بنابراین نتیجه قضیه ۱ برای ترتیب زیان-بس نیز برقرار است.

فرض کنید $X_1, \ldots, X_n$ متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع نمایی با نرخ λ باشند. آن‌گاه برای $\boldsymbol{d}, \boldsymbol{d}^* \in \mathbb{R}^{+n}$،

$$\boldsymbol{d} \geq_m \boldsymbol{d}^* \Longrightarrow \sum_{i=1}^{n}[(X_i - d_i)_+ \wedge \ell'] \geq_{sl} \sum_{i=1}^{n}[(X_i - d_i^*)_+ \wedge \ell'].$$

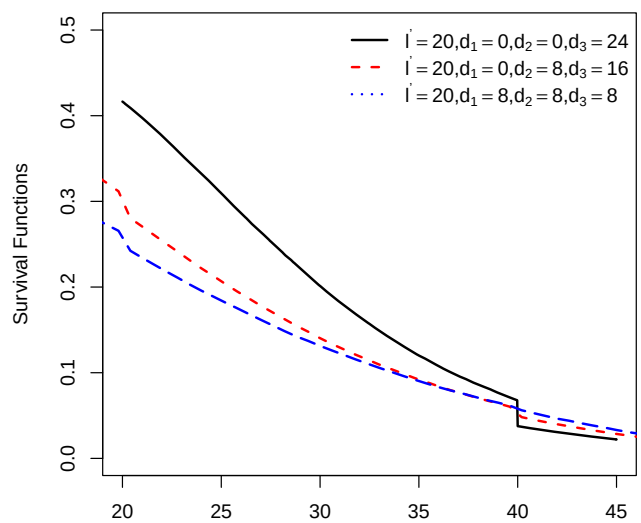
با توجه به رابطه (۴) و اینکه برای هر بردار $(d_1, \ldots, d_n)$ که $\sum_{i=1}^{n} d_i = d$، آن‌گاه

$$(d_1, \ldots, d_n) \leq_m (d, 0, \ldots, 0),$$

نتیجه قضیه ۱ بیان می‌کند که زیان حاصل از تخصیص‌های کسری‌پذیر

$$(d, \circ, \ldots, \circ) =_m (\circ, d, \circ, \ldots, \circ) =_m \ldots =_m (\circ, \circ, \ldots, \circ, d)$$

دارای بیشترین مقدار است که مستلزم دارا بودن بیشترین حق بیمه است. بنابراین، شرکت بیمه در صورتی این تخصیص‌ها را می‌پذیرد که حق بیمه معادل با آن، که بیشترین مقدار ممکن است را اعمال نماید. در پایان، این سوال می‌تواند مطرح شود که آیا نتیجه قضیه ۱ برای ریسک وابسته برقرار است؟ در زیر، با یک مثال نقض نشان داده می‌شود که در حالت کلی برای ریسک‌های وابسته ممکن است این‌گونه نباشد.



شکل ۴: توابع بقای ریسک $X_{d_1,d_2,d_3,\ell'}$ برای سه تخصیص مختلف از کسری‌پذیرها و تخصیص حدهای یکسان برای ریسک‌های نمایی وابسته.

مثال ۴: ریسک‌های X_1، X_2 و X_3 را در نظر بگیرید که دارای تابع توزیع توام

$$F(x_1, x_2, x_3) = [(1 - e^{-0.1x_1})^{-\theta} + (1 - e^{-0.1x_2})^{-\theta} + (1 - e^{-0.1x_3})^{-\theta} - 2]^{\frac{-1}{\theta}},$$
$$x_1, x_2, x_3 > 0$$

باشند. در شکل ۴، تابع بقای $X_{d_1,d_2,d_3,\ell'} = \sum_{i=1}^{3}(X_i - d_i)_+ \wedge \ell'$ با در نظر گرفتن $\theta = 2$، برای سه تخصیص کسری‌پذیر $(0,0,24) \leq_m (0,8,16) \leq_m (8,8,8)$ و $\ell' = 20$ رسم شده است. با توجه به شکل، واضح است نتیجه قضیه ۱ برای متغیرهای وابسته X_1، X_2 و X_3 برقرار نیست.

تقدیر و تشکر

نویسندگان از داوران و ویراستار محترم مجله که با پیشنهادات ارزنده خود باعث بهبود مقاله شدند، کمال تشکر و قدردانی را دارند.

مراجع

برمال‌زن، ق. (۱۳۹۷)، مقایسه تصادفی مجموع مقادیر خسارت‌ها در دو سبد بیمه ناهمگن، مجله علوم آماری ایران، **۱۲**، ۳۹۵-۴۱۲.

برمال‌زن، ق. (۱۳۹۸)، مقایسه تصادفی کوچکترین مقادیر خسارت در دو سبد بیمه ناهمگن با خسارت‌های وایبل، مجله علوم آماری ایران، **۱۳**، ۵۷-۷۵.

Amiri, M., Izadi, M. and Khaledi, B. E. (2019), Optimal Allocation of Policy Layers for Exponential Risks, *Journal of The Iranian Statistical Society,* **18**, 1-16.

Barmalzan, G., Payandeh Najafabadi, A.T. and Balakrishnan, N. (2015), Stochastic Comparison of Aggregate Claim Amounts Between Two Heterogenous Portfolios and its Applications, *Insurance: Mathematics and Economics,* **61**, 235-241.

Barmalzan, G., Najafabadi, A. T. P. and Balakrishnan, N. (2017), Ordering Properties of the Smallest and Largest Claim Amounts in a General Scale Model, *Scandinavian Actuarial Journal.* **2017**, 105-124.

Borovkov, K. A. and Dickson, D. C. (2008), On the Ruin Time Distribution for a Sparre Andersen Process with Exponential Claim Sizes, *Insurance: Mathematics and Economics,* **42**, 1104-1108.

Cheng, Y., Tang, Q. and Yang, H. (2002), Approximations for Moments of Deficit at Ruin with Exponential and Subexponential Claims, *Statistics and Probability Letters.,* **59**, 367-378.

Cheung, K. C. (2007), Optimal Allocation of Policy Limits and Deductibles, *Insurance: Mathematics and Economics,* **41**, 382-391.

Cheung, K. C., Liu, F. and Yam, S. C. P. (2012), Average Value-at-Risk Minimizing Reinsurance Under Wang's Premium Principle with Constraints, *ASTIN Bulletin,* **42**, 575-600.

Dufresne, F. and Gerber, H. U. (1988), The Probability and Severity of Ruin for Combinations of Exponential Claim Amount Distributions and Their Translations, *Insurance: Mathematics and Economics,* **7**, 75-80.

Denuit, M. and Vermandele, C. (1998), Optimal Reinsurance and Stop Loss Order, *Insurance: Mathematics and Economics,* **22**, 229-233.

Fathi Manesh, S. and Khaledi, B. E. (2015), Allocations of Policy Limits and Ordering Relations for Aggregate Remaining Claims, *Insurance: Mathematics and Economics,* **65**, 9-14.

Fathi Manesh, S., Khaledi, B. E. and Dhaene, J. (2016), Optimal Allocation of Policy Deductibles for Exchangeable Risks, *Insurance: Mathematics and Economics,* **71**, 87-92.

Goovaerts, M. and Dhaene, J. (1998), On the Characterization of Wang's Class of Premium Principles, *In: Transactions of the 26th International Congress of Actuaries, vol,* **4**, pp. 121-134.

Hu, S. and Wang, R. (2014), Stochastic Comparisons and Optimal Allocation for Policy Limits and Deductibles, *Communication in Statistics-Theory and Methods,* **43**, 151-164.

Hua, L. and Cheung, K. C. (2008a), Stochastic Orders of Scalar Products with Applications, *Insurance: Mathematics and Economics,* **42**, 865-872.

Hua, L. and Cheung, K. C. (2008b), Worst Allocations of Policy Limits and Deductibles, *Insurance: Mathematics and Economics,* **43**, 93-98.

Jin, C., Li, S. and Wu, X. (2016), On the Occupation Times in a Delayed Sparre Andersen Risk Model with Exponential Claims, *Insurance: Mathematics and Economics,* **71**, 304- 316.

Klugman, S., Panjer, H. and Willmot, G. (2004), *Loss Models: From Data to Decisions, second ed,* John Wiley and Sons, New Jersey.

Lu, Z. and Meng, L. (2011), Stochastic Comparisons for Allocations of Policy Limits and Deductibles with Applications, *Insurance: Mathematics and Economics,* **48**, 338-343.

Marshall, A. W., Olkin, I. and Arnold, B. C. (2011), *Inequalities: Theory of Majorization and its Applications,* Springer, New York.

Muller, A. and Stoyan, D. (2002), *Comparison Methods for Stochastic Models and Risks,* John Wiley and Sons, New York.

Panjer, H. and Willmot, G. (1992), *Insurance Risk Models*, Society of Actuaries, Schaumburg, IL.

Shaked, M. and Shanthikumar, J. G. (2007), *Stochastic Orders*, Springer, New York.

Sung, K. C. J., Yam, S. C. P., Yung, S. P. and Zhou, J. H. (2011), Behavioral Optimal Insurance, *Insurance: Mathematics and Economics,* **49**, 418-428.

Van Heerwaarden, A. E., Kaas, R. and Goovaerts, M. J. (1989), Optimal Reinsurance in Relation to Ordering of Risks, *Insurance: Mathematics and Economics,* **8**, 11-17.

Wang, S. (1996), Premium Calculation by Transforming the Layer Premium Density, *ASTIN Bulletin,* **26**, 71-92.

Wang, S. S. (2000), A Class of Distortion Operators for Pricing Financial and Insurance Risks, *Journal of Risk and Insurance,* **67**, 15-36.

Xu, M. and Hu, T. (2012), Stochastic Comparisons of Capital Allocations with Applications, *Insurance: Mathematics and Economics,* **50**, 293-298.

Zhuang, W., Chen, Z. and Hu, T. (2009), Optimal Allocation of Policy Limits and Deductibles under Distortion Risk Measures, *Insurance: Mathematics and Economics,* **44**, 409-414.