Journal of Statistical Sciences, Autumn and Winter, 2022
Vol. 16, No. 2, pp 275-294
DOI: 10.29252/jss.16.2.275

Improving Multiple Dependent State Sampling Plan Based on Capability Index S_{pk}^T

Afshari, R.
Department of Statistics, University of Zanjan, Zanjan, Iran.
Received: 25/7/2022 **Revised:** 26/10/2022 **Accepted and Published Online:** 5/11/2022.

Corresponding author: R. Afshari, afshari@znu.ac.ir

Introduction

Acceptance sampling plans (ASPs) are one of the statistical tools widely used by inspectors to evaluate the quality of productions. Depending on whether the desired quality characteristic of products can be measured on a numerical scale or not, the corresponding ASP is called variable and attribute ASP, respectively. Most ASPs only apply the current lot information to decide the quality of manufactured products. One of the drawbacks of such plans is that they need a large sample size to inspect the lot to judge its quality. To solve this problem, the methods of sampling in ASPs were developed, and conditional plans were presented (Montgomery, 2020). In addition to the current information, past information on the process is also used in decision-making. Although the variable multiple dependent state sampling (MDS) plan is preferred over the conditional plans due to the small sample size required, it is impossible to use it in a situation where the quality of manufactured products depends on more than one quality characteristic. In this study, to improve the performance of the mentioned method, S_{pk}^T-based MDS plan is proposed, which applies both current and past knowledge of the process and is applicable to inspect products with independent/dependent characteristics following a multivariate normal distribution.

Material and Methods

Let $\mathbf{X} = (X_1, \cdots, X_v)'$ be a random vector of independent quality characteristics and follow a multivariate normal distribution. The proposed variable MDS multivariate (VMDSM) plan, designed under the process capability index S_{pk}^T, has four parameters m, n, k_r and k_a. Applying a nonlinear op-

timization problem, optimal values of plan parameters are obtained. Also, to develop the application of the VMDSM plan in the presence of dependent variables, the principal component analysis technique is used. While comparing the performance of the proposed plan with variable single sampling (VSS), variable repetitive group sampling (VRGS) and modified VRGS (Modified-VRGS) plans based on the required sample size and operating characteristic (OC) curve. An industrial example is given to explain how to use the introduced plan.

Results and Discussion
To study the impact of the contracted values between customer and producer on the plan parameters, we consider several combinations of consumer's risk (β) and manufacturer's risk (α) as well as a different number of defective items in parts per million. The results demonstrate that the required sample size decreases when (α) and (β) become larger. Moreover, findings indicate that the OC curve of the proposed method is the best one among VSS, VRGS and Modified-VRGS plans. Also, compared to VSS and VRGS plans, the introduced plan needs a small sample size and is economical.

Conclusion
Today's, it is clear that production quality depends on many quality characteristics. So designing a multivariate ASP with small sample size, strong OC curve, and simple implementation is unavoidable. In this study, we proposed a plan suitable for a situation where the quality characteristics are mutually independent/dependent with multivariate normal distribution. The results showed that the introduced plan is better than the existing VSS and VRGS plans in terms of the required sample size and OC curve, and it is preferable to the Modified-VRGS method based on the OC curve.

Keywords: Acceptance sampling plan, Multiple dependent state sampling plan, Process capability.

Mathematics Subject Classification (2010): 62N10, 62H99.

©The Author(s). The Publisher is Iranian Statistical Society.
This is an open access article distributed under the terms and conditions of (CC BY-NC 4.0)

مجله علوم آماری، پاییز و زمستان ۱۴۰۱
جلد ۱۶، شماره ۲، ص ۲۷۵ – ۲۹۴
DOI: 10.29252/jss.16.2.275
مقاله پژوهشی

بهبود طرح نمونه‌گیری تعویقی چندگانه بر اساس اندیس کارایی S_{pk}^T

رباب افشاری

گروه آمار، دانشکده علوم، دانشگاه زنجان

نویسنده مسئول : رباب افشاری، afshari@znu.ac.ir

تاریخ دریافت: ۱۴۰۱/۵/۳ تاریخ بازنگری: ۱۴۰۱/۹/۴ تاریخ پذیرش و انتشار: ۱۴۰۱/۹/۱۴

چکیده: اگر چه طرح نمونه‌گیری تعویقی چندگانه به دلیل نیاز به اندازه نمونه کم نسبت به طرح‌های غیرشرطی اولویت دارد، اما به‌کارگیری آن در شرایطی که کیفیت محصولات تولیدی به بیش از یک مشخصه کیفیت بستگی دارد، امکان‌پذیر نیست. در این مطالعه، به منظور بهبود عملکرد طرح مذکور، طرح نمونه‌گیری تعویقی چندگانه مبتنی بر اندیس کارایی S_{pk}^T پیشنهاد می‌شود که قابلیت اجرا برای بازرسی محصولات تولیدی با مشخصه‌های کیفیت نرمال چندمتغیره و مستقل را دارد. در ادامه، برای توسیع دامنه کاربرد طرح پیشنهادشده در حضور متغیرهای وابسته، از تکنیک آنالیز مؤلفه‌های اصلی استفاده می‌شود. همچنین بر اساس مسئله بهینه‌سازی غیرخطی، جداول مقادیر بهینه پارامترهای طرح برای استفاده کاربران طراحی می‌شود. یافته‌ها حاکی از آن است که تحت شرایط یکسان، طرح پیشنهادی نسبت به طرح نمونه‌گیری ساده و گروهی مکرر مبتنی بر اندیس کارایی S_{pk}^T، به دلیل قدرت تشخیص بالا، کاهش در زمان و هزینه بازرسی مقرون به‌صرفه است. در پایان، چگونگی اجرای طرح پیشنهادی با ارائه یک مثال از داده‌های واقعی صنعتی تشریح می‌شود.

واژه‌های کلیدی: طرح نمونه‌گیری برای پذیرش، طرح نمونه‌گیری تعویقی چندگانه، اندیس کارایی.

کد موضوع‌بندی ریاضی (۲۰۱۰): ۶۲N۱۰، ۶۲H۹۹.

©نویسند(گان). ناشر انجمن آمار ایران است.
این مقاله با دسترسی آزاد تحت شرایط و ضوابط (CC BY-NC 4.0) توزیع شده است.

۱ مقدمه

در صنایع تولیدی، تحویل محصولات به مصرف‌کنندگان قبل از بازرسی و اطمینان از کیفیت آن ممکن است به اعتبار و شهرت آن شرکت لطمه جبران ناپذیر وارد سازد. یکی از ابزارهای موجود در حوزه کنترل کیفیت آماری که به وفور توسط بازرسان در جهت حفظ منافع تولیدکننده و مصرف‌کننده، حین تولید محصولات و یا پس از خاتمه آن به‌کار گرفته می‌شوند، طرح نمونه‌گیری برای پذیرش است (مونتگومری ، ۲۰۲۰). در دهه‌های گذشته، طرح‌های بسیاری توسط محققان معرفی شده‌اند. یکی از ساده‌ترین این طرح‌ها که از محبوبیت بیشتری بین کاربران به لحاظ سادگی در محاسبات برخوردار است، طرح نمونه‌گیری ساده متغیر[1] (VSS) است. بر اساس طرح VSS که شامل دو پارامتر اندازه نمونه n و عدد پذیرش c است، برای تصمیم‌گیری درباره رد یا پذیرش انباشته‌ای از تولیدات، یک نمونه n تایی از آن جمع‌آوری و پس از اندازه‌گیری مقادیر مشخصه کیفیت مربوطه و تعیین معیارهای آماری درباره پذیرش یا رد انباشته، تصمیم مناسب اتخاذ می‌شود. اندیس‌های کارایی فرآیند[2] (PCI) یکی از معیارهای عددی برای بیان میزان مطابقت محصولات یک فرآیند تولیدی با حدود مشخصات فنی در نظر گرفته شده توسط کارشناسان است. پرن و وو (۲۰۰۶) طرح VSS مبتنی بر اندیس‌های کارایی C_{pl} و C_{pu} را برای ارزیابی فرآیندهای تولیدی نرمال یک‌متغیره معرفی کردند. در ادامه، با اتخاذ رویکردی مشابه، پرن و وو (۲۰۰۷) طرحی مبتنی بر اندیس کارایی C_{pk} معرفی کردند که در آن مشخصه کیفیت مورد نظر دارای حدود مشخصات فنی دو طرفه است. علاوه بر اندیس‌های کارایی فرآیند، از بازده فرآیند [3] نیز برای سنجش و ارزیابی عملکرد فرآیند تولیدی استفاده می‌شود. بازده فرآیند، شاخص عددی دیگری برای تعیین نسبت اقلام سالم تولیدی در یک فرآیند تولیدی است. رابطه بین این دو شاخص عددی، بسیار مورد توجه محققان بوده است. در حالی که بر اساس اندیس کارایی C_{pk}، کران‌های بالا و پایین (یک اندازه تقریبی) برای بازده فرآیند تولیدی به‌دست می‌آید، اندیس کارایی S_{pk} یک رابطه یک به یک (اندازه دقیق) با بازده فرآیند دارد (بویلس ، ۱۹۹۴). وو و لو (۲۰۱۴) طرح VSS بر اساس اندیس کارایی S_{pk} برای فرآیندهای نرمال یک‌متغیره را پیشنهاد دادند. باتاچاریا و اسلم (۲۰۱۹) با به‌کارگیری اندیس‌های کارایی طول عمر، طرح نمونه‌گیری برای پذیرش برای ارزیابی عملکرد فرآیندهای تولیدی با توزیع نمایی ارائه دادند.

در بیشتر طرح‌های نمونه‌گیری برای پذیرش به منظور بازرسی انباشته‌ای از تولیدات، از اطلاعات جاری آن فرآیند استفاده می‌شود. به‌کارگیری چنین طرح‌هایی به دلیل نیاز به حجم نمونه زیاد برای بازرسی،

[1] Variable single sampling
[2] Process capability indices
[3] Process yield

به‌خصوص در موقعیت‌هایی که با آزمایش مخرب یا پرهزینه مواجه هستیم، مقرون به صرفه نیست. به منظور فائق آمدن بر مشکل مذکور، تکنیک‌های مختلفی که معروف به طرح‌های شرطی هستند، توسط پژوهشگران ابداع شده‌اند که در آنها علاوه بر اطلاعات جاری انباشته، از اطلاعات گذشته فرآیند تولیدی نیز در تصمیم‌گیری بهره گرفته می‌شود. بالامورالی و جون (۲۰۰۷) طرح نمونه‌گیری تعویقی چندگانه متغیر[۱] (VMDS) را برای فرآیندهای تولیدی با مشخصه کیفیت نرمال تحت حدود مشخصات فنی یک‌طرفه معرفی کردند. آنها نشان دادند که روش ارائه‌شده نسبت به طرح VSS و طرح نمونه‌گیری دو مرحله‌ای از لحاظ اندازه نمونه مورد نیاز، برتری دارد. اخیراً، ساخت طرح VMDS مبتنی بر اندیس‌های کارایی به طور گسترده‌ای مورد توجه محققان قرار گرفته است که از جمله آنها می‌توان به اسلم و همکاران (۲۰۱۸، ۲۰۲۱)، ین و همکاران (۲۰۱۸)، و رائو و همکاران (۲۰۱۹) اشاره کرد.

وو و همکاران (۲۰۱۵) با در نظر گرفتن فرآیندهای تولیدی یک‌متغیره، طرح VMDS مبتنی بر اندیس کارایی S_{pk} را برای ارزیابی عملکرد آن ارائه کردند و نشان دادند روش آنها در مقایسه با طرح VSS به اندازه نمونه کمتری برای تصمیم‌گیری نیاز دارد. وو و همکاران (۲۰۱۶) طرح VMDS را از طریق تلفیق آماره طرح با اندیس کارایی C_{pk} توسعه داده و نشان دادند که طرح آنها هم از لحاظ منحنی مشخصه کیفیت[۲] (OC) و هم اندازه نمونه لازم نسبت به طرح VSS و طرح دو مرحله‌ای بهتر است. بر اساس مطالعات در زمینه طرح‌های نمونه‌گیری برای پذیرش، در طراحی این روش‌ها بیشترین تمرکز روی فرآیندهای تولیدی بوده است که کیفیت محصولات تولیدی آنها تنها توسط یک مشخصه کیفیت بیان می‌شود. اگرچه استفاده از این طرح‌ها در چنین موقعیت‌هایی می‌تواند کارساز باشد اما در مواجهه با شرایطی که در آن کیفیت محصول همزمان توسط مشخصه‌های متعدد معین می‌شود، مفید نخواهد بود. به همین دلیل، طرح‌های نمونه‌گیری چندمتغیره مورد توجه محققان قرار گرفته است. طرح VSS مبتنی بر اندیس کارایی تعمیم‌یافته S_{pk}^T توسط لی و وو (۲۰۱۵) مطرح شد که برای ارزیابی فرآیندهای تولیدی نرمال چندمتغیره استفاده می‌شود. نادی و همکاران (۲۰۲۰) طرح نمونه‌گیری گروهی مکرر متغیر[۳] (VRGS) مبتنی بر اندیس S_{pk}^T را برای فرآیندهای نرمال چندمتغیره پیشنهاد دادند. افشاری و احمدی نادی (۲۰۲۲) نیز با به‌کارگیری مفهوم میانگین متحرک موزون نمایی، طرح گروهی مکرر بر اساس اندیس S_{pk}^T را ارائه کردند.

یکی از معیارهای مهم در ارزیابی عملکرد طرح نمونه‌گیری برای پذیرش، اندازه نمونه مورد نیاز برای بازرسی به منظور تصمیم‌گیری درباره رد یا پذیرش انباشته‌ای از تولیدات است، به‌طوری‌که هر چه اندازه

[1] Variable multiple dependent state
[2] Operating characteristic curve
[3] Variable repetitive group sampling

نمونه لازم کمتر، به‌کارگیری طرح متناظر از نظر اقتصادی مقرون به صرفه‌تر است. بر اساس مطالعات انجام شده، اگر چه طرح VMDS به دلیل برخورداری از اندازه نمونه کم، نسبت به طرح‌های غیر شرطی از محبوبیت بسیاری در بین کاربران برخوردار است، اما استفاده از آن در موقعیت‌هایی که کیفیت اقلام تولیدی به بیش از یک مشخصه کیفیت بستگی دارد، ممکن نیست. از این‌رو هدف اصلی این مقاله با ایده از نتایج وو و همکاران (۲۰۱۵)، طراحی بهینه طرح VMDS چندمتغیره[1] (VMDSM) بر اساس اندیس کارایی تعمیم‌یافته S_{pk}^T به منظور ارزیابی فرآیندهای تولیدی با مشخصه‌های کیفیت نرمال چندمتغیره و مستقل است. اما، به دلیل اینکه در دنیای واقعی مستقل در نظر گرفتن مشخصه‌های کیفیت منطقی نیست، با استفاده از تکنیک آنالیز مؤلفه‌های اصلی[2] (PCA) دامنه کاربرد طرح پیشنهادشده به موقعیتی که در آن مشخصه‌های کیفیت مورد نظر وابسته باشند، تعمیم داده می‌شود. در بخش ۲ اندیس کارایی تعمیم‌یافته S_{pk}^T و ویژگی‌های آن به اختصار آورده می‌شود. در بخش ۳ به تبیین الگوریتم اجرای طرح پیشنهادی می‌پردازیم. مقادیر بهینه برای پارامترهای طرح پیشنهادی و مزایای طرح معرفی‌شده، به ترتیب، موضوع بحث در بخش‌های ۴ و ۵ خواهند بود. در بخش ۶ چگونگی کاربرد طرح پیشنهادی بر روی داده‌های واقعی تشریح می‌شود. بخش پایانی به ارائه یافته‌ها اختصاص دارد.

۲ اندیس کارایی تعمیم‌یافته S_{pk}^T

فرض کنید بردار تصادفی v-بعدی $\mathbf{X} = (X_1, \cdots, X_v)'$ نشان‌دهنده مشخصه کیفیت کالای تولیدی با توزیع نرمال چندمتغیره $N_v(\boldsymbol{\mu}, \sum)$ باشد که در آن $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \cdots, \mu_v)'$ بردار میانگین و $\sum = [\sigma_{ij}]_{i,j=1,\cdots,v}$ ماتریس واریانس-کواریانس $\mathbf{X}$ است به‌طوری‌که σ_{ij} کواریانس بین i-امین و j-امین متغیر است. همچنین فرض کنید $\mathbf{LSL} = (\mathrm{LSL}_1, \cdots, \mathrm{LSL}_v)'$ و $\mathbf{USL} = (\mathrm{USL}_1, \cdots, \mathrm{USL}_v)'$، به ترتیب بردار حدود مشخصات فنی پایینی و بالایی متناظر با هر کدام از مشخصه‌های کیفیت باشند. چن و همکاران (۲۰۰۳) برای ارزیابی کارایی فرآیندهای تولیدی با مشخصه‌های کیفیت مستقل دارای توزیع نرمال چندمتغیره، اندیس کارایی تعمیم‌یافته S_{pk}^T (به عنوان تعمیمی از اندیس کارایی یک‌متغیره

[1] VMDS-multivariate
[2] Principal component analysis

S_{pk}) را که به صورت

$$S_{pk}^T = \frac{۱}{۳}\Phi^{-۱}\Big\{\frac{۱}{۲}\Big[\prod_{j=۱}^{v}(۲\Phi(۳S_{pkj})-۱)+۱\Big]\Big\}, \qquad (۱)$$

معرفی کرد، که در آن $\Phi(\cdot)$ بیانگر توزیع نرمال استاندارد و $\Phi^{-۱}(\cdot)$ تابع معکوس آن است. همچنین، S_{pkj} به‌ازای $j = ۱, \ldots, v$ اندیس کارایی یک‌متغیره j-امین مشخصه کیفیت است (بویلس ، ۱۹۹۴):

$$S_{pkj} = \frac{۱}{۳}\Phi^{-۱}\Big\{\frac{۱}{۲}\Big[\Phi\big(\frac{\mathrm{USL}_j-\mu_j}{\sigma_j}\big)+\Phi\big(\frac{\mu_j-\mathrm{LSL}_j}{\sigma_j}\big)\Big]\Big\}. \qquad (۲)$$

در رابطه (۲) با جایگذاری انحراف استاندارد نمونه $S_j = \sqrt{\frac{۱}{n-۱}\sum_{i=۱}^{n}(X_{ji}-\overline{X}_j)^۲}$ و میانگین نمونه $\overline{X}_j = \frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n} X_{ji}$، به ترتیب، به‌جای σ_j و μ_j برآوردگر

$$\widehat{S}_{pkj} = \frac{۱}{۳}\Phi^{-۱}\Big\{\frac{۱}{۲}\Big[\Phi\big(\frac{\mathrm{USL}_j-\overline{X}_j}{S_j}\big)+\Phi\Big(\frac{\overline{X}_j-\mathrm{LSL}_j}{S_j}\Big)\Big]\Big\}. \qquad (۳)$$

به‌دست می‌آید. با جایگذاری (۳) در رابطه (۱)، برآوردگر S_{pk}^T به صورت

$$\widehat{S}_{pk}^T = \frac{۱}{۳}\Phi^{-۱}\Big\{\frac{۱}{۲}\Big[\prod_{j=۱}^{v}(۲\Phi(۳\widehat{S}_{pkj})-۱)+۱\Big]\Big\}, \qquad (۴)$$

حاصل می‌شود، به‌طوری‌که توزیع تقریبی آن $N\big(S_{pk}^T, \frac{(S_{pk}^T)^۲}{۲n}\big)$ است (پرن و چنگ ، ۲۰۱۰).

۳ الگوریتم طرح پیشنهادی VMDSM

فرآیند تولیدی چندمتغیره که در آن بردار مشخصه کیفیت کالای تولیدی دارای توزیع نرمال چندمتغیره با حدود مشخصات فنی دو طرفه است، را در نظر بگیرید. فرض کنید p نشان‌دهنده تعداد کالای ناسالم در هر یک میلیون واحد تولیدی باشد. روش اجرای طرح VMDSM مبتنی بر اندیس کارایی تعمیم‌یافته S_{pk}^T برای تصمیم‌گیری درباره انباشته‌ای از تولیدات به صورت زیر پیشنهاد می‌شود:

گام ۱: از انباشته ارسالی، نمونه تصادفی به اندازه n جمع‌آوری و مقدار $\widehat{S}_{pk}^T$ را به‌دست می‌آوریم.

گام ۲: اگر $\widehat{S}^T_{pk} \geq k_a$، آنگاه انباشته را می‌پذیریم و اگر $\widehat{S}^T_{pk} \leq k_r$ آنگاه انباشته را رد می‌کنیم. در غیر این صورت، گام سوم را اجرا می‌کنیم.
گام ۳: اگر $k_r < \widehat{S}^T_{pk} < k_a$، آنگاه انباشته تحت بازرسی در صورتی پذیرفته می‌شود که همه m انباشته متوالی پیشین تحت شرط $\widehat{S}^T_{pk} \geq k_a$ پذیرفته شده باشند (k_a و k_r به ترتیب اعداد پذیرش و رد هستند به‌طوری‌که $k_a > k_r > ۰$).

بنابراین طرح پیشنهادی دارای چهار پارامتر m، n، k_r و k_a است. در نتیجه، احتمال پذیرش انباشته با سطح کیفیت p تحت اجرای طرح پیشنهادی به صورت

$$P_a(p) = ۱ - \Phi(w_۱) + \big(\Phi(w_۱) - \Phi(w_۲)\big)\big(۱ - \Phi(w_۱)\big)^m,$$

است، که در آن $w_۱ = \sqrt{۲n}(\frac{k_a - S^T_{pk}}{S^T_{pk}})$، $w_۲ = \sqrt{۲n}(\frac{k_r - S^T_{pk}}{S^T_{pk}})$ و $S^T_{pk} = \frac{۱}{۳}\Phi^{-۱}(۱ - \frac{p}{۲\times ۱۰^۶})$.
شایان ذکر است که اگر $k_r = k_a$ باشد، آنگاه طرح پیشنهادی طرح VSS مبتنی بر اندیس کارایی S^T_{pk} معرفی‌شده توسط لی و وو (۲۰۱۵) را نتیجه می‌دهد. همچنین به ازای $v = ۱$، طرح پیشنهادی، طرح یک‌متغیره VMDS مبتنی بر اندیس کارایی S_{pk} معرفی‌شده توسط وو و همکاران (۲۰۱۵) را نتیجه می‌دهد. دو فرض اساسی در به‌کارگیری اندیس کارایی تعمیم‌یافته S^T_{pk} برای ارزیابی کارایی فرآیند تولیدی این است که مشخصه‌های کیفیت کالای تولیدی از هم مستقل و دارای توزیع نرمال چندمتغیره باشند. اما این پذیره‌ها، ممکن است در بسیاری از موقعیت‌های واقعی برقرار نباشند. به منظور فائق آمدن بر مسئله عدم نرمالیتی، می‌توان از برخی تبدیلات باکس-کاکس بهره جست. از سوی دیگر برای رفع مشکل وابستگی متغیرها زمانی که با یک فرآیند تولیدی نرمال چندمتغیره با متغیرهای وابسته مواجه هستیم، استفاده از روش PCA می‌تواند کارساز باشد که با به‌کارگیری آن می‌توان مجموعه داده‌های اولیه که وابسته بودند را به یک مجموعه از داده‌های جدید مستقل تبدیل کرد (جانسون و ویچرن ، ۲۰۰۷). بنابراین، با استفاده از تکنیک PCA طرح پیشنهادی برای اجرا در موقعیت‌هایی که مشخصه‌های کیفیت محصول تولیدی وابسته باشند، تعمیم داده می‌شود. روش به‌کارگیری این تکنیک در بخش ۶ به تفصیل آورده خواهد شد.

۴ مقادیر بهینه برای پارامترهای طرح پیشنهادی

در بازرسی محصولات تولیدی، طرح نمونه‌گیری برای پذیرش زمانی یک طرح با عملکرد خوب تلقی می‌شود که تحت اجرای آن اختلاف بین کیفیت واقعی محصولات و کیفیت مورد انتظار کاهش یابد. یکی از

معیارهای مهم در سنجش کارایی یک طرح، منحنی OC آن است که مقدار احتمال پذیرش انباشته را در برابر نسبت اقلام معیوب واقعی انباشته نشان می‌دهد. هدف از طراحی یک طرح، یافتن مقادیر بهینه برای پارامترهای آن طرح است. فرض کنید AQL و LQL به ترتیب بیانگر پایین‌ترین سطح کیفیت قابل قبول و پایین‌ترین سطح کیفیت قابل رد باشند. طرح نمونه‌گیری برای پذیرش معمولاً طوری ساخته می‌شود که طبق قرارداد بسته شده بین تولید کننده و مصرف کننده نامساوی‌های

$$P_a(p_{\text{AQL}}) \geq ۱ - \alpha, \quad P_a(p_{\text{LQL}}) \leq \beta, \tag{۵}$$

به‌طور همزمان برقرار باشند، که در آن β و α به ترتیب خطای مصرف کننده و خطای تولید کننده و همواره $p_{\text{AQL}} < p_{\text{LQL}}$ است. فرض کنید m یک عدد طبیعی ثابت و معلومی باشد که توسط کارشناس مرکز تولیدی هنگام قرارداد مشخص می‌شود. به دلیل اینکه ممکن است طرح‌های متعدد VMDSM وجود داشته باشند که در دو نامساوی (۵) صدق کنند، برای تعیین یک طرح یکتا از بین تمامی طرح‌های VMDSM که به‌ازای p_{AQL} و p_{LQL} مفروض، در شرایط فوق صدق می‌کنند طرحی را انتخاب می‌کنیم که کوچک‌ترین اندازه نمونه متناظر را در بین بقیه داشته باشد. از این‌رو، مسئله بهینه سازی غیر خطی برای تعیین مقادیر بهینه برای پارامترهای طرح به صورت

$$\begin{cases} Minimize\ n, \\ \text{Subject to:} \\ P_a(p_{\text{AQL}}) \geq ۱ - \alpha,\ P_a(p_{\text{LQL}}) \leq \beta,\ n \geq ۲,\ k_a > k_r > ۰, \end{cases} \tag{۶}$$

است. با توجه به توضیحات ارائه‌شده و با استفاده از مسئله بهینه‌سازی (۶)، به‌ازای ترکیب‌های مختلف معمول $(p_{\text{AQL}}, p_{\text{LQL}})$ و (α, β)، مقادیر بهینه برای پارامترهای n، k_r و k_a برای $m = ۱, ۲, ۳$ محاسبه و به ترتیب در جداول ۱، ۲ و ۳ گزارش شده است.

برای مثال، اگر در قرارداد بسته‌شده $p_{\text{AQL}} = ۱۰$، $p_{\text{LQL}} = ۱۰۰$، $\alpha = ۰/۰۱$، $\beta = ۰/۰۵$ و $m = ۱$ باشند، آنگاه با توجه به جدول ۱، طرح متناظر با مقادیر قرارداد شده، طرحی با پارامترهای $n = ۳۰۱$، $k_r = ۱/۲۹۱۷$ و $k_a = ۱/۳۹۳۶$ است. بر اساس این طرح، نمونه تصادفی به اندازه ۳۰۱ از انباشته تحت بازرسی جمع‌آوری و بر اساس اطلاعات نمونه‌ای، مقدار $\widehat{S}_{pk}^T$ را محاسبه می‌کنیم. اگر $\widehat{S}_{pk}^T \geq ۱/۳۹۳۶$ باشد، آنگاه انباشته را می‌پذیریم. اگر $\widehat{S}_{pk}^T \leq ۱/۲۹۱۷$ باشد، آنگاه انباشته را رد می‌کنیم.

جدول ۱. مقادیر بهینه پارامترهای طرح پیشنهادی به ازای $m = ۱$

$\alpha = ۰/۰۵, \beta = ۰/۱$			$\alpha = ۰/۰۵, \beta = ۰/۰۵$			$\alpha = ۰/۰۱, \beta = ۰/۰۵$				
k_a	k_r	n	k_a	k_r	n	k_a	k_r	n	p_{LQL}	p_{AQL}
۱/۴۲۸۲	۱/۳۳۸۳	۳۵۸	۱/۴۳۳۳	۱/۳۵۲۵	۴۵۷	۱/۴۱۹۴	۱/۳۵۱۲	۶۶۷	۵۰	۱۰
۱/۴۰۶۸	۱/۲۷۱۰	۱۶۱	۱/۴۱۴۱	۱/۲۹۲۶	۲۰۵	۱/۳۹۳۶	۱/۲۹۱۷	۳۰۱	۱۰۰	
۱/۳۸۳۷	۱/۱۹۵۶	۸۷	۱/۳۹۳۳	۱/۲۲۶۱	۱۱۱	۱/۳۶۵۸	۱/۲۲۶۵	۱۶۴	۲۰۰	
۱/۲۵۳۸	۱/۱۶۶۰	۲۹۲	۱/۲۵۸۸	۱/۱۷۹۹	۳۷۳	۱/۲۴۵۲	۱/۱۷۸۸	۵۴۵	۴۰۰	۱۰۰
۱/۲۳۹۷	۱/۱۲۱۵	۱۶۵	۱/۲۴۶۱	۱/۱۴۰۳	۲۱۰	۱/۲۲۸۳	۱/۱۳۹۵	۳۰۸	۶۰۰	
۱/۲۲۹۲	۱/۰۸۷۷	۱۱۷	۱/۲۳۶۷	۱/۱۱۰۴	۱۴۹	۱/۲۱۵۶	۱/۱۱۰۰	۲۱۹	۸۰۰	
۱/۲۲۰۸	۱/۰۵۹۹	۹۲	۱/۲۲۹۰	۱/۰۸۵۹	۱۱۷	۱/۲۰۵۴	۱/۰۸۶۱	۱۷۳	۱۰۰۰	
۱/۲۰۴۶	۱/۱۳۳۵	۴۰۴	۱/۲۰۸۷	۱/۱۴۴۷	۵۱۶	۱/۱۹۷۶	۱/۱۴۳۶	۷۵۲	۶۰۰	۲۰۰
۱/۱۹۴۵	۱/۱۰۲۰	۲۴۲	۱/۱۹۹۷	۱/۱۱۶۷	۳۰۹	۱/۱۸۵۵	۱/۱۱۵۷	۴۵۲	۸۰۰	
۱/۱۸۶۴	۱/۰۷۶۴	۱۷۴	۱/۱۹۲۴	۱/۰۹۳۸	۲۲۱	۱/۱۷۵۷	۱/۰۹۳۰۴	۳۲۴	۱۰۰۰	
۱/۱۷۰۹	۱/۰۲۶۳	۱۰۳	۱/۱۷۸۴	۱/۰۴۹۶	۱۳۱	۱/۱۵۷۱	۱/۰۴۹۵	۱۹۴	۱۵۰۰	
۱/۱۵۹۳	۰/۹۸۷۷	۷۵	۱/۱۶۷۹	۱/۰۱۵۷	۹۵	۱/۱۴۳۱	۱/۰۱۶۵	۱۴۲	۲۰۰۰	
۱/۱۳۷۳	۱/۰۹۱۲	۸۲۹	۰/۰۰۱۱	۰/۰۰۱۰	۱۰۶۲	۰/۰۰۱۱	۰/۰۰۱۰	۱۵۴۱	۱۰۰۰	۵۰۰
۱/۱۲۲۷	۱/۰۴۶۲	۳۰۸	۱/۱۲۷۰	۱/۰۵۸۳	۳۹۳	۱/۱۱۵۲	۱/۰۵۷۳	۵۷۴	۱۵۰۰	
۱/۱۱۱۸	۱/۰۱۱۸	۱۸۴	۱/۱۱۷۲	۱/۰۲۷۷	۲۳۴	۱/۱۰۲۱	۱/۰۲۶۹	۳۴۳	۲۰۰۰	
۱/۰۹۵۴	۰/۹۵۹۰	۱۰۲	۱/۱۰۲۵	۰/۹۸۱۰	۱۲۹	۱/۰۸۲۴	۰/۹۸۰۹	۱۹۱	۳۰۰۰	
۱/۰۷۲۶	۱/۰۲۳۸	۶۶۳	۱/۰۷۵۵	۱/۰۳۱۴	۸۵۰	۰/۰۰۱۲	۰/۰۰۱۱	۱۲۳۳	۲۰۰۰	۱۰۰۰
۱/۰۵۷۱	۰/۹۷۵۶	۲۴۴	۱/۰۶۱۶	۰/۹۸۸۴	۳۱۲	۱/۰۴۹۱	۰/۹۸۷۶	۴۵۶	۳۰۰۰	
۱/۰۴۵۳	۰/۹۳۸۳	۱۴۵	۱/۰۵۱۱	۰/۹۵۵۳	۱۸۴	۱/۰۳۵۰	۰/۹۵۴۸	۲۷۱	۴۰۰۰	

جدول ۲. مقادیر بهینه پارامترهای طرح پیشنهادی به ازای $m = ۲$

$\alpha = ۰/۰۵, \beta = ۰/۱$			$\alpha = ۰/۰۵, \beta = ۰/۰۵$			$\alpha = ۰/۰۱, \beta = ۰/۰۵$				
k_a	k_r	n	k_a	k_r	n	k_a	k_r	n	p_{LQL}	p_{AQL}
۱/۴۱۸۷	۱/۲۹۱۹	۳۶۰	۱/۴۲۵۴	۱/۳۰۶۲	۴۶۷	۱/۴۱۳۴	۱/۳۱۷۱	۶۶۹	۵۰	۱۰
۱/۳۹۲۴	۱/۱۹۷۳	۱۶۲	۱/۴۰۲۳	۱/۲۱۹۸	۲۱۰	۱/۳۸۴۷	۱/۲۳۸۹	۳۰۳	۱۰۰	
۱/۳۶۳۸	۱/۰۸۵۵	۸۸	۱/۳۷۶۹	۱/۱۱۹۵	۱۱۳	۱/۳۵۳۶	۱/۱۵۰۷	۱۶۵	۲۰۰	
۱/۲۴۴۵	۱/۱۲۰۳	۲۹۴	۱/۲۵۱۱	۱/۱۳۴۳	۳۸۱	۱/۲۳۹۴	۱/۱۴۵۳	۵۴۷	۴۰۰	۱۰۰
۱/۲۲۷۲	۱/۰۵۷۵	۱۶۶	۱/۲۳۵۸	۱/۰۷۷۱	۲۱۴	۱/۲۲۰۵	۱/۰۹۳۵	۳۰۹	۶۰۰	
۱/۲۱۴۲	۱/۰۰۸۳	۱۱۸	۱/۲۲۴۳	۱/۰۳۲۶	۱۵۲	۱/۲۰۶۴	۱/۰۵۴۱	۲۲۰	۸۰۰	
۱/۲۰۳۸	۰/۹۷۶۵	۹۳	۱/۲۱۵۰	۰/۹۹۵۳	۱۱۹	۱/۱۹۵۰	۱/۰۲۱۵	۱۷۴	۱۰۰۰	
۱/۱۹۷۱	۱/۰۹۶۹	۴۰۶	۱/۲۰۲۴	۱/۱۰۸۲	۵۲۷	۱/۱۹۲۹	۱/۱۱۶۷	۷۵۴	۶۰۰	۲۰۰
۱/۱۸۴۷	۱/۰۵۳۳	۲۴۴	۱/۱۹۱۶	۱/۰۶۸۲	۳۱۶	۱/۱۷۹۴	۱/۰۸۰۲	۴۵۴	۸۰۰	
۱/۱۷۴۷	۱/۰۱۷۰	۱۷۵	۱/۱۸۲۸	۱/۰۳۵۲	۲۲۶	۱/۱۶۸۵	۱/۰۵۰۳	۳۲۵	۱۰۰۰	
۱/۱۵۵۶	۰/۹۴۳۹	۱۰۴	۱/۱۶۵۸	۰/۹۶۹۲	۱۳۴	۱/۱۴۷۶	۰/۹۹۱۹	۱۹۵	۱۵۰۰	
۱/۱۴۱۲	۰/۹۸۷۰	۷۶	۱/۱۵۳۱	۰/۹۵۶۳	۹۷	۱/۱۳۲۰	۰/۹۴۶۵	۱۴۲	۲۰۰۰	
۱/۱۳۲۴	۱/۰۶۸۰	۸۳۴	۰/۰۰۱۱	۰/۰۰۰۹	۱۰۸۶	۰/۰۰۱۱	۰/۰۰۱۰	۱۵۴۵	۱۰۰۰	۵۰۰
۱/۱۱۴۶	۱/۰۰۶۴	۳۱۰	۱/۱۲۰۳	۱/۰۱۸۶	۴۰۲	۱/۱۱۰۲	۱/۰۲۸۱	۵۷۶	۱۵۰۰	
۱/۱۰۱۲	۰/۹۵۸۱	۱۸۵	۱/۱۰۸۵	۰/۹۷۴۵	۲۳۹	۱/۰۹۵۵	۰/۹۸۸۱	۳۴۴	۲۰۰۰	
۱/۰۸۰۹	۰/۹۲۳۱	۱۰۲	۱/۰۹۰۶	۰/۹۰۵۹	۱۳۲	۱/۰۷۳۵	۰/۹۲۶۵	۱۹۲	۳۰۰۰	
۱/۰۶۷۴	۰/۹۹۹۱	۶۶۷	۱/۰۷۱۲	۱/۰۰۶۷	۸۶۸	۰/۰۰۱۱	۰/۰۰۱۰	۱۲۳۷	۲۰۰۰	۱۰۰۰
۱/۰۴۸۴	۰/۹۳۲۷	۲۴۶	۱/۰۵۴۵	۰/۹۴۵۸	۳۱۸	۱/۰۴۳۷	۰/۹۵۶۳	۴۵۷	۳۰۰۰	
۱/۰۳۳۹	۰/۹۲۰۰	۱۴۶	۱/۰۴۱۷	۰/۸۹۷۶	۱۸۸	۱/۰۲۸۰	۰/۹۱۲۹	۲۷۲	۴۰۰۰	

در غیر این صورت، اگر $۱/۲۹۱۷ < \widehat{S}_{pk}^{T} < ۱/۳۹۳۶$ باشد، آنگاه انباشته مورد نظر در صورتی پذیرفته می‌شود که انباشته ماقبل آن تحت شرط $\widehat{S}_{pk}^{T} \geq ۱/۳۹۳۶$ پذیرفته شده باشد.

جدول ۳. مقادیر بهینه پارامترهای طرح پیشنهادی به ازای $m = ۳$

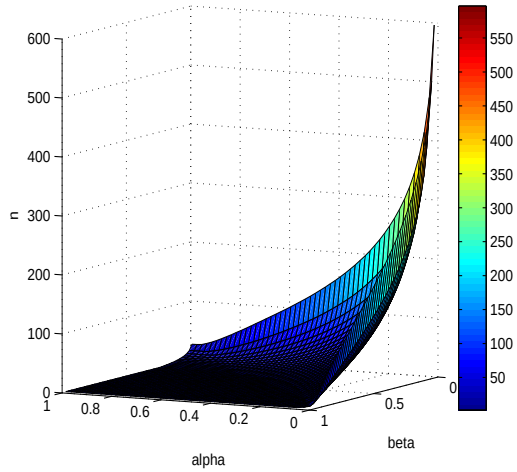
$\alpha = ۰/۰۵, \beta = ۰/۱$			$\alpha = ۰/۰۵, \beta = ۰/۰۵$			$\alpha = ۰/۰۱, \beta = ۰/۰۵$				
k_a	k_r	n	k_a	k_r	n	k_a	k_r	n	p_{LQL}	p_{AQL}
۱/۴۱۴۶	۱/۲۴۷۳	۳۸۴	۱/۴۲۲۰	۱/۲۵۹۳	۵۰۴	۱/۴۱۱۲	۱/۱۳۲۶	۷۰۳	۵۰	۱۰
۱/۳۸۶۵	۱/۱۲۱۵	۱۷۳	۱/۳۹۷۲	۱/۱۴۱۲	۲۲۶	۱/۳۸۱۴	۱/۱۸۴۲	۳۱۹	۱۰۰	
۱/۳۵۵۸	۰/۹۵۴۱	۹۴	۱/۳۷۰۱	۰/۹۸۸۸	۱۲۲	۱/۳۴۹۲	۱/۰۶۶۷	۱۷۴	۲۰۰	
۱/۲۴۰۶	۱/۰۷۵۷	۳۱۴	۱/۲۴۷۷	۱/۰۸۷۶	۴۱۱	۱/۲۳۷۳	۱/۱۱۱۸	۵۷۵	۴۰۰	۱۰۰
۱/۲۲۲۰	۰/۹۹۱۸	۱۷۷	۱/۲۳۱۴	۱/۰۰۸۹	۲۳۱	۱/۲۱۷۶	۱/۰۴۶۱	۳۲۶	۶۰۰	
۱/۲۰۸۱	۰/۹۲۱۹	۱۲۶	۱/۲۱۹۱	۰/۹۴۴۳	۱۶۴	۱/۲۰۳۰	۰/۹۹۴۴	۲۳۲	۸۰۰	
۱/۱۹۶۹	۰/۹۷۱۸	۹۹	۱/۲۰۹۲	۰/۹۹۱۱	۱۲۹	۱/۱۹۱۲	۰/۹۵۰۵	۱۸۳	۱۰۰۰	
۱/۱۹۳۹	۱/۰۶۲۰	۴۳۳	۱/۱۹۹۷	۱/۰۷۱۴	۵۶۸	۱/۱۹۱۱	۱/۰۹۰۰	۷۹۳	۶۰۰	۲۰۰
۱/۱۸۰۶	۱/۰۰۵۳	۲۶۰	۱/۱۸۸۱	۱/۰۱۸۰	۳۴۱	۱/۱۷۷۱	۱/۰۴۴۴	۴۷۷	۸۰۰	
۱/۱۶۹۹	۰/۹۵۶۵	۱۸۶	۱/۱۷۸۶	۰/۹۷۲۳	۲۴۴	۱/۱۶۵۸	۱/۰۰۶۴	۳۴۲	۱۰۰۰	
۱/۱۴۹۴	۰/۸۹۰۲	۱۱۱	۱/۱۶۰۵	۰/۸۹۰۴	۱۴۵	۱/۱۴۴۲	۰/۹۲۹۶	۲۰۵	۱۵۰۰	
۱/۱۳۴۰	۰/۹۳۱۶	۸۱	۱/۱۴۶۹	۰/۹۵۴۴	۱۰۵	۱/۱۲۸۰	۰/۹۴۶۰	۱۵۰	۲۰۰۰	
۱/۱۳۰۳	۱/۰۴۶۳	۸۸۸	۰/۰۰۱۱	۰/۰۰۰۹	۱۱۶۹	۰/۰۰۱۱	۰/۰۰۱۰	۱۶۲۴	۱۰۰۰	۵۰۰
۱/۱۱۱۲	۰/۹۶۷۸	۳۳۰	۱/۱۱۷۴	۰/۹۷۸۱	۴۳۳	۱/۱۰۸۳	۰/۹۹۹۰	۶۰۶	۱۵۰۰	
۱/۰۹۶۸	۰/۹۰۳۸	۱۹۷	۱/۱۰۴۷	۰/۹۱۸۰	۲۵۸	۱/۰۹۳۱	۰/۹۴۸۵	۳۶۲	۲۰۰۰	
۱/۰۷۵۱	۰/۸۹۹۵	۱۱۰	۱/۰۸۵۶	۰/۹۰۵۵	۱۴۳	۱/۰۷۰۳	۰/۹۲۲۰	۲۰۲	۳۰۰۰	
۱/۰۶۵۲	۰/۹۷۵۹	۷۱۱	۱/۰۶۹۳	۰/۹۸۲۳	۹۳۵	۰/۰۰۱۱	۰/۰۰۱۰	۱۳۰۱	۲۰۰۰	۱۰۰۰
۱/۰۴۴۸	۰/۸۹۰۵	۲۶۲	۱/۰۵۱۴	۰/۹۰۱۶	۳۴۴	۱/۰۴۱۷	۰/۹۲۴۸	۴۸۱	۳۰۰۰	
۱/۰۲۹۲	۰/۸۹۰۲	۱۵۶	۱/۰۳۷۷	۰/۸۹۷۶	۲۰۳	۱/۰۲۵۴	۰/۹۱۲۸	۲۸۶	۴۰۰۰	

۵ ویژگی‌های طرح پیشنهادی

در این بخش، ضمن بررسی تأثیر مقادیر مجاز برای خطاها و تعداد اقلام معیوب انباشته در معاهده توافق‌شده بین تولیدکننده و مصرف‌کننده بر مقادیر بهینه پارامترها، به مقایسه طرح پیشنهادی با طرح‌های VSS ، VRGS و Modified-VRGS مبتنی بر اندیس کارایی S_{pk}^T پرداخته می‌شود.

در طراحی یک طرح نمونه‌گیری برای پذیرش، سوالی که ممکن است مطرح شود این است که آیا مقادیر قراردادی برای خطاهای تولیدکننده و مصرف‌کننده و مقادیر p_{AQL} و p_{LQL} در ساخت طرح مورد نظر تأثیرگذار هستند یا نه؟ برای پاسخ به این سوال، مقادیر بهینه گزارش شده برای پارامترهای طرح در جداول ۱، ۲ و ۳ را در نظر می‌گیریم. مطابق این جداول، ملاحظه می‌شود که با افزایش مقادیر خطای تولیدکننده α و مصرف‌کننده β، اندازه نمونه لازم برای بررسی انباشته‌ای از محصولات تولیدی به منظور پذیرش یا رد آن، به‌ازای هر مقدار از m کاهش می‌یابد. به عبارت دیگر، مقادیر کم توافق‌شده برای خطاها، نیاز به اندازه نمونه زیاد (اطلاعات بیشتر) را برای بررسی انباشته نتیجه می‌دهد. وقوع این رخداد منطقی است، زیرا افزایش مقادیر خطاها به مفهوم کاهش حساسیت برای تصمیم‌گیری درباره پذیرش یا رد محصولات تولیدی است. شکل ۱ نمودار اندازه نمونه (n) را در مقابل مقادیر مختلف α و β وقتی $m = ۱$، $p_{\text{AQL}} = ۱۰۰$ و $p_{\text{LQL}} = ۵۰۰$ است، نشان می‌دهد. از شکل ۱ مشاهده می‌شود که اندازه

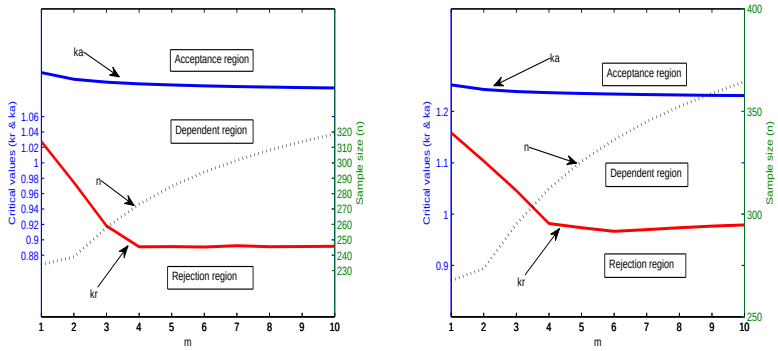
نمونه با افزایش حداقل یکی از خطاهای تولیدکننده و مصرف‌کننده کاهش می‌یابد به‌طوری‌که میزان کاهش در آن زمانی‌که α و β در همسایگی عدد یک قرار دارند، مشهودتر است. شکل ۲(الف) و (ب) تغییر



شکل ۱. نمودار اندازه نمونه در مقابل خطای تولیدکننده و مصرف‌کننده برای $m = ۱$، $p_{\text{AQL}} = ۱۰۰$ و $p_{\text{LQL}} = ۵۰۰$

رفتار پارامترهای طرح پیشنهادی یعنی اندازه نمونه n و عدد پذیرش k_a و عدد رد k_r را در برابر مقادیر مختلف m، به ترتیب، به‌ازای $(p_{\text{AQL}}, p_{\text{LQL}}) = (۱۰۰, ۵۰۰)$ و $(p_{\text{AQL}}, p_{\text{LQL}}) = (۵۰۰, ۲۰۰۰)$ برای $\alpha = ۰/۰۵$ و $\beta = ۰/۰۵$ نشان می‌دهد. طبق شکل ۲(الف) مشاهده می‌شود که با افزایش مقدار m میزان تغییرات k_r شدیدتر از k_a است. از سوی دیگر، ملاحظه می‌شود که به‌ازای $m > ۲$ اندازه نمونه به طور قابل ملاحظه‌ای افزایش می‌یابد. نکته قابل توجه دیگری که شکل ۲(الف) بیانگر آن است، این است که با افزایش مقدار m مقادیر پارامترهای n و k_a به مقادیر متناظر آنها در طرح VSS مبتنی بر S^T_{pk} با اندازه نمونه $n = ۴۳۸$ و عدد پذیرش $c = ۱/۲۲۴۸$ میل می‌کند. شکل ۲(ب) نیز الگوی مشابهی را نمایش می‌دهد با این توصیف که مقادیر n و k_a در طرح پیشنهادی با افزایش m به مقادیر متناظر آنها در طرح VSS مبتنی بر S^T_{pk} با اندازه نمونه $n = ۳۸۳$ و عدد پذیرش $c = ۱/۱۰۹۱$ نزدیک می‌شود. به عبارت دیگر، طرح VMDSM با افزایش m ساختاری مشابه با طرح VSS مبتنی بر S^T_{pk} می‌یابد.

چنانچه اشاره شد، دو ملاک مورد توجه در سنجش کارایی هر طرحی، منحنی OC آن طرح و میزان نمونه مورد نیاز برای آن به منظور تصمیم‌گیری نهایی درباره مقبولیت یا عدم مقبولیت محصولات تولیدی است، به‌طوری‌که هر چه منحنی OC طرح به منحنی OC ایده‌آل (مونتگومری ، ۲۰۲۰) نزدیک‌تر باشد،



(ب) (الف)

شکل ۲. رفتار مقادیر بحرانی k_r، k_a و اندازه نمونه n در مقابل m به‌ازای $\alpha = ۰/۰۵$ و $\beta = ۰/۰۵$ الف- $(p_{\mathrm{AQL}}, p_{\mathrm{LQL}}) = (۱۰۰, ۵۰۰)$، ب- $(p_{\mathrm{AQL}}, p_{\mathrm{LQL}}) = (۵۰۰, ۲۰۰۰)$

طرح متناظر از قدرت تشخیص بالایی برای تمیز دادن محموله‌های خوب و بد از هم دارد. همچنین، هر چه اندازه نمونه لازم برای بازرسی کوچک‌تر باشد، به‌کارگیری طرح مزبور از بُعد اقتصادی مقرون به صرفه‌تر خواهد بود. در جدول ۴ اندازه نمونه لازم تحت اجرای طرح‌های VRGS VSS، و Modified-VRGS و طرح پیشنهادی به‌ازای $m = ۲, ۳$ برای ترکیبات مختلفی از p_{AQL}، p_{LQL}، α و β گزارش شده است. با توجه به جدول ۴ مشاهده می‌شود که طرح پیشنهادی از عملکرد بهتری نسبت به طرح‌های VSS و VRGS برخوردار است، زیرا تحت شرایط یکسان، به ترتیب، کاهشی معادل با (۴۵٪ − ۳۵٪) و (۲۴/۱٪ − ۲/۵٪) در اندازه نمونه لازم برای بازرسی توسط طرح پیشنهادشده نسبت به طرح‌های VSS و VRGS ایجاد شده است. پس استفاده از طرح پیشنهادی به‌خصوص در آزمایش‌های مخرب می‌تواند انتخاب مناسبی نسبت به دو طرح VSS و VRGS باشد. مطابق جدول ۴، هیچ اولویتی از لحاظ معیار اندازه نمونه، بین طرح معرفی‌شده و طرح Modified-VRGS به طور مطلق وجود ندارد، زیرا طبق جدول ۴ اگرچه در اکثریت موارد، عملکرد طرح پیشنهادی بهتر از طرح Modified-VRGS بوده است، اما در برخی شرایط نتیجه عکس رخ داده است.

شکل ۳ منحنی OC طرح‌های VSS، VRGS، Modified-VRGS و طرح معرفی‌شده را به‌ازای $m = ۲, ۳$، $p_{\mathrm{AQL}} = ۵۰۰$ و $p_{\mathrm{LQL}} = ۳۰۰۰$ برای ترکیبات مختلف α و β نشان می‌دهد. همانطور که در شکل ۳ ملاحظه می‌شود رابطه‌ای مستقیم بین احتمال پذیرش انباشته و کیفیت فرآیند تولیدی وجود دارد به‌طوری‌که با افزایش p (کاهش کیفیت فرآیند) از میزان احتمال پذیرش انباشته کاسته می‌شود. بعلاوه

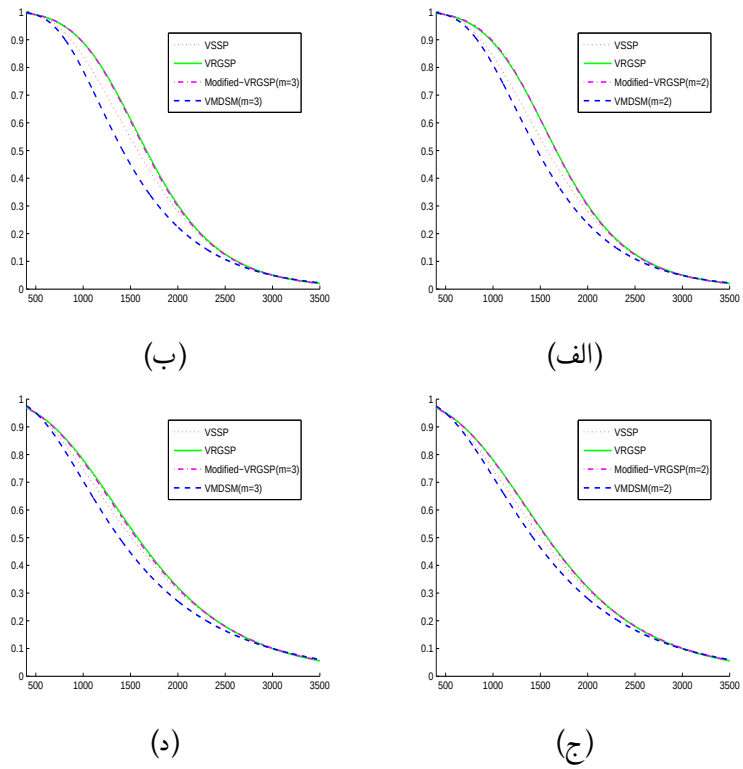
جدول ۴. اندازه نمونه تحت طرح‌های VMDSM، VSS، VRGS و Modified-VRGS

m	p_{AQL}	p_{LQL}	VSS	VRGS	Modified-VRGS	VMDSM	کاهش نسبت به VSS	کاهش نسبت به VRGS
			$\alpha = ۰/۰۱, \beta = ۰/۰۵$					
۲	۱	۱۰۰	۱۵۸	۱۰۸	۹۹	۹۳	٪۴۱/۱	٪۱۳/۸
		۲۰۰	۱۱۲	۷۷	۷۲	۶۵	٪۴۱/۹	٪۱۵/۵
		۵۰۰	۷۴	۵۲	۴۹	۴۲	٪۴۳/۲	٪۱۹/۲
	۱۰۰	۵۰۰	۶۵۰	۴۲۵	۳۸۹	۳۹۲	٪۳۹/۶	٪۷/۷
		۱۰۰۰	۲۹۱	۱۹۴	۱۷۸	۱۷۴	٪۴۰/۵	٪۱۰/۳
	۵۰۰	۲۰۰۰	۵۷۰	۳۷۳	۳۴۲	۳۴۴	٪۳۹/۸	٪۷/۷
		۳۰۰۰	۳۲۱	۲۱۳	۱۹۵	۱۹۲	٪۴۰/۴	٪۹/۸
	۱۰۰۰	۳۰۰۰	۷۵۵	۴۹۲	۴۵۰	۴۵۷	٪۳۹/۶	٪۷/۱
۳	۱	۱۰۰	۱۵۸	۱۰۸	۱۰۱	۹۸	٪۳۷/۹	٪۹/۲
		۲۰۰	۱۱۲	۷۷	۷۳	۶۹	٪۳۸/۳	٪۱۰/۳
		۵۰۰	۷۴	۵۲	۵۰	۴۵	٪۳۹/۱	٪۱۳/۴
	۱۰۰	۵۰۰	۶۵۰	۴۲۵	۳۹۸	۴۱۴	٪۳۶/۳	٪۲/۵
		۱۰۰۰	۲۹۱	۱۹۴	۱۸۲	۱۸۳	٪۳۷/۱	٪۵/۶
	۵۰۰	۲۰۰۰	۵۷۰	۳۷۳	۳۵۰	۳۶۲	٪۳۶/۴	٪۲/۹
		۳۰۰۰	۳۲۱	۲۱۳	۱۹۹	۲۰۲	٪۳۷/۰	٪۵/۱
	۱۰۰۰	۳۰۰۰	۷۵۵	۴۹۲	۴۶۰	۴۸۱	٪۳۶/۲	٪۲/۲
			$\alpha = ۰/۰۵, \beta = ۰/۱$					
۲	۱	۱۰۰	۸۵	۶۰	۵۴	۴۹	٪۴۲/۳	٪۱۸/۳
		۲۰۰	۶۰	۴۳	۳۹	۳۴	٪۴۳/۳	٪۲۰/۹
		۵۰۰	۴۰	۲۹	۲۶	۲۲	٪۴۵/۰	٪۲۴/۱
	۱۰۰	۵۰۰	۳۵۲	۲۴۳	۲۱۸	۲۱۰	٪۴۰/۳	٪۱۳/۵
		۱۰۰۰	۱۵۷	۱۱۰	۹۸	۹۳	٪۴۱/۴	٪۱۵/۴
	۵۰۰	۲۰۰۰	۳۰۸	۲۱۳	۱۹۱	۱۸۵	٪۴۰/۲	٪۱۳/۱
		۳۰۰۰	۱۷۳	۱۲۱	۱۰۸	۱۰۲	٪۴۱/۰	٪۱۵/۷
	۱۰۰۰	۳۰۰۰	۴۰۸	۲۸۱	۲۵۳	۲۴۶	٪۴۰/۱	٪۱۲/۴
۳	۱	۱۰۰	۸۵	۶۰	۵۶	۵۳	٪۳۷/۶	٪۱۱/۶
		۲۰۰	۶۰	۴۳	۴۰	۳۷	٪۳۸/۳	٪۱۳/۹
		۵۰۰	۴۰	۲۹	۲۷	۲۴	٪۴۰/۰	٪۱۷/۲
	۱۰۰	۵۰۰	۳۵۲	۲۴۳	۲۲۶	۲۲۶	٪۳۵/۷	٪۶/۹
		۱۰۰۰	۱۵۷	۱۱۰	۱۰۲	۹۹	٪۳۶/۹	٪۱۰/۰
	۵۰۰	۲۰۰۰	۳۰۸	۲۱۳	۱۹۹	۱۹۷	٪۳۶/۰	٪۷/۵
		۳۰۰۰	۱۷۳	۱۲۱	۱۱۲	۱۱۰	٪۳۶/۴	٪۹/۰
	۱۰۰۰	۳۰۰۰	۴۰۸	۲۸۱	۲۶۲	۲۶۲	٪۳۵/۷	٪۶/۷

منحنی OC طرح پیشنهادی نسبت به طرح‌های دیگر، در همه حالات، به منحنی OC ایده‌آل نزدیک‌تر است. به عبارت دیگر، منحنی OC طرح پیشنهادی قدرت تشخیص بالایی برای تمایز بین انباشته‌های خوب و بد از هم دارد که این رخداد، بیانگر مطلوب بودن عملکرد طرح پیشنهادی از دیدگاه هم مصرف‌کننده و هم تولیدکننده است.

۶ مثال کاربردی

در این مثال، درباره پذیرش یا رد انباشته‌ای از محصولات تولیدشده (افشاری و همکاران ، ۲۰۲۰) تحت اجرای طرح VMDSM تصمیم‌گیری می‌شود. در این فرآیند تولیدی، مشخصات کیفیت برای محصول شامل



شکل ۳. منحنی‌های OC به‌ازای $p_{\mathrm{AQL}} = ۵۰۰$، $p_{\mathrm{LQL}} = ۳۰۰۰$ الف- $(\alpha, \beta) = (۰٫۰۱, ۰٫۰۵)$، $m = ۲$، ب- $(\alpha, \beta) = (۰٫۰۱, ۰٫۰۵)$، $m = ۳$ ج- $(\alpha, \beta) = (۰٫۰۵, ۰٫۱)$، $m = ۲$، د-$(\alpha, \beta) = (۰٫۰۵, ۰٫۱)$، $m = ۳$

دو متغیر وابسته و نرمال: سختی[1] (H) و قدرت کششی[2] (TS) است که باید همواره تحت کنترل باشند. حدود مشخصات فنی $(\mathrm{LSL}, \mathrm{USL})'$ برای مشخصه‌های کیفیت H و TS به ترتیب برابر $(۱۱۲٫۷, ۲۴۱٫۳)'$ و $(۳۲٫۷, ۷۳٫۳)'$ است. طبق قرارداد توافقی بین تولیدکننده و مشتری، $p_{\mathrm{AQL}} = ۱۰۰$، $p_{\mathrm{LQL}} = ۱۰۰۰$، $\alpha = ۰٫۰۱$، $\beta = ۰٫۰۵$ و $m = ۱$ است. مطابق جدول ۱ پارامترهای طرح برابر $n = ۱۷۳$، $k_r = ۱٫۰۸۶۱$ و $k_a = ۱٫۲۰۵۴$ است. پس از جمع‌آوری یک نمونه ۱۷۳تایی از محصولات فوق، مقادیر

[1] Hardness
[2] Tensile strength

بردار میانگین نمونه و ماتریس کوواریانس نمونه به صورت

$$\overline{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} ۱۷۸/۲۲ \\ ۵۲/۷۵ \end{bmatrix}, \ \mathbf{S} = \begin{bmatrix} ۳۹۱/۹۸ & ۹۴/۷۰ \\ ۹۴/۷۰ & ۳۳/۷۰ \end{bmatrix}.$$

هستند. همچنین با استفاده از آزمون همبستگی در اندازه ۰/۰۵ ماتریس همبستگی نمونه $\mathbf{r}$ و ماتریس مقدار احتمال $\mathbf{R}$ محاسبه می‌شوند که با توجه به ماتریس مقدار احتمال، فرض عدم همبستگی بین متغیرها رد می‌شود، یعنی متغیرها از هم مستقل نیستند:

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} ۱/۰۰ & ۰/۸۲ \\ ۰/۸۲ & ۱/۰۰ \end{bmatrix}, \ \mathbf{R} = \begin{bmatrix} & ۰/۰۰۰۱ \\ ۰/۰۰۰۱ & \end{bmatrix}.$$

بنابراین برای اجرای طرح پیشنهادشده باید مسئله وابستگی داده‌ها مرتفع شود. به همین منظور از تکنیک PCA بهره گرفته می‌شود. مقادیر بردارهای ویژه $\mathbf{u}_۱$ و $\mathbf{u}_۲$ و مقادیر ویژه $\lambda_۱$ و $\lambda_۲$ متناظر با ماتریس واریانس–کواریانس نمونه را به‌دست می‌آوریم که در جدول ۵ گزارش شده است. در این جدول، همچنین نسبتی از واریانس کل که توسط هر کدام از مؤلفه‌های اصلی تبیین می‌شود، آورده شده است. طبق جدول ۵، بیشترین تغییرات کلی فرآیند (حدوداً ٪۹۷/۶۰) توسط اولین مؤلفه اصلی بیان می‌شود. به عبارت دیگر، تغییرات نمونه‌ای به خوبی توسط مؤلفه اصلی نخستین تلخیص می‌شود. در نتیجه، نادیده‌گرفتن آخرین مؤلفه اصلی یک امر منطقی برای کاهش بُعد مسئله خواهد بود. اما چون در این مطالعه هدف ما کاهش ابعاد مسئله نیست، بنابراین به جای استفاده از دو متغیر اصلی اولیه و وابسته، از هر دو مؤلفه اصلی که مستقل هستند، استفاده می‌کنیم (جانسون و ویچرن، ۲۰۰۷). با آگاهی از اینکه برای هر $j = ۱, \ldots, v$،

جدول ۵. مقادیر ویژه و بردارهای ویژه مربوط به ماتریس واریانس کواریانس مثال عددی

مشخصه‌های کیفیت	بردارهای ویژه	
	$\mathbf{u}_۱$	$\mathbf{u}_۲$
H	۰/۹۷۰۵	−۰/۲۴۰۷
TS	۰/۲۴۰۷	۰/۹۷۰۵
مقادیر ویژه	۴۱۵/۴۸	۱۰/۲۱
تغییرپذیری کل	۹۷/۶۰٪	۲/۳۹٪

$\mathrm{LSL}_{\mathrm{PC}_j} = \mathbf{u}_j{}'\mathbf{LSL}$، $\mathrm{USL}_{\mathrm{PC}_j} = \mathbf{u}_j{}'\mathbf{USL}$، $\overline{X}_{\mathrm{PC}_j} = \mathbf{u}_j{}'\overline{\mathbf{X}}$ و $S^۲_{\mathrm{PC}_j} = \lambda_j$ است و با استفاده از مفروضات مسئله و اطلاعات نمونه‌ای، داریم: $\mathrm{LSL}_{\mathrm{PC}_۱} = ۱۱۷/۲۵$، $\mathrm{USL}_{\mathrm{PC}_۱} = ۲۵۱/۸۴$،

$\overline{X}_{\mathrm{PC}_1} = ۱۸۵/۶۸$، $S_{\mathrm{PC}_1} = ۲۰/۳۸$، $\mathrm{LSL}_{\mathrm{PC}_2} = ۴/۶۰$، $\mathrm{USL}_{\mathrm{PC}_2} = ۱۳/۰۴$، $\overline{X}_{\mathrm{PC}_2} = ۸/۲۹$ و $S_{\mathrm{PC}_2} = ۳/۱۹$. با در نظر گرفتن مؤلفه‌های اصلی PC_j به جای متغیرهای اصلی X_j و با استفاده از رابطه (۳)، داریم: $\widehat{S}_{pk1} = ۱/۰۹۸۸$ و $\widehat{S}_{pk2} = ۰/۴۳۴۲$. با جایگذاری این مقادیر در (۴)، داریم

$$\widehat{S}_{pk}^{T} = \frac{۱}{۳}\Phi^{-۱}\Big\{\frac{۱}{۲}\Big[\prod_{j=۱}^{۲}(۲\Phi(۳\widehat{S}_{pkj}) - ۱) + ۱\Big]\Big\} = ۰/۴۳۳۴.$$

چون $\widehat{S}_{pk}^{T} \leq k_r = ۱/۰۸۶۱$ است، در نتیجه طبق قاعده تصمیم‌گیری در طرح پیشنهادی، انباشته رد می‌شود. تحت شرایط یکسان، اندازه نمونه لازم برای بازرسی این محصولات با اجرای طرح‌های VSS، VRGS و Modified-VRGS به ترتیب برابر ۲۹۱، ۱۹۴ و ۱۷۸ است که نسبت به اجرای طرح پیشنهادشده یک افزایش (۴۰/۵٪ − ۲/۸٪) را نشان می‌دهد. بنابراین، به‌کارگیری طرح معرفی‌شده به خاطر صرفه‌جویی در وقت و هزینه بازرسی نسبت به طرح‌های مذکور مقرون به صرفه خواهد بود.

بحث و نتیجه‌گیری

در جهان مدرن کنونی بر هیچ کس پوشیده نیست که کیفیت یک محصول تولیدی توسط مشخصه‌های متعدد تبیین می‌شود. بنابراین برای ارزیابی عملکرد فرآیندهای تولیدی نیاز به طرح‌های نمونه‌گیری چندمتغیره که بتواند ضمن سادگی در اجرا با اندازه نمونه کمتری به هدف مورد نظر سوق پیدا کند، امری اجتناب‌ناپذیر است. اگرچه طرح MDS به عنوان یک طرح شرطی، به دلیل نیاز به اندازه نمونه کم برای بازرسی انباشته محصولات نسبت به طرح ساده و غیرشرطی VSS ارجحیت دارد، اما برای استفاده در موقعیت‌هایی که در آن با مشخصه‌های کیفیت چندمتغیره مواجه باشیم، انتخاب مناسبی نخواهد بود. از این‌رو در این مطالعه، به منظور توسیع و بهبود عملکرد طرح MDS، طرح نمونه‌گیری VMDSM مبتنی بر اندیس کارایی تعمیم‌یافته S_{pk}^{T} پیشنهاد شد که قابلیت اجرا در سنجش عملکرد فرآیندهای تولیدی با مشخصه‌های کیفیت مستقل و توزیع نرمال چندمتغیره را دارد. سپس دامنه کاربرد طرح پیشنهادشده با استفاده از تکنیک PCA برای به‌کارگیری در شرایطی که مشخصه‌های کیفیت وابسته باشند، توسعه یافت. برای راحتی کاربران، با استفاده از یک مسئله بهینه‌سازی غیر خطی، جداول مربوط به مقادیر بهینه پارامترهای طرح پیشنهادشده طراحی و ارائه شد. نتایج حاصل از مطالعات مقایسه‌ای نشان داد که طرح پیشنهادشده بر اساس معیار اندازه نمونه و منحنی OC نسبت به طرح‌های VSS و VRGS مبتنی بر S_{pk}^{T} برتری دارد. همچنین، طرح

معرفی‌شده در مقایسه با طرح Modified-VRGS از توان بالایی در تشخیص محصولات خوب و بد از هم، برخوردار است. در پایان، برای تشریح روش به‌کارگیری طرح پیشنهادشده در موقعیت عملی، مثالی صنعتی مبتنی بر داده‌های واقعی آورده شد. شایان ذکر است که اگر مشخصه‌های کیفیت محصول تولیدی ترکیبی از مشخصه‌های وصفی و متغیر باشند، موضوع مطرح شده در این مطالعه می‌تواند به عنوان کار پژوهشی آتی در نظر گرفته شود.

تقدیر و تشکر

نویسنده مقاله لازم می‌داند از سردبیر، داوران و ویراستار محترم مجله که با نظرات و پیشنهادات ارزنده خود موجب بهبود کیفیت مقاله شده‌اند، قدردانی نماید.

مراجع

Afshari, R., and Ahmadi Nadi, A. (2022), An Optimal Construction of Yield-based EWMA Repetitive Multivariate Sampling Plan, *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 1-21.

Afshari, R., Sadeghpour Gildeh, B., and Ahmadi Nadi, A. (2020), A Modified Method on Estimating and Assessing the Process Yield with Imprecise Multiple Characteristics, *Iranian Journal of Fuzzy Systems*, **17**(6), 115-131.

Aslam, M., Balamurali, S., and Jun, C. H. (2021), A New Multiple Dependent State Sampling Plan Based on the Process Capability Index, Communications in Statistics-Simulation and Computation, **50**(6), 1711-1727.

Aslam, M., Wang, F. K., Khan, N. and Jun, C. H. (2018), A Multiple Dependent State Repetitive Sampling Plan for Linear Profiles, *Journal of the Operational Research Society*, **69**(3), 467-473.

Balamurali, S., and Jun, C. H. (2007), Multiple Dependent State Sampling Plans for Lot Acceptance Based on Measurement Data, *European Journal of Operational Research*, **180**(3), 1221-1230.

Bhattacharya, R., and Aslam, M. (2019), Design of Variables Sampling Plans Based on Lifetime-performance Index in Presence of Hybrid Censoring Scheme, *Journal of Applied Statistics*, **46**, 2975-2986.

Boyles, R. A. (1994), Process Capability with Asymmetric Tolerance, *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, **23**(3), 615-643.

Chen. K. S., Pearn, W. L., and Lin, P. C. (2003), Capability Measures for Processes with Multiple Characteristics, *Quality Reliability Engineering International*, **19**(2), 101-110.

Johnson, R. A., and Wichern, D. E. (2007), *Applied Multivariate Statistical Analysis*, 5th ed, Pearson Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey.

Liu, S. W., and Wu, C. W. (2015), Developing a New Variables Sampling Plan for Products with Multiple Quality Characteristics Based on Process Yield, Proceeding of the 2015 International Conference on Operations Excellence and Service Engineering, Orlando, USA, September 10-11.

Montgomery, D. C. (2020), *Introduction to Statistical Quality Control*, Wiley, New York.

Nadi, A. A., Gildeh, B. S., and Afshari, R. (2020), Optimal Design of Overall Yield-based Variable Repetitive Sampling Plans for Processes with Multiple Characteristics, *Applied Mathematical Modelling*, **81**, 194-210.

Pearn, W. L., and Cheng, Y. C. (2010), Measuring Production Yield for Pro-

cesses with Multiple Characteristics, *International Journal of Production Research*, **48**(15), 4519-4536.

Pearn, W. L., and Wu, C. W. (2006), Critical Acceptance Values and Sample Size of a Variables Sampling Plan for Very Low Fraction of Defectives, *Omega*, **34**(1), 90-101.

Pearn, W. L., and Wu, C. W. (2007), An Effective Decision Making Method for Product Acceptance, *Omega-International Journal of Management Science*, **35**(1), 12-21.

Rao, G. S., Aslam, M., and Jun, C. H. (2019), A Variable Sampling Plan Using Generalized Multiple Dependent State Based on a One-sided Process Capability Index, *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, 1-12.

Wu, C. W., and Liu S. W. (2014), Developing a Sampling Plan by Variables Inspection for Controlling Lot Fraction of Defectives, *Applied Mathematical Modeling*, **38**(9-10), 2303-2310.

Wu, C. W., Liu, S. W., and Lee, A. H. (2015), Design and Construction of a Variables Multiple Dependent State Sampling Plan Based on Process Yield, *European Journal of Industrial Engineering*, **9**(6), 819-838.

Wu, C. W., Lee, A. H., and Chen, Y. (2016), A Novel Lot Sentencing Method by Variables Inspection Considering Multiple Dependent State, *Quality and Reliability Engineering International*, **32**(3), 985-994.

Yen, C. H., Chang, C. H., Aslam, M., and Jun, C.H. (2018), Multiple Dependent State Repetitive Sampling Plans Based on One-sided Process Capability Indices, *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **47**(6), 1403-1412.