مجله علوم آماری، بهار و تابستان ۱۳۹۹
جلد ۱۴، شماره ۱، ص ۲۵۱ – ۲۷۱
DOI: 10.29252/jss.14.1.251

برآورد E-بیزی پارامتر قابلیت اعتماد در توزیع رایلی وارون تحت نمونه‌گیری مجموعه رتبه‌دار

شهرام یعقوب زاده شهرستانی
گروه آمار، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران
تاریخ دریافت: ۱۳۹۷/۱۲/۲۴ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۸/۱۰/۰۸

چکیده: در این مقاله، برآورد E-بیزی پارامتر قابلیت اعتماد $P(Y < X < Z)$، وقتی که X، Y و Z متغیرهای تصادفی مستقل و دارای توزیع رایلی وارون با پارامترهای متفاوت هستند، بر اساس روش نمونه‌گیری مجموعه رتبه‌دار به دست آورده می‌شود. با استفاده از روش شبیه‌سازی مونت‌کارلو و با محاسبه میانگین قدر مطلق خطا و کارایی نسبی، این برآورد با برآورد متناظر آن در روش نمونه‌گیری تصادفی ساده مقایسه می‌شود. همچنین در هر روش نمونه‌گیری، برآورد E-بیزی پارامتر R با برآورد ماکسیمم درستنمایی آن مقایسه می‌شود. در انتها نیز از سه مجموعه داده واقعی برای تحلیل روش‌های برآورد استفاده می‌شود.
واژه‌های کلیدی: نمونه‌گیری مجموعه رتبه‌دار، قابلیت اعتماد، توزیع رایلی وارون، برآورد E-بیزی.

۱ مقدمه

گاهی واحدهای برخی از جامعه‌های تحت مطالعه را می‌توان به آسانی و با صرف کم‌ترین هزینه رتبه‌بندی کرد. برای این کار اغلب از نظرات کارشناسی یا مقادیر متغیری مرتبط با خصوصیت مورد بررسی که اندازه‌گیری آن آسان و کم‌هزینه است، استفاده می‌شود. در واقع در شرایطی که اندازه‌گیری واحدهای جامعه مشکل یا پرهزینه باشد، اما بتوان واحدهای جامعه را رتبه‌بندی کرد، از روش نمونه‌گیری مجموعه رتبه‌دار استفاده می‌شود. روش نمونه‌گیری مجموعه رتبه‌دار اولین بار توسط مک‌اینتایر (۱۹۵۲) معرفی شد. در این روش، ابتدا به تصادف n^2 واحد نمونه از جامعه مورد بررسی انتخاب و سپس به طور تصادفی به

آدرس الکترونیکی نویسنده مسئول مقاله: شهرام یعقوب زاده شهرستانی، yagoubzade@gmail.com
کد موضوع‌بندی ریاضی (۲۰۱۰): 62N05، 62G05، 62C12، 62C10

n زیر نمونه به اندازه n تقسیم می‌شوند. واحدهای نمونه بر اساس روشی که نیاز به اندازه‌گیری دقیق نباشد، به ترتیب صعودی مرتب می‌شوند. واحد دارای کوچک‌ترین رتبه در اولین زیرنمونه، واحد دارای دومین رتبه در زیرنمونه دوم و به همین ترتیب واحد دارنده بزرگ‌ترین رتبه در زیرنمونه آخر انتخاب می‌شود. برای اطلاعات بیشتر به چن و همکاران (۲۰۰۴) مراجعه شود. بسیاری از پژوهش‌گران، برآورد برخی از پارامترهای مجهول در توزیع‌های آماری را بر اساس روش نمونه‌گیری مجموعه رتبه‌دار به دست آوردند، که برای مثال می‌توان به استوکس (۱۹۹۵) برای برآورد ماکسیمم درستنمایی پارامترهای خانواده توزیع‌های مکان-مقیاس، ال-صالح (۲۰۰۰) برای برآورد بیزی پارامترهای توزیع نمایی تحت تابع زیان توان دوم خطا، شیبو و موتلاک (۲۰۰۴) برای محاسبه بهترین برآورد نااریب خطی پارامترهای توزیع‌های نرمال، نمایی و گاما، سنگوپتا و موکهوتی (۲۰۰۶) برای برآورد نااریب قابلیت اعتماد تحت تابع توزیع تجربی، موتلاک و همکاران (۲۰۱۰) برای برآورد قابلیت اعتماد توزیع نمایی، زمان‌زاده و احمدی (۱۳۹۰) برای بازه اطمینان ناپارامتری با ضریب اطمینان دقیق برای چندک‌های جامعه بر اساس نمونه‌گیری مجموعه رتبه‌دار، علیزاده نوقابی و احمدی (۱۳۹۱) برای برآورد بیزی پارامتر توزیع پارتو تحت توابع زیان توان دوم خطا و لاینکس بر اساس نمونه‌گیری مجموعه رتبه‌دار، سادک و همکاران (۲۰۱۵) برای برآورد بیزی پارامتر توزیع نمایی تحت تابع زیان متقارن، مهدی‌زاده و زمان‌زاده (۲۰۱۶) برای برآورد قابلیت اعتماد به کمک تابع چگالی کرنل اشاره کرد. پارامتر تنش-مقاومت، توصیف کننده طول عمر یک سیستم است، وقتی که سیستم، مقاومت تصادفی X را در برابر تنش تصادفی Y به کار می‌برد. همچنین سیستم دچار اختلال شده و از کار می‌افتد، اگر و فقط اگر در هر زمان، تنش بتواند بر مقاومت سیستم غلبه کند یا به عبارت دیگر $X > Y$. مدل‌های تنش-مقاومت به صورت $P(X > Y)$ و $P(Y < X < Z)$ از مسائل مهم استنباط آماری هستند، که در حوزه‌های مختلفی از علم مانند علوم مهندسی، روانشناسی، ژنیتیک و آزمایش‌های بالینی کاربرد دارند. ایده اصلی قابلیت اعتماد توسط بیرنبئام (۱۹۵۶) معرفی شد و سپس توسط بیرنبئام و مک‌کارتی (۱۹۵۸) مورد بررسی بیشتری قرار گرفت. مقدار $R = P(Y < X < Z)$ حالتی از پارامتر قابلیت اعتماد است، که در آن متغیر مقاومت X از متغیر فشار Y بزرگ‌تر و از متفیر فشار Z کوچک‌تر هست. برای مثال، به منظور بررسی رابطه بین دیابت تحت بالینی شیمیایی و دیابت آشکار، میزان قند خون ناشتا برای ۱۴۵ نفر از افراد بزرگسال، که ۷۶ نفر آن‌ها دارای وضعیت طبیعی، ۳۶ نفر آن‌ها دارای دیابت تحت بالینی شیمیایی و ۳۳ نفر آن‌ها دارای دیابت آشکار تشخیص داده شده‌اند، اندازه‌گیری شده است. اگر Y، X و Z میزان قند خون ناشتای اندازه‌گیری شده به ترتیب برای این سه گروه از افراد در نظر گرفته شود، انتظار می‌رود که رابطه $Y < X < Z$ برقرار باشد. به همین‌دلیل، برآورد

R مهم است و توسط ریون و میلر (۱۹۷۹) مورد بررسی قرارگرفته است. به عنوان مثالی دیگر برای آن‌که یک زیردریایی در زیر آب شناور بماند، باید نیروی مقاومت آن (X) از میزان فشار آب در زیر آن (Y) بیشتر و از میزان فشار آب در بالای آن (Z) کمتر باشد.

تحقیقات گسترده و وسیعی در نظریه قابلیت اعتماد سیستم‌ها در باره برآورد $P(Y < X)$ برای توزیع‌های بیشماری در زمینه‌های مختلف انجام شده است، اما برآورد R زیاد مورد توجه قرار نگرفت. هر چند برخی از نویسندگان نیز به برآورد R پرداخته‌اند، که به بعضی از آن‌ها اشاره می‌شود. سینگ (۱۹۸۰) و دوتا و سریواستاوا (۱۹۸۶) برآورد ماکسیمم درستنمایی و برآورد نااریب با مینیمم واریانس R را به ترتیب برای توزیع‌های نرمال و نمایی به دست آوردند، وانگ و همکاران (۲۰۱۳) به دو روش تقریب نرمال استاندارد و جک‌نایف برای R استنباط آماری انجام دادند، گوانمینگ (۲۰۱۳) استنباط ناپارامتری را برای R انجام داد، دولوی و همکاران (۲۰۱۳) برآورد R را برای سیستم‌های آبشاری بررسی کردند و پاتوواری و همکاران (۲۰۱۶) استنباط آماری R را بر اساس روش شبیه‌سازی مونت‌کارلو انجام دادند. برای مشاهده مثال‌های بیشتر در باره R به کوتز و همکاران (۲۰۰۳) مراجعه شود. به دلیل اهمیت R در زمینه‌های مختلف علم بویژه پزشکی و مهندسی، این مقاله برآورد E-بیزی این پارامتر را مورد توجه قرار داده است.

یکی از روش‌های برآورد پارامترها در توزیع‌های آماری، روش برآورد بیز مبتنی بر توزیع‌های پیشین است. انتخاب معقول توزیع‌های پیشین روی فضای پارامتر، نقش مهمی در کاهش خطای برآوردگر پسین بیزی دارد. روش‌های بیز سلسله مراتبی لیندلی و اسمیت (۱۹۷۲) و هان (۱۹۷۷) و E-بیزی هان (۲۰۰۹) از این نوع برآوردها هستند. برخی از نویسندگان از روش‌های E-بیزی و بیز سلسله مراتبی در نظریه برآوردها استفاده کردند. برای مثال می‌توان به برآورد پارامتر نسبت توزیع دوجمله‌ای توسط هان (۲۰۱۱)، برآورد پارامتر و تابع قابلیت اعتماد توزیع بور نوع ۱۲، بر اساس نمونه‌های سانسور فزآینده نوع دوم توسط جاهین و اکاشا (۲۰۱۱)، برآورد پارامتر توزیع پاسکال توسط وانگ و همگاران (۲۰۱۲) و یوسف‌زاده (۲۰۱۷)، برآورد قابلیت اعتماد در توزیع نمایی توسط یعقوب‌زاده شهرستانی (۱۳۹۷) و برآوردهای E-بیز و بیز سلسله مراتبی پارامتر تنش-مقاومت در توزیع رایلی تحت تابع زیان لاینکس توسط شادرخ و یعقوب‌زاده شهرستانی (۱۳۹۸) اشاره کرد.

توزیع رایلی وارون از مهم‌ترین توزیع‌هایی است، که در نظریه قابلیت اعتماد و آزمون‌های مربوط به طول عمر کاربرد دارد (گوبینگ ، ۲۰۱۵). مطالعات متعددی در باره این توزیع، در زمینه‌های مختلف علم و فن‌آوری انجام شد (خان و کینگ ، ۲۰۱۵). برخی از خواص توزیع رایلی وارون توسط چاراف (۱۹۹۳)

بررسی شد. او با استفاده از روش‌های مختلف برآورد، برآوردگرهایی برای پارامتر مجهول توزیع رایلی وارون به دست آورد و سپس با استفاده از معیارهای اریبی و جذر میانگین مربع خطا، این برآوردگرها را به صورت عددی با هم مقایسه کرد. برخی از خواص دیگر این توزیع توسط موکارجی و میتیم (۱۹۹۶) بررسی شد. سلیمان و همکاران (۲۰۱۰) برآورد پارامتر این توزیع را بر اساس مقادیر رکوردها به دست آوردند. ساجید (۲۰۱۵) خواص و برآورد بیز توزیع‌های آمیخته توزیع رایلی وارون را به دست آورد. گوبینگ (۲۰۱۵) برآورد بیز پارامتر توزیع رایلی وارون را تحت توابع زیان مختلف به دست آورد. در این مقاله، هدف برآورد پارامتر قابلیت اعتماد R بر اساس روش نمونه‌گیری مجموعه رتبه‌دار است، وقتی‌که X و Y و Z متغیرهای تصادفی مستقل و دارای توزیع رایلی وارون با پارامترهای مختلف هستند. تابع چگالی احتمال و تابع توزیع، توزیع رایلی وارون با پارامتر θ به ترتیب به صورت‌های

$$f(x,\theta) = \frac{۲\theta}{x^۳} e^{-\frac{\theta}{x^۲}}, \quad x > ۰, \theta > ۰,$$
$$F(x,\theta) = e^{-\frac{\theta}{x^۲}}, \quad x > ۰, \theta > ۰,$$

هستند. در بخش ۲ برآورد ماکسیمم درستنمایی و E-بیزی پارامتر R بر اساس توزیع رایلی وارون به دو روش نمونه‌گیری تصادفی ساده و روش نمونه‌گیری مجموعه رتبه‌دار، تحت تابع زیان توان دوم خطا یعنی $L(\theta,\hat{\theta}) = (\theta-\hat{\theta})^۲$ به دست آورده می‌شود. در بخش ۳ برآورد E-بیزی R تحت هر دو روش نمونه‌گیری با هم و با برآورد ماکسیمم درستنمایی متناظر آن در هر روش نمونه‌گیری، با استفاده از شبیه‌سازی مونت‌کارلو و سه مجموعه داده واقعی مقایسه می‌شوند. بخش ۴ به نتایج مقاله اختصاص داده شده است.

۲ برآورد R

برآوردگرهای ماکسیمم درستنمایی و E-بیزی پارامتر R تحت تابع زیان توان دوم خطا به روش‌های نمونه‌گیری تصادفی ساده و مجموعه رتبه‌دار به‌دست آورده می‌شوند. از نمادهای $\pi_{SRS}(\theta_۱,\theta_۲,\theta_۳|data)$ و $\pi_{RSS}(\theta_۱,\theta_۲,\theta_۳|data)$ به ترتیب برای نمایش توزیع پسین $\theta_۱$، $\theta_۲$ و $\theta_۳$ به شرط داده‌ها تحت نمونه‌گیری تصادفی ساده و نمونه‌گیری مجموعه رتبه‌دار و برآورد ماکسیمم درستنمایی R تحت روش‌های نمونه‌گیری تصادفی ساده و مجموعه رتبه‌دار به ترتیب با نمادهای $\hat{R}_{ML}^{SRS}$ و $\hat{R}_{ML}^{RSS}$ و برآورد E-بیزی آن بر اساس روش‌های نمونه‌گیری تصادفی ساده و مجموعه رتبه‌دار نیز به ترتیب با نمادهای $\hat{R}_{EB}^{SRS}$ و $\hat{R}_{EB}^{RSS}$ نشان داده می‌شوند.

۱.۲ برآورد E-بیزی R بر اساس نمونه‌گیری تصادفی ساده

فرض کنید X_{n_1}، ...، X_1 و Y_{n_2}، ...، Y_1 و Z_{n_3}، ...، Z_1 نمونه‌های تصادفی مستقل از هم و به ترتیب دارای توزیع رایلی وارون با پارامترهای θ_1، θ_2 و θ_3 هستند. همچنین فرض می‌شود θ_1، θ_2 و θ_3 پارامترهای تصادفی مستقل از هم و دارای توزیع پیشین به صورت

$$\pi(\theta_i|a_i,b_i)=\frac{b_i^{a_i}}{\Gamma(a_i)}\theta_i^{a_i-1}e^{-b_i\theta_i},\quad i=1,2,3, \tag{1}$$

هستند. با توجه به هان (۲۰۰۹) در رابطه (۱)، a_i و b_i طوری در نظر گرفته می‌شود، که $\pi(\theta_i|a_i,b_i)$ کاهشی باشد. بنابر این با توجه به رابطه

$$\frac{d\pi(\theta_i|a_i,b_i)}{d\theta_i}=\frac{b_i^{a_i}\theta_i^{a_i-2}e^{-b_i\theta_i}}{\Gamma(a_i)}((a_i-1)-b_i\theta_i),$$

باید روابط $b_i>0$ و $0<a_i\leq 1$ برقرار باشند. برگر (۱۹۸۵) نشان داد، که بزرگ بودن b_i باعث کاهش کارایی برآورد بیز θ_i می‌شود. بنابر این ابرپارامتر b_i باید از بالا کراندار شده و به صورت $0<b_i<c_i$ در نظر گرفته شود، که در آن c_i عددی ثابت است. با در نظر گرفتن توزیع پیشین یکنواخت پیوسته در بازه $(0,c_i)$ و با فرض استقلال b_iها $(i=1,2,3)$، توزیع پیشین توام به صورت

$$\pi(b_1,b_2,b_3)=\frac{1}{b_1b_2b_3},\quad 0<b_i<c_i,\quad i=1,2,3,$$

است. همچنین با توجه به شرط $0<a_i\leq 1$ و با در نظر گرفتن $a_i=1$، رابطه (۱) به صورت

$$\pi(\theta_i|b_i)=b_ie^{-b_i\theta_i},\quad b_i>0,\theta_i>0, \tag{2}$$

تبدیل می‌شود. با توجه به تابع درستنمایی مشاهدات و رابطه (۲)، توزیع پسین توام به صورت

$$\pi_{SRS}(\theta_1,\theta_2,\theta_3|data)=\prod_{i=1}^{3}\frac{(b_i+\sum_{j=1}^{n_i}C_{ij})^{n_i+1}\theta_i^{n_i}}{\Gamma(n_i+1)}e^{-\theta_i(b_i+\sum_{j=1}^{n_i}C_{ij})}, \tag{3}$$

به دست می‌آید، که در آن

$$C_{ij} = \begin{cases} \frac{۱}{x_j^۲} & i = ۱ \\ \frac{۱}{y_j^۲} & i = ۲ \\ \frac{۱}{z_j^۲} & i = ۳. \end{cases}$$

از طرفی

$$\begin{aligned} R &= \int_۰^\infty \int_۰^z \int_۰^x \frac{۸\theta_۱\theta_۲\theta_۳}{x^۳y^۳z^۳} e^{-(\frac{\theta_۱}{x^۲}+\frac{\theta_۲}{y^۲}+\frac{\theta_۳}{z^۲})} dydxdz \\ &= \frac{\theta_۱\theta_۲}{(\theta_۱+\theta_۲)(\theta_۱+\theta_۲+\theta_۳)}. \end{aligned}$$

بنابر این برآورد ماکسیمم درستنمایی پارامتر R به صورت

$$\hat{R}_{ML}^{SRS} = \frac{\hat{\theta}_۱\hat{\theta}_۲}{(\hat{\theta}_۱+\hat{\theta}_۲)(\hat{\theta}_۱+\hat{\theta}_۲+\hat{\theta}_۳)},$$

به دست می‌آید، که در آن

$$\hat{\theta}_۱ = n_۱(\sum_{i=۱}^{n_۱} \frac{۱}{X_i^۲})^{-۱}, \quad \hat{\theta}_۲ = n_۲(\sum_{j=۱}^{n_۲} \frac{۱}{Y_j^۲})^{-۱}, \quad \hat{\theta}_۳ = n_۳(\sum_{r=۱}^{n_۳} \frac{۱}{Z_r^۲})^{-۱}.$$

برآورد بیز پارامتر R تحت تابع زیان توان دوم خطا به صورت

$$\hat{R}_B^{SRS} = \int_۰^\infty \int_۰^\infty \int_۰^\infty (\frac{\theta_۱\theta_۲}{(\theta_۱+\theta_۲)(\theta_۱+\theta_۲+\theta_۳)}) \pi_{SRS}(\theta_۱,\theta_۲,\theta_۳|data) d\theta_۱ d\theta_۲ d\theta_۳,$$

خواهد شد. با توجه به $\int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \pi_{SRS}(\theta_1,\theta_2,\theta_3|data)d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3 = 1$، داریم

$$\begin{aligned}\hat{R}_B^{SRS} &= \frac{\int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty (\frac{\theta_1\theta_2}{(\theta_1+\theta_2)(\theta_1+\theta_2+\theta_3)})\pi_{SRS}(\theta_1,\theta_2,\theta_3|data)d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3}{\int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \pi_{SRS}(\theta_1,\theta_2,\theta_3|data)d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3} \\ &= \frac{\int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty (\frac{\theta_1\theta_2}{(\theta_1+\theta_2)(\theta_1+\theta_2+\theta_3)}) \prod_{i=1}^3 \theta_i^{n_i} e^{-(b_i+\sum_{j=1}^{n_i} C_{ij})} d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3}{\int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \prod_{i=1}^3 \theta_i^{n_i} e^{-(b_i+\sum_{j=1}^{n_i} C_{ij})} d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3},\end{aligned}$$

که با روش تقریب لیندلی (۱۹۸۰) به دست آورده می‌شود. به طور کلی جواب نسبت انتگرال‌های به شکل $E(u(\lambda)|data) = \frac{\int u(\lambda)e^{Q(\lambda)}d\lambda}{\int e^{Q(\lambda)}d\lambda}$، که در آن $Q(\lambda) = \ell(\lambda) + \rho(\lambda)$، $\ell(\lambda)$ تابع درستنمایی مشاهدات و $\rho(\lambda)$ لگاریتم توزیع پیشین λ هستند، به روش تقریب لیندلی به صورت

$$\begin{aligned}E(u(\lambda)|data) &= [u + \frac{1}{2}\sum_i \sum_j (u_{ij} + 2u_i\rho_j)\sigma_{ij} \\ &+ \frac{1}{2}\sum_i \sum_j \sum_k \sum_l L_{ijk}\sigma_{ij}\sigma_{kl}u_l]_{\hat{\lambda}}, \qquad (4)\end{aligned}$$

است، که در آن $i,j,k,\ell = 1,\cdots,m$، $\lambda = (\lambda_1,\cdots,\lambda_m)$، $u = u(\lambda)$، $u_i = \frac{\partial u(\lambda)}{\partial \lambda_i}$، $u_{ij} = \frac{\partial^2 u(\lambda)}{\partial\lambda_i\partial\lambda_j}$، $L_{ijk} = \frac{\partial^2 u(\lambda)}{\partial\lambda_i\partial\lambda_j\partial\lambda_k}$، $\rho_j = \frac{\partial\rho(\lambda)}{\partial\lambda_j}$ و σ_{ij} درایه (i,j) ام وارون ماتریس $\{-L_{ij}\}$ هستند لیندلی (۱۹۸۰). بنابر این برای $\lambda = (\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$ رابطه (۴) به صورت

$$\begin{aligned}E(u(\lambda)|data) &= u + \sum_{i=1}^3 a_i u_i + a_4 + a_5 + \frac{1}{2}[A\sum_{i=1}^3 u_i\sigma_{1i} + B\sum_{i=1}^3 u_i\sigma_{2i} \\ &+ C\sum_{i=1}^3 u_i\sigma_{3i}]_{(\hat{\lambda_1},\hat{\lambda_2},\hat{\lambda_3})},\end{aligned}$$

تبدیل می‌شود، که در آن $\hat{\lambda}_۱$، $\hat{\lambda}_۲$ و $\hat{\lambda}_۳$ به ترتیب برآوردهای ماکسیمم درستنمایی $\lambda_۱$، $\lambda_۲$ و $\lambda_۳$ و

$$
\begin{aligned}
u &= \frac{\theta_۱\theta_۳}{(\theta_۱+\theta_۳)(\theta_۱+\theta_۲+\theta_۳)},\\
a_i &= \sum_{i=۱}^{۳}\rho_j\sigma_{ij}, i=۱,۲,۳, \quad a_۴ = u_{۱۲}\sigma_{۱۲}+u_{۱۳}\sigma_{۱۳}+u_{۲۳}\sigma_{۲۳},\\
a_۵ &= \frac{۱}{۲}\sum_{i=۱}^{۳}u_{ii}\sigma_{ii},\\
A &= \sum_{i=۱}^{۳}\sigma_{ii}L_{ii۱}+۲(\sigma_{۱۲}L_{۱۲۱}+\sigma_{۱۳}L_{۱۳۱}+\sigma_{۲۳}L_{۲۳۱}),\\
B &= \sum_{i=۱}^{۳}\sigma_{ii}L_{ii۲}+۲(\sigma_{۱۲}L_{۱۲۲}+\sigma_{۱۳}L_{۱۳۲}+\sigma_{۲۳}L_{۲۳۲}),\\
C &= \sum_{i=۱}^{۳}\sigma_{ii}L_{ii۳}+۲(\sigma_{۱۲}L_{۱۲۳}+\sigma_{۱۳}L_{۱۳۳}+\sigma_{۲۳}L_{۲۳۳}),\\
D &= L_{۱۱}L_{۲۳}^{۲}-L_{۱۱}L_{۲۲}L_{۳۳}+L_{۱۳}^{۲}L_{۲۲},\\
\sigma_{۱۱} &= \frac{L_{۲۲}L_{۳۳}-L_{۲۳}^{۲}}{D}, \sigma_{۱۲}=\sigma_{۲۱}=\frac{L_{۱۱}L_{۱۳}}{D}, \sigma_{۱۳}=\sigma_{۳۱}=\frac{L_{۱۳}L_{۲۲}}{D},\\
\sigma_{۲۲} &= \frac{L_{۱۱}L_{۳۳}-L_{۱۳}^{۲}}{D}, \sigma_{۲۳}=\sigma_{۳۲}=\frac{-L_{۱۱}L_{۲۳}}{D}, \sigma_{۳۳}=\frac{L_{۱۱}L_{۲۲}}{D},
\end{aligned}
$$

هستند. بنابراین برای $(\lambda_۱,\lambda_۲,\lambda_۳)=(\theta_۱,\theta_۲,\theta_۳)$

$$
\begin{aligned}
&L_{۲۲۱}=L_{۱۲۲}=L_{۳۳۱}=L_{۱۳۳}=L_{۲۳۲}=L_{۳۲۲}=۰,\\
&\sigma_{ii}=\frac{\theta_i^{۲}}{n_i}, L_{ii}=-\frac{n_i}{\theta_i^{۲}}, L_{iii}=\frac{۲n_i}{\theta_i^{۳}}, \quad i=۱,۲,۳,\\
&\sigma_{ij}=L_{ij}=۰, \quad i\neq j,
\end{aligned}
$$

به دست می‌آیند. در نتیجه به ازای $i=۱,۲,۳$، $a_i=-\frac{b_i\theta_i^{۲}}{n_i}$ و همچنین روابط

$$
A=\sigma_{۱۱}L_{۱۱۱}, \quad B=\sigma_{۲۲}L_{۲۲۲}, \quad C=\sigma_{۳۳}L_{۳۳۳}, \quad a_۴=۰, \quad a_۵=-\sum_{i=۱}^{۳}\frac{b_i\theta_i^{۲}u_{ii}}{۲n_i},
$$

به دست آورده می‌شوند. با توجه به روابط

$$\hat{u} = \frac{\hat{\theta}_۱\hat{\theta}_۳}{(\hat{\theta}_۱+\hat{\theta}_۳)(\hat{\theta}_۱+\hat{\theta}_۲+\hat{\theta}_۳)},$$
$$\hat{u}_۱ = \frac{\hat{\theta}_۳(\hat{\theta}_۱+\hat{\theta}_۳)(\hat{\theta}_۱+\hat{\theta}_۲+\hat{\theta}_۳)-\hat{\theta}_۱(۲\hat{\theta}_۱+۲\hat{\theta}_۲+\hat{\theta}_۳)}{[(\hat{\theta}_۱+\hat{\theta}_۳)(\hat{\theta}_۱+\hat{\theta}_۲+\hat{\theta}_۳)]^۲},$$
$$\hat{u}_{۱۱} = \frac{۲\hat{\theta}_۳(۲\hat{\theta}_۱+۲\hat{\theta}_۲+\hat{\theta}_۳)^۲-(\hat{\theta}_۱+\hat{\theta}_۳)(\hat{\theta}_۱+\hat{\theta}_۲+\hat{\theta}_۳)(۳\hat{\theta}_۱+۲\hat{\theta}_۲+\hat{\theta}_۳)}{[(\hat{\theta}_۱+\hat{\theta}_۳)(\hat{\theta}_۱+\hat{\theta}_۲+\hat{\theta}_۳)]^۳},$$
$$\hat{u}_۲ = \frac{\hat{\theta}_۱\hat{\theta}_۳(۲\hat{\theta}_۱+۲\hat{\theta}_۲+\hat{\theta}_۳)}{[(\hat{\theta}_۱+\hat{\theta}_۳)(\hat{\theta}_۱+\hat{\theta}_۲+\hat{\theta}_۳)]^۲},$$
$$\hat{u}_{۲۲} = \frac{۲\hat{\theta}_۱\hat{\theta}_۳[(\hat{\theta}_۱+\hat{\theta}_۳)(\hat{\theta}_۱+\hat{\theta}_۲+\hat{\theta}_۳)-(۲\hat{\theta}_۱+۲\hat{\theta}_۲+\hat{\theta}_۳)^۲]}{[(\hat{\theta}_۱+\hat{\theta}_۳)(\hat{\theta}_۱+\hat{\theta}_۲+\hat{\theta}_۳)]^۳},$$
$$\hat{u}_۳ = \frac{\hat{\theta}_۱}{(\hat{\theta}_۱+\hat{\theta}_۲+\hat{\theta}_۳)^۲}, \hat{u}_{۳۳} = -\frac{۲\hat{\theta}_۱}{(\hat{\theta}_۱+\hat{\theta}_۲+\hat{\theta}_۳)^۳},$$

که در آن $\hat{\theta}_۱$، $\hat{\theta}_۲$ و $\hat{\theta}_۳$ برآوردهای ماکسیمم درستنمایی $\theta_۱$، $\theta_۲$ و $\theta_۳$ هستند، برآورد بیز پارامتر R به صورت

$$\hat{R}_B^{SRS}(b_۱,b_۲,b_۳) = \hat{u} + \sum_{i=۱}^{۳}[\frac{\theta_i^۲}{n_i}(\frac{\hat{u}_{ii}}{۲} - b_i\hat{u}_i) + \frac{\hat{\theta}_i\hat{u}_i}{n_i}], \qquad (۵)$$

به دست می‌آید. در ادامه برآورد E-بیزی R به دست آورده می‌شود.

تعریف ۱: (هان ، ۲۰۰۹) اگر $b_۱$، $b_۲$ و $b_۳$ ابرپارامترهای توزیع θ و $\pi(b_۱,b_۲,b_۳)$ توزیع توام پیشین آن‌ها و $\hat{\theta}_B(b_۱,b_۲,b_۳)$ برآورد پارامتر بیز θ فرض شوند، آنگاه برآورد E-بیزی پارامتر θ به صورت

$$\hat{\theta}_{EB} = E_{\pi(b_۱,b_۲,b_۳)}[(\hat{\theta}_B(b_۱,b_۲,b_۳)] = \int_{\Lambda_۱}\int_{\Lambda_۲}\int_{\Lambda_۳}\hat{\theta}_B(b_۱,b_۲,b_۳)\pi(b_۱,b_۲,b_۳)db_۳db_۲db_۱,$$

تعریف می‌شود.

بنابر (۵)، برآورد E-بیزی پارامتر R عبارتست از

$$\begin{aligned}\hat{R}_{EB}^{SRS} &= \int_{۰}^{c_۱}\int_{۰}^{c_۲}\int_{۰}^{c_۳}\hat{R}_{B}^{SRS}(b_۱,b_۲,b_۳)\pi(b_۱,b_۲,b_۳)db_۳db_۲db_۱\\ &= \hat{u}+\sum_{i=۱}^{۳}[\frac{\theta_i^۲}{n_i}(\frac{\hat{u}_{ii}-c_i^۲\hat{u}_i}{۲})+\frac{\hat{\theta}_i\hat{u}_i}{n_i}],\end{aligned}$$

۲.۲ برآورد E-بیزی R بر اساس روش نمونه‌گیری مجموعه رتبه‌دار

فرض کنید $U_{n_۱}$، $\cdots$، $U_۱$ واحدهای نمونه‌ای بر اساس روش نمونه‌گیری مجموعه رتبه‌دار از توزیع رایلی وارون با پارامتر $\theta_۱$ باشد، آنگاه تابع چگالی iامین آماره ترتیبی به صورت

$$\begin{aligned}h(u_i) &= \frac{n_۱!}{(i-۱)!(n_۱-i)!}[F(u_i)]^{i-۱}[۱-F(u_i)]^{n_۱-i}f(u_i)\\ &= ۲i\binom{n_۱}{i}(\frac{\theta_۱}{u_i^۳})e^{-\frac{i\theta_۱}{u_i^۲}}(۱-e^{-\frac{\theta_۱}{u_i^۲}})^{n_۱-i},\end{aligned}$$

است. بنابر این، تابع درستنمایی به صورت

$$L(\theta_۱)=d_{n_۱,i}\prod_{i=۱}^{n_۱}(\frac{۲\theta_۱}{u_i^۳})e^{-\sum_{i=۱}^{n_۱}\frac{i}{u_i^۲}}(۱-e^{-\frac{\theta_۱}{u_i^۲}})^{n_۱-i},$$

به دست می‌آید، که در آن $d_{n_۱,i}=\prod_{i=۱}^{n_۱}i\binom{n_۱}{i}$. همچنین فرض کنید $V_{n_۲}$، $\cdots$، $V_۱$ و $W_{n_۳}$، $\cdots$، $W_۱$ واحدهای نمونه‌ای بر اساس روش نمونه‌گیری مجموعه رتبه‌دار به ترتیب از توزیع‌های رایلی وارون با پارمترهای $\theta_۲$ و $\theta_۳$ باشند، آنگاه تابع درستنمایی کل مشاهدات به صورت

$$\begin{aligned}L_{RSS}(\theta_۱,\theta_۲,\theta_۳) &= ۸d_{n_۱,i}d_{n_۲,j}d_{n_۳,r}\prod_{i=۱}^{n_۱}(\frac{۲\theta_۱}{u_i^۳})e^{-\theta_۱\sum_{i=۱}^{n_۱}\frac{i}{u_i^۲}}\prod_{j=۱}^{n_۲}(\frac{۲\theta_۲}{v_j^۳})e^{-\theta_۲\sum_{j=۱}^{n_۲}\frac{j}{v_j^۲}}\\ &\times \prod_{r=۱}^{n_۳}(\frac{۲\theta_۳}{w_r^۳})e^{-\theta_۳\sum_{r=۱}^{n_۳}\frac{r}{w_r^۲}}g(\theta_۱,\theta_۲,\theta_۳),\end{aligned}\qquad (۶)$$

به دست می‌آید، که در آن

$$g(\theta_۱,\theta_۲,\theta_۳)=\prod_{i=۱}^{n_۱}(۱-e^{-\frac{\theta_۱}{u_i^۲}})^{n_۱-i}\prod_{j=۱}^{n_۲}(۱-e^{-\frac{\theta_۲}{v_j^۲}})^{n_۲-j}\prod_{r=۱}^{n_۳}(۱-e^{-\frac{\theta_۳}{w_r^۲}})^{n_۳-r}.$$

با توجه به (۲) و (۶)، توزیع پسین توام $(\theta_۱,\theta_۲,\theta_۳)$ تحت روش نمونه‌گیری مجموعه رتبه‌دار به صورت

$$\pi_{RSS}(\theta_۱,\theta_۲,\theta_۳|data)=\frac{\prod_{i=۱}^{۳}\theta_i^{n_i}e^{-\theta_i(b_i+C_i)}g(\theta_۱,\theta_۲,\theta_۳)}{\int_۰^\infty\int_۰^\infty\int_۰^\infty\prod_{i=۱}^{۳}\theta_i^{n_i}e^{-\theta_i(b_i+C_i)}g(\theta_۱,\theta_۲,\theta_۳)d\theta_۱d\theta_۲d\theta_۳},$$

به دست آورده می‌شود، که در آن

$$C_i=\begin{cases}\sum_{i=۱}^{n_۱}\frac{i}{u_i^۲} & i=۱\\ \sum_{j=۱}^{n_۲}\frac{j}{v_j^۲} & i=۲\\ \sum_{r=۱}^{n_۳}\frac{r}{w_r^۲} & i=۳.\end{cases}$$

برآورد ماکسیمم درستنمایی پارامتر R با روش نمونه‌گیری مجموعه رتبه‌دار به صورت

$$\hat{R}_{ML}^{RSS}=\frac{\tilde{\theta}_۱\tilde{\theta}_۲}{(\tilde{\theta}_۱+\tilde{\theta}_۲)(\tilde{\theta}_۱+\tilde{\theta}_۲+\tilde{\theta}_۳)},$$

به دست می‌آید، که در آن $\tilde{\theta}_۱$، $\tilde{\theta}_۲$ و $\tilde{\theta}_۳$ برآورد ماکسیمم درستنمایی به ترتیب $\theta_۱$، $\theta_۲$ و $\theta_۳$ هستند و از روابط

$$\frac{n_۱}{\theta_۱}+\sum_{i=۱}^{n_۱}\frac{i}{u_i^۲}-\sum_{i=۱}^{n_۱}\frac{n_۱-i}{u_i^۲}e^{-\frac{\theta_۱}{u_i^۲}}\log(۱-e^{-\frac{\theta_۱}{u_i^۲}})=۰,$$
$$\frac{n_۲}{\theta_۲}+\sum_{j=۱}^{n_۲}\frac{j}{v_j^۲}-\sum_{j=۱}^{n_۲}\frac{n_۲-j}{v_j^۲}e^{-\frac{\theta_۲}{v_j^۲}}\log(۱-e^{-\frac{\theta_۲}{v_j^۲}})=۰,$$
$$\frac{n_۳}{\theta_۳}+\sum_{r=۱}^{n_۳}\frac{r}{w_r^۲}-\sum_{r=۱}^{n_۳}\frac{n_۳-r}{w_r^۲}e^{-\frac{\theta_۳}{w_j^۲}}\log(۱-e^{-\frac{\theta_۳}{w_r^۲}})=۰,$$

به دست آورده می‌شوند، که دارای نمایش بسته نیستند و باید با روش‌های عددی مانند روش نیوتن-رافسون به دست آورده شوند. برآورد بیز پارامتر R تحت تابع زیان توان دوم خطا به صورت

$$\hat{R}_B^{RSS}(b_1,b_2,b_3)=\frac{\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty R\prod_{i=1}^3\theta_i^{n_i}e^{-\theta_i(b_i+C_i)}g(\theta_1,\theta_2,\theta_3)d\theta_1d\theta_2d\theta_3}{\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty\prod_{i=1}^3\theta_i^{n_i}e^{-\theta_i(b_i+C_i)}g(\theta_1,\theta_2,\theta_3)d\theta_1d\theta_2d\theta_3},$$

است، که مانند بخش ۱-۲، $\hat{R}_B^{RSS}(b_1,b_2,b_3)$ به روش تقریب لیندلی به دست آورده می‌شود. بنابراین با توجه به روابط

$$\hat{L}_{11}=-\frac{n_1}{\hat{\theta}_1^2}-\sum_{i=1}^{n_1}\frac{(n_1-i)e^{-\frac{\hat{\theta}_1}{u_i^2}}}{u_i^4(1-e^{-\frac{\hat{\theta}_1}{u_i^2}})^2},\hat{L}_{111}=\frac{2n_1}{\hat{\theta}_1^3}+\sum_{i=1}^{n_1}\frac{(n_1-i)(e^{-\frac{\hat{\theta}_1}{u_i^2}}+e^{-\frac{2\hat{\theta}_1}{u_i^2}})}{u_i^6(1-e^{-\frac{\hat{\theta}_1}{u_i^2}})^3},$$

$$\hat{L}_{22}=-\frac{n_2}{\hat{\theta}_2^2}-\sum_{j=1}^{n_2}\frac{(n_2-j)e^{-\frac{\hat{\theta}_2}{v_j^2}}}{v_j^4(1-e^{-\frac{\hat{\theta}_2}{v_j^2}})^2},\hat{L}_{222}=\frac{2n_2}{\hat{\theta}_2^3}+\sum_{j=1}^{n_2}\frac{(n_2-j)(e^{-\frac{\hat{\theta}_2}{v_j^2}}+e^{-\frac{2\hat{\theta}_2}{v_j^2}})}{v_j^6(1-e^{-\frac{\hat{\theta}_2}{v_j^2}})^3},$$

$$\hat{L}_{33}=-\frac{n_3}{\hat{\theta}_3^2}-\sum_{r=1}^{n_3}\frac{(n_3-r)e^{-\frac{\hat{\theta}_3}{w_r^2}}}{w_r^4(1-e^{-\frac{\hat{\theta}_3}{w_r^2}})^2},\hat{L}_{333}=\frac{2n_3}{\hat{\theta}_3^3}+\sum_{r=1}^{n_3}\frac{(n_3-r)(e^{-\frac{\hat{\theta}_3}{w_r^2}}+e^{-\frac{2\hat{\theta}_3}{w_r^2}})}{w_r^6(1-e^{-\frac{\hat{\theta}_3}{w_r^2}})^3},$$

$$\hat{\sigma}_{ii}=-\frac{1}{\hat{L}_{ii}},\quad i=1,2,3$$

برآورد بیز پارامتر R تحت تابع زیان توان دوم خطا به صورت

$$\hat{R}_B^{RSS}(b_1,b_2,b_3)=\hat{u}+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^3\hat{\sigma}_{ii}(\hat{L}_{iii}\hat{u}_i\hat{\sigma}_{ii}+\hat{u}_{ii}-2b_i\hat{u}_i),$$

است، که برآورد E-بیزی آن با توجه به تعریف ۱ به صورت

$$\hat{R}_{EB}^{RSS}=\hat{u}+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^3\hat{\sigma}_{ii}(\hat{L}_{iii}\hat{u}_i\hat{\sigma}_{ii}+\hat{u}_{ii}-c_i^2\hat{u}_i),$$

به دست می‌آید.

۳ تحلیل داده‌ها

در این بخش با استفاده از شبیه‌سازی مونت‌کارلو و سه مجموعه داده واقعی، برآورد E-بیزی پارامتر R تحت روش‌های نمونه‌گیری تصادفی ساده و مجموعه رتبه‌دار با هم و همچنین برآورد E-بیزی پارامتر R با برآورد ماکسیمم درستنمایی آن در هر روش، مقایسه می‌شوند.

۱.۳ داده‌های شبیه‌سازی

در این بخش، ابتدا از توزیع رایلی وارون با پارامترهای $\theta_۱ = ۱۰$، $\theta_۲ = ۱۲$ و $\theta_۳ = ۳/۵$ نمونه‌هایی به حجم‌های متفاوت، به روش‌های تصادفی ساده و مجموعه رتبه‌دار تولید می‌شوند. سپس در مرحله دوم به کمک تابع توزیع چگالی پیشین (۲) و به کمک $b_i = -\frac{۱}{\theta_i}\log(۱-u)$ که u عدد تصادفی انتخاب شده از توزیع یکنواخت $(۰,۱)$ است، $b_۱$، $b_۲$ و $b_۳$ تولید می‌شوند. به کمک b_iهای تولید شده در مرحله دوم و با استفاده از تابع توزیع b_i ها یعنی $G(b_i) = \frac{b_i}{c_i}$، c_iها تولید شد و سپس برآورد E-بیزی R، تحت روش‌های نمونه‌گیری تصادفی ساده و مجموعه رتبه‌دار به دست آورده می‌شود. این مراحل ۲۰۰۰ بار تکرار شده و میانگین قدرمطلق اریبی برآوردگرها و کارایی نسبی برآورد E-بیزی R، تحت روش نمونه‌گیری مجموعه رتبه‌دار نسبت به روش نمونه‌گیری تصادفی ساده $(RE۱)$، کارایی نسبی برآورد E-بیزی R نسبت به برآورد ماکسیمم درستنمایی آن تحت روش نمونه‌گیری مجموعه رتبه‌دار $(RE۲)$ و کارایی نسبی برآورد E-بیزی R نسبت به برآورد ماکسیمم درستنمایی آن تحت روش نمونه‌گیری تصادفی ساده $(RE۳)$ به دست آورده شده و در جدول ۱ ارائه شده‌اند. با توجه به این جدول‌ها واضح است، که برآورد E-بیزی R نسبت به برآورد ماکسیمم آن در هر دو روش نمونه‌گیری دارای کارایی بیشتری است. اما درباره مقایسه برآورد E-بیزی R تحت روش نمونه‌گیری مجموعه رتبه‌دار با برآورد E-بیزی آن تحت روش نمونه‌گیری تصادفی ساده، نتایج شبیه‌سازی بیان‌کننده آن است، که

۱) برای ترکیب‌های با $(n_۱, n_۲, n_۳)$ با $n_۱$ و $n_۲$ ثابت، با افزایش $n_۳$ میانگین اریبی برآوردها کاهش و کارایی نسبی $\hat{R}_{EB}^{RSS}$ زیاد می‌شود. به ازای $n_۳$ مشخص و بزرگتر از آن مانند $(۱۰, ۱۰, n_۳ \geq ۲۰)$ و $(۲۰, ۲۰, n_۳ \geq ۹۰)$ در جدول ۱، اریبی $\hat{R}_{EB}^{RSS}$ کاهش و از اریبی $\hat{R}_{EB}^{SRS}$ کوچک‌تر شده و کارایی نسبی $\hat{R}_{EB}^{RSS}$ بزرگ‌تر از یک می‌شود.

۲) برای ترکیب‌های $(n_۱, n_۲, n_۳)$ که در آنها $n_۱ < n_۲ = n_۳$ و یا $n_۱ < n_۲ < n_۳$ است، با افزایش $n_۲$ و $n_۳$ کارایی $\hat{R}_{EB}^{RSS}$ زیاد می‌شود و به ازای ترکیبی مشخص و بعد از آن، اریبی $\hat{R}_{EB}^{RSS}$ کاهش

جدول ۱: میانگین قدرمطلق اریبی $\hat{R}_{EB}^{SRS}$ و $\hat{R}_{EB}^{RSS}$، و مقادیر RE۱، RE۲ و RE۳.

$(n_۱, n_۲, n_۳)$	اریبی $\hat{R}_{EB}^{SRS}$	اریبی $\hat{R}_{EB}^{RSS}$	RE۱	RE۲	RE۳
(۱۰،۱۰،۱۰)	۰/۰۱۹۲۴۴	۰/۰۲۰۹۲۹	۰/۸۲۵۴۱۳	۵/۹۹۴۷۱۴	۲/۱۹۳۷۰۵
(۲۰،۱۰،۱۰)	۰/۰۱۸۸۴۵	۰/۰۱۸۰۸۳	۱/۰۵۳۳۲۲	۳۵/۲۱۲۱۴	۳/۱۱۸۹۴۳
(۳۰،۱۰،۱۰)	۰/۰۱۸۱۶۶	۰/۰۱۶۹۱۸	۱/۲۰۹۹۲۶	۷۱/۳۳۰۳۹	۴/۲۲۳۸۳
(۴۰،۱۰،۱۰)	۰/۰۱۷۳۶۹	۰/۰۱۶۳۰۱	۱/۲۳۷۷۲۶	۱۶۵/۹۱۳۲	۶/۴۲۸۳۷۴
(۵۰،۱۰،۱۰)	۰/۰۱۷۲۲۶	۰/۰۱۶۱۲۷	۱/۳۳۸۴۳۷	۴۳۶/۹۷۷۲	۸/۶۹۸۷۳۷
(۱۰،۲۰،۱۰)	۰/۰۱۷۶۰۵	۰/۰۱۸۴۳۳	۰/۷۸۴۲۱۶	۲/۲۳۰۲۱۷	۱/۷۴۱۹۷۴
(۱۰،۳۰،۱۰)	۰/۰۱۶۹۹۰	۰/۰۱۶۹۰۲	۰/۷۵۶۷۰۵	۳/۷۵۴۹۵۸	۴/۶۷۳۹۷۸
(۱۰،۴۰،۱۰)	۰/۰۱۶۹۳۹	۰/۰۱۶۴۷۲	۰/۷۴۳۳۸۹	۴/۰۹۶۷۰۶	۵/۵۴۹۹۶۶
(۱۰،۱۰،۲۰)	۰/۰۱۹۲۱۴	۰/۰۲۱۶۶۶	۰/۸۴۴۹۶۵	۵/۶۷۹۷۶۴	۱/۳۰۵۲۳۱
(۱۰،۱۰،۳۰)	۰/۰۱۹۰۴۱	۰/۰۲۱۶۶۴	۰/۸۵۱۹۴۵	۸/۷۳۹۴۵۶	۲/۱۶۰۷۰۱
(۱۰،۱۰،۴۰)	۰/۰۱۸۵۸۷	۰/۰۲۱۳۵۴	۰/۸۶۶۰۸۶	۳۳/۹۵۹۱۲	۷/۰۸۹۹۹۱
(۲۰،۲۰،۲۰)	۰/۰۱۴۴۱۸	۰/۰۱۵۱۲۰	۰/۹۰۴۷۹۵	۹/۴۷۳۹۹۷	۶/۸۰۳۱۴۴
(۳۰،۲۰،۲۰)	۰/۰۱۳۴۷۶	۰/۰۱۳۸۷۴	۰/۹۲۵۰۵۵	۱۶/۸۳۷۰۶	۷/۹۵۷۳۶۸
(۴۰،۲۰،۲۰)	۰/۰۱۳۲۶۱	۰/۰۱۳۱۸۲	۰/۹۸۶۰۶۱	۳۹/۳۱۵۰۹	۸/۱۷۶۰۳۶
(۵۰،۲۰،۲۰)	۰/۰۱۲۹۷۲	۰/۰۱۲۴۸۴	۰/۹۹۵۷۷۵	۶۰/۴۲۰۸۲	۹/۸۹۵۳۳۲
(۶۰،۲۰،۲۰)	۰/۰۱۲۶۳۹	۰/۰۱۲۳۷۴	۰/۹۹۶۵۹۲	۱۲۱/۷۰۰۱	۱۰/۶۲۴۸۰۸
(۹۰،۲۰،۲۰)	۰/۰۱۲۲۲۲	۰/۰۱۱۷۸۵	۱/۰۰۸۹۹۳	۱۶۳/۹۲۷۲	۱۱/۱۲۴۷۸
(۱۰۰،۲۰،۲۰)	۰/۰۱۲۰۴۶	۰/۰۱۱۷۷۳	۱/۰۰۹۹۷۵	۲۸۹/۸۷۴۳	۱۳/۶۵۰۹۸
(۱۵۰،۲۰،۲۰)	۰/۰۱۱۸۷۲	۰/۰۱۱۲۶۳	۱/۰۲۳۲۶۰	۶۸۴/۲۸۱۵	۱۷/۷۵۱۲۷
(۲۰۰،۲۰،۲۰)	۰/۰۱۱۸۶۵	۰/۰۱۱۱۳۷	۱/۰۲۶۲۵۹	۱۸۶۳/۹۴۹	۱۹/۴۰۵۳۶
(۳۰،۳۰،۳۰)	۰/۰۱۱۶۷۲	۰/۰۱۲۱۷۲	۰/۹۱۸۱۴۶	۷/۶۸۶۲۰۵	۳/۹۳۳۳۴۷
(۵۰،۵۰،۵۰)	۰/۰۰۹۱۵۴	۰/۰۰۹۴۱۰	۰/۹۴۵۸۰۹	۱۸/۴۳۷۱۰	۵/۱۹۵۶۶۸
(۷۰،۷۰،۷۰)	۰/۰۰۷۷۳۱	۰/۰۰۷۸۵۶	۰/۹۶۳۴۱۲	۲۵/۵۸۴۸۶	۱۱/۷۲۸۷۸
(۲۰۰،۲۰۰،۲۰۰)	۰/۰۰۴۷۰۵	۰/۰۰۴۷۲۱	۰/۹۸۷۰۷۷	۳۸/۳۸۳۵۵	۲۱/۵۹۶۸۴
(۳۰،۲۰،۱۰)	۰/۰۱۴۳۵۸	۰/۰۱۳۴۱۸	۰/۹۳۶۸۰۴	۲۶/۰۹۹۲	۲/۷۵۵۴۵۵
(۴۰،۲۰،۱۰)	۰/۰۱۴۶۳۴	۰/۰۱۳۲۷۸	۱/۰۰۲۹۸۹	۵۸/۶۷۸۷۱	۳/۳۲۰۲۲۳
(۵۰،۲۰،۱۰)	۰/۰۱۳۸۴۹	۰/۰۱۲۴۴۹	۱/۰۲۳۷۹۰	۱۶۴/۰۵۶۴	۵/۴۰۰۲۸۵
(۶۰،۲۰،۱۰)	۰/۰۱۳۷۷۷	۰/۰۱۲۲۹۴	۱/۱۲۰۵۱۰	۲۰۳/۶۷۳۴	۷/۱۸۶۷۹۳
(۷۰،۲۰،۱۰)	۰/۰۱۳۷۷۳	۰/۰۱۲۲۴۹	۱/۱۳۲۹۹۲	۳۹۱/۱۶۱۵	۸/۵۲۲۵۶۴
(۸۰،۴۰،۱۰)	۰/۰۱۱۶۰۴	۰/۰۰۹۳۷۸	۱/۰۰۳۴۰۸	۷۴/۹۸۱۰۵	۱۰/۹۲۶۲۹
(۹۰،۹۰،۲۰)	۰/۰۰۸۰۷۹	۰/۰۰۷۰۲۲	۱/۰۳۵۰۵۶	۱۵/۲۹۶۷۳	۱/۹۰۱۱۳۷
(۲۰۰،۱۵۰،۱۰)	۰/۰۰۹۴۶۷	۰/۰۰۵۶۵۹	۱/۳۵۸۰۵۹	۲۹۴/۴۱۳۵	۲/۴۳۸۰۶۸
(۲۵۰،۲۰۰،۲۰۰)	۰/۰۰۶۱۸۱	۰/۰۰۴۸۳۰	۱/۰۰۳۷۶۳	۶۳/۹۳۹۳۷	۳۵/۵۹۴۸۷

و از اریبی $\hat{R}_{EB}^{SRS}$ کوچک‌تر شده و کارایی $\hat{R}_{EB}^{RSS}$ بزرگ‌تر از یک می‌شود.

۳) برای ترکیب‌های (n_1, n_2, n_3) با n_2 و n_3 ثابت، با افزایش n_1 میانگین اریبی برآوردها کاهش و کارایی $\hat{R}_{EB}^{RSS}$ زیاد می‌شود، ولی به ازای n_1 و n_3 ثابت، با افزایش n_2، کارایی $\hat{R}_{EB}^{RSS}$ کاهش می‌یابد. البته در این حالت نیز میانگین اریبی برآوردها کاهش می‌یابد.

۲.۳ داده‌های واقعی

در این زیربخش از سه مجموعه داده واقعی، برای تحلیل برآوردهای R استفاده می‌شود. این داده‌ها که از لاولس (۲۰۰۳) گرفته شده، بیان‌کننده زمان‌های شکست نمونه‌های فولادی، تحت فشار بار الکتریکی ۱۴ نوع میدان الکتریکی مختلف قرار گرفته است. در این مقاله از داده‌های مربوط به فشار بارهای الکتریکی ۳۲ تا ۳۳/۵ کولنی به عنوان مجموعه داده‌های اول، ۳۴ تا ۳۶ کولنی به عنوان مجموعه داده‌های دوم و ۳۶/۵ تا ۳۸/۵ کولنی به عنوان مجموعه داده‌های سوم استفاده شده، که در جدول ۲ آورده شده است. مقدار آماره آزمون کولموگوروف-اسمیرنوف با p-مقدار مربوطه آن (داخل پرانتز) برای مجموعه داده‌های اول تا سوم به ترتیب ۰/۰۹۹۲(۰/۲۲۲۱)، ۰/۰۵۴۱(۰/۹۳۲۰) و ۰/۰۴۷۱(۰/۴۴۱۰) هستند، که بیان‌کننده برازش این مجموعه داده‌ها به توزیع رایلی وارون است. با توجه به داده‌های جدول ۲ برآورد E-بیزی پارامتر R به روش نمونه‌گیری تصادفی ساده به دست می‌آید. برای انتخاب نمونه به روش نمونه‌گیری مجموعه رتبه‌دار، مجموعه داده‌های اول به ۷ گروه ۱۲تایی، مجموعه داده‌های دوم به ۱۰ گروه ۱۰تایی و مجموعه داده‌های سوم به ۱۰ گروه ۱۰تایی افراز شده و به روش نمونه‌گیری مجموعه رتبه‌دار به ترتیب از مجموعه داده‌های اول تا سوم، نمونه‌های ۷تایی، ۱۰تایی و ۱۰تایی انتخاب می‌شوند، که نتایج در جدول ۳ آورده شده است. با توجه به داده‌های جدول ۳، برآورد E-بیزی پارامتر R به روش نمونه‌گیری مجموعه رتبه‌دار به دست می‌آید. در این زیر بخش، بعد از برآورد ماکسیمم درستنمایی θ_1، θ_2 و θ_3 و به کمک $u = 0.851202$ (عدد انتخابی از توزیع یکنواخت $(0, 1)$)، b_iها و c_iها مانند بخش ۳ − ۱، تحت روش‌های نمونه‌گیری تصادفی ساده و نمونه‌گیری مجموعه رتبه‌دار برآورد می‌شوند، که در جدول ۴ آورده شده است.

جدول ۵ شامل برآوردهای ماکسیمم درستنمایی $\hat{\theta}_1$، $\hat{\theta}_2$، $\hat{\theta}_3$ و R، برآورد E-بیزی پارامتر R به روش‌های نمونه‌گیری تصادفی ساده و نمونه‌گیری مجموعه رتبه‌دار است. با توجه به این جدول، واضح است، که برآورد E-بیزی پارامتر R بهتر از برآورد ماکسیمم درستنمایی آن در هر دو روش نمونه‌گیری و برآورد E-بیزی پارامتر R در روش نمونه‌گیری مجموعه رتبه‌دار بهتر از برآورد E-بیزی آن در روش نمونه‌گیری تصادفی ساده است.

جدول ۲: داده‌های مربوط به زمان‌های شکست نمونه‌های فولادی

۳۲ کولنی	۱۱۴۴	۲۳۱	۵۲۳	۴۷۴	۴۵۱۰	۳۱۰۷	۸۱۵	۶۲۹۷
	۱۹۴۳	۹۳۵	۲۸۳	۱۳۳۶	۷۲۷	۳۷۰	۱۰۵۶	۴۱۳
	۱۵۸۰	۶۰۵	۱۷۸۶	۲۰۶	۶۱۹	۲۲۱۴	۱۸۲۶	۵۹۷
۳۲/۵ کولنی	۴۲۵۷	۸۷۹	۷۹۹	۱۳۸۸	۲۷۱	۳۰۸	۲۰۷۳	۲۷۷
	۳۴۷	۶۹۹	۱۱۵۴	۳۹۳	۲۵۰	۱۹۶	۵۴۸	۴۷۵
	۱۷۰۵	۲۲۱۱	۹۷۵	۲۹۲۵				
۳۳ کولنی	۱۸۴	۲۳۱	۲۷۳	۱۸۴۲	۳۷۱	۸۳۰	۶۸۳	۱۳۰۶
	۵۶۲	۱۶۶	۹۸۱	۱۸۶۷	۴۹۳	۴۱۸	۲۹۸۷	۱۴۶۳
	۲۲۲۰	۳۱۲	۲۵۱	۷۶۰				
۳۳/۵ کولنی	۱۵۴	۳۰۵	۱۸۵۴	۳۶۳	۴۵۷	۴۱۵	۵۵۹	۷۶۷
	۲۱۰	۶۷۸	۳۳۲	۱۸۰	۱۲۷۴	۵۲۸	۲۵۴	۸۳۵
	۶۱۱	۴۸۲	۵۹۳	۹۵۴				
۳۴ کولنی	۱۶۸	۳۹۷	۳۸۵	۱۵۸۵	۲۲۴	۹۸۷	۳۵۸	۷۶۳
	۶۱۰	۵۳۲	۴۴۹	۴۹۸	۷۱۴	۱۵۹	۳۲۶	۲۹۱
	۴۲۵	۱۴۶	۲۴۶	۲۵۳				
۳۴/۵ کولنی	۱۵۵	۳۹۷	۱۰۶۳	۷۳۸	۱۴۰	۳۶۴	۲۱۸	۴۶۱
	۱۷۴	۳۲۶	۵۰۴	۳۷۴	۳۲۱	۱۶۹	۴۲۶	۲۴۸
	۳۵۰	۳۴۸	۲۶۵	۲۹۳				
۳۵ کولنی	۲۳۰	۱۶۹	۱۷۸	۲۷۲	۱۲۹	۵۶۸	۱۱۵	۲۸۰
	۲۸۰	۳۰۵	۳۲۶	۱۱۰۱	۲۸۵	۷۳۴	۱۷۷	۴۹۳
	۲۱۸	۳۴۲	۴۳۱	۱۴۳	۳۸۱			
۳۵/۵ کولنی	۱۵۶	۱۷۳	۱۲۵	۸۵۲	۵۵۹	۴۴۲	۱۶۸	۲۸۶
	۲۶۱	۲۲۷	۲۸۵	۲۵۳	۱۶۶	۱۳۳	۳۰۹	۲۴۷
	۱۱۲	۲۰۲	۳۶۵	۷۰۲				
۳۶ کولنی	۱۷۳	۲۱۸	۱۶۲	۲۸۸	۳۹۴	۵۸۵	۲۹۵	۲۶۲
	۱۲۷	۱۵۱	۱۸۱	۲۰۹	۱۴۱	۱۸۶	۳۰۹	۱۹۲
	۱۱۷	۲۰۳	۱۹۸	۲۵۵				
۳۶/۵ کولنی	۱۱۸	۲۷۳	۱۹۲	۲۳۸	۱۰۵	۳۹۸	۱۰۸	۱۸۲
	۱۳۰	۱۷۰	۱۸۱	۱۱۹	۱۵۲	۱۹۹	۸۹	۲۱۱
	۳۲۴	۱۶۴	۱۳۳	۱۲۱				
۳۷ گولنی	۱۴۱	۱۴۳	۹۸	۱۲۲	۱۱۰	۱۳۲	۱۹۴	۱۵۵
	۱۰۴	۸۳	۱۲۵	۱۶۵	۱۴۶	۱۰۰	۳۱۸	۱۳۶
	۲۰۰	۲۰۱	۲۵۱	۱۱۱				
۳۷/۵ کولنی	۱۹۹	۱۰۵	۱۴۷	۱۱۳	۹۸	۱۱۸	۱۸۲	۱۳۱
	۱۵۶	۷۸	۸۴	۱۰۳	۸۹	۱۲۴	۷۱	۶۵
	۲۲۰	۱۰۹	۹۳	۱۷۱				
۳۸ کولنی	۱۰۰	۹۰	۵۹	۸۰	۱۲۸	۱۱۷	۱۷۷	۹۸
	۱۵۸	۱۰۷	۱۲۵	۱۱۸	۹۹	۱۸۶	۶۶	۱۳۲
	۹۷	۸۷	۶۹	۱۰۹				
۳۸/۵ کولنی	۶۰	۵۱	۸۳	۱۴۰	۱۰۹	۱۰۶	۱۱۹	۷۶
	۶۸	۶۷	۱۱۱	۵۷	۶۹	۷۵	۱۲۲	۱۲۸
	۹۵	۸۷	۸۲	۱۳۲				

جدول ۳: نمونه‌های انتخابی به روش نمونه‌گیری مجموعه رتبه‌دار از مجموعه داده‌های اول تا سوم.

مجموعه داده‌های اول	۲۰۶	۳۰۷	۳۰۸	۲۵۰	۵۹۲	۴۱۵	۵۹۳			
مجموعه داده‌های دوم	۱۶۸	۱۵۹	۱۷۴	۲۹۳	۲۳۰	۳۸۱	۲۸۶	۳۰۹	۳۹۴	۳۰۹
مجموعه داده‌های سوم	۱۰۵	۱۰۸	۱۰۴	۱۳۶	۱۱۸	۱۰۳	۱۱۷	۱۲۵	۱۱۹	۱۳۲

جدول ۴: برآوردهای b_i ها و c_i ها برای مجموعه داده‌های واقعی به ازای $u = ۰/۸۵۱۲۰۲$

روش نمونه‌گیری	$\hat{b}_۱$	$\hat{b}_۲$	$\hat{b}_۳$	$\hat{c}_۱$	$\hat{c}_۲$	$\hat{c}_۳$
تصادفی ساده	۰/۱۴۷۳۲۹	۰/۱۱۹۵۱۲	۰/۶۱۰۸۷۲	۰/۱۷۳۰۸۳	۰/۱۴۰۴۰۳	۰/۷۱۷۶۵۸
مجموعه رتبه‌دار	۰/۱۹۰۹۶۶	۰/۱۶۱۹۳۲	۰/۴۹۲۱۳۰	۰/۲۲۴۳۴۸	۰/۱۹۰۲۳۹	۰/۵۷۸۱۵۸

جدول ۵: برآوردهای $\theta_۱$، $\theta_۲$، $\theta_۳$ و R برای مجموعه داده‌های واقعی تحت دو روش نمونه‌گیری

روش نمونه‌گیری	$\hat{\theta}_۱^{ML}$	$\hat{\theta}_۲^{ML}$	$\hat{\theta}_۳^{ML}$	$\hat{R}^{ML}$	$\hat{R}_{EB}$
تصادفی ساده	۱۲/۹۳۱۳۵	۱۵/۹۴۱۱۹	۳/۱۱۸۷۶	۰/۳۱۱۷۶	۰/۴۴۷۷۵
مجموعه رتبه‌دار	۹/۹۷۶۴۲	۱۱/۷۶۵۲۱	۳/۸۷۱۲۶	۰/۶۰۷۵۴	۰/۷۶۵۳۲

۴ بحث و نتیجه‌گیری

برآوردهای E-بیزی R به روش‌های نمونه‌گیری تصادفی ساده و نمونه‌گیری مجموعه رتبه‌دار تحت تابع زیان توان دوم خطا، وقتی X، Y و Z متغیرهای تصادفی مستقل و دارای توزیع رایلی وارون با پارامترهای متفاوت هستند، به دست آورده شد. با شبیه‌سازی مونت‌کارلو، مقادیر قدرمطلق میانگین اریبی برآوردگر E-بیزی R و کارایی نسبی برآورد E-بیزی پارامتر R به روش نمونه‌گیری مجموعه رتبه‌دار نسبت به روش نمونه‌گیری تصادفی ساده و کارایی برآورد E-بیزی پارامتر R نسبت به برآورد ماکسیمم درستنمایی آن تحت هر دو روش نمونه‌گیری، برای ترکیب‌های مختلف $(n_۱, n_۲, n_۳)$ به دست آورده شد، که $n_۱$، $n_۲$ و $n_۳$ به ترتیب حجم‌های نمونه‌ای انتخاب شده از توزیع‌های X، Y و Z هستند. کارایی روش نمونه‌گیری مجموعه رتبه‌دار نسبت به روش نمونه‌گیری تصادفی ساده در برآورد E-بیزی پارامتر R به وضعیت حجم‌های نمونه‌ای وابسته بود، که در بیشتر حالات $(n_۱, n_۲, n_۳)$، روش نمونه‌گیری مجموعه رتبه‌دار در برآورد E-بیزی پارامتر R کاراتر و همچنین برآورد E-بیزی پارامتر R، بهتر از برآورد ماکسیمم درستنمایی آن در هر دو روش نمونه‌گیری شد. با استفاده از سه مجموعه داده واقعی، بهتر بودن برآورد E-بیزی پارامتر R تحت روش نمونه‌گیری مجموعه رتبه‌دار از برآورد E-بیزی آن در روش نمونه‌گیری تصادفی ساده و کاراتر بودن برآورد E-بیزی پارامتر R از برآورد ماکسیمم درستنمایی آن در هر دو روش نمونه‌گیری نتیجه گرفته شد.

تقدیر و تشکر

نویسنده مقاله از سردبیر، داوران و ویراستار محترم مجله در بهتر شدن مقاله قدردانی و تشکر می‌کند.

مراجع

زمان‌زاده، ا.، احمدی، ج. (۱۳۹۰)، بازه اطمینان ناپارامتری با ضریب اطمینان دقیق برای چندک‌های جامعه براساس نمونه‌گیری مجموعه رتبه‌دار، مجله علوم آماری، جلد ۵، شماره ۱، ۲۳-۳۹.

شادرخ، ع.، یعقوب‌زاده شهرستانی، ش. (۱۳۹۸)، برآوردهای E-بیز و بیز سلسله‌مراتبی پارامتر تنش-مقاومت در توزیع رایلی تحت تابع زیان لاینکس، مجله علوم آماری، جلد ۱۳، شماره ۲، ۴۸۳-۴۹۶.

علیزاده نوقابی، ر.، احمدی، ج. (۱۳۹۱)، برآورد بیزی پارامتر توزیع پارتو تحت توابع زیان توان دوم خطا و لاینکس بر اساس نمونه‌گیری مجموعه رتبه‌دار، مجله علوم آماری، جلد ۶، شماره ۲، ۲۰۱-۲۱۸.

یعقوب‌زاده شهرستانی، ش. (۱۳۹۷)، برآورد $R = P(X > Y)$ در توزیع نمایی بر اساس روش‌های E-بیز و بیز سلسله‌مراتبی، مجله مدل‌سازی پیشرفته ریاضی، جلد ۸، شماره ۱، ۴۹-۶۴.

Al-Saleh, M. F., Al-Shrafat, K. and Muttlak, H. (2000), Bayesian Estimation Using Ranked Set Sampling, *Biometric Journal*, **42**, 489-500.

Birnbaum, Z. W. (1956), *On a Use of the Mann-Whitney Statistic, Proceedings of the Third Barkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, I, 13-17.

Birnbaum, Z. W. and McCarty, R. C. (1958), A Distribution Free Upper Confidence Bound for Based on Independent Samples of X and Y, *Annals of Mathematical Statistics*, **29**, 557-562.

Berger, J. O. (1985), *Statistical Decision Theory and Bayesian Analysis*, Second ed., Springer-Verlag, New York.

Gharraph, M. K. (1993), Comparison of Estimators of Location Measures of an Inverse Rayleigh Distribution, *Journal of the Egyptian Mathematical Society*, **37**, 295-309.

Chen, Z., Bai, Z. and Sinha, B. K. (2004), *Ranked Set Sampling: Theory and Applications*, Springer, New York.

Dutta, K. and Sriwastav, G. L. (1986), An n-Standby System with $P(Y < X < Z)$, *IAPQR Transaction*, **12**, 95-97.

Doioi, C., Borah, M. and Gogoi, J. (2013), Cascade System with $P(Y < X < Z)$, *Journal of Informatics and Mathematical Sciences*, **5**, 37-74.

Guangming, P. (2013), Nonparametric Statistical Inference for $P(Y < X < Z)$, *The Indian Journal of Statistics*, **75**, 118-138.

Guobing, F. (2015), Bayes Estimation for Inverse Rayleigh Model Under Different Loss Functions, *Journal of Applied Science, Engineering and Technology*, **9**, 1115-1118.

Han, M. (1997), The Structure of Hierarchical Prior Distribution and its Applications, *Chinese Operations Research and Management Science*, **6** (3), 31-40.

Han, M. (2009), E-Bayesian Estimation and Hierarchical Bayesian Estimation of Failure Rate, *Applied Mathematical Modelling*, **33**, 1915-1922.

Han, M. (2011). E-Bayesian Estimation of the Reliability Derived from Binomial Distribution, *Applied Mathematical Modelling*, **35**, 2419-2424.

Jaheen, Z. F. and Okasha, H. M. (2011), E-Bayesian Estimation for the Burr Type XII Model Based on Type-2 Censoring, *Applied Mathematical Modelling*, **35**, 4730–4737.

kotz, S., lumelskii, Y. and Pensky, M. (2003), *The Stress-Strength Model and its Generalizations: Theory and Applications*, World Scientific Publishing: New Jersey.

Khan, M. S. and King R. (2015), Transmuted Modified Inverse Rayleigh Distribution, *Austrian Journal of Statistics*, **44**, 17-29.

Lindley, D. V. and Smith, A. F. (1972), Bayes Estimation for the Linear Model, *Journal of the Royal Statistical Society-Series B*, **34**, 1-41.

Lindley, D. V. (1980), *Approximate Bayes Method*, Trab Estad 3, 281-288.

Lawless, J. F. (2003), *Statistical Models and Methods for Lifetime Data*, 2nd edition, Hoboken, John Wiley and Sons.

McIntyre, G. A. (1952), A Method of Unbiased Selective Sampling Using Ranked Sets, *Australian Journal of Agricultural Research*, **3**, 385-390.

Mukarjee, S. P. and Maitim, S. S. (1996), A Percentile Estimator of the Inverse Rayleigh Parameter, *Iapqr Transactions : journal of the Indian Association for Productivity*, **21**, 63-65.

Muttlak, H. A., Abu-Dayyeh, W. A., Al-Saleh, M. F. and Al-Sawi, E. (2010), Estimating $P(Y < X)$ Using Ranked Set Sampling in Case of the Exponential Distribution, *Communications in Statistics: Theory and Methods*, **39**, 1855-1868.

Mehdizadeh, M. and Zamamnzade, E. (2016), Kernel-Based Estimation of $P(X > Y)$ in Ranked Set Sampling, *SORT*, **40 (2)**, 243-266.

Patowary, A. N., Sriwastav, G. L. and Hazarika, J. (2016), Inference of $R = P(Y < X < Z)$ for n-Standby System: A MonteCarlo Simulation Approach, *IOSR Journal of Mathematics (IOSR-JM)*, **12**, 18-22.

Reaven, G. M. and Miller, R. G. (1979), An Attempt to Define the Nature of Chemical Diabetes Using a Multimensional Analysis, *Diabetologia*, **16**, 17-24.

Singh, N. (1980), On the Estimation of $R = P(Y < X < Z)$, *Communication in Statistics Theory & Methods*, **9**, 1551-1561.

Stokes, S. L. (1995), Parametric Ranked Set Sampling, *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, **47**, 465-482.

Shaibu,A. B. and Muttlak, H. A. (2004), Estimating the Parameters of Normal, Exponential and Gamma Distributions Using Median and Extreme Ranked Set Samples, *Statistica LXIV*, 75-98.

Sengupta, S. and Mukhti, S. (2006), Unbiased Variance Estimation in a Simple Exponential Population Using Ranked Set Samples, *Journal of Statistical Planning and Inferenc*, **136**, 1526-1553.

Soliman, A., Essam, A. A. and Ala-Abd-El-Aziz, A. (2010), Estimation and Prediction from Inverse Rayleigh Distribution Based on Lower Record Values, *Applied Mathematical Sciences*, **4**, 3057-3066.

Sajid, A. (2015), Mixture of the Inverse Rayleigh Distribution: Properties and Estimation in a Bayesian Framework, *Applied Mathematical Modelling*, **39**, 515-530.

Sadek, A., Sultan, K. S. and Balakrishnan, N. (2015), Bayesian Estimation Based on Ranked Set Sampling Using Asymmetric Loss Function, *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, *38*, 707-718.

Wang, J, Li, D. and Chen, D. (2012), E Bayesian Estimation and Hierarchical Bayesian Estimation of the System Reliability Parameter, *Systems Engineering Procedia*, **3**, 282 – 289.

Wang, Z., Xiping, W. and Guangming, P. (2013), Nonparametric Statistical Inference for P(X < Y < Z), *The Indian Journal of Statistics*, **75**, 118-138.

Yousefzadeh, F. (2017), E-Bayesian and Hierarchical Bayesian Estimations for the System Reliability Parameter Based on Asymmetric Loss Function, *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **46**, 1-8.