Journal of Statistical Sciences, Spring and Summer, 2023
Vol. 17, No. 1, pp 21-42
DOI: 10.52547/jss.17.1.2

# Optimal Ruin Probabilities in the Excess Loss Reinsurance Model

Bazyari, A., Department of Statistics, Faculty of Intelligent Systems Engineering and Data Science, Persian Gulf University, Bushehr, Iran.

**Corresponding author:** ab_bazyari@pgu.ac.ir

**Received:** 24/7/2022 **Revised:** 21/4/2023 **Accepted and Published Online:** 4/5/2023.

## Introduction

In the excess loss reinsurance risk model, the amount of insurance premium paid by the company is influential in the ruin of that company. In this paper, the premium function is presented based on the expected amount of total payments of the reinsurer to the assigning insurer, the constraint on this function is investigated, and for the claims with any arbitrary distribution, the contour plots are drawn and with presenting optimization algorithm, infinite time ruin probability function will be minimum for different values of initial capital and threshold value. Finally, the excess loss reinsurance risk model with non-exponential claims is considered, and the infinite time ruin probability is calculated with numerical examples.

## Material and Methods

We constantly analyze an insurance company to compute the exact or approximation of the ruin-related quantities according to the situation of that insurance. Since the beginning of the new period of economic development, the insurance industry has developed rapidly and steadily. The excess loss reinsurance risk model is one of the main risk models in which the amount of insurance premium paid by the company is influential in the ruin of that company. In the present paper, we investigate one of the main ruin-related quantities: the premium function. This quantity can be obtained based on the reinsurer's expected total payments to the assigning insurer. In addition, for the claim amounts with any arbitrary statistical distribution, the contour plots are drawn. With the presenting optimization algorithm, the infinite time ruin probability function will be minimum for different initial

capital and threshold values. At last, we derive the infinite time ruin probability for the non-exponential claim amounts.

**Results and Discussion**

The risk process is one of the most important stochastic processes for an insurance company which can be defined as a discrete or continuous time in actuarial risk theory. It starts with a simple and inspiring model proposed by the Swedish actuary Filip Lundberg. Those who doubt ruin theory might be surprised to discover that the theory has many outdated disciplines of modern sciences and has stood up to challenges over a century. As every scientific theory evolves, ruin theory has grown from a simple but thought-intriguing model to a specialized area equipped with state-of-art techniques developed alongside many other areas in applied probability. In this article, for the collective risk model of excess loss reinsurance with the size of losses with exponential distribution, the contour diagrams of the premium function are drawn for different values of the mean of the exponential distribution. The higher insurance premiums should be collected from the insurers for the values that increase the ruin probability. Also, using the optimization algorithm, we obtained the minimum values of infinite time ruin probabilities. Finally, we calculated the number of damages with mixed exponential and gamma distributions, the infinite time ruin probability.

**Conclusion**

In an insurance model, in addition to calculating ruin probabilities, it is essential to find some values of these probabilities for some specific values. Of course, it is crucial to identify the type of insurance risk model that includes the distribution of claim amounts, insurance premiums and initial capital. Calculating and estimating probabilities in the insurance models can be a promising perspective for companies' future.

**Keywords:** Contour plot, Excess loss reinsurance model, Optimization algorithm, Premium function, Ruin probability.

**Mathematics Subject Classification (2010):** 91B70, 91B30.

©The Author(s). The Publisher is Iranian Statistical Society.
This is an open access article distributed under the terms and conditions of (CC BY-NC 4.0)

**مجله علوم آماری، بهار و تابستان ۱۴۰۲**
**جلد ۱۷، شماره ۱، ص ۲۱ – ۴۲**
DOI: 10.52547/jss.17.1.2
**مقاله پژوهشی**

# احتمالات بهینه ورشکستگی در مدل بیمه اتکایی مازاد خسارت

ابوذر بازیاری
گروه آمار، دانشگاه خلیج فارس، بوشهر

**نویسنده مسئول :** ابوذر بازیاری، ab_bazyari@pgu.ac.ir

تاریخ دریافت: ۱۴۰۱/۵/۲ تاریخ بازنگری: ۱۴۰۲/۲/۱ تاریخ پذیرش و انتشار: ۱۴۰۲/۲/۱۴

**چکیده:** در مدل مخاطره بیمه اتکایی مازاد خسارت مقدار حق بیمه‌ای که از طرف شرکت واگذارنده پرداخت می‌شود در ورشکستگی آن شرکت تاثیرگذار است. در این مقاله، تابع حق بیمه بر حسب مقدار کل پرداختی بیمه‌گر اتکایی به بیمه‌گر واگذارنده ارایه شده، محدود روی این تابع مورد بحث قرار گرفته و نیز برای وقتی‌که زمان‌های بین ورود اندازه خسارت‌ها دارای هر توزیع آماری دلخواهی باشند، نمودارهای کانتور آنها رسم شده‌اند و با ارایه الگوریتم بهینه‌سازی، تابع احتمال ورشکستگی زمان نامتناهی برای مقادیر مختلف سرمایه اولیه و مقدار آستانه مینیمم می‌شود. در نهایت مدل مخاطره بیمه اتکایی مازاد خسارت برای خسارت‌های غیرنمایی در نظر گرفته شده و با مثال‌های عددی به محاسبه احتمالات ورشکستگی زمان نامتناهی پرداخته شده است.

**واژه‌های کلیدی:** احتمال ورشکستگی، الگوریتم بهینه‌سازی، بیمه اتکایی مازاد خسارت، تبدیل لاپلاس، نمودار کانتور
**کد موضوع‌بندی ریاضی (۲۰۱۰):** 15E60، 99K60.

## ۱ مقدمه

بسیاری از شرکت‌های بیمه برای دوری از زیان حاصل از خسارت‌های بزرگ اقدام به سرمایه‌گذاری و انعقاد قراردادهای اتکایی می‌کنند. در قراردادهای اتکایی بخشی از حق بیمه را بابت پذیرش تعهد از سوی بیمه‌گر واگذارنده به بیمه‌گر اتکایی می‌دهند و مابقی را در سبد بیمه نگه می‌دارند. به هر جهت چون هدف شرکت‌های بیمه حداکثر کردن سود

©نویسند(گان). ناشر انجمن آمار ایران است.
این مقاله با دسترسی آزاد تحت شرایط و ضوابط (CC BY-NC 4.0) توزیع شده است.

حاصل از عملیات بیمه‌ای است، باید حد بهینه‌ای را برای این میزان نگه‌داری با توجه به سبد بیمه‌ای خود در نظر بگیرند. بیشتر تحقیقات انجام گرفته در زمینه بیمه اتکایی تنها با در نظر گرفتن منافع شرکت بیمه‌گر اصلی بوده و منافع شرکت بیمه‌گر اتکایی کمتر مورد توجه بوده است. در مدل بیمه اتکایی مازاد خسارت یافتن مقدار آستانه از دید بیمه‌گر برای کاهش احتمال ورشکستگی[1]، نقش بسزایی دارد.

لفور و لویسل (۲۰۰۸) احتمال ورشکستگی زمان متناهی را برای مدل‌های مختلف مخاطره بیمه شامل مدل‌های جمعی و گسسته-زمان محاسبه کردند. استیتسیاشویلی (۲۰۰۹) احتمال ورشکستگی را در مدل مخاطره جمعی[2] برای توزیع‌های با دم سنگین به‌دست آورد. لفور و لویسل (۲۰۰۹) احتمال ورشکستگی زمان متناهی در مدل مخاطره جمعی با فرض آنکه حق بیمه تابعی غیر منفی و غیر کاهشی از زمان باشد را محاسبه کردند. بازیاری (۱۳۹۶) احتمال ورشکستگی زمان نامتناهی را برای خسارت‌های دارای توزیع نمایی با استفاده از معادلات دیفرانسیل محاسبه کرد. بازیاری و روزگار (۲۰۱۹) احتمال ورشکستگی زمان متناهی را در مدل مخاطره جمعی با وجود وابستگی بین اندازه خسارت‌ها به‌دست آوردند. نویسندگان و محققان زیادی در زمینه بیمه اتکایی کار کرده‌اند که می‌توان از دایکین و همکاران (۱۹۹۳) نام برد. دیکسون و واترز (۱۹۹۶) با روش‌های عددی بهترین سهم نگهداری در قرارداد بیمه اتکایی مازاد خسارت توسط بیمه‌گر واگذارنده برای یافتن کمترین مقدار احتمال ورشکستگی زمان نامتناهی را به‌دست آوردند. اشمیدلی (۲۰۰۲) مدل مخاطره جمعی شرکت بیمه را برای یافتن کمترین مقدار احتمال ورشکستگی در قرارداد بیمه اتکایی مازاد خسارت در نظر گرفت. دیکسون و واترز (۲۰۰۴) احتمال ورشکستگی زمان نامتناهی در مدل مخاطره جمعی در قرارداد بیمه اتکایی را با وجود سود سهام بین بیمه‌گران واگذارنده محاسبه کردند. منگ و ژانگ (۲۰۱۰) از مدل بیمه اتکایی مازاد خسارت به عنوان ابزار مدیریت ریسک برای یک شرکت بیمه استفاده کرده و بهترین سهم نگهداری را برای به حداقل رساندن احتمال ورشکستگی تعیین کردند. ایسنبرگ و اشمیدلی (۲۰۱۱) بهترین مقدار بهینه‌ی مبلغ پرداختی از طرف بیمه‌گر اتکایی به بیمه‌گر واگذارنده را در مدل مخاطره جمعی در قرارداد بیمه اتکایی مازاد خسارت محاسبه کردند. بریور و بادسکو (۲۰۱۴) به محاسبه احتمال ورشکستگی در مدل مخاطره مارکوف با خسارت‌ها فازی و با افزایش سرمایه پرداختند. تعیین بهترین ملاک برای دریافت حق بیمه از بیمه‌گذاران در بیمه اتکایی توسط کائو و همکاران (۲۰۱۶) ارایه شده است. چن و شن (۲۰۱۸) با در نظر گرفتن مدل بیمه اتکایی مازاد خسارت بهترین مقدار سهم نگهداری با توجه به منافع مشترک بیمه‌گر و بیمه‌گر اتکایی را تعیین کردند. بازیاری و علیزاده (۱۴۰۱) احتمال ورشکستگی زمان نامتناهی در مدل بیمه‌ی اتکایی مازاد خسارت برای اندازه‌های خسارت دارای توزیع نمایی با افزایش سرمایه را محاسبه کردند. بازیاری (۲۰۲۳) احتمالات ورشکستگی در مدل مخاطره زمان-گسسته با افزایش سرمایه را محاسبه کرد.

در بخش ۲، به ارایه تعاریف و بیان برخی از ویژگی‌های مدل مخاطره پرداخته شده، همچنین مقادیر عددی تابع حق بیمه برای مقادیر مختلف سربار ایمنی محاسبه شده و نمودارهای کانتور[3] آنها رسم شده‌اند. در بخش ۳، با استفاده از یک

[1] Ruin probability
[2] Collective risk model
[3] Contour plots

الگوریتم، نمودارهای احتمالات ورشکستگی زمان نامتناهی در مدل مخاطره بیمه اتکایی مازاد خسارت رسم شده‌اند. همچنین الگوریتم بهینه‌سازی برای یافتن مقادیر مینیمم احتمالات ورشکستگی ارایه شده و بر اساس آن، مقادیر مینیمم احتمالات ورشکستگی برای زمان‌های رخداد بین خسارت‌ها برای برخی از توزیع‌های آماری محاسبه شده‌اند. در بخش ۴، ضمن محاسبه تبدیل لاپلاس تابع ورشکستگی، مدل بیمه اتکایی مازاد خسارت برای اندازه خسارت‌های غیرنمایی در نظر گرفته شده و با توجه به احتمال ورشکستگی کلاسیک (دفرسن و گربر ، ۱۹۸۸؛ سانتانا و همکاران ، ۲۰۱۶) به محاسبه احتمال ورشکستگی زمان نامتناهی برای اندازه خسارت‌ها با توزیع نمایی آمیخته و توزیع گاما پرداخته شده است. نتیجه‌گیری در بخش ۵ ارایه شده است. لازم به توضیح است که رسم نمودارها با نرم‌افزار $RStudio$ نسخه ۳.۲.۳ و تمام الگوریتم‌ها در محیط نرم‌افزار $Mathematica$ نسخه ۱.۱.۱۱ نوشته شده است.

## ۲ تعاریف و ویژگی‌های مدل مخاطره جمعی

در این بخش، ضمن تعریف نمودار کانتور، توزیع‌های گامای آمیخته و نمایی آمیخته، مدل مخاطره جمعی شرکت بیمه ارایه شده سپس به ارایه مفهوم احتمال ورشکستگی زمان نامتناهی در آن مدل پرداخته می‌شود. همچنین تابع حق بیمه بر حسب مقدار کل پرداختی بیمه‌گر اتکایی به بیمه‌گر واگذارنده ارایه و نیز مقادیر عددی آن برای مقادیر مختلف سربار ایمنی محاسبه می‌شود.

از نمودار کانتور برای نمایش روابط بین سه متغیر به صورت دو بعدی استفاده می‌شود، که در آن سطوح کانتور به‌صورت منحنی رسم می‌شوند و نواحی بین منحنی‌ها مقادیر درون‌یابی هستند. این منحنی مکان هندسی کلیه نقاطی است که دارای ارتفاع یکسانی باشند. به عبارتی دیگر اصول ترسیم نمودار کانتورها به این‌صورت است که تعدادی صفحات افقی فرضی به فواصل معین، ناهمواری‌های زمین را قطع کرده و فصل مشترک چنین صفحاتی با ارتفاعات، نمودارهای بسته‌ای ایجاد می‌کند که به آنها نمودار کانتور گفته می‌شود. در حقیقت تمام نقاطی که بر روی یک نمودار کانتور هستند همگی از ارتفاع یکسانی برخوردارند و وقتی از یک منحنی به منحنی دیگر روی نقشه می‌رسیم، یعنی ارتفاع افزایش یا کاهش یافته است که به‌راحتی از روی اعداد درج شده روی نمودارها قابل دریافت است.

### ۲.۱ توابع توزیع گاما و نمایی آمیخته

فرض کنید $X_1, \ldots, X_n$ متغیرهای تصادفی و مستقل و هر یک از $X_i$ها دارای توزیع گاما $\Gamma(\alpha_i, \beta_i)$ باشند. چنانچه $0 < p_i < 1$ و $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$، آنگاه متغیر تصادفی $Y$ با تابع چگالی

$$f_Y(y) = \sum_{i=1}^{n} p_i f_{X_i}(y) = \sum_{i=1}^{n} \frac{p_i \beta_i^{\alpha} y^{\alpha_i - 1} e^{-\beta_i y}}{(\alpha_i - 1)!}, \quad y \geq 0$$

دارای توزیع گامای آمیخته است و با نماد $Y \sim H_n(p_1, \ldots, p_n; \alpha_1, \ldots, \alpha_n; \beta_1, \ldots, \beta_n)$ نمایش داده می‌شود. در حالت خاص اگر $X_1, \ldots, X_n$ متغیرهای تصادفی و مستقل به‌ترتیب دارای توزیع نمایی با پارامترهای $\mu_1, \ldots, \mu_n$ باشند، آنگاه متغیر تصادفی $Y$ با تابع چگالی

$$f_Y(y) = \sum_{i=1}^{n} p_i f_{X_i}(y) = \sum_{i=1}^{n} p_i \mu_i e^{-\mu_i y}, \quad y \geq 0, \tag{1}$$

که در آن $0 < p_i < 1$ و $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$، دارای توزیع نمایی آمیخته با میانگین $E(Y) = \sum_{i=1}^{n} \frac{p_i}{\mu_i}$ و تابع توزیع تجمعی $F_Y(y) = 1 - \sum_{i=1}^{n} p_i e^{-\mu_i y}$ است.

## ۲.۲ مدل مخاطره جمعی شرکت بیمه

فرض کنید $(\Omega, \mathbf{F}, P)$ یک فضای احتمال و $N = \{N(t) : t \geq 0\}$ یک فرآیند نقطه‌ای با فرض $N(0) = 0$ باشد و دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی و مستقل $\{X_k\}_{k=1}^{\infty}$ با تابع توزیع مشترک $F$ با فرض $F(0) = 0$، میانگین $\beta$ و واریانس $\sigma^2$ وجود داشته باشند. اگر یک شرکت بیمه با سرمایه اولیه $u$ شروع به فعالیت کند، آنگاه فرآیند مخاطره جمعی شرکت به‌صورت

$$R(t) = u + c\,t - \sum_{k=1}^{N(t)} X_k, \tag{2}$$

تعریف می‌شود، که در آن $ct$ مجموع حق بیمه‌های دریافتی از بیمه‌گذاران تا زمان ثابت $t$، متغیر تصادفی $X_k$، $k = 1, \ldots, N(t)$، اندازه خسارت رخ‌داده شده از طرف $k$امین بیمه‌گذار در بازه $[0, t]$ و دارای تابع توزیع مشترک $F$ با میانگین $\beta$ و $\sum_{k=1}^{N(t)} X_k$ مجموع خسارت‌های رخ‌داده شده تا زمان $t$ است. در این مدل، $\{N(t) : t \geq 0\}$ فرآیند تعداد خسارت‌های رخ‌داده شده از طرف بیمه‌گذاران تا زمان $t$ بوده و فرض می‌شود دارای فرآیند پواسون با پارامتر $\lambda$ باشد. همچنین در مدل مخاطره فرض می‌شود که زمان بین $k$امین و $k+1$امین خسارت متغیر تصادفی $T_k$ بوده، به‌طوریکه این متغیرها از هم مستقل و دارای هر توزیع پیوسته آماری باشند. در مدل مخاطره بیمه (۲)، مقدار حق بیمه در رابطه $c = (1 + \theta)\frac{E(X_k)}{E(T_k)}$، صدق می‌کند، که در آن $\theta$ سربار ایمنی بوده و عبارت است از مقدار کل هزینه‌هایی که شرکت بیمه بابت پرداخت حقوق کارکنان و بازاریابی متحمل می‌شود (آسموسن ، ۲۰۱۰). ورشکستگی وقتی اتفاق می‌افتد که برای کوچکترین مقدار $t \geq 0$، همواره $R(t) < 0$ باشد و فرض می‌شود که برای هر $u \geq 0$، $\psi(u) = P\big(R(t) < 0 | R(0) = u\big)$ احتمال ورشکستگی زمان نامتناهی بدون افزایش سرمایه باشد. در فرآیند مخاطره هرگاه مقدار فرآیند از مقدار آستانه $m$ کمتر شود، افزایش سرمایه توسط شرکت بیمه اتکایی انجام می‌شود. اندازه این افزایش سرمایه دقیقاً تفاضل بین $R(t)$ و $m$ است (بازیاری و علیزاده ، ۱۴۰۱). به عبارت دیگر، هرگاه سرمایه از حد معینی کمتر شود، بیمه‌گر اتکایی سرمایه را به سطح آستانه افزایش می‌دهد. اما جنبه دیگر

این قرارداد، حق بیمه‌ای است که شرکت بیمه واگذارنده باید در ازای افزایش سرمایه بپردازد. در این مدل، اگر سرمایه بعد از پرداخت حق بیمه $u$ باشد، آنگاه تفاضل $u$ از $R$ با مقدار حق بیمه برابر خواهد بود. اگر $\psi_m(u)$ احتمال ورشکستگی زمان نامتناهی با افزایش سرمایه در زمان $t$ باشد، آنگاه

$$\psi_m(u) = \psi(u-m) - G(u-m,m) \times \frac{1-\psi(0)}{1-G(0,m)}, \tag{3}$$

که در آن $G(u,y)$ تابع کسری ورشکستگی به‌صورت

$$G(u,y) = \frac{\psi(0)}{E(X)}\Big(\int_u^{u+y}(1-F(x))dx + \int_0^u (1-F(x))G(u-y,y)dy\Big), \tag{4}$$

است. به‌دلیل اینکه بیمه‌گر اتکایی نمی‌خواهد انتظار ضرر داشته باشد، از این رو حق بیمه باید بر اساس میزان مورد انتظار افزایش سرمایه و گاهی اوقات حتی لحظه دوم کل افزایش سرمایه انجام شده باشد. بدیهی است که حق بیمه شرکت بیمه واگذارنده تابعی از مقادیر $u$ و $m$، $(u \geq m)$، خواهد بود و با نماد $Q(u,m)$ نشان داده می‌شود و عبارت است از (دیکسون و درکیک ، ۲۰۰۶)

$$Q(u,m) + u = R, \quad 0 \leq m \leq u \leq R. \tag{5}$$

یکی از اهداف این مقاله، یافتن بهترین مقادیر برای $u$ و $m$، $(u \geq m)$ است که برای آنها احتمالات ورشکستگی زمان نامتناهی در مدل بیمه اتکایی مازاد خسارت $\psi_m(u)$ تحت تساوی (۵) کمترین مقدار شود. کاملاً بدیهی است که تابع $Q(u,m)$ تابعی افزایشی از مقدار $m$ است. یک اصل شناخته شده حق بیمه، اصلی است که در آن حق بیمه بر اساس مقدار پیش‌بینی شده کل پرداخت‌ها باشد. در واقع تساوی

$$Q(u,m) = (1+\theta)E(S_{u,m}), \tag{6}$$

برقرار است، که در آن $E(S_{u,m})$ متغیر تصادفی مقدار کل پرداختی بیمه‌گر اتکایی به بیمه‌گر واگذارنده تا رسیدن سرمایه به مقدار آستانه $m$ به‌صورت

$$E(S_{u,m}) = \int_0^m yg(u-m,y)dy + G(u-m,m)\frac{\int_0^m yg(0,y)dy}{1-G(0,m)}, \tag{7}$$

است که در آن تابع $G(u,y)$ در رابطه (۴) داده شده و $g(u,y) = \frac{d}{dy}G(u,y)$ است.

**مثال ۱.** فرض کنید که اندازه خسارت‌ها و زمان‌های رخداد آنها دارای توزیع نمایی با میانگین ۲/۵ باشند. سربار

ایمنی مقادیر ۱ و ۰/۵ و حق بیمه دریافتی از هر بیمه‌گذار برابر با ۲ است. مقادیر عددی تابع $Q(u,m)$ برای مقادیر مختلف مقدار آستانه و سرمایه اولیه محاسبه و در جدول ۱ آورده شده‌اند. همانطور که ملاحظه می‌شود برای هر مقدار از سرمایه اولیه، با افزایش $m$ مقدار تابع $Q(u,m)$ نیز در حال افزایش است.

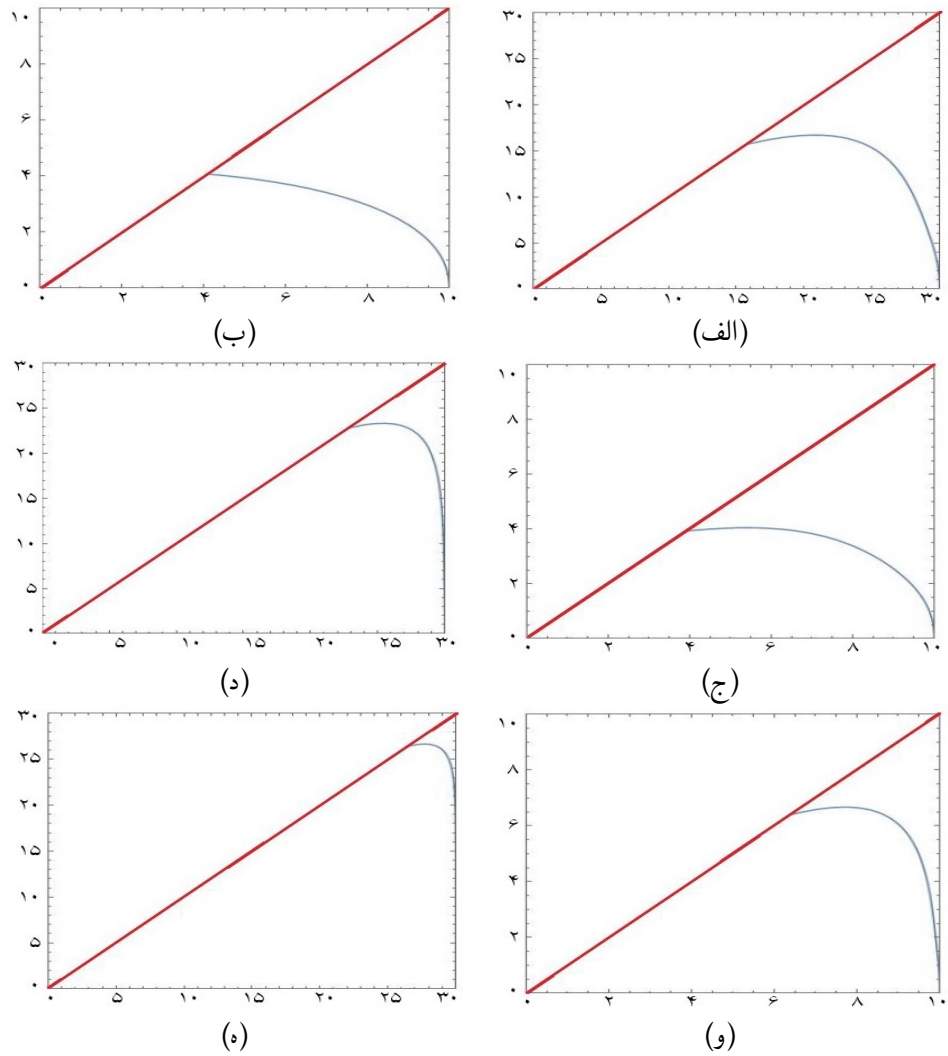
**جدول ۱.** مقادیر تابع $Q(u,m)$ برای مقادیر مختلف $m$ و $u$ و سربار ایمنی

| سربار ایمنی | $m$ | $u$ | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | ۱۰ | ۱۵ | ۲۵ | ۵۰ | ۸۰ | ۱۰۰ |
| | ۰/۱$u$ | ۰/۲۱۷۰ | ۰/۱۸۵۱ | ۰/۰۹۰۳ | ۰/۰۳۶۴ | ۰/۰۱۳۱۸ | ۰/۰۰۶۴۰ |
| | ۰/۲۵$u$ | ۰/۵۲۳۸ | ۰/۳۶۶۴ | ۰/۱۳۷۹ | ۰/۰۸۴۵ | ۰/۰۴۶۹ | ۰/۰۲۱۷ |
| | ۰/۵$u$ | ۰/۷۷۶۰ | ۰/۵۰۸۴ | ۰/۳۶۱۱ | ۰/۱۸۸۵ | ۰/۰۸۲۴ | ۰/۰۵۵۳ |
| ۱ | ۰/۷۵$u$ | ۲/۶۱۴۰ | ۱/۰۶۲۰ | ۰/۷۸۵۰ | ۰/۲۹۰۲ | ۰/۰۹۳۵ | ۰/۰۷۰۶ |
| | ۰/۹$u$ | ۴/۰۴۸۰ | ۳/۵۷۲ | ۳/۰۲۶۲ | ۲/۷۱۳۵ | ۱/۸۵۴۱ | ۰/۹۲۲۱ |
| | $u$ | ۶/۹۹۸ | ۴/۳۸۱۱ | ۳/۹۶۲۴ | ۲/۸۸۶۵ | ۲/۳۰۶۲ | ۲/۰۰۵۷ |
| | ۰/۱$u$ | ۰/۱۶۲۷ | ۰/۱۳۸۷ | ۰/۰۶۹۸ | ۰/۰۲۷۳ | ۰/۰۰۹۸ | ۰/۰۰۴۸ |
| | ۰/۲۵$u$ | ۰/۳۹۲۸ | ۰/۲۷۴۸ | ۰/۱۰۳۴ | ۰/۰۶۳۴ | ۰/۰۳۵۲ | ۰/۰۱۶۲ |
| | ۰/۵$u$ | ۰/۵۸۲۰ | ۰/۳۸۱۳ | ۰/۲۷۰۸ | ۰/۱۴۱۳ | ۰/۰۶۱۸ | ۰/۰۴۱۵ |
| ۲ | ۰/۷۵$u$ | ۱/۹۶۰۵ | ۰/۷۹۶۵ | ۰/۵۸۸۷ | ۰/۲۱۷۶ | ۰/۰۷۰۱ | ۰/۰۵۳۰ |
| | ۰/۹$u$ | ۳/۰۳۶۰ | ۲/۶۷۹۰ | ۲/۲۱۹۴ | ۲/۰۳۵۱ | ۱/۳۹۰۶ | ۰/۶۹۱۶ |
| | $u$ | ۴/۴۹۸۵ | ۳/۲۸۵۸ | ۲/۹۷۱۸ | ۲/۱۶۴۸ | ۱/۷۲۹۶ | ۱/۵۰۴۲ |

## ۲.۳ محدودیت روی تابع حق بیمه

ممکن است تساوی (۵) برای مقدار ثابت $u$ برقرار نباشد. به عبارت دیگر امکان دارد برای مقدار ثابت $u$ نامساوی $Q(u,m) \leq R-u$ برقرار باشد. برای مثال، در جدول ۱، ملاحظه می‌شود که برای $u=۱۰$، $Q(۱۰,۱۰)=$ ۶/۹۹۸ است. فرض کنید $R=۳۰$ باشد، به دلیل اینکه تابع $Q(u,m)$ تابعی افزایشی از $m$ است، بنابراین برای تمام مقادیر $m$ که $۰ \leq m \leq ۱۰$ مقدار تابع $Q(u,m)$ همواره کوچکتر از ۲۰ بوده و نامساوی برقرار است. تمام جنبه‌های گفته شده در مورد محدودیت روی تابع حق بیمه، دید خوبی از اینکه چه مقدار عددی ممکن است در تساوی $Q(u,m)+u=R$ برای $۰ \leq m \leq u \leq R$ قرار بگیرد را نشان می‌دهد.

**مثال ۲.** فرض کنید در مدل مخاطره جمعی مازاد خسارت، توزیع خسارت‌ها نمایی با پارامتر $\mu$ و زمان‌های بین ورود خسارت‌ها دارای توزیع گاما با پارامترهای $\alpha=۲$ و $\beta=۲$ باشد. اگر مقدار سربار ایمنی $\theta=۱$ باشد، آنگاه طبق رابطه (۶) حق بیمه شرکت بیمه واگذارنده به‌صورت $Q(u,m)=۲E(S_{u,m})$ خواهد بود. برای یافتن مقادیر احتمالات ورشکستگی، نمودارهای کانتور تابع حق بیمه برای مقادیر $\mu=۰/۵,۱,۲$ و $R=۱۰,۳۰$ در شکل ۱ رسم شده‌اند. همانطور که ملاحظه می‌شود، اگر $\mu=۰/۵$ و $R=۳۰$ باشد، مقادیر احتمالات ورشکستگی در بازه بسته $[۱۵,۳۰]$ بوده و برای $\mu=۲$ و $R=۳۰$ جواب‌های معادله در بازه بسته $[۲۶,۳۰]$ هستند. دلیل این تفاوت‌ها در مقدار اندازه خسارت‌ها است. برای مثال اگر $\mu=۰/۵$ باشد، احتمال ورشکستگی شرکت زیادتر خواهد بود و بنابراین در این حالت شرکت نیاز به افزایش سرمایه بیشتری دارد که در نتیجه آن حق بیمه زیادتر می‌شود. لازم به




**شکل ۱.** نمودار کانتور تابع حق بیمه، (الف) و (ب) برای $\mu = ۰/۵$، (ج) و (د) برای $\mu = ۱$، وه) و (ه) برای $\mu = ۲$

توضیح است که احتمال ورشکستگی شرکت بیمه همیشه مورد تحلیل قرار گرفته، اما با این حال تحلیل تابع در نقاطی که با محدودیت‌ها مطابقت ندارند، هیچ الزامی نیست و این شرایط برای $u = ۴$ و $k = ۱۰$ کاملاً صدق می‌کند.

# ۳ الگوریتم‌های تعیین احتمالات ورشکستگی زمان نامتناهی

تابع حق بیمه $Q(u,m)$ در رابطه (۵) از فضای دو بعدی $R^۲$ به فضای یک بعدی $R$ تعریف می‌شود. در واقع این تابع به مقادیر $u$ و $k$ وابسته است که با داشتن یکی از آنها می‌توان دیگری را با استفاده از تساوی (۵) به‌دست آورد. اگر مقدار سرمایه اولیه مشخص باشد، آنگاه حداکثر یک مقدار $k$ وجود دارد که با داشتن این مقدار، احتمال ورشکستگی زمان نامتناهی در مدل بیمه مازاد خسارت محاسبه می‌شود. بنابراین برای تمام مقادیر سرمایه اولیه $u$ نمودار احتمال ورشکستگی زمان نامتناهی را می‌توان رسم کرد. در این بخش، احتمالات ورشکستگی زمان نامتناهی برای وقتی‌که متغیرهای تصادفی اندازه خسارت‌ها دارای توزیع نمایی با پارامتر $\mu$ و زمان‌های بین ورود دارای توزیع گاما باشند، محاسبه شده است.

## ۳.۱ الگوریتم محاسبه احتمالات ورشکستگی

الف- متغیرهای تصادفی اندازه خسارت دارای توزیع نمایی با پارامترهای $\mu = ۰/۵, ۱, ۲$ و زمان‌های بین ورود خسارت‌ها دارای توزیع گاما با پارامترهای $\alpha = ۲$ و $\beta = ۲$ هستند.

ب- مقادیر $c$ و $\eta$ محاسبه شوند.

ج- مقدار $E(S_{u,m})$ از (۷) محاسبه شود.

د- تابع کسری ورشکستگی با سرمایه اولیه $u$ و مشتق آن یعنی $g(u,y)$ برای $\psi(u) = (۱ - \frac{\mu}{\eta})e^{-\eta u}$ محاسبه شوند.

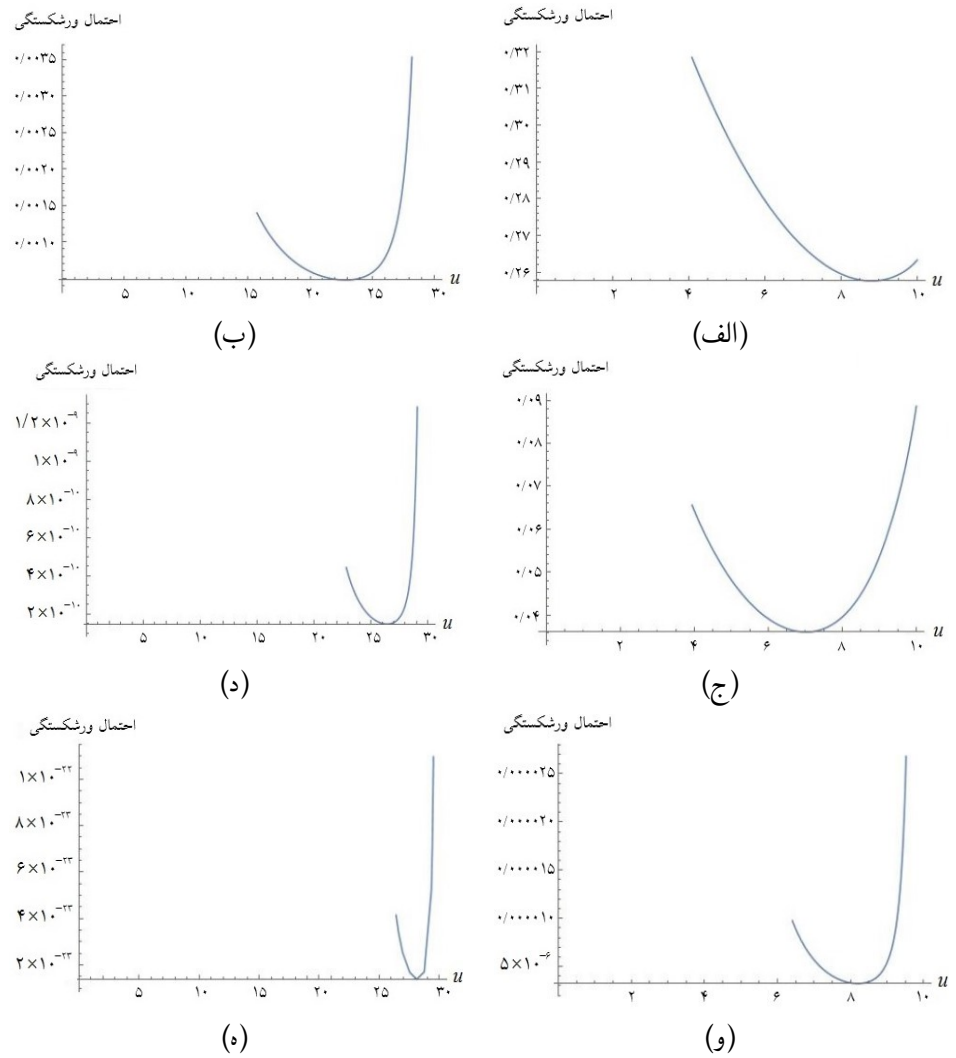
ه- با استفاده از $(۱+\theta)E(S_{u,m}) = R - u$، برای $۰ \leq m \leq u \leq R$، مقدار $m$ برای $R$های مختلف به‌دست آید.

و- احتمالات ورشکستگی زمان نامتناهی برای هر مقدار $u$ محاسبه و سپس نمودارهای آنها رسم شوند.

با توجه به نمودارهای کانتور در شکل ۲ ملاحظه می‌شود که اولاً تابع احتمال ورشکستگی $\psi_m(u)$ تابعی محدب روی دامنه $\{(u,k)|Q(u,m)+u = R, \quad ۰ \leq m \leq u \leq R\}$ است. ثانیاً در هیچ‌کدام از این نمودارها مقدار مینیمم احتمال ورشکستگی در نقطه $u = R$ اتفاق نمی‌افتد، بنابراین مقادیر مختلفی از $u$ و $m$ وجود دارند که احتمال ورشکستگی را مینیمم کنند. از آنجایی که به نظر می‌رسد با بهینه‌سازی واقعاً می‌توان مقدار مینیمم احتمال ورشکستگی را به‌دست آورد، اما تعیین اینکه چگونه می‌توان چنین بهینه‌ای را یافت، لازم است. ایده‌ای که در اینجا مطرح می‌شود استفاده از یک الگوریتم برای بهینه‌سازی احتمال ورشکستگی است.

## ۳.۲ الگوریتم محاسبه بهینه احتمالات ورشکستگی

الگوریتمی مفید است که نتیجه آن منجر به یافتن حداقل‌های محلی همگرا شود و البته وجود یا عدم وجود حداقل‌های محلی را می‌توان با اثبات محدب بودن تابع احتمال ورشکستگی اثبات کرد. البته همیشه یافتن تابع احتمال




شکل ۲. احتمالات ورشکستگی زمان نامتناهی (الف) و (ب) برای $\mu = ۰/۵$، (ج) و (د) برای $\mu = ۱$، (و) و (ه) برای $\mu = ۲$

ورشکستگی کار راحتی نخواهد بود، با این حال از نمودارهای نشان داده شده در بالا به نظر می‌رسد که چنین موضوعی درست است. بهینه‌سازی با تغییر دادن مقادیر $u$ انجام می‌شود، در واقع برای یافتن مقدار مینیمم احتمال ورشکستگی باید تمام مقادیر سرمایه اولیه مورد بررسی قرار بگیرد که این کار بسیار زمان‌بر و طولانی است. به‌جای این‌کار تابع احتمال ورشکستگی را روی مجموعه معین و متناهی $\{۰, ۱, \ldots, R\}$ در نظر گرفته و مقدار مینیمم آن محاسبه

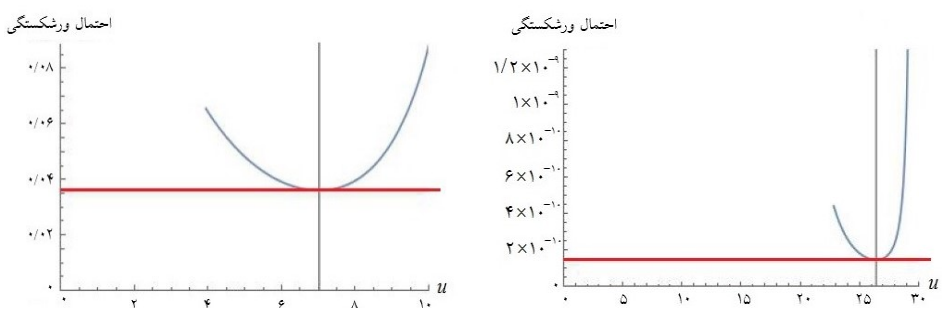
می‌شود. پس از یافتن مقدار مینیمم، مجموعه را به مجموعه‌ی کوچکتری تبدیل کرده به‌طوریکه نقطه مینیمم قبلی در وسط این مجموعه باشد. سپس مجدداً مقدار مینیمم را روی مجموعه جدید محاسبه کرده و این‌کار تا جایی ادامه پیدا می‌کند که نقطه مینیمم به‌دست آمده کوچکتر یا مساوی از تفاضل دو نقطه آخری در مجموعه باشد. الگوریتم این فرآیند در پیوست مقاله آمده است. در این الگوریتم، برای آنکه مقدار خطای نسبتاً کوچکی برای بهینه‌سازی الگوریتم به‌دست آید، باید یک انتخاب بهینه از کران برای $\omega$ داشته باشیم که $\omega \geq ۱۰^{-۱۰}$ انتخاب می‌شود.

**مثال ۳.** فرض کنید متغیرهای تصادفی اندازه خسارت دارای توزیع نمایی با پارامترهای $\mu = ۰/۵, ۱, ۲$ و زمان‌های بین ورود خسارت‌ها دارای توزیع گاما با پارامترهای $\alpha = ۲$ و $\beta = ۲$ باشند. با بکارگیری الگوریتم بهینه‌سازی مقادیر مینیمم احتمالات ورشکستگی برای $R = ۱۰, ۳۰$ و چند مقدار از $u$ و $m$ به‌دست آمده و نتایج در جدول ۲ ارایه شده‌اند. همانطور که ملاحظه می‌شود مقادیر مینیمم به‌دست آمده با مقادیر مینیمم در شکل‌های قبلی مطابقت

**جدول ۲.** مینیمم احتمالات ورشکستگی برای مقادیر $\mu$

| $R$ | $u$ | $m$ | $\psi_m(u)$ | $\mu$ |
|---|---|---|---|---|
| ۱۰ | ۸/۸۰۲ | ۲/۴۳۶ | ۰/۲۵۷۶ | ۰/۵ |
| ۳۰ | ۲۲/۸۴ | ۱۶/۴۷ | ۰/۰۰۰۴۷۴۸ | |
| ۱۰ | ۷/۰۱۶ | ۳/۸۳۳ | ۰/۰۳۶۰۷ | ۱ |
| ۳۰ | ۲۶/۴۱ | ۲۳/۲۳ | $۱/۴۷ \times ۱۰^{-۱۰}$ | |
| ۱۰ | ۸/۲۰۴ | ۶/۶۱۳ | $۳/۲۴۱ \times ۱۰^{-۶}$ | ۲ |
| ۳۰ | ۲۸/۲ | ۲۶/۶۱ | $۱/۳۷۷ \times ۱۰^{-۲۳}$ | |

دارند. برای وقتی‌که اندازه‌های خسارت دارای توزیع نمایی با $\mu = ۱$ و $R = ۱۰, ۳۰$ باشند، شکل ۳ در ارتباط با احتمالات ورشکستگی رسم شده‌اند. بنابراین الگوریتم برای این دو مورد خاص همگرا بوده و به‌خوبی عمل می‌کند.




(ب) (الف)

**شکل ۳.** احتمال ورشکستگی برای $\mu = ۱$ ، الف- $R = ۱۰$ و ب- $R = ۳۰$

**مثال ۴.** فرض کنید در مثال ۳ مقدار سربار ایمنی برابر با ۱ و تابع حق بیمه طبق رابطه (۶) باشد. مقادیر مینیمم احتمالات ورشکستگی برای مقادیر مختلف $R$ و چند مقدار از $u$ و $m$ محاسبه و نتایج در جدول ۳ ارایه شده‌اند.

**جدول ۳.** مینیمم احتمالات ورشکستگی با زمان‌های بین ورود خسارت‌ها دارای توزیع گاما

| $R$ | $u$ | $m$ | $\psi_m(u)$ | توزیع خسارت‌ها |
|---|---|---|---|---|
| ۱۰ | ۷/۰۱۶ | ۳/۸۳۳ | ۰/۰۳۶۰۷ | |
| ۱۳ | ۹/۴۸ | ۶/۲۹۷ | ۰/۰۰۳۲۸۷ | |
| ۱۵ | ۱۱/۴۲ | ۸/۲۳۷ | ۰/۰۰۰۴۷۴۸ | |
| ۲۰ | ۱۶/۴۱ | ۱۳/۲۳ | $۳/۲۴۱ \times ۱۰^{-۶}$ | $\Gamma(۲,۲)$ |
| ۲۵ | ۲۱/۴۱ | ۱۸/۲۳ | $۲/۱۸۴ \times ۱۰^{-۸}$ | |
| ۳۰ | ۲۶/۴۱ | ۲۳/۲۳ | $۱/۴۷۲ \times ۱۰^{-۱۰}$ | |

**مثال ۵.** اگر اندازه‌های خسارت دارای توزیع نمایی با $\mu_۱ = ۲$ و زمان‌های بین ورود خسارت‌ها دارای توزیع‌های گامای آمیخته $H_۲(۰/۸, ۰/۲, ; ۲, \frac{۱}{۲}; ۸, ۲)$ و $H_۲(۰/۲۵, ۰/۷۵, ; ۱۰, \frac{۱۵}{۸}; ۱, ۱)$ باشند. مقادیر مینیمم احتمالات ورشکستگی برای مقادیر مختلف $R$ و چند مقدار از $u$ و $m$ به‌دست آمده و نتایج در جدول ۴ ارائه شده‌اند.

**جدول ۴.** مینیمم احتمالات ورشکستگی با زمان‌های بین ورود خسارت‌ها دارای توزیع گامای آمیخته

| $R$ | $u$ | $m$ | $\psi_m(u)$ | توزیع خسارت‌ها |
|---|---|---|---|---|
| ۱۰ | ۹/۰۲۳ | ۱/۲۸۳ | ۰/۳۶۹۱ | |
| ۱۳ | ۹/۹۳۴ | ۲/۱۹۳ | ۰/۲۶۵۷ | |
| ۱۵ | ۱۰/۴۵ | ۲/۷۰۵ | ۲۰/۲۳ | $H_۲(۰/۸, ۰/۲, ; ۲, \frac{۱}{۲}; ۸, ۲)$ |
| ۲۰ | ۱۱/۹۱ | ۴/۱۷۲ | ۰/۰۶۷۷۸ | |
| ۲۵ | ۱۴/۹۷ | ۷/۲۲۷ | ۰/۰۰۳۶۶۶ | |
| ۳۰ | ۱۹/۸۳ | ۱۲/۰۹ | ۰/۰۰۰۰۲۸۴ | |
| ۱۰ | ۷/۰۶۰ | ۳/۹۷۳ | ۰/۰۳۰۵۲ | |
| ۱۳ | ۹/۶۰۲ | ۶/۵۱۴ | ۰/۰۰۲۵۴۷ | |
| ۱۵ | ۱۱/۵۶ | ۸/۴۶۸ | ۰/۰۰۰۳۶۲۷ | $H_۲(۰/۲۵, ۰/۷۵, ; ۱۰, \frac{۱۵}{۸}; ۱, ۱)$ |
| ۲۰ | ۱۶/۵۵ | ۱۳/۴۶ | $۲/۴۶۸ \times ۱۰^{-۶}$ | |
| ۲۵ | ۲۱/۵۵ | ۱۸/۴۶ | $۱/۶۶۳ \times ۱۰^{-۸}$ | |
| ۳۰ | ۲۶/۵۵ | ۲۳/۴۶ | $۱/۱۲۱ \times ۱۰^{-۱۰}$ | |

با آنکه برای مقدار ثابت $R$ مقادیر $u$ و $m$ در توزیع‌های گامای آمیخته داده شده تفاوت زیادی ندارند، اما تفاوت‌های زیادی در احتمالات ورشکستگی دیده می‌شود. برای توزیع‌های اول و دوم مقادیر واریانس به ترتیب اعداد ۳ و ۰/۴۶ هستند. واریانس بیشتر در توزیع اول نشان می دهد که احتمال بیشتری برای داشتن برخی خسارت‌ها با سرعت بسیار زیاد پس از یکدیگر وجود دارد. این بدان معنی است که احتمال ورشکستگی در مدل نیز افزایش می‌یابد. بنابراین با افزایش واریانس، مقدار کل پرداختی بیمه‌گر اتکایی به بیمه‌گر واگذارنده افزایش یافته که در نتیجه حق بیمه در مورد اصل ارزش مورد انتظار نیز افزایش می‌یابد.

# ۴ مدل بیمه اتکایی مازاد خسارت با خسارت‌های غیرنمایی

در این بخش، مدل بیمه اتکایی مازاد خسارت با خسارت‌های غیر نمایی در نظر گرفته شده و با توجه به احتمال ورشکستگی کلاسیک داده در دفرسن و گربر (۱۹۸۸) و سانتانا و همکاران (۲۰۱۶) به محاسبه احتمال ورشکستگی زمان نامتناهی برای اندازه‌های خسارت با توزیع نمایی آمیخته و توزیع گاما پرداخته شده است.

عبارت دوم طرف راست تابع کسری ورشکستگی (۴) پیچش دو تابع است که می‌توان آن را به‌صورت تبدیل لاپلاس نوشت. تبدیل لاپلاس تابع $G(u,y)$ به‌صورت $G^*(s,y)=\int_0^\infty e^{-su}G(u,y)du$ است. اگر $V(u,y)=\int_u^{u+y}\big(1-F(x)\big)dx$ باشد، آنگاه تبدیل لاپلاس تابع $V(u,y)$ به‌صورت

$$V^*(s,y)=\int_0^\infty e^{-su}V(u,y)du, \tag{۸}$$

است. همچنین فرض کنید $\hat{F}(x)=1-F(x)$ و $\hat{F}^*(s)=\int_0^\infty e^{-su}\hat{F}(u)du$، آنگاه تبدیل لاپلاس تابع $G(u,y)$ به صورت

$$G^*(s,y)=\frac{\psi(0)}{E(X)}\big(V^*(s,y)+\hat{F}^*(s)G^*(s,y)\big), \tag{۹}$$

است، اگر و فقط اگر تساوی $G^*(s,y)=\frac{\psi(0)V^*(s,y)}{E(X)-\psi(0)\hat{F}^*(s)}$، برقرار باشد. جون $\psi(0)=\frac{\lambda E(X)}{c}$، بنابراین $G^*(s,y)=\frac{\lambda V^*(s,y)}{c-\lambda\hat{F}^*(s)}$.

## ۴.۱ احتمال ورشکستگی برای خسارت‌های با توزیع نمایی آمیخته

فرض کنید متغیر تصادفی $X$ دارای تابع چگالی نمایی آمیخته داده شده در رابطه (۱) باشند، آنگاه

$$V(u,y)=\int_u^{u+y}\big(1-F(x)\big)dx=\sum_{i=1}^n\frac{p_i}{\mu_i}e^{-\mu_i u}(1-e^{-\mu_i y}).$$

با توجه به (۸)، تبدیل لاپلاس آن به صورت

$$V^*(s,y)=\int_0^\infty e^{-su}\sum_{i=1}^n\frac{p_i}{\mu_i}e^{-\mu_i u}(1-e^{-\mu_i y})du=\sum_{i=1}^n\frac{p_i}{\mu_i}\frac{1}{s+\mu_i}(1-e^{-\mu_i y}),$$

است. همچنین

$$\hat{F}^*(s) = \int_{\circ}^{\infty} e^{-su} \sum_{i=۱}^{n} p_i e^{-\mu_i u} du = \int_{\circ}^{\infty} \sum_{i=۱}^{n} p_i e^{-u(s+\mu_i)} du = \sum_{i=۱}^{n} \frac{p_i}{s+\mu_i},$$

و با جایگذاری در رابطه (۹)، مقدار $G^*(s,y)$ محاسبه و سپس مقدار $G(u,y)$ به‌دست می‌آید. برای محاسبه احتمال ورشکستگی زمان نامتناهی در مدل مخاطره بیمه اتکایی نیاز به مقدار احتمال ورشکستگی در مدل کلاسیک است. برای این کار از احتمال ورشکستگی $\psi(u) = \sum_{i=۱}^{n} \sum_{j=۱}^{n} C_{ji} e^{-r_i u}$ که در آن پارامترهای $r_۱, \ldots, r_n$ از حل معادله $\lambda \sum_{i=۱}^{n} \frac{p_i}{\mu_i - r} = c$، به‌دست می‌آیند و (دفرسن و گربر ، ۱۹۸۸)

$$C_{ji} = \frac{p_j}{\mu_j(\mu_j - r)} \Big( \sum_{s=۱}^{n} \frac{p_s}{(\mu_s - r_i)^۲} \Big)^{-۱}, \quad ۱ \le j \le n. \tag{۱۰}$$

به ازای $n = ۲$، متغیر تصادفی $X$ دارای تابع چگالی نمایی آمیخته

$$f_X(x) = p\mu_۱ e^{-\mu_۱ x} + (۱-p)\mu_۲ e^{-\mu_۲ x}, \quad x > \circ, \quad \circ < p < ۱,$$

است. در این صورت

$$\begin{aligned}
V^*(s,y) &= \frac{p}{\mu_۱(s+\mu_۱)}(۱ - e^{-\mu_۱ y}) \frac{۱-p}{\mu_۲(s+\mu_۲)}(۱ - e^{-\mu_۲ y}), \\
\hat{F}^*(s) &= \frac{p}{s+\mu_۱} + \frac{۱-p}{s+\mu_۲}, \\
G^*(s,y) &= \frac{۱}{\mu_۱(۱-p) + \mu_۲ p} \frac{A(y)s + B(y)}{(s+s_۱)(s+s_۲)},
\end{aligned} \tag{۱۱}$$

که در آن

$$\begin{aligned}
A(y) &= \psi(\circ)\big(p\mu_۲(۱ - e^{-\mu_۱ y}) + (۱-p)\mu_۱(۱ - e^{-\mu_۲ y})\big), \\
B(y) &= \psi(\circ)\big(p\mu_۲^۲(۱ - e^{-\mu_۱ y}) + (۱-p)\mu_۱^۲(۱ - e^{-\mu_۲ y})\big), \\
s_۱ &= \frac{c(\mu_۱ + \mu_۲) - \lambda + \sqrt{\big(c(\mu_۱ - \mu_۲) + \lambda\big)^۲ - ۴c\lambda p(\mu_۱ - \mu_۲)}}{۲c}, \\
s_۲ &= \frac{c(\mu_۱ + \mu_۲) - \lambda - \sqrt{\big(c(\mu_۱ - \mu_۲) + \lambda\big)^۲ - ۴c\lambda p(\mu_۱ - \mu_۲)}}{۲c}.
\end{aligned}$$

با استفاده از روش تجزیه کسر جزیی، خواهیم داشت

$$\begin{aligned}\frac{A(y)s+B(y)}{(s+s_۱)(s+s_۲)} &= \frac{c_۱(y)}{s+s_۱}+\frac{c_۲(y)}{s+s_۲}\\ &= \frac{s\big(c_۱(y)+c_۲(y)\big)+c_۱(y)s_۲+c_۲(y)s_۱}{(s+s_۱)(s+s_۲)},\end{aligned}$$

بنابراین $c_۱(y)=\frac{A(y)s_۱-B(y)}{s_۱-s_۲}$ و $c_۲(y)=\frac{B(y)-A(y)s_۲}{s_۱-s_۲}$. در نتیجه تساوی (۱۱) به‌صورت

$$G^*(s,y)=\frac{۱}{\mu_۱(۱-p)+\mu_۲p}\big(\frac{c_۱(y)}{s+s_۱}+\frac{c_۲(y)}{s+s_۲}\big),$$

خواهد بود و در نهایت معکوس تبدیل لاپلاس $G^*(s,y)$ عبارت است از

$$G(u,y)=\frac{۱}{\mu_۱(۱-p)+\mu_۲p}\big(c_۱(y)e^{-s_۱u}+c_۲(y)e^{-s_۲u}\big), \tag{۱۲}$$

**مثال ۶.** فرض کنید متغیر تصادفی $X$ دارای تابع چگالی نمایی آمیخته به‌صورت

$$f_X(x)=\frac{۱}{۳}\times ۰/۵e^{-۰/۵x}+\frac{۲}{۳}\times ۲e^{-۲x},\quad x>۰,$$

است و حق بیمه بیمه‌گذار برابر با ۲ و میانگین فرآیند پواسن $N(t)$ برابر با ۱ باشد. در این‌صورت $r_۱=۱/۷۱$ و $r_۲=۰/۳$ و با استفاده از (۱۰)، $C_۱=۰/۲۳۶۵$ و $C_۲=۰/۴۱۲۳$ است. بنابراین احتمال ورشکستگی زمان نامتناهی $\psi(u)=۰/۲۳۶۵e^{-۱/۷۱u}+۰/۴۱۲۳e^{-۰/۳u}$ با $\psi(۰)=۰/۶۴۸۸$ خواهد بود. همچنین

$$\begin{aligned}c_۱(y)&=-۰/۶۸۸۲+۱/۱۳۳۶e^{-۰/۵y}-۰/۱۸۴۵e^{-۲y}\\ c_۲(y)&=۰/۶۸۸۲+۰/۷۰۱۳۷e^{-۰/۵y}-۰/۰۳۱۶۵e^{-۲y}\end{aligned}$$

با استفاده از (۱۲)، خواهیم داشت

$$G(u,y)=\big(۰/۳۷۷۹e^{-۰/۵y}-۰/۰۶۱۵e^{-۲y}\big)e^{-۱/۷۱u}+\big(۰/۲۳۳۸e^{-۰/۵y}-۰/۰۱۰۶e^{-۲y}\big)e^{-۰/۲۹u}.$$

با استفاده از (۳) احتمالات ورشکستگی زمان نامتناهی در مدل بیمه اتکایی برای مقادیر مختلف مقدار آستانه و سرمایه اولیه محاسبه و نتایج در جدول ۵ آورده شده‌اند. همانطور که ملاحظه می‌شود که مقدار احتمال $\psi_m(u)$ با

افزایش سرمایه اولیه و افزایش مقدار آستانه، کاهش می‌یابد.

**جدول ۵.** احتمالات ورشکستگی زمان نامتناهی $\psi_m(u)$ برای مقادیر مختلف $u$ و $m$

| $m$ | $u$ = ۲ | ۵ | ۱۰ | ۲۰ |
|---|---|---|---|---|
| ۲ | ۰/۳۵۷۱ | ۰/۰۹۶۴۴ | ۰/۰۰۸۶۳ | ۱/۷۵۲۲e − ۰۲ |
| ۵ | ۰/۱۰۵۶ | ۰/۰۱۷۰ | ۰/۰۰۱۲ | ۱/۰۲۵۹e − ۰۲ |
| ۱۰ | ۰/۰۸۳۳ | ۰/۰۰۴۱ | ۰/۰۰۰۷ | ۵/۶۲۲۸e − ۰۳ |
| ۲۰ | ۰/۰۰۵۲ | ۰/۰۰۱۰ | ۰/۰۰۰۲ | ۴/۸۱۱۵e − ۰۶ |
| ۳۰ | ۰/۰۰۰۶ | ۲/۳۶۱۹e − ۰۲ | ۵/۰۰۴۶e − ۰۳ | ۶/۷۰۳۸e − ۰۷ |
| ۵۰ | ۴/۵۸۸۲e − ۰۳ | ۳/۹۶۰۷e − ۰۴ | ۴/۲۰۳۱e − ۰۶ | ۵/۰۸۴۶e − ۰۹ |

## ۴.۲ احتمال ورشکستگی برای خسارت‌های با توزیع گاما

فرض کنید متغیر تصادفی $X$ دارای توزیع گاما باشد. آنگاه

$$\begin{aligned} V(u,y) &= \int_u^{u+y} \big(۱ - F(x)\big)dx \\ &= \frac{۱}{\beta}e^{-\beta(u+y)} \sum_{k=۰}^{\alpha-۱}\sum_{m=۰}^{k} \frac{\big(\beta(u+y)\big)^m}{m!} + \frac{۱}{\beta}e^{-\beta u}\sum_{k=۰}^{\alpha-۱}\sum_{m=۰}^{k}\frac{\big(\beta u\big)^m}{m!}. \end{aligned}$$

همچنین $\hat{F}^*(s) = \frac{۱}{s+\beta}\sum_{k=۰}^{\alpha-۱}\big(\frac{\beta}{s+\beta}\big)^k$ است. به ازای $\alpha = ۲$ داریم

$$\begin{aligned} &V(u,y) = e^{-\beta u}\big(\frac{۲}{\beta}+u\big) - e^{-\beta(u+y)}\big(\frac{۲}{\beta}+u+y\big), \\ &V^*(s,y) = \frac{۳\beta + ۲s - e^{-\beta y}\big((۲+\beta y)s + \beta(۳+\beta y)\big)}{\beta(\beta+s)^۲}, \\ &\hat{F}^*(s) = \frac{۱}{s+\beta}\big(۱+\frac{\beta}{s+\beta}\big), \\ &G^*(s,y) = \frac{۱}{\beta c}\frac{A(y)s+B(y)}{(s+s_۱)(s+s_۲)}, \end{aligned}$$

که در آن $A(y) = \lambda\big(۲ - e^{-\beta y}(۲+\beta y)\big)$، $B(y) = \lambda\big(۳\beta - e^{-\beta y}\big(\beta(۳+\beta y)\big)\big)$، $s_۱ = -\frac{\lambda-۲\beta c+\sqrt{\lambda(\lambda+۴\beta c)}}{۲c}$ و $s_۲ = -\frac{\lambda-۲\beta c-\sqrt{\lambda(\lambda+۴\beta c)}}{۲c}$ است. در نهایت معکوس تبدیل لاپلاس تابع $G^*(s,y)$ به‌صورت

$$G(u,y) = \frac{۱}{\beta c}\big(c_۱(y)e^{-s_۱ u} + c_۲(y)e^{-s_۲ u}\big), \tag{۱۳}$$

است، که در آن

$$c_1(y) = -\frac{e^{-\beta y}\lambda\big((2-2e^{\beta y}+\beta y)(\lambda+\sqrt{\lambda(\lambda+4c\beta)}\big)-2\beta c\big(5-5e^{\beta y}+2\beta y\big)}{2\sqrt{\lambda(\lambda+4c\beta)}},$$
$$c_2(y) = \frac{e^{-\beta y}\lambda\big((2-2e^{\beta y}+\beta y)(\lambda-\sqrt{\lambda(\lambda+4c\beta)}\big)-2\beta c\big(5-5e^{\beta y}+2\beta y\big)}{2\sqrt{\lambda(\lambda+4c\beta)}}.$$

احتمال ورشکستگی زمان نامتناهی با استفاده از لم ۱ در سانتانا و همکاران (۲۰۱۶) ضرایب به‌صورت

$$\bar{C}_k = \begin{cases} \frac{1}{1+\theta} & k=0 \\ \frac{2+\theta}{2(1+\theta)^2} & k=1 \\ \frac{4+3\theta}{4(1+\theta)^3} & k=2 \\ \frac{\left(\bar{C}_{k-1}+\bar{C}_{k-2}\right)}{(1+\theta)^2} & k=3,4,\ldots \end{cases} \tag{14}$$

محاسبه می‌شوند. عبارت به‌دست آمده برای $k \geq 3$ یک معادله تکراری مرتبه دوم است که می‌توان با حل معادله مشخصه مربوطه آن را حل کرد (ادواردز ، ۲۰۱۵). معادله مشخصه آن به صورت $r^2 - \frac{1}{2(1+\theta)}r - \frac{1}{2(1+\theta)} = 0$ بوده که ریشه‌های این معادله $r_1 = \frac{1+\sqrt{9+8\theta}}{4(1+\theta)}$ و $r_1 = \frac{1-\sqrt{9+8\theta}}{4(1+\theta)}$ هستند. با توجه به ریشه‌های به‌دست آمده، ضرایب $\bar{C}_k$ در (۱۴) برای $k = 0, 1, 2, \ldots$ به‌صورت $\bar{C}_k = a(r_1)^k + b(r_2)^k$ خواهد بود، که در آن $a$ و $b$ مقادیر ثابت بوده و برای $k = 1, 2$ به صورت $a = \frac{3+2\theta+\sqrt{9+8\theta}}{2(1+\theta)\sqrt{9+8\theta}}$ و $b = \frac{-3-2\theta+\sqrt{9+8\theta}}{2(1+\theta)\sqrt{9+8\theta}}$ به‌دست می‌آیند. با استفاده از لم ۱، سانتانا و همکاران (۲۰۱۶) خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \psi(u) &= \sum_{k=0}^{\infty}\left(a(r_1)^k + b(r_2)^k\right)e^{-\beta u}\frac{(\beta u)^k}{k!} \\ &= \frac{3+2\theta+\sqrt{9+8\theta}}{2(1+\theta)\sqrt{9+8\theta}}e^{-\frac{\beta\left(2+2\theta-\sqrt{9+8\theta}\right)u}{4(1+\theta)}} + \frac{-3-2\theta+\sqrt{9+8\theta}}{2(1+\theta)\sqrt{9+8\theta}}e^{-\frac{\beta\left(2+2\theta+\sqrt{9+8\theta}\right)u}{4(1+\theta)}}. \end{aligned}$$

با جایگذاری (۱۳) و (۱۴) در رابطه (۳) برای وقتی‌که میانگین فرآیند پواسن برابر با ۱ باشد، احتمالات ورشکستگی زمان نامتناهی در مدل بیمه اتکایی برای مقادیر مختلف مقدار آستانه، سرمایه اولیه و $\theta = 2,5$ محاسبه و نتایج در جدول ۶ آورده شده‌اند، که نتایج حاصل مشابه جدول ۵ است.

**مثال ۷.** داده‌های مثال ۵ در ارتباط با شرکت بیمه معلم شهرستان بوشهر را در نظر بگیرید. با توجه به اینکه میانگین فرآیند تعداد خسارت‌ها ۲ است، از فرمول‌های (۳)، (۱۳) و (۱۴) با میانگین فرآیند تعداد خسارت‌های ۲، احتمالات ورشکستگی زمان نامتناهی در مدل برای مقادیر مختلف مقدار آستانه، سرمایه اولیه و $\theta = 50$ محاسبه و نتایج

**جدول ۶.** احتمالات ورشکستگی زمان نامتناهی $\psi_m(u)$ برای مقادیر مختلف $u$ و $m$

| $m$ | $u$ = ۲ | ۵ | ۱۰ | ۲۰ |
|---|---|---|---|---|
| ۲ | ۰/۲۷۲۶ | ۰/۰۸۰۴ | ۰/۰۰۵۶۳ | ۲/۲۱۲۶$e$ − ۰۵ |
| ۵ | ۰/۱۲۸۰ | ۰/۰۰۵۹ | ۰/۰۰۰۲ | ۴/۲۶۳۱$e$ − ۰۷ |
| ۱۰ | ۰/۰۱۳۶ | ۰/۰۰۰۳ | ۲/۰۴۴۵$e$ − ۰۵ | ۵/۱۵۰۲$e$ − ۰۸ |
| ۲۰ | ۰/۰۰۷۸ | ۵/۶۶۳۱$e$ − ۰۸۰ | ۳/۹۲۱۱$e$ − ۱۰ | ۱/۷۴۳۸$e$ − ۱۱ |
| ۳۰ | ۲/۸۴۴۸$e$ − ۰۹ | ۱/۳۶۴۰$e$ − ۰۹ | ۳/۲۵۴۰$e$ − ۱۳ | ۵/۳۰۲۷$e$ − ۱۴ |
| ۵۰ | ۱/۹۱۲۴$e$ − ۱۰ | ۴/۱۱۷۰$e$ − ۱۱ | ۵/۰۶۵۳$e$ − ۱۳ | ۷/۳۳۴۶$e$ − ۱۵ |

در جدول ۷ آورده شده‌اند. اندازه خسارت‌ها دارای توزیع نمایی با میانگین ۶۰۰۰۰۰ تومان هستند، با فرض آنکه زمان بین ورود خسارت‌ها دارای سه نوع توزیع گاما باشند، با استفاده از الگوریتم بهینه‌سازی مقادیر مینیمم احتمالات ورشکستگی برای $R = ۵, ۱۰$ و چند مقدار از $u$ و $m$ محاسبه و نتایج در جدول ۸ گزارش شده‌اند.

**جدول ۷.** احتمالات ورشکستگی زمان نامتناهی $\psi_m(u)$ برای مقادیر مختلف $u$ و $m$

| $m$ | $u$ = ۵ | ۱۰ | ۲۵ | ۳۵ |
|---|---|---|---|---|
| ۱۰ | ۰/۰۸۵۱ | ۰/۰۱۵۷ | ۰/۰۰۰۱ | ۳/۰۷۳۶$e$ − ۰۲ |
| ۲۰ | ۰/۰۲۳۷ | ۰/۰۰۰۲ | ۴/۳۴۱۰$e$ − ۰۶ | ۵/۳۳۴۶$e$ − ۰۶ |
| ۳۰ | ۰/۰۰۳۶ | ۶/۲۲۴۰$e$ − ۰۵ | ۲/۵۰۴۶$e$ − ۰۷ | ۶/۰۶۵۵$e$ − ۰۸ |
| ۴۰ | ۰/۰۰۰۲ | ۳/۸۵۵۱$e$ − ۰۷ | ۴/۸۷۲۰$e$ − ۱۱ | ۴/۳۵۵۲$e$ − ۱۲ |
| ۵۰ | ۳/۷۷۰۲$e$ − ۱۰ | ۱/۱۶۷۴$e$ − ۰۸ | ۲/۳۶۶۲$e$ − ۱۵ | ۳/۵۴۰۱$e$ − ۱۴ |
| ۶۰ | ۴/۴۹۲۱$e$ − ۱۱ | ۳/۰۹۳۵$e$ − ۱۲ | ۴/۱۷۰۰$e$ − ۱۶ | ۵/۶۰۱۷$e$ − ۱۵ |

**جدول ۸.** مینیمم احتمالات ورشکستگی با خسارت‌های دارای توزیع نمایی

| توزیع زمان بین ورودی خسارات‌ها | $\psi_m(u)$ | $m$ | $u$ | $R$ |
|---|---|---|---|---|
| $\Gamma(۲, ۳)$ | ۰/۰۳۷۱۴ | ۲/۴۳۶ | ۸/۸۰۲ | ۵ |
| | ۰/۰۰۵۲۸ | ۱۶/۴۷ | ۲۲/۸۴ | ۱۰ |
| $\Gamma(۳, ۵)$ | ۰/۰۰۱۸۶۴ | ۳/۸۳۳ | ۷/۰۱۶ | ۵ |
| | ۰/۰۰۰۳۶۱ | ۲۳/۲۳ | ۲۶/۴۱ | ۱۰ |
| $\Gamma(۴, ۶)$ | ۰/۰۰۷۱۵۵ | ۶/۶۱۳ | ۸/۲۰۴ | ۵ |
| | ۰/۰۰۰۳۳۴ | ۲۶/۶۱ | ۲۸/۲ | ۱۰ |

## ۵ بحث و نتیجه‌گیری

برای مدل مخاطره جمعی بیمه اتکایی مازاد خسارت با اندازه خسارت‌های دارای توزیع نمایی نمودارهای کانتور تابع حق بیمه برای مقادیر مختلف میانگین توزیع نمایی رسم و ملاحظه شد برای مقادیری که احتمال ورشکستگی شرکت زیادتر می‌شود باید حق بیمه‌های زیادتری هم از بیمه‌گذاران دریافت شود. در بخش ۳، با استفاده از یک الگوریتم که در آن نیاز به محاسبه مقادیر $E(S_{u,m})$ بود، احتمالات ورشکستگی زمان نامتناهی محاسبه و نمودار تابع احتمالات برای مقادیر مختلف $R$ رسم شدند. همچنین با استفاده از الگوریتم بهینه‌سازی، مقادیر مینیمم احتمالات ورشکستگی زمان نامتناهی به‌دست آمدند. در نهایت در مثال‌های عددی برای اندازه خسارت‌های با توزیع نمایی آمیخته و توزیع

گاما، احتمالات ورشکستگی زمان نامتناهی محاسبه و ملاحظه شد که با افزایش مقادیر سرمایه اولیه و مقدار آستانه، احتمال ورشکستگی کاهش می‌یابد.

**پیوست: الگوریتم بهینه‌سازی احتمالات ورشکستگی زمان نامتناهی** : ورودی‌ها تابع حق بیمه $Q(u,m)$، تابع احتمال ورشکستگی با افزایش سرمایه، سرمایه اولیه و مقادیر مجموعه معین و متناهی $\{۰, ۱, \ldots, R\}$ و خروجی برنامه مقدار بهینه احتمال ورشکستگی است.

```
Input: Premium function Q(u, m), ruin probability function
       (with capital injections), initial capital, amounts
        of finite and certain set.
Output: The minimum ruin probability and the corresponding
        optimal choices for and.
solution(R,u):=The solution for m of Q(u,m)+u=R, 0\leq m\leq u
              \leq R, found with the help of the Mathematica
               function NSolve
Psi Premium[R,u]:=Ruin probability with capital injections with
                 u=u and m=solution (R,u)
w=\frac{Initial Capital}{Values of finite set}
start = Initial Capital
minimum = psi Prem[Initial Capital, Initial Capital]
minarg = Initial Capital
while \omega\geq 10^{{10- do
for i=0, i<values of finite set, i++ do
    u=start-i.\omega
      if solution (R,u) exists then
         if Psi Premium [R,u] < minimum then
                minimum= Psi Premium [R,u]
                minarg=u
                go to line 11
                end
             go to line 10
             end
         else
         i=values of finite set+1
             end
             go to line 9
             end
 start=\max\{minarg+\frac{1}{2}.values of finite set.
         \omega, Initial Capital\}
         \omega=\frac{1}{2}.\omega
     go to line 7
     end
```

## تقدیر و تشکر

نویسنده مقاله از سردبیر محترم، ویراستار و داوران محترم مجله علوم آماری به دلیل پیشنهادات ارزشمندشان در بهبود کیفیت مقاله کمال تشکر و قدردانی را دارد.

# مراجع

بازیاری، ا. و علیزاده، م.، (۱۴۰۱)، احتمال ورشکستگی زمان نامتناهی در مدل مخاطره بیمه اتکایی مازاد خسارت، مجله علوم آماری، ۱۶(۱)، ۶۲-۴۱.

بازیاری، ا.، (۱۳۹۶)، تحلیل احتمال ورشکستگی زمان نامتناهی در مدل مخاطره جمعی، مجله علوم آماری، ۱۱(۱)، ۳۶-۱۷.

Asmussen, S. (2010), *Ruin Probability,* World Scientific, Singapore.

Bazyari, A. and Roozegar, R. (2019), Finite Time Ruin Probability and Structural Density Properties in the Presence of Dependence in Insurance Risk Model, *Communications in Statistics–Theory and Methods*, **48**(5), 1284–1304.

Bazyari, A. (2023), On the Ruin Probabilities in a Discrete Time Insurance Risk Process with Capital Injections and Reinsurance, *Sankhya A*, https://doi.org/10.1007/s13171-022-00305-3.

Breuer, L. and Badescu, A. L. (2014), A Generalised Gerber-Shiu Measure for Markov Additive Risk Processes with Phase-Type Claims and Capital Injections, *Scandinavian Actuarial Journal*, **2014**(2), 93–115.

Cao, J., Peng, X. C. and Hu, Y. J. (2016), Optimal Time-Consistent Investment and Reinsurance Strategy for Mean-Variance Insurers Under the Inside Information, *Acta Mathematicae Applicatae Sinica, English Series*, **32**(4), 1087–1100.

Chen, L. and Shen, Y. (2018), On a New Paradigm of Optimal Reinsurance: A Stochastic Stackelberg Differential Game Between an Insurer and a Reinsurer, *ASTIN Bulletin: The Journal of the IAA*, **48**(2), 905–960.

Daykin, C. D., Pentikainen, T. and Pesonen, M. (1993), *Practical Risk Theory for Actuaries*, Chapman and Hall, London.

Dickson, D. C. M. and Drekic, S. (2006), Optimal Dividends Under a Ruin Probability Constraint, Annals of Actuarial Science, **1**, 291–306.

Dickson, D. C. M. and Waters, H. R. (2004), Some Optimal Dividends Problems, *ASTIN Bulletin: The Journal of the IAA*, **34**(1), 49–74.

Dickson, D. C. M. and Waters, H. R. (1996), Reinsurance and Ruin, *Insurance: Mathematics and Economics*, **19**, 61–80.

Dufresne, F. and Gerber, H. U. (1988), The Probability and Severity of Ruin for Combinations of Exponential Claim Amount Distributions and Their Translations, *Insurance: Mathematics and Economics*, **7**(2), 75–80.

Edwards, C. H., Penney, D. E. and Calvis, D. (2015), *Defferential Equations and Boundary Value Problems*, Fifth edition, Pearson Education, Inc.

Eisenberg, J. and Schmidli, H. (2011), Minimising Expected Discounted Capital Injections by Reinsurance in a Classical Risk Model, *Scandinavian Actuarial Journal*, **3**, 155–176.

Lefevre, C. and Loisel, S. (2008), On Finite-Time Ruin Probabilities for Classical Risk Models, *Scandinavian Actuarial Journal*, **1**, 41–60.

Lefevre, C. and Loisel, S. (2009), Finite Horizon Ruin Probabilities for Independent or Dependent Claim Amounts, *Methodology and computing in applied probability*, **11**(3), 425–441.

Meng, H. and Zhang, X. (2010), Optimal Risk Control for the Excess of Loss Reinsurance Policies, *ASTIN Bulletin: The Journal of the IAA*, **40**, 179–97.

Santana, D. J., González-Hernández, J. and Rincón, L. (2016), Approximation of the Ultimate Ruin Probability in the Classical Risk Model Using Erlang Mixtures, *Methodology and Computing in Applied Probability*, **19**(3), 775–798.

Schmidli, H. (2010), On Minimising the Ruin Probability by Investment and Reinsurance, *Annals of Applied Probability*, **12**, 890–907.

Tsitsiashvili, G. Sh., (2009), Computing Ruin Probability in the Classical Risk Model, *Journal Automation and Remote Control*, **70**(12), 2109–2115.