Journal of Statistical Sciences, Autumn and Winter, 2022
Vol. 16, No. 2, pp 309-330
DOI: 10.29252/jss.16.2.309

Infinite Time Ruin Probability in the Individual Risk Model with Dependent Structure for Light and Heavy Tailed Distributions

Bazyari, A., Department of Statistics, Faculty of Intelligent Systems Engineering and Data Science, Persian Gulf University, Bushehr, Iran.

Corresponding author: ab_bazyari@pgu.ac.ir

Received: 1/4/2022 **Revised:** 11/10/2022 **Accepted and Published Online:** 13/10/2022.

Introduction

For the risk models, problems associated with calculating ruin probabilities have received considerable attention in recent years. These include studies of the finite and infinite time ruin probabilities, the surplus before ruin and the deficit at a ruin, and moments of these variables. One of the essential criteria in the insurance company risk model is the accurate or approximate calculation of ruin probability. In the present paper, we consider the individual risk model of an insurance company with dependent claims and assume that the binary vector of random variables of claim sizes is independent. Also, they have a common joint distribution function. A recursive formula for infinite time ruin probability is based on the initial reserve and joint probability density function of random variables of claim sizes using probability inequalities and the induction method. Some numerical examples and simulation studies are presented for checking the results related to the light-tailed bivariate Poisson, heavy-tailed Log-Normal and Pareto distributions. The results are compared for Farlie–Gambel–Morgenstern and bivariate Frank copula functions. The effect of claims with heavy-tailed distributions on the ruin probability is also investigated.

Material and Methods

We compute the infinite time ruin probability in the individual risk model with a dependent structure for light and heavy-tailed distributions with dependent claims. Although many authors have investigated the ruin probabilities, the present paper considers a specific type of dependency. Some

numerical examples with heavy and light-tailed distributions are presented to show the application of results.

Results and Discussion
The risk process is a model of the accumulation of the insurer's capital and premium incomes during the periods. So, the risk process is one of the most important stochastic processes for an insurance company which can be defined as a discrete or continuous time in actuarial risk theory. Problems associated with calculating infinite ruin probabilities for the individual risk model have recently received considerable attention. In this article, we showed that the type of statistical distribution is essential in calculating the ruin probabilities. The obtained results are held for class heavy and light-tailed distributions. If the claim sizes are correlated, the insurance company must be cautious in preparing and adjusting the insurance policy.

Conclusion
For the insurance companies to be able to compensate the claims of policyholders, they must organize the company's insurance model based on precise mathematical rules and calculations. The statistical distribution of claim sizes and the number of insurance premiums must be correctly selected and considered. Also, as the level of correlation between claims increases, the ruin probability will increase, and the effects of heavy tail distributions on the ruin probability will be investigated. In these cases, we assume that the insurance company is interested in computing the ruin probabilities depending on the quantities and conditions of the risk model. The considered approaches in this paper use the methods for implementation, and one can find a proper application in insurance practice.

Keywords: Bivariate Poisson distribution, Farlie–Gambel–Morgenstern copula function, Individual risk model, Ruin probability, Light and heavy tailed distributions.

Mathematics Subject Classification (2010): 91B70, 91B30.

©The Author(s). The Publisher is Iranian Statistical Society.
This is an open access article distributed under the terms and conditions of (CC BY-NC 4.0)

مجله علوم آماری، پاییز و زمستان ۱۴۰۱
جلد ۱۶، شماره ۲، ص ۳۰۹ – ۳۳۰
DOI: 10.29252/jss.16.2.309
مقاله پژوهشی

احتمال ورشکستگی زمان نامتناهی در مدل مخاطره انفرادی با ساختار وابسته برای خسارت‌های با توزیع‌های دم سبک و سنگین

ابوذر بازیاری

گروه آمار، دانشگاه خلیج فارس، بوشهر

نویسنده مسئول : نام نویسنده مسئول مقاله، ab_bazyari@pgu.ac.ir

تاریخ دریافت: ۱۴۰۱/۱/۱۲ تاریخ بازنگری: ۱۴۰۱/۷/۱۹ تاریخ پذیرش و انتشار: ۱۴۰۱/۷/۲۱

چکیده: در این مقاله، مدل مخاطره انفرادی شرکت بیمه با خسارت وابسته در نظر گرفته شده و فرض می‌شود که بردار دوتایی متغیرهای تصادفی اندازه‌های خسارت از یکدیگر مستقل و دارای یک تابع چگالی توام مشترک باشند. یک رابطه بازگشتی برای احتمال ورشکستگی زمان نامتناهی بر حسب سرمایه اولیه و تابع چگالی احتمال توام متغیرهای تصادفی اندازه‌های خسارت با استفاده از نامساوی‌های احتمالی و روش استقراء محاسبه شده است. برای بررسی نتایج، مثال‌های عددی همراه با روش شبیه‌سازی در ارتباط با توزیع دم سبک پواسون دو متغیره، توزیع‌های دم سنگین لاگ نرمال و پارتو، تابع مفصل فارلي-گامبل-مورگنشترن و تابع مفصل فرانک دو متغیره ارایه شده و نیز اثر خسارت‌های با توزیع‌های دم سنگین روی احتمال ورشکستگی مورد بررسی قرار می‌گیرد.

واژه‌های کلیدی: احتمال ورشکستگی زمان نامتناهی، تابع مفصل ، توزیع‌های دم سبک و سنگین، مدل مخاطره انفرادی

کد موضوع‌بندی ریاضی (۲۰۱۰): 91B70، 91B30.

۱ مقدمه

صنعت بیمه یکی از عوامل مهم توسعه و پیشرفت در هر کشوری به حساب می‌آید و توسعه این صنعت نشان از بهبود وضعیت اقتصادی و پیشرفت سطح زندگی افراد یک جامعه دارد. آنچه برای مدیران یک شرکت بیمه بسیار حایز

©نویسند(گان). ناشر انجمن آمار ایران است.
این مقاله با دسترسی آزاد تحت شرایط و ضوابط (CC BY-NC 4.0) توزیع شده است.

اهمیت است، اطلاع از وضعیت حال و آینده آن شرکت است، چرا که مدیریت نادرست یا حتی ضعیف در تخصیص موارد مالی، می‌تواند منجر به ورشکستگی آن شرکت شود. احتمالات ورشکستگی مهم‌ترین شاخص در نظریه مخاطره بوده و مقدار این احتمالات به نوع توزیع آماری متغیرهای تصادفی خسارت‌ها بستگی دارد.

مدل‌های مختلفی برای بیان ساختار فرآیند شرکت‌های بیمه ارایه شده که از مهم‌ترین آنها مدل مخاطره جمعی و مدل مخاطره انفرادی هستند. پانچر (۱۹۸۶) احتمال ورشکستگی زمان نامتناهی را برای وقتی‌که خسارت‌های رخ‌داده شده از طرف بیمه‌گذاران دارای توزیع گسسته باشند، محاسبه کرد. دی‌پریل (۱۹۸۶) توزیع دقیق اندازه‌های خسارت را در مدل مخاطره انفرادی بدست آورد. دی‌ویلدر و گوارتس (۱۹۸۸) الگوریتمی را برای محاسبه احتمال ورشکستگی زمان متناهی برای مدل مخاطره ارایه کردند.

دی‌ویلدر (۱۹۹۶) با استفاده از روش‌هاي پیشرفته رياضي نظریه مخاطره را در مدل‌های بیمه گسترش داد. کوست و همکاران (۲۰۰۲) احتمالات ورشکستگی را در مدل مخاطره انفرادی وابسته با استفاده از تابع مفصل محاسبه کردند. آلبرچر و بوکسما (۲۰۰۴) با استفاده از تبدیل لاپلاس، احتمال ورشکستگی زمان نامتناهی را در مدل مخاطره وابسته محاسبه کردند. هید و وانگ (۲۰۰۹) احتمال ورشکستگی زمان متناهی را با وجود خسارت‌های با دم سنگین برآورد کردند. آسیمیت و بادسکو (۲۰۱۰) تقریب احتمال ورشکستگی زمان متناهی را با فرض وابستگی بین اندازه‌های خسارت و زمان رخداد آنها محاسبه و برای ارزیابی دقت نتایج از روش شبیه‌سازی استفاده کردند. چن (۲۰۱۱) برآورد تقریبی احتمال ورشکستگی زمان متناهی را در مدل مخاطره گسسته زمان با استفاده از تابع مفصل فارلي–گامبل–مورگنشترن[1] بدست آورد. یانگ و همکاران (۲۰۱۲) احتمالات ورشکستگی را در مدل مخاطره گسسته زمان وابسته با وجود خسارت‌های با دم سنگین محاسبه کردند. ونگ و همکاران (۲۰۱۳) نتایج مجانبی برای احتمالات ورشکستگی در مدل مخاطره با خسارت‌های وابسته و دارای توزیع دم سنگین ارایه دادند.

بازیاری (۱۳۹۱) برآورد احتمالات ورشکستگی زمان متناهی و نامتناهی، زمان های ورشکستگی و بازه اطمینان احتمالات ورشکستگی را در مدل مخاطره انفرادی محاسبه و اثرات وابستگی در مدل با استفاده از تابع مفصل فرانک دو متغیره[2] مورد بررسی قرار گرفت. سون و وی (۲۰۱۴) احتمال ورشکستگی زمان متناهی را در مدل مخاطره گسسته زمان با وجود خسارت‌های با دم سنگین برآورد کردند و نتایج با مثال‌های عددی مورد بررسی قرار گرفت. چن و همکاران (۲۰۱۵) در ادامه‌ی کار چن (۲۰۱۱) احتمال ورشکستگی زمان متناهی در مدل مخاطره گسسته زمان را برای سطوح گسترده‌تری از پارامتر وابستگی مورد مطالعه قرار دادند. یانگ و کانستنتینیدس (۲۰۱۵) احتمالات ورشکستگی را در مدل مخاطره گسسته زمان وابسته با استفاده از تابع مفصل برآورد کردند. هوآنگ و همکاران (۲۰۱۷) احتمالات ورشکستگی را در مدل مخاطره انفرادی با خسارت‌های دارای توزیع گاما محاسبه و مثال‌های عددی را با روش شبیه‌سازی ارایه دادند. بازیاری و روزگار (۲۰۱۹) احتمال ورشکستگی زمان متناهی را در مدل مخاطره برای خسارت‌های وابسته محاسبه و نیز برخی از مدل‌های مخاطره وابسته مورد مطالعه قرار دادند. سانتانا و رینکن (۲۰۲۰) احتمال ورشکستگی زمان نامتناهی را در مدل مخاطره انفرادی محاسبه و درستی نتایج را با چند مثال عددی مورد

[1] Farlie–Gambel–Morgenstern
[2] Bivariate Frank copula function

بررسی قرار کردند. تورادو و ناوارو (۲۰۲۱) توزیع‌های کوچکترین و بزرگترین اندازه‌های خسارت را در مدل مخاطره انفرادی وابسته بدست آوردند.

در مقاله حاضر، احتمال ورشکستگی زمان نامتناهی بر حسب سرمایه اولیه و تابع چگالی احتمال توام متغیرهای تصادفی در مدل مخاطره انفرادی شرکت بیمه با خسارت‌های وابسته برای هر دو کلاس از توزیع‌های دم سبک و سنگین محاسبه شده است. ساختار مدل مخاطره به‌گونه‌ای است که اولاً متغیرهای تصادفی اندازه خسارت‌ها به هم وابسته بوده و ثانیاً فرض می‌شود که برای هر مقدار $i \in N$ بردار دوتایی متغیرهای تصادفی اندازه خسارت‌ها $(X_{۲i-۱}, X_{۲i})$ از یکدیگر مستقل و نیز دارای یک تابع چگالی توام مشترک باشند.

در بخش ۲، به ارایه مدل مخاطره انفرادی شرکت بیمه، بیان ویژگی‌های مدل، تعریف توزیع پواسن دو متغیری، تابع مفصل فارلي-گامبل-مورگنشترن و تابع مفصل فرانک پرداخته شده است. در بخش ۳، احتمال ورشکستگی زمان نامتناهی در مدل مخاطره انفرادی وابسته با استفاده از رابطه‌های احتمال و روش استقراء محاسبه شده است. در بخش ۴، مثال‌های عددی برای محاسبه احتمالات ورشکستگی ارایه شده، از تابع مفصل فارلي-گامبل-مورگنشترن و تابع مفصل فرانک دو متغیره برای بیان ساختار وابستگی بین متغیرها استفاده می‌شود و نیز اثر خسارت‌های با توزیع‌های دم سنگین روی احتمال ورشکستگی مورد بررسی قرار می‌گیرد. در نهایت بحث و نتیجه‌گیری ارایه خواهد شد.

۲ توصیف مدل مخاطره، نمادها و ویژگی‌ها

در این بخش، ابتدا ساختار مدل مخاطره انفرادی و ویژگی‌های آن معرفی می‌شود. نوع وابستگی بین خسارت‌ها در مدل بیان شده و سپس تعریف توزیع پواسن دو متغیری، تابع مفصل فارلي-گامبل-مورگنشترن و تابع مفصل فرانک دو متغیری ارایه شده است.

۲.۱ مدل مخاطره انفرادی شرکت بیمه

فرض کنید $R(n)$ نشان‌دهنده فرآیند ذخیره شرکت بیمه با سرمایه اولیه u باشد، آنگاه

$$R(n) = u + cn - \sum_{i=۱}^{n} X_i, \tag{۱}$$

که در آن X_i، متغیر تصادفی خسارت iامین بیمه‌گذار و $\sum_{i=۱}^{n} X_i$ مجموع کل خسارت‌های رخ داده شده تا زمان n است. در مدل (۱)، هر خسارتي که از طرف بیمه‌گذار رخ مي‌دهد به عنوان يك متغير تصادفي تلقی می‌شود. در این مدل، cn مجموع حق بیمه‌های دریافتی تا زمان n بوده و فرض می‌شود که خسارت‌های انفرادي متغيرهاي تصادفي به هم وابسته بوده و برای هر مقدار $i \in N$ بردار دوتایی متغیرهای تصادفی اندازه‌های خسارت $(X_{۲i-۱}, X_{۲i})$ از

یکدیگر مستقل و هم‌توزیع با بردار تصادفی (Y_1, Y_2) باشند. فرض می‌شود که بردار تصادفی (Y_1, Y_2) دارای تابع چگالی توام $f_{i,j} = P(Y_1 = i, Y_2 = j)$، $i, j \in \{0, 1, 2, \dots\}$ باشد. توابع توزیع متغیرهای تصادفی Y_1 و Y_2 به ترتیب با نمادهای F_{Y_1} و F_{Y_2} و مجموع دو متغیر با نماد $S = Y_1 + Y_2$ که دارای تابع توزیع F_S است، نشان داده می‌شود. همچنین برای $i = 0, 1, 2, \dots$ مقادیر احتمالات $y_{1i} = P(Y_1 = i)$، $y_{2i} = P(Y_2 = i)$ و $s_i = P(S = i)$ تعریف می‌شوند و کاملاً بدیهی است که $s_0 = f_{0,0}$ خواهد بود. بنابراین برای مقادیر $u \geq 0$، $F_{Y_1}(u) = P(Y_1 \leq u) = \sum_{i=0}^{u} y_{1i}$، $F_{Y_2}(u) = P(Y_2 \leq u) = \sum_{i=0}^{u} y_{2i}$ است. احتمال ورشکستگی و زمان ورشکستگی شرکت بیمه از مهم‌ترین شاخص‌ها در این مدل است. اگر T_u زمان ورشکستگی باشد، آنگاه $T_u = \min\{n \geq 1 R(n) \leq 0\}$ و اگر برای هر $n \in N$، $R(n) > 0$ باشد، آنگاه $T_u = \infty$ خواهد بود. بدون اینکه از کلیت مساله کم شود، فرض می‌شود که مقدار حق بیمه‌های دریافتی در هر دوره زمانی برابر با یک باشد. همچنین اگر احتمال ورشکستگی زمان نامتناهی برای مدل (۱) با نماد $\psi(u)$ نشان داده شود، آنگاه

$$\psi(u) = P(T_u < \infty) = P\big(\sup_{n \geq 1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - 1) \geq u\big)$$

و برای مقادیر $u \geq 0$، احتمال بقا $\phi(u) = 1 - \psi(u)$ است.

۲.۲ توزیع پواسن دو متغیری

فرض کنید V_1، V_2 و U متغیرهای تصادفی و مستقل و هر کدام به ترتیب دارای توزیع پواسن با پارامترهای λ_1، λ_2 و λ_3 باشند. آنگاه تابع جرم احتمال توام دو متغیر تصادفی $W_1 = V_1 + U$ و $W_2 = V_2 + U$ برای $w_1, w_2 = 0, 1, 2, \dots$ به صورت

$$P(W_1 = w_1, W_2 = w_2) = e^{-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)} \sum_{\ell=0}^{\min\{w_1,w_2\}} \frac{\lambda_3^{\ell}}{\ell!} \frac{\lambda_1^{w_1-\ell}}{(w_1-\ell)!} \frac{\lambda_2^{w_2-\ell}}{(w_2-\ell)!}, \qquad (2)$$

است، که در آن $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ و $0 \leq \lambda_3 < \min\{\lambda_1, \lambda_2\}$. رابطه (۲) تابع جرم احتمال پواسن دو متغیری نامیده می‌شود. متغیرهای تصادفی W_1 و W_2 دارای توزیع‌های حاشیه‌ای پواسن به‌ترتیب با پارامترهای λ_1 و λ_2 هستند و $\mathrm{Cov}(W_1, W_2) = \lambda_3$ است (هولگیت ، ۱۹۶۴).

۲.۳ توابع مفصل

دو متغیر تصادفی وابسته W_1 و W_2 بر اساس تابع مفصل فارلي-گامبل-مورگنشترن مدل‌بندی می‌شوند، اگر برای $v_1 = F_{W_1}(w_1)$ و $v_2 = F_{W_2}(w_2)$، رابطه

$$C(v_1, v_2) = v_1 v_2 + \theta v_1 v_2 (1 - v_1)(1 - v_2), \qquad v_1, v_2 \in [0, 1] \times [0, 1], \tag{3}$$

برقرار باشد، که در آن $\theta \in [-1, 1]$ پارامتر همبستگی بین دو متغیر تصادفی W_1 و W_2 است. تابع مفصل (۳)، توسط فارلی (۱۹۶۰) ، گامبل (۱۹۶۰) و مورگنشترن (۱۹۵۶) مورد مطالعه قرار گرفته است. دو متغیر تصادفی وابسته W_1 و W_2 بر اساس تابع مفصل فرانک دو متغیره مدل‌بندی می‌شوند، اگر برای دو مقدار $v_1 = F_{W_1}(w_1)$ و $v_2 = F_{W_2}(w_2)$، رابطه

$$C(v_1, v_2) = -\frac{1}{\log \theta} \log \big(1 + \frac{(\theta^{v_1} - 1)(\theta^{v_2} - 1)}{\theta - 1}\big), \qquad v_1, v_2 \in [0, 1] \times [0, 1],$$

برقرار باشد، که در آن $\theta \in (0, 1)$ پارامتر وابستگی است (فرانک ، ۱۹۷۰).

۳ احتمال ورشکستگی زمان نامتناهی

احتمال ورشکستگی زمان نامتناهی برای مدل مخاطره انفرادی (۱) با خسارت‌های وابسته بر حسب تابع چگالی توام متغیرهای تصادفی محاسبه و ثابت می‌شود که با افزایش سرمایه اولیه، احتمال بقا به مقدار یک میل خواهد کرد. بازیاری (۱۳۹۶) این موضوع را برای مدل‌های مخاطره نشان داده است.

قضیه ۱. مدل مخاطره انفرادی (۱) با متغیرهای تصادفی Y_1 و Y_2 را در نظر بگیرید. فرض کنید $E(S) < 2$ باشد، آنگاه

الف- $\lim_{u\to\infty} \phi(u) = 1$.

ب- اگر $s_0 = f_{0,0} > 0$، آنگاه احتمال بقا برای $u = 0$ و $u > 0$ به‌ترتیب

$$\phi(0) = \big(2 - E(S)\big) \lim_{n\to\infty} \frac{k_{n+1} - k_n}{g_n - g_{n+1}}, \tag{4}$$

$$\phi(u) = g_u \phi(0) + k_u \big(2 - E(S)\big), \tag{5}$$

هستند، که در رابطه (۴)، g_n و k_n ، $n \in \{2, 3, \dots\}$، دنباله‌هایی از اعداد حقیقی بوده و بصورت‌های $g_0 = 1$، $g_1 = -\frac{1}{y_{20}}$، $g_n = \frac{1}{s_0}\big(g_{n-2} - \sum_{i=1}^{n-1} s_i g_{n-i} + g_1 f_{n-1,0}\big)$، $k_0 = 0$، $k_1 = \frac{1}{y_{20}}$ و نیز $k_n = \frac{1}{s_0}\big(k_{n-2} - \sum_{i=1}^{n-1} s_i k_{n-i} + k_1 f_{n-1,0}\big)$ تعریف می‌شوند.

ج- اگر $s_\circ = \circ$، $y_{۱\circ} \neq \circ$ و $y_{۲\circ} = \circ$ باشد، آنگاه احتمال بقا برای $u = \circ$ و $u > \circ$ به‌ترتیب $\phi(\circ) = ۲-E(S)$ و $\phi(u) = \frac{۱}{s_۱}\big(\phi(u-۱) - \sum_{i=۲}^{u} s_k\phi(u-i+۱)\big)$ است.

د- اگر $s_\circ = \circ$، $y_{۱\circ} = \circ$ و $y_{۲\circ} \neq \circ$، آنگاه $\phi(\circ) = \circ$، $\phi(۱) = \frac{۱}{y_{۲\circ}}\big(۲ - E(S)\big)$ و $\phi(u) = \frac{۱}{s_۱}\big(\phi(u-۱) - \sum_{i=۲}^{u} s_k\phi(u-i+۱) + f_{u,\circ}\phi(۱)\big),\ u \in \{۲,۳,\dots\}$.

برهان: الف- با استفاده از تعریف احتمال بقا، خواهیم داشت

$$\phi(\infty) = \lim_{u\to\infty}\big(۱ - \psi(u)\big) = \lim_{u\to\infty} P\big(\sup_{n\geq ۱} w_n < u\big), \tag{۶}$$

که در آن $w_n = \sum_{i=۱}^{n}(X_i - ۱)$. اگر nی زوج $(n = ۲N)$ باشد، آنگاه

$$\frac{w_n}{n} = \frac{w_{۲N}}{۲N} = \frac{۱}{۲}\Big(\frac{۱}{N}\sum_{i=\circ}^{N-۱}(X_{۲i+۱} - ۱) + \frac{۱}{N}\sum_{i=۱}^{N}(X_{۲i} - ۱)\Big),$$

و اگر n فرد $(n = ۲N+۱)$ باشد، آنگاه

$$\frac{w_n}{n} = \frac{w_{۲N+۱}}{۲N+۱} = \frac{N+۱}{۲N+۱}\frac{۱}{N+۱}\sum_{i=\circ}^{N}(X_{۲i+۱} - ۱) + \frac{N}{۲N+۱}\frac{۱}{N}\sum_{i=۱}^{N}(X_{۲i} - ۱).$$

بنابراین با استفاده از قانون اعداد بزرگ، اگر $n \to \infty$،

$$\frac{w_n}{n} \to \frac{۱}{۲}\big(E(Y_۱) - ۱ + E(Y_۲) - ۱\big) = \frac{E(S) - ۲}{۲}.$$

پس اگر $n \to \infty$، آنگاه

$$P\big(\sup_{m\geq n}|\frac{w_m}{m} + \eta| < \frac{\eta}{۲}\big) \to ۱, \tag{۷}$$

که در آن $\eta = \frac{\big(۲-E(S)\big)}{۲} > \circ$. بنابراین با توجه به (۷) برای $\epsilon \in (\circ, \frac{۱}{۲})$ نامساوی

$$P\big(\sup_{m\geq n}|\frac{w_m}{m} + \eta| < \frac{\eta}{۲}\big) \geq ۱ - \epsilon,$$

برقرار است. از طرف دیگر

$$P(\bigcap_{m=n}^{\infty}\{w_m \leq \circ\}) \geq P(\bigcap_{m=n}^{\infty}\{|\frac{w_m}{m}+\eta| < \frac{\eta}{۲}\}) \geq ۱-\epsilon. \tag{۸}$$

با استفاده از رابطه $P(A\cap B) = P(A)+P(B)-P(A\cup B)$ و رابطه (۸)، نامساوی

$$\begin{aligned} P\big(\sup_{n\geq ۱} w_n < u\big) &\geq P\big(\sup_{n\geq ۱} w_n \leq \frac{u}{۲}\big) \\ &\geq P\big(\{\bigcap_{n=۱}^{N-۱}\{w_n \leq \frac{u}{۲}\}\}\big) + P\big(\{\bigcap_{n=N}^{\infty}\{w_n \leq \circ\}\}\big) - ۱ \\ &\geq P\Big(\{\bigcap_{n=۱}^{N-۱}\{w_n \leq \frac{u}{۲}\}\}\Big) - \epsilon. \end{aligned} \tag{۹}$$

برقرار است. اگر در نامساوی (۹) مقدار u به سمت ∞ میل کند، آنگاه با توجه به رابطه (۶)، $\phi(\infty) = ۱$ و در نتیجه قسمت الف اثبات می‌شود.

برای اثبات قسمت ب، با استفاده از تعریف احتمال بقا و رابطه احتمال کل خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \phi(u) &= P(\bigcap_{n=۱}^{\infty}\{u+n-\sum_{i=۱}^{n}X_i > \circ\}) \\ &= \sum_{i=\circ}^{u+۱} s_{u+۱-i}\phi(i+۱) - f_{u+۱,\circ}y_{۲\circ}\phi(۱). \end{aligned} \tag{۱۰}$$

بنابراین

$$\sum_{\ell=\circ}^{u}\phi(\ell) = \sum_{\ell=\circ}^{u}\sum_{i=\circ}^{u+۱} s_{\ell+۱-i}\phi(i+۱) - y_{۲\circ}\phi(۱)\sum_{\ell=\circ}^{u} f_{\ell+۱,\circ}, \tag{۱۱}$$

با توجه به تابع توزیع $F_S(u)$، از رابطه (۱۱) خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \sum_{i=\circ}^{u+۲}\phi(i)\bar{F}_S(u+۲-i) &= \phi(u+۱)+\phi(u+۲) \\ &- y_{۲\circ}\phi(۱)\sum_{l=\circ}^{u+۱} f_{l,\circ} - \phi(\circ)F_S(u+۲), \end{aligned} \tag{۱۲}$$

که در آن $\bar{F}_S(u+۲-i) = ۱-F_S(u+۲-i)$. اگر u به سمت ∞ میل کند، با توجه به قضیه سیلورمن-تیوپلس رابطه $\lim_{u\to\infty}\sum_{i=۰}^{u+۲}\phi(i)\bar{F}_S(u+۲-i) = \phi(\infty)E(S)$ برقرار است (کویپرس و نیدریتر ، ۱۹۷۴). با جایگذاری این رابطه در (۱۲) وقتی‌که u به سمت ∞ میل می‌کند، خواهیم داشت

$$y_{۲۰}\phi(۱) + \phi(۰) = \big(۲ - E(S)\big)\phi(\infty). \tag{۱۳}$$

بنابراین طبق قسمت (الف)، داریم

$$y_{۲۰}\phi(۱) + \phi(۰) = \big(۲ - E(S)\big). \tag{۱۴}$$

واضح است که باید $E(S) < ۲$، در غیر این‌صورت مقدار احتمال ورشکستگی منفی خواهد شد. همچنین از رابطه (۱۴)، رابطه $\phi(۱) = \frac{۲-\phi(۰)-E(S)}{y_{۲۰}}$ بدست می‌آید، بنابراین برای $u = ۰$ و $u = ۱$، به‌ترتیب رابطه‌های $\phi(۱) = g_۱\phi(۰) + k_۱\big(۲ - E(S)\big)$ و $\phi(۰) = g_۰\phi(۰) + k_۰\big(۲ - E(S)\big)$ برقرار بوده که در نتیجه با توجه به فرضیات قضیه، رابطه (۵) برای این دو مقدار کاملاً بدیهی است. با فرض آن‌که (۵) برای $u = ۲, \ldots, r-۱$، $r \geq ۳$، برقرار باشد، ثابت می‌شود که برای $u = r$ نیز برقرار است. در رابطه (۱۰)، با جایگذاری $r-۲$ بجای u داریم

$$\phi(r-۲) = \sum_{i=۰}^{r-۱} s_i\phi(r-i) - f_{r-۱,۰}y_{۲۰}\phi(۱), \tag{۱۵}$$

در طرف راست رابطه (۱۵)، $i = ۰$ راجایگذاری کرده و بقیه موارد نوشته می‌شوند، بنابراین

$$\phi(r) = \frac{۱}{y_{۲۰}}\big(\phi(r-۲) - \sum_{i=۱}^{r-۱} s_i\phi(r-i) + f_{r-۱,۰}y_{۲۰}\phi(۱)\big).$$

چون احتمال بقا در رابطه (۵) برای مقادیر $r-i$، $i = ۱, \ldots, r-۱$، با استفاده از استقراء برقرار است، بنابراین

$$\begin{aligned}
\phi(r) &= \frac{۱}{y_{۲۰}}\big(g_{r-۲} - \sum_{i=۱}^{r-۱} s_i g_{r-۲} + f_{r-۱,۰}y_{۲۰}g_۱\big)\phi(۰) \\
&+ \frac{۱}{y_{۲۰}}\big(k_{r-۲} - \sum_{i=۱}^{r-۱} s_i k_{r-۲} + f_{r-۱,۰}y_{۲۰}k_۱\big)\big(۲ - E(S)\big) \\
&+ g_r\phi(۰) + k_r\big(۲ - E(S)\big),
\end{aligned}$$

چون $\lim_{u\to\infty}\phi(u)=1$، برای $n\geq N(\epsilon)$ و مقدار اختیاری ϵ، نامساوی $|\phi(n+1)-\phi(n)|\leq\epsilon$ برقرار است. بنابراین

$$|(g_{n+1}-g_n)\phi(0)+(k_{n+1}-k_n)(2-E(S))|\leq\epsilon. \qquad (16)$$

از طرف دیگر، با روش استقراء ملاحظه می‌شود $|g_{n+1}-g_n|\geq 2$. بنابراین برای $n\geq N(\epsilon)$ طبق رابطه (۱۶)، نامساوی $|\phi(0)+\frac{k_{n+1}-k_n}{g_{n+1}-g_n}(2-E(S))|\leq\frac{\epsilon}{2}$ برقرار است. لذا رابطه (۴) بدیهی خواهد بود.

برای اثبات قسمت ج، طبق رابطه (۱۱) مقدار $\phi(0)$ بدست می‌آید. همچنین با توجه به اینکه $y_{20}=\sum_{i=0}^{\infty}f_{i,0}=0$، بنابراین مقدار $\phi(u)$ از رابطه (۱۰) محاسبه می‌شود.

برای اثبات قسمت د، مقدار $\phi(0)$ از رابطه (۱۰) محاسبه و سپس مقدار $\phi(1)$ از رابطه (۱۴) بدست می‌آیند. همچنین $\phi(u)$ برای $u\in\{2,3,\dots\}$ از رابطه (۱۰) محاسبه می‌شود.

قضیه ۲. مدل مخاطره انفرادی (۱) با متغیرهای تصادفی Y_1 و Y_2 را در نظر بگیرید. اگر $E(S)>2$، آنگاه برای $u\in\{0,1,2,\dots\}$، $\phi(u)=0$ است. همچنین اگر $E(S)=2$، آنگاه

اگر $s_2<1$، آنگاه برای $u\in\{0,1,2,\dots\}$، $\phi(u)=0$ است.

اگر $s_2=1$ و $f_{0,2}=1$، آنگاه $\phi(0)=0$ و برای $u\in\{1,2,3,\dots\}$، $\phi(u)=1$ است.

اگر $s_2=1$ و $f_{1,1}=1$، آنگاه $\phi(0)=\phi(1)=0$ و برای $u\in\{2,3,\dots\}$، $\phi(u)=1$ است.

اگر $s_2=1$ و $f_{2,0}=1$، آنگاه $\phi(0)=\phi(1)=0$ و برای $u\in\{2,3,\dots\}$، $\phi(u)=1$ است.

برهان: چون $E(S)>2$ است، بنا به رابطه (۱۴) حتماً بایستی احتمال بقا در بی‌نهایت برابر صفر باشد، زیرا طبق خاصیت مثبت بودن احتمال، $y_{20}\phi(1)+\phi(0)\geq 0$ است. بنابراین برای هر $u<\infty$ احتمال بقا برابر صفر بوده که در نتیجه $\psi(u)=1$ است.

اگر $E(S)=2$، آنگاه $y_{20}\phi(1)+\phi(0)=0$ و لذا $\phi(0)=\phi(1)=0$ است. اما مقدار احتمال بقا مشخص نیست، به همین دلیل دو حالت $s_2<1$ و $s_2=1$ در نظر گرفته می‌شود. پپ حالت اول فرض کنید $E(S)=2$ و $s_2<1$ باشد. همچنین با فرض آنکه $s_0\neq 0$ و $s_1\neq 0$، مقدار $\phi(0)=\phi(1)=0$ در رابطه (۱۰) جایگذاری می‌شود. آنگاه دیده می‌شود که برای هر $u\in\{2,3,\dots\}$، $s_0\phi(u)=0$ خواهد بود که در نتیجه $\phi(u)=0$ است. اما اگر $s_0=0$ و $s_1\neq 0$، با جایگذاری مقدار $\phi(0)=0$ در رابطه (۱۴)، برای هر $u\in\{2,3,\dots\}$، $s_1\phi(u)=0$ است، که در نتیجه $\phi(u)=0$ است.

حالت دوم. فرض کنید $E(S)=2$ و $s_2=1$ باشد. چون $s_2=f_{0,2}+f_{1,1}+f_{2,0}$ و مقدار احتمال مثبت است، باید حداقل یکی از رابطه‌های $f_{0,2}=1$، $f_{1,1}=1$ یا $f_{2,0}=1$ برقرار باشد.

اگر $f_{0,2}=1$ باشد، پس $y_{10}=y_{20}=1$ است، به عبارت دیگر متغیرهای تصادفی Y_1 و Y_2 دارای توزیع‌های تباهیده هستند. بنابراین فرآیند مخاطره داده شده در (۱) برای nهای فرد برابر با $R(n)=u+1$ و برای nهای زوج برابر با $R(n)=u$ خواهد بود، یعنی در این مدل خسارتی وجود ندارد، پس احتمال بقا برابر با ۱ است.

اگر $f_{۱,۱} = ۱$ باشد، آنگاه $y_{۱۱} = y_{۲۱} = ۱$ است، یعنی متغیرهای تصادفی $Y_۱$ و $Y_۲$ دارای توزیع‌های تباهیده هستند و برای هر مقدار صحیح مثبت n، همواره $R(n) = u$ است. در نتیجه برای $u \in \{۱, ۲, \dots\}$، $\phi(u) = ۱$ (یا $\psi(u) = ۰$) است.

اگر $f_{۲,۰} = ۱$ باشد، پس $y_{۱۲} = y_{۲۰} = ۱$ است. در این صورت فرآیند مخاطره داده شده در (۱) برای nهای فرد برابر با $R(n) = u - ۱$ و برای nهای زوج برابر با $R(n) = u$ خواهد بود، بنابراین احتمال ورشکستگی در $u = ۱$ برابر یک است (یا $\phi(۱) = ۰$) و برای $u \in \{۲, ۳, \dots\}$، $\psi(u) = ۰$ (یا $\phi(u) = ۱$) است و این اثبات را کامل می‌کند.

۴ مثال‌های عددی

برای بررسی نتایج بدست آمده، مثال‌های عددی جهت محاسبه $\psi(u)$ ارایه شده است. برای این کار از توزیع دم سبک پواسون دو متغیره، توزیع‌های دم سنگین لاگ نرمال و پارتو، تابع مفصل فارلي-گامبل-مورگنشترن و تابع مفصل فرانک دو متغیره استفاده شده است. در مثال اول توزیع پواسون دو متغیره بکار برده شده و در مثال‌های بعدی از تابع مفصل فارلي-گامبل-مورگنشترن استفاده شده است. طبق رابطه (۴)، مقدار $\psi(۰)$ را می‌توان از رابطه

$$\psi(۰) = ۱ - \big(۲ - E(S)\big)\frac{k_{n+۱} - k_n}{g_n - g_{n+۱}},$$

تقریب زد و با تولید دنباله‌های g_n و k_n و محاسبه $E(S)$ مقدار $\psi(۰)$ را برآورد نمود.

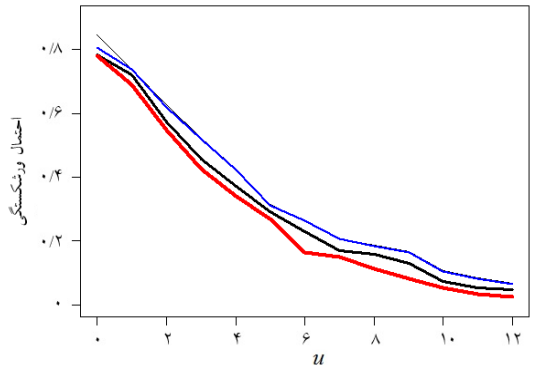
مثال ۱. فرض کنید متغیرهای تصادفی $Y_۱$ و $Y_۲$ دارای تابع چگالی پواسن دو متغیری داده شده در رابطه (۲) باشد. اگر $\lambda_۱ = ۰/۳$ و $\lambda_۲ = ۱/۴$ و مقادیر کواریانس $\lambda_۳ = \{۰/۰۱, ۰/۱۲, ۰/۲۵, ۰/۲۸\}$ باشد. برای مقادیر $n = \{۰, ۱, \dots, ۲۰\}$، دنباله‌های g_n و k_n و احتمال ورشکستگی در $u = ۰$ برای $\lambda_۳ = ۰/۱۲$ محاسبه و نتایج در جدول ۱ آورده شده‌اند. چون $n = ۲۰$ است، برای یافتن $g_{۲۰}$ لازم است که مقادیر چگالی‌های توام $f_{۰,۰}, \dots, f_{۱۹,۰}$ محاسبه شوند. تمام این مقادیر از چگالی توام رابطه (۲) بدست می‌آیند. همچنین برای یافتن $k_{۲۱}$ بایستی مقادیر چگالی‌های توام $f_{۰,۰}, \dots, f_{۲۰,۰}$ محاسبه شوند. احتمال ورشکستگی با استفاده از رابطه بازگشتی در قضیه ۱ برای مقادیر مختلف سرمایه اولیه محاسبه و نتایج در جدول ۲ داده شده‌اند. در نهایت نمودار احتمالات ورشکستگی در شکل ۱ رسم شده‌اند، که در آن نمودار با خط تیره کم رنگ برای $\lambda_۳ = ۰/۲۸$، نمودار آبی رنگ برای $\lambda_۳ = ۰/۲۵$، نمودار با رنگ تیره پر رنگ برای $\lambda_۳ = ۰/۱۲$ و نمودار قرمز رنگ برای $\lambda_۳ = ۰/۰۱$ است. از جدول ۲ ملاحظه می‌شود که برای هر مقدار کواریانس، با افزایش سرمایه اولیه احتمال ورشکستگی کمتر می‌شود. همچنین برای هر مقدار از سرمایه اولیه، با افزایش مقدار کواریانس، احتمال ورشکستگی در حال افزایش است و این نتیجه با نتایج بازیاری (۱۳۹۱) در مدل مخاطره انفرادی کاملاً سازگار است.

جدول ۱. مقادیر دنباله‌های g_n و k_n و تقریب احتمال ورشکستگی $\psi(۰)$ برای nهای مختلف

$\psi(۰)$	k_n	g_n	n
۰/۷۵۹۳	۰	۱	۰
۰/۸۰۷۹	$۴/۰۵۵۲e+۰۰$	$-۴/۰۵۵۲e+۰۰$	۱
۰/۷۹۵۱	$-۵/۶۷۷۲e+۰۰$	$۱/۱۱۵۱e+۰۱$	۲
۰/۷۹۸۳	$۲/۶۱۷۲e+۰۱$	$-۳/۵۴۷۸e+۰۱$	۳
۰/۷۹۷۵	$-۷/۰۶۶۸e+۰۱$	$۱/۰۸۵۴e+۰۲$	۴
			...
۰/۷۹۷۷	$۶/۳۷۱۹e+۰۵$	$-۶/۲۵۵۰e+۰۷$	۱۵
۰/۷۹۷۷	$۱/۶۶۳۷e+۰۸$	$-۲/۴۶۶۱e+۰۸$	۱۷
۰/۷۹۷۷	$۱/۵۸۰۴e+۰۹$	$-۲/۳۴۳۳e+۰۹$	۱۹
۰/۷۹۷۷	$-۴/۸۷۱۷e+۰۹$	$۷/۲۲۳۱e+۰۹$	۲۰

جدول ۲. مقادیر احتمال ورشکستگی $\psi(u)$ برای uهای مختلف

θ				
۰/۲۸	۰/۲۵	۰/۱۲	۰/۰۱	u
۰/۸۴۵۷	۰/۸۰۶۳	۰/۷۸۴۵	۰/۷۸۱۷	۰
۰/۷۳۷۱	۰/۷۳۶۸	۰/۷۱۹۸	۰/۶۹۰۴	۱
۰/۶۲۸۰	۰/۶۱۹۳	۰/۵۷۳۶	۰/۵۴۸۲	۲
۰/۵۲۲۱	۰/۵۱۹۴	۰/۴۵۷۳	۰/۴۲۵۶	۳
۰/۴۲۶۹	۰/۴۲۲۶	۰/۳۷۲۸	۰/۳۴۰۱	۴
۰/۳۱۵۳	۰/۳۱۰۹	۰/۲۹۳۵	۰/۲۶۸۱	۵
۰/۲۶۴۰	۰/۲۶۲۴	۰/۲۲۸۴	۰/۱۶۵۷	۶
۰/۲۰۷۹	۰/۲۰۵۸	۰/۱۷۱۳	۰/۱۴۹۲	۷
۰/۱۸۵۷	۰/۱۸۳۳	۰/۱۵۸۵	۰/۱۱۳۹	۸
۰/۱۶۶۲	۰/۱۶۴۳	۰/۱۲۹۶	۰/۰۸۲۱	۹
۰/۱۰۷۹	۰/۱۰۴۶	۰/۰۷۴۸	۰/۰۵۳۶	۱۰
۰/۰۸۵۱	۰/۰۸۲۴	۰/۰۵۲۸	۰/۰۳۳۷	۱۱
۰/۰۶۷۸	۰/۰۶۴۹	۰/۰۴۷۶	۰/۰۲۶۱	۱۲



شکل ۱. احتمالات ورشکستگی برای مثال ۱

مثال ۲. تابع مفصل (۳) را در نظر بگیرید. فرض کنید توابع چگالی حاشیه‌ای متغیرهای تصادفی Y_1 و Y_2 به‌ترتیب پواسن با پارامترهای ۰٫۳ و ۱/۴ بوده و نیز با توجه به تابع مفصل $v_1 = F_{Y_1}(y_1)$ و $v_2 = F_{Y_2}(y_2)$، $y_1 \geq 0$ و $y_2 \geq 0$، هستند. همچنین پارامتر سطح وابستگی در تابع مفصل فارلي-گامبل-مورگنشترن مقادیر $\theta = \{-0/9, 0/01, 1\}$ می‌باشند. احتمال ورشکستگی با روش شبیه‌سازی برای مقادیر مختلف سرمایه اولیه در هر سطح از پارامتر θ برآورد و نتایج در جدول ۳ داده شده‌اند. نتایج بدست آمده از جدول ۳ نشان می‌دهد که برای هر مقدار از پارامتر θ با افزایش سرمایه اولیه احتمال ورشکستگی کمتر می‌شود. همچنین برای هر مقدار از سرمایه اولیه، با افزایش سطح همبستگی، مقدار احتمال ورشکستگی زیادتر می‌شود. نمودار احتمالات ورشکستگی در شکل ۲ نشان داده شده است، که در آن نمودار با خط تیره کم رنگ برای $\theta = 1$، نمودار آبی رنگ برای $\theta = 0/01$ و نمودار قرمز رنگ برای $\theta = -0/9$ است. همچنین با استفاده از تابع مفصل فرانک دو متغیره برای $\theta = \{0/9, 0/4, 0/2\}$، احتمال ورشکستگی با روش شبیه‌سازی برای مقادیر مختلف سرمایه اولیه در هر سطح از پارامتر وابستگی برآورد شده و نتایج در جدول ۴ داده شده‌اند. نمودار احتمالات ورشکستگی در شکل ۳ نشان داده شده است، که در آن نمودار با خط تیره کم رنگ برای $\theta = 0/2$، نمودار آبی رنگ برای $\theta = 0/4$ و نمودار قرمز رنگ برای $\theta = 0/9$ است. برای تولید خسارت‌ها از تابع مفصل فرانک دو متغیره از روش ارایه شده توسط بازیاری (۱۳۹۱) استفاده می‌شود. هرچه مقدار پارامتر وابستگی در تابع مفصل فرانک دو متغیره بیشتر باشد میزان همبستگی کمتر است و برعکس. در این مثال، میزان وابستگی برای $\theta = 0/2$ بیشترین و برای $\theta = 0/9$ کمترین است.

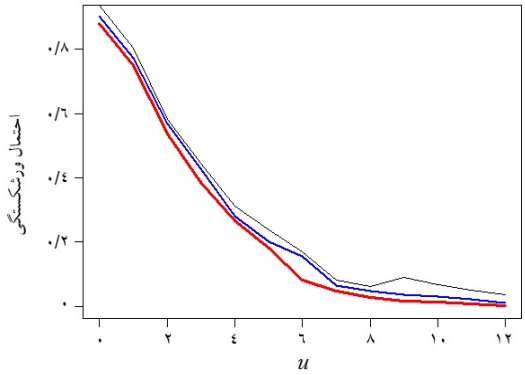
جدول ۳. مقادیر احتمال ورشکستگی $\psi(u)$ با تابع مفصل فارلي-گامبل-مورگنشترن برای uهای مختلف

θ			
۱	۰٫۰۱	$-0/9$	u
۰٫۹۳۷۲	۰٫۹۰۲۶	۰٫۸۸۰۲	۰
۰٫۸۰۳۲	۰٫۷۷۱۱	۰٫۷۴۹۲	۱
۰٫۵۸۱۴	۰٫۵۶۷۴	۰٫۵۳۵۰	۲
۰٫۴۴۵۳	۰٫۴۲۹۸	۰٫۳۸۶۰	۳
۰٫۳۱۲۸	۰٫۲۸۱۱	۰٫۲۶۵۳	۴
۰٫۲۳۸۰	۰٫۲۰۱۹	۰٫۱۸۱۵	۵
۰٫۱۷۰۲	۰٫۱۵۵۲	۰٫۰۸۲۷	۶
۰٫۰۸۱۶	۰٫۰۶۵۲	۰٫۰۴۸۸	۷
۰٫۰۶۱۱	۰٫۰۴۶۷	۰٫۰۲۷۸	۸
۰٫۰۹۱۱	۰٫۰۳۶۱	۰٫۰۱۷۳	۹
۰٫۰۶۹۱	۰٫۰۳۱۲	۰٫۰۱۲۹	۱۰
۰٫۰۵۰۷	۰٫۰۲۱۹	۰٫۰۰۷۶	۱۱
۰٫۰۳۵۳	۰٫۰۱۰۷	۰٫۰۰۳۲	۱۲

مثال ۳. در دو مثال قبل، توزیع‌های در نظر گرفته شده برای متغیرهای تصادفی اندازه‌های خسارت، توزیع‌های دم سبک بودند. اما در این مثال فرض می‌شود که متغیر تصادفی Y_1 دارای توزیع پواسن با پارامتر ۰٫۵ و متغیر تصادفی

جدول ۴. مقادیر احتمال ورشکستگی $\psi(u)$ با تابع مفصل فرانک دو متغیره برای uهای مختلف

θ			
۰/۲	۰/۴	۰/۹	u
۰/۹۳۲۶	۰/۹۲۷۴	۰/۹۰۶۵	۰
۰/۹۲۲۵	۰/۸۹۰۳	۰/۸۷۴۱	۱
۰/۹۰۱۶	۰/۸۵۷۰	۰/۸۲۶۲	۲
۰/۸۴۴۱	۰/۷۹۲۳	۰/۷۶۴۱	۳
۰/۷۴۶۰	۰/۷۱۴۸	۰/۶۹۳۱	۴
۰/۶۹۶۰	۰/۶۷۲۵	۰/۶۳۵۱	۵
۰/۶۰۳۶	۰/۵۷۰۱	۰/۵۴۶۸	۶
۰/۵۴۹۰	۰/۵۱۸۸	۰/۴۸۳۷	۷
۰/۴۷۸۷	۰/۴۵۹۶	۰/۴۰۱۶	۸
۰/۳۹۱۴	۰/۳۷۱۳	۰/۳۲۳۷	۹
۰/۳۲۲۶	۰/۲۹۹۴	۰/۲۶۳۳	۱۰
۰/۲۷۱۱	۰/۲۵۳۵	۰/۲۱۷۷	۱۱
۰/۲۲۵۱	۰/۱۹۶۲	۰/۱۴۶۲	۱۲



شکل ۲. احتمالات ورشکستگی برای مثال ۲ با تابع مفصل فارلي-گامبل-مورگنشترن

$Y_۲$ دارای توزیع دم سنگین لاگ نرمال $LN(-۰/۲, ۱)$ با تابع چگالی

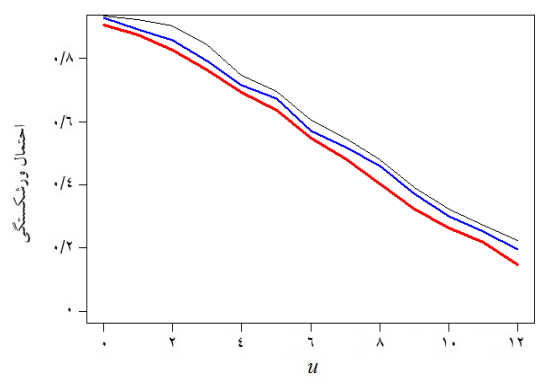
$$f_{Y_۲}(y_۲) = \frac{۱}{y_۲\sqrt{۲\pi}} \exp\big(-\frac{(\ln y_۲ + ۰/۲)^۲}{۲}\big), \qquad y_۲ \geq ۰, \tag{۱۷}$$

باشند. پارامتر سطح وابستگی در تابع مفصل فارلي-گامبل-مورگنشترن مقادیر $\theta = \{-۰/۹, ۰/۰۱, ۱\}$ می‌باشند. همانند مثال ۲، مقادیر $v_۱$ و $v_۲$ به‌ترتیب از توابع توزیع پواسن و لاگ نرمال برآورد می‌شوند. احتمال ورشکستگی با روش شبیه‌سازی برای مقادیر مختلف سرمایه اولیه برآورد و نتایج در جدول ۵ داده شده‌اند. با توجه به جدول ۵، ملاحظه می‌شود که برای هر مقدار سرمایه اولیه در $\theta = -۰/۹$ که کمترین سطح همبستگی بین خسارت‌ها است، مقدار احتمال ورشکستگی کمترین بوده و با زیاد شدن سطح همبستگی بین خسارت‌ها احتمال ورشکستگی

نیز افزایش می‌یابد. همچنین با زیاد شدن u، احتمال ورشکستگی شرکت کمتر می‌شود. مقادیر بزرگ احتمالات ورشکستگی بخاطر وجود توزیع دم سنگین لاگ نرمال در مدل مخاطره است. وجود این نوع خسارت‌ها در مدل می‌تواند برای شرکت بیمه خطرناک باشد و آن شرکت را تا مرز ورشکستگی پیش ببرد و به همین دلیل در این‌گونه مدل‌ها لازم است تا قراردادهای بیمه اتکایی منعقد شود (رنگینیان و همکاران ، ۱۳۹۷؛ بازیاری و علیزاده ، ۱۴۰۱).

جدول ۵. مقادیر احتمال ورشکستگی $\psi(u)$ برای uهای مختلف

θ			
۱	۰/۰۱	−۰/۹	u
۰/۹۷۳۶	۰/۹۷۱۵	۰/۹۶۹۳	۰
۰/۹۶۹۱	۰/۹۶۶۸	۰/۹۶۴۱	۱
۰/۹۶۱۵	۰/۹۵۷۸	۰/۹۵۷۳	۲
۰/۹۵۸۱	۰/۹۵۵۳	۰/۹۵۲۳	۳
۰/۹۵۷۰	۰/۹۵۴۰	۰/۹۵۱۱	۴
۰/۹۵۰۳	۰/۹۴۸۹	۰/۹۴۶۷	۵
۰/۹۴۶۱	۰/۹۴۵۸	۰/۹۴۵۲	۶
۰/۹۴۴۲	۰/۹۴۴۰	۰/۹۴۲۷	۷
۰/۹۴۳۰	۰/۹۴۲۶	۰/۹۴۱۶	۸
۰/۹۴۲۷	۰/۹۴۱۰	۰/۹۴۰۵	۹
۰/۹۴۰۱	۰/۹۳۹۶	۰/۹۳۸۳	۱۰
۰/۹۳۹۲	۰/۹۳۸۸۱	۰/۹۳۸۱	۱۱
۰/۹۳۸۴	۰/۹۳۸۰	۰/۹۳۷۷	۱۲



شکل ۳. احتمالات ورشکستگی برای مثال ۲ با تابع مفصل فرانک دو متغیره

مثال ۴. فرض کنید متغیر تصادفی Y_1 دارای توزیع پواسن با پارامتر ۰/۸ و متغیر تصادفی Y_2 دارای توزیع دم سنگین پارتو $Pa(1/5, 1)$ با تابع چگالی $f_{Y_2}(y_2) = \frac{1/5}{y_2^{2/5}}$، $y_2 \geq 1$ باشند. امید ریاضی متغیر تصادفی Y_2 برابر با ۳ است. پارامتر سطح وابستگی در تابع مفصل فارلي-گامبل-مورگنشترن (۳) مقادیر $\theta = \{-0/25, 0/1, 0/42\}$ در نظر گرفته شده است. مقادیر v_1 و v_2 به‌ترتیب از توابع توزیع پواسن و پارتو برآورد می‌شوند. با روش شبیه‌سازی،

احتمال ورشکستگی برای مقادیر مختلف سرمایه اولیه محاسبه و نتایج در جدول ۶ آورده شده‌اند. از جدول ۶ ملاحظه می‌شود که برای هر مقدار ثابت u، برای $\theta = -۰/۲۵$ که کمترین مقدار سطح همبستگی بین خسارت‌ها است، احتمال ورشکستگی کمترین مقدار را دارد و با زیاد شدن سطح همبستگی بین خسارت‌ها، احتمال ورشکستگی نیز افزایش می‌یابد. با افزایش سرمایه اولیه، مقدار احتمال ورشکستگی نیز کاهش می‌یابد.

جدول ۶. مقادیر احتمال ورشکستگی $\psi(u)$ برای uهای مختلف

	θ		
u	$-۰/۲۵$	۰/۱	۰/۴۲
۰	۰/۹۵۲۲	۰/۹۵۸۴	۰/۹۷۵۴
۱	۰/۹۴۹۶	۰/۹۵۳۱	۰/۹۷۰۳
۲	۰/۹۴۳۸	۰/۹۴۸۹	۰/۹۶۴۳
۳	۰/۹۳۹۰	۰/۹۴۲۶	۰/۹۵۸۳
۴	۰/۹۳۵۸	۰/۹۳۹۷	۰/۹۵۱۱
۵	۰/۹۳۱۷	۰/۹۳۳۷	۰/۹۴۷۲
۶	۰/۹۲۷۶	۰/۹۳۰۳	۰/۹۴۱۹
۷	۰/۹۲۰۴	۰/۹۲۶۵	۰/۹۳۵۱
۸	۰/۹۱۷۱	۰/۹۲۲۴	۰/۹۳۰۲
۹	۰/۹۱۲۶	۰/۹۱۸۹	۰/۹۲۵۵
۱۰	۰/۹۰۷۳	۰/۹۱۱۱	۰/۹۲۲۳
۱۱	۰/۹۰۲۱	۰/۹۰۶۶	۰/۹۱۷۲
۱۲	۰/۸۹۱۱	۰/۸۹۷۷	۰/۹۱۰۱

مثال ۵. فرض کنید متغیر تصادفی $Y_۱$ دارای توزیع نرمال $N(۲, ۱)$ و متغیر تصادفی $Y_۲$ دارای توزیع دم سنگین لاگ نرمال داده شده در (۱۷) باشد. پارامتر سطح وابستگی در تابع مفصل فارلي-گامبل-مورگنشترن مقادیر $\theta = \{-۰/۸, ۰/۰۳, ۱\}$ در نظر گرفته شده است. مجدداً با روش شبیه‌سازی احتمالات ورشکستگی برای مقادیر مختلف سرمایه اولیه برآورد و نتایج در جدول ۷ داده شده‌اند. ملاحظه می‌شود که برای هر مقدار ثابت u، با افزایش سطح همبستگی بین خسارت‌ها مقدار احتمال ورشکستگی نیز زیادتر می‌شود. همچنین با زیاد شدن مقدار سرمایه اولیه، احتمال ورشکستگی کاهش می‌یابد. در این مثال، وجود توزیع دم سنگین لاگ نرمال در مدل مخاطره باعث بزرگ شدن مقادیر احتمالات ورشکستگی شده‌اند.

مثال ۶. با توجه به اینکه رخداد خسارت‌ها در آتش‌سوزی منازل مسکونی و مغازه‌ها، متغیرهای تصادفی وابسته هستند، در یک مطالعه در مورد چنین سبد بیمه‌ای از داده‌های بیمه معلم استان فارس به مدت ۱۰ سال متوالی از مهرماه سال ۱۳۹۰ تا مهرماه ۱۴۰۰ برای شهرستان‌های شیراز، کازرون، لار، لامرد، فیروزآباد، مرودشت، اقلید و آباده استفاده شده است. تعداد حوادث آتش‌سوزی در طول این ۱۰ سال گذشته در جدول ۸ آورده شده‌اند. فرض می‌شود که مقدار حق بیمه مدل مخاطره برابر با میانگین حق بیمه‌های دریافتی از بیمه‌گذاران باشد. با توجه به مقادیر خسارت‌های رخداده شده، آزمون نیکویی برازش برای متغیرهای تصادفی $Y_۱$ و $Y_۲$ با توزیع‌های پواسن انجام شده است. در برازش توزیع پواسن برای دو متغیر $Y_۱$ و $Y_۲$ در سطح معنی‌داری ۰/۰۵ مقادیر آماره آزمون به‌ترتیب ۸/۲۶ و ۱۰/۳۹ هستند. با توجه به اینکه $\chi^۲_{۰/۹۵}(۷) = ۱۴/۰۷$، بنابراین فرضیه وجود توزیع پواسن برای این دو متغیر

جدول ۷. مقادیر احتمال ورشکستگی $\psi(u)$ برای uهای مختلف

θ			
۱	۰٫۰۳	−۰/۸	
۰٫۹۵۳۸	۰٫۹۳۸۵	۰٫۹۲۲۷	۰
۰٫۹۳۵۷	۰٫۹۲۱۹	۰٫۹۱۰۴	۱
۰٫۹۲۰۹	۰٫۹۱۵۶	۰٫۹۰۳۸	۲
۰٫۹۰۸۵	۰٫۹۰۱۷	۰٫۸۹۴۶	۳
۰٫۹۰۲۴	۰٫۸۸۷۵	۰٫۸۷۵۲	۴
۰٫۸۸۱۱	۰٫۸۶۰۸	۰٫۸۵۹۲	۵
۰٫۸۶۰۵	۰٫۸۴۳۶	۰٫۸۳۵۳	۶
۰٫۸۵۰۰	۰٫۸۳۰۲۹	۰٫۸۱۵۵	۷
۰٫۸۳۱۵	۰٫۸۲۳۳	۰٫۷۹۶۵	۸
۰٫۸۲۳۶	۰٫۸۰۵۴	۰٫۷۸۳۲	۹
۰٫۸۰۲۶	۰٫۷۷۳۷	۰٫۷۶۰۹	۱۰
۰٫۷۷۳۴	۰٫۷۶۲۴	۰٫۷۴۳۷	۱۱
۰٫۷۶۹۰	۰٫۷۵۰۵	۰٫۷۳۹۱	۱۲

پذیرفته می‌شود. ضریب همبستگی مقدار ۰٫۸۲ گزارش داده شده که نشان از همبستگی نسبتاً قوی بین متغیرها است. با استفاده از تابع مفصل فرانک دو متغیره، احتمالات ورشکستگی برای مقادیر مختلف سرمایه اولیه در سطح ۰٫۸۲ محاسبه و نتایج در جدول ۹ داده شده‌اند، اگرچه در جدول ۹ برای پارامتر با مقادیر $\theta = \{۰/۹, ۰/۵, ۰/۳\}$ نیز نتایج احتمالات ورشکستگی برآورد شده‌اند. ملاحظه می‌شود که با افزایش سطح همبستگی بین خسارت‌ها، مقدار احتمال ورشکستگی نیز زیادتر می‌شود و البته هرچه میزان سرمایه اولیه شرکت بیشتر باشد، احتمال ورشکستگی کمتر خواهد بود.

جدول ۸. تعداد حوادث آتش‌سوزی در ۱۰ سال گذشته برای بعضی از شهرستان‌ها

سال										
۱۰	۹	۸	۷	۶	۵	۴	۳	۲	۱	شهرستان
۱۱۲	۸۵	۱۰۷	۹۶	۱۰۶	۹۷	۱۰۲	۹۱	۸۴	۸۹	شیراز
۱۹	۲۴	۲۳	۱۶	۱۷	۲۴	۱۸	۱۴	۲۰	۱۷	کازرون
۴۰	۳۹	۲۴	۲۹	۳۲	۲۵	۲۸	۴۱	۳۰	۲۷	لار
۱۹	۲۳	۱۶	۲۲	۱۵	۱۸	۳۱	۲۹	۲۱	۱۹	لامرد
۱۴	۲۳	۲۵	۱۵	۱۹	۲۱	۱۶	۱۷	۱۰	۱۲	فیروزآباد
۱۷	۱۳	۱۲	۸	۱۴	۱۱	۸	۱۴	۱۱	۹	مرودشت
۱۳	۲۳	۱۴	۱۸	۲۱	۱۶	۱۹	۱۰	۱۲	۱۶	اقلید
۲۴	۲۳	۲۰	۱۷	۱۳	۱۲	۱۸	۲۴	۲۱	۱۷	آباده

بحث و نتیجه‌گیری

مدل مخاطره انفرادی بیمه با خسارت‌های وابسته برای توزیع‌های دم سبک و سنگین در نظر گرفته شد. علاوه بر وابستگی بین خسارت‌ها، ساختار مدل طوری است که برای هر مقدار $i \in N$ بردار دوتایی متغیرهای اندازه‌های

جدول ۹. احتمال ورشکستگی $\psi(u)$ برای رخ‌داد خسارت‌ها در آتش‌سوزی منازل مسکونی و مغازه‌ها

θ				
۰٫۹	۰٫۸۲	۰٫۵	۰٫۳	u
۰٫۹۸۱۱	۰٫۹۷۸۴	۰٫۹۵۸۴	۰٫۹۵۲۲	۰
۰٫۹۷۵۳	۰٫۹۷۱۳	۰٫۹۵۳۱	۰٫۹۴۹۶	۱
۰٫۹۷۰۲	۰٫۹۶۶۳	۰٫۹۴۸۹	۰٫۹۴۳۸	۲
۰٫۹۶۴۸	۰٫۹۶۱۳	۰٫۹۴۲۶	۰٫۹۳۹۰	۳
۰٫۹۵۹۱	۰٫۹۵۵۱	۰٫۹۳۹۷	۰٫۹۳۵۸	۴
۰٫۹۵۳۲	۰٫۹۴۹۰	۰٫۹۳۳۷	۰٫۹۳۱۷	۵
۰٫۹۴۸۸	۰٫۹۴۳۹	۰٫۹۳۰۳	۰٫۹۲۷۶	۶
۰٫۹۴۳۱	۰٫۹۳۹۱	۰٫۹۲۶۵	۰٫۹۲۰۴	۷
۰٫۹۳۶۸	۰٫۹۳۰۲	۰٫۹۲۲۴	۰٫۹۱۷۱	۸
۰٫۹۳۰۶	۰٫۹۲۶۵	۰٫۹۱۸۹	۰٫۹۱۲۶	۹
۰٫۹۲۴۷	۰٫۹۱۹۳	۰٫۹۱۱۱	۰٫۹۰۷۳	۱۰
۰٫۹۱۸۰	۰٫۹۱۲۲	۰٫۹۰۶۶	۰٫۹۰۲۰	۱۱
۰٫۹۱۱۵	۰٫۹۰۷۱	۰٫۸۹۷۶	۰٫۸۹۱۱	۱۲

خسارت $(X_{۲i-۱}, X_{۲i})$ از یکدیگر مستقل و نیز این بردار دارای یک توزیع توام مشترک باشند. با استفاده از نامساوی‌های احتمالی، خواص دنباله‌ها و روش استقراء یک رابطه بازگشتی برای احتمال ورشکستگی زمان نامتناهی محاسبه شد. برای محاسبه احتمال ورشکستگی زمان نامتناهی با استفاده از قضیه ۱، بایستی $E(S) < ۲$ باشد، زیرا در غیر این صورت مقدار احتمال منفی می‌شود. در حالی‌که در قضیه ۲، باید $E(S) \geq ۲$ باشد و با توجه به شرایط مساله مقدار احتمال ورشکستگی زمان نامتناهی را محاسبه کرد. در مثال‌های عددی نشان داده شد که با افزایش سرمایه اولیه، مقدار احتمال ورشکستگی کمتر و با زیادتر شدن سطح همبستگی بین خسارت‌ها، مقدار احتمال ورشکستگی بیشتر خواهد شد. همچنین اثرات توزیع‌های دم سنگین روی مقدار احتمال ورشکستگی مورد بررسی قرار گرفت.

تقدیر و تشکر

نویسنده مقاله از سردبیر محترم، ویراستار و داوران محترم مجله علوم آماری کمال تشکر و قدردانی را دارد.از آقای مجید شهیدزاده بخاطر حمایت‌ها و کمک‌های بی‌دریغشان نیز تقدیر می‌شود.

مراجع

بازیاری، ا. و علیزاده، م.، (۱۴۰۱)، احتمال ورشکستگی زمان نامتناهی در مدل مخاطره بیمه اتکایی مازاد خسارت، مجله علوم آماری، ۱۶(۱)، ۶۲-۴۱.

بازیاری، ا.، (۱۳۹۶)، تحلیل احتمال ورشکستگی زمان نامتناهی در مدل مخاطره جمعی، مجله علوم آماری، ۱۱(۱)، ۳۶-۱۷.

بازیاری، ا.، (۱۳۹۱)، احتمال ورشکستگی فرآیند مخاطره انفرادی شرکت بیمه با خسارت‌های وابسته، مجله علوم آماری، ۶(۱)، ۳۷-۲۱.

رنگینیان، ز.، به فروز، م. و بازیاری، ا.، (۱۳۹۷)، نقدی بر استفاده از خسارت‌های دارای توزیع پارتو در مدل‌های مخاطره شرکت بیمه، مجله علوم آماری، ۱۲(۲)، ۴۲۹-۴۴۷.

Albrecher, H. and Boxma, O. J. (2004), A Ruin Model with Dependence Between Claim Sizes and Claim Intervals, *Insurance Mathematics and Economics*, **35(2)**, 245–254.

Asimit, A. V. and Badescu, A. L. (2010), Extremes on the Discounted Aggregate Claims in a Time Dependent Risk Model, *Scandinavian Actuarial Journal*, **2010(2)**, 93–104.

Asmussen, S. (2010), *Ruin Probability,* World Scientific, Singapore.

Bazyari, A. and Roozegar, R. (2019), Finite Time Ruin Probability and Structural Density Properties in the Presence of Dependence in Insurance Risk Model, *Communications in Statistics–Theory and Methods*, **48(5)**, 1284–1304.

Chen, Y. Liu, J. and Liu, F. (2015), Ruin with Insurance and Financial Risks Following the Least Risky FGM Dependence Structure, *Insurance Mathematics and Economics*, **62**, 98–106.

Chen, Y. (2011), The Finite Time Ruin Probability with Dependent Insurance and Financial Risks, *Journal of Applied Probability*, **48**, 1035–1048.

Cossette, H. Gaillardetz, P. Marceau, E. and Rioux, J. (2002), On Two Dependent Individual Risk Models, *Insurance Mathematics and Economics*, **30(2)**, 153–166.

De Pril, N. (1986), On the Exact Computation of the Aggregate Claims Distribution in the Individual Life Model, *ASTIN Bulletin*, **16**, 109–112.

De Vylder, F. E. (1996), Advance Risk Theory, Edition de I'University de ruxelles.

De Vylder, F. E. and Goovaerts, M. J. (1988), Recursive Calculation of Finite-Time Ruin Probabilities, *Insurance Mathematics and Economics*, **7**, 1–7.

Farlie, D. G. J. (1960), The Performance of Some Correlation Coefficients for a General Bivariate Distribution, *Biometrika*, **47**, 307–323.

Frank, M. J. (1979), On the Simultaneous Associativity of $F(x, y)$ and $x+y$–$F(x, y)$, *Aequationes mathematicae*, **19**, 194–226.

Gumbel, E. J. (1960), Bivariate Exponential Distributions, *Journal of the American Statistical Association*, **55**, 698–707.

Heyde, C. C. and Wang, D. (2009), Finite-Time Ruin Probability with an Exponential Lévy Process Investment Return and Heavy-Tailed Claims, *Advances in Applied Probability*, **41(1)**, 206–224.

Holgate, P. (1964), Estimation for the Bivariate Poisson Distribution, *Biometrika*, **51**, 241–245.

Huang, X. F., Zhang, T., Yang, Y., and Jiang, T. (2017), Ruin Probabilities in a Dependent Discrete-Time Risk Model With Gamma-Like Tailed Insurance Risks, *Risks*, 5, 14; doi:10.3390/risks5010014,

Kuipers, L., and Niederreiter, H. (1974), Uniform Distribution of Sequences, Wiley, New York.

Morgenstern, D. (1956), Einfache Beispiele Zweidimensionaler Verteilungen, Mitteilungsblatt fürMathematische Statistik, **8**, 234–235.

Panjer, H. H. (1986), Direct Calculation of Ruin Probabilities, *The Journal of Risk and Insurance*, **53**, 521–29.

Santana, D. J., and Rincón, L. (2020), Approximations of the Ruin Probability in a Discrete Time Risk Model, *Modern Stochastics Theory and Applications*, **7(3)**, 221–243.

Sun, Y., and Wei, L. (2014), The Finite-Time Ruin Probability with Heavy-Tailed and Dependent Insurance and Financial Risks, *Insurance Mathematics and Economics*, **59**, 178–183.

Torrado, N., and Navarro, J. (2021), Ranking the Extreme Claim Amounts in Dependent Individual Risk Models, *Scandinavian Actuarial Journal*, **2021(3)**, 218–247.

Weng, C., Zhang, Y., and Tan, K. S. (2013), Ruin Probabilities in a Discrete Time Risk Model with Dependent Risks of Heavy Tail, *Scandinavian Actuarial Journal*, **3**, 205–218.

Yang, Y., and Konstantinides, D. G. (2015), Asymptotics for Ruin Probabilities in a Discrete-Time Risk Model with Dependent Financial and Insurance Risks, *Scandinavian Actuarial Journal*, **8**, 641–659.

Yang, Y., Leipus, R., and Šiaulys, J. (2012), On the Ruin Probability in a Dependent Discrete Time Risk Model with Insurance and Financial Risks, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **236**, 3286–3295.

Yuen, K. C., Li, J. and Wu, R. (2013), On a Discrete-Time Risk Model with Delayed Claims and Dividends, *Financial Derivatives and Risk Models*, **4(1)**, 3–16.