Journal of Statistical Sciences, Autumn and Winter, 2022
Vol. 16, No. 2, pp 295-308
DOI: 10.29252/jss.16.2.295

Bayesian and E-Bayesian estimators in Burr type XII model based on censored data under reflected gamma loss function

Alhamidah, A.[1], Naghizadeh Qomi, M.[1] and Kiapour, A.[2]
[1]Department of Statistics, University of Mazandaran, Babolsar , Iran.
[2]Department of Statistics, Babol Branch, Islamic Azad University, Babol, Iran.

Corresponding author: M. Naghizadeh Qomi, m.naghizadeh@umz.ac.ir

Received: 5/8/2022 **Revised:** 11/10/2022 **Accepted and Published Online:** 13/10/2022.

Introduction

The two-parameter Burr type XII ($Burr(\alpha, \beta)$) distribution has been proposed as a lifetime model and a model in accelerated life test data representing times to breakdown of an insulating fluid. A classical method for estimating the parameter of interest is based on sample information, for example, calculating the maximum likelihood estimator (MLE). A Bayesian approach to a statistical problem requires defining a prior distribution over the parameter space and loss function. Many Bayesians believe that just one prior can be elicited. In practice, the prior knowledge is vague, and any produced prior distribution is only an approximation to the true one. Various solutions to this problem, such as robust Bayesian estimation, have been proposed. Another method is E-Bayesian estimation, introduced by Han (۱۹۹۷), obtained by the expectation of a Bayes estimate of the unknown parameter over the hyperparameters.

Material and Methods

Suppose that n devices are placed on test simultaneously, and the test will finish immediately after r components have failed. r is fixed, and the length of the experiment is a random variable. This is a type-II censoring type, and data consisting of the r smallest lifetimes are $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_r)$. In some estimation problems, using an unbounded loss function may be inappropriate. For example, in estimating the mean life of the components of an aircraft, the amount of loss for estimating the parameter by an estimator is essentially

bounded. We consider the Burr type XII model and obtain the Bayesian and E-Bayesian estimation of β using censored data under a reflected gamma loss function. The uniqueness of this study comes from the fact that, thus far, no attempt has been made to use the E-Bayesian method for estimation in the Burr type XII model under the reflected gamma loss function. The method of E-Bayesian estimation is based on the expectation of Bayesian estimation over the hyperparameters of the prior distribution. The properties of E-Bayesian estimations and asymptotic relations are computed. A simulation study is conducted for comparison of the performances of proposed estimators.

Results and Discussion
A simulation study is performed to compare the proposed estimators. The samples are generated from the $Burr(1, 0.1)$ distribution for selected values of n, and censored samples are obtained using some selected values of r. The Bayesian and E-Bayesian estimations are computed for selected values of c, u and v. The estimated bias and risks are calculated for repeated 10000 times. It is observed from the simulation study that the performances of E-Bayesian estimates improve by increasing n (and r). Moreover, the estimator $\hat{\beta}_{EB3}$ has the most minor estimated bias and risk and therefore, it is proposed for estimation of β.

Keywords: Bayesian estimation, Burr type XII model, E-Bayesian estimation, Reflected gamma loss function.

Mathematics Subject Classification (2010): 62F10,62F15

©The Author(s). The Publisher is Iranian Statistical Society.
This is an open access article distributed under the terms and conditions of (CC BY-NC 4.0)

مجله علوم آماری، پاییز و زمستان ۱۴۰۱
جلد ۱۶، شماره ۲، ص ۲۹۵ – ۳۰۸
DOI: 10.29252/jss.16.2.295
مقاله پژوهشی

برآوردگرهای بیزی و E-بیزی در مدل بر نوع ۱۲ بر اساس داده‌های سانسور شده تحت تابع زیان گامای برگردانده

علاء الحمیده[۱]، مهران نقی‌زاده قمی[۱]، آزاده کیاپور[۲]

[۱] گروه آمار، دانشگاه مازندران
[۲] گروه آمار، واحد بابل، دانشگاه آزاد اسلامی، بابل، ایران

نویسنده مسئول : مهران نقی‌زاده قمی، m.naghizadeh@umz.ac.ir

تاریخ دریافت: ۱۴۰۱/۵/۱۴ تاریخ بازنگری: ۱۴۰۱/۷/۱۹ تاریخ پذیرش و انتشار: ۱۴۰۱/۷/۲۱

چکیده: در این مقاله، به محاسبه برآوردگرهای بیزی و E-بیزی در مدل بر نوع ۱۲ پرداخته می‌شود. برآوردگرها بر اساس داده‌های سانسور شده نوع دوم تحت تابع زیان کراندار گامای برگردانده به دست می‌آیند. رابطه بین برآوردگرهای E-بیز و همچنین ویژگی‌های مجانبی آن‌ها ارائه می‌شوند. عملکرد برآوردگرهای ارائه شده با استفاده از شبیه‌سازی مونت کارلو مورد بررسی قرار می‌گیرند.

واژه‌های کلیدی: برآوردگر بیز، برآوردگر E-بیز، تابع زیان گامای برگردانده، مدل بر نوع ۱۲.
کد موضوع‌بندی ریاضی (۲۰۱۰): 62F10، 62F15.

۱ مقدمه

فرض کنید X دارای توزیع بر نوع ۱۲ با تابع چگالی احتمال به‌صورت

$$f_X(x) = \frac{\alpha\beta x^{\alpha-1}}{(1+x^{\alpha})^{\beta+1}}, x > 0, \alpha > 0, \beta > 0, \qquad (1)$$

©نویسند(گان). ناشر انجمن آمار ایران است.
این مقاله با دسترسی آزاد تحت شرایط و ضوابط (CC BY-NC 4.0) توزیع شده است.

و تابع توزیع تجمعی به‌صورت

$$F(x) = ۱ - \frac{۱}{(۱ + x^{\alpha})^{\beta}}, \quad x > ۰, \quad \alpha, \beta > ۰, \tag{۲}$$

باشد، که در آن α و β پارامترهای شکل هستند. توزیع بر نوع ۱۲ به عنوان یک مدل طول عمر در کنترل کیفیت، قابلیت اعتماد و مدل‌بندی زمان شکست معرفی شده است. وانگ و همکاران (۱۹۹۶) برآورد ماکسیمم درست‌نمایی و فاصله‌ای را بر اساس داده‌های سانسور شده و کامل به دست آوردند. سلیمان (۲۰۰۵) برآوردگرهای ماکسیمم درستنمایی، بیز و بیز تجربی را براساس داده‌های سانسور فزاینده تحت توابع زیان مختلف به دست آورد. وانگ و شی (۲۰۱۰) به مطالعه برآوردگرهای بیزی تحت داده‌های رکوردی پرداختند. برای اطلاعات بیشتر به مقاله عربی بلاغی و همکاران (۲۰۱۵) مراجعه شود.

فرض کنید $x_۱, \ldots, x_n$ طول عمر n قطعه با تابع چگالی بر نوع ۱۲ داده شده در رابطه (۱) باشند. سانسور نوع دوم نوعی از سانسور است که در آن آزمایش تا زمانی که r قطعه از کار بیفتد ادامه می‌یابد. در نتیجه، زمان آزمایش یک متغیر تصادفی است. فرض کنید $x_۱, \ldots, x_r$ نمونه‌های سانسور شده باشند، در این‌صورت تابع چگالی توأم $\underset{\sim}{x} = (x_۱, \ldots, x_r)$ و در نتیجه تابع درستنمایی به‌صورت

$$L(\alpha, \beta | \underset{\sim}{x}) = \frac{n!}{(n-r)!}(\alpha\beta)^r \prod_{i=۱}^{r} \Big(\frac{x_i^{\alpha-۱}}{۱ + x_i^{\alpha}}\Big) e^{-\beta T}, \tag{۳}$$

است، که در آن $T = \sum_{i=۱}^{r} \ln(۱ + x_i^{\alpha}) + (n-r)\ln(۱ + x_r^{\alpha})$. با ماکسیمم کردن (۳) برآورد ماکسیمم درستنمایی β به صورت $\hat{\beta} = \frac{r}{T}$ حاصل می‌شود. در بعضی مواقع پارامتر β یک متغیر تصادفی است و باید برای آن یک تابع چگالی در نظر گرفت و با ترکیب اطلاعات توزیع پیشین و تابع درستنمایی برآوردگر بیز را به دست آورد. روش دیگری که توسط هان (۱۹۹۷) معرفی شده روش E-بیزی است که در واقع امید ریاضی برآوردگر بیز تحت ابرپارامترهای توزیع پیشین است. این روش توسط محققین بسیاری مورد مطالعه قرار گرفت که از تحقیقات اخیر می‌توان به جهان و اوکاشا (۲۰۱۱)، هان (۲۰۱۷)، گونزالز-لوپز و همکاران (۲۰۱۷)، یعقوب‌زاده (۱۳۹۹) و کیاپور (۲۰۱۸، ۲۰۲۲) اشاره کرد. تاکنون مقالات مختلف به برآوردیابی E-بیزی تحت توابع مختلفی پرداختند که متقارن یا نامتقارن هستند. اما در بعضی از مسائل برآورد لازم است تابع زیان کراندار باشد. بر اساس اطلاعات نویسندگان، تاکنون به برآوردیابی E-بیزی تحت تابع زیان کراندار پرداخته نشده است. به این منظور، ابتدا در بخش ۲، تابع زیان گامای برگردانده، معرفی و ویژگی‌های آن بیان می‌شود. سپس برآورد بیزی β تحت تابع زیان مورد بررسی به دست می‌آید. برآوردگرهای E-بیز تحت ۳ توزیع پیشین برای ابر پارامترها در بخش ۳ و رابطه بین آن‌ها و ویژگی‌های مجانبی در بخش مورد بررسی قرار می‌گیرند. در بخش ۴ یک مطالعه شبیه‌سازی برای مقایسه برآوردگرهای E-بیز صورت می‌گیرد. مقاله با یک بحث و نتیجه‌گیری خاتمه می‌یابد.

۲ برآوردیابی بیزی

چون محاسبه برآوردگر بیز وابسته به تابع زیان و توزیع پیشین است، در این بخش، ابتدا تابع زیان معرفی و ویژگی‌های آن بیان می‌شود. یکی از ساده‌ترین توابع زیان، تابع زیان توان دوم خطا است که برای محاسبه برآوردگرهای بیزی از آن استفاده می‌شود. این تابع زیان، تابعی محدب و متقارن است و به بیش برآوردی و کم برآوردی جریمه یکسانی نسبت می‌دهد. برای حل این مشکل از توابع زیان نامتقارن مانند لاینکس، آنتروپی و غیره استفاده می‌شود. اما هیچ کدام از این توابع زیان کراندار نیستند. در بعضی از مسائل برآوردیابی لازم است که تابع زیان کراندار باشد. برای مثال، در برآورد میانگین طول عمر β از مؤلفه‌های یک هواپیما، میزان زیان حاصل از برآورد β به وسیله یک برآوردگر لازم است که کراندار باشد. تابع زیان مورد استفاده در این مقاله، تابع زیان گامای برگردانده به فرم

$$L(\beta,\delta)=L(\frac{\beta}{\delta})=k\big[۱-(\frac{\beta}{\delta})^{\gamma}e^{-\gamma(\frac{\beta}{\delta}-۱)}\big], \tag{۴}$$

است که در آن $\gamma>۰$ پارامتر شکل و $k>۰$ ماکسیمم تابع زیان است.

توحیدی و بهبودیان (۱۹۹۹، ۲۰۰۲)، مغناطیسی و نعت‌الهی (۲۰۰۹)، نقی‌زاده قمی و همکاران (۲۰۱۵، ۲۰۱۹) از این تابع زیان در بعضی از مسائل برآوردیابی استفاده کردند. تابع زیان (۴) با برگردان کردن تابع چگالی گاما به دست می‌آید و در نتیجه به این نام خوانده می‌شود. شکل ۱ نمودار تابع زیان (۴) را به ازای $k=۱$ و مقادیر مختلف γ نشان می‌دهد. تابع زیان (۴) دارای ویژگی‌های زیر است:

۱- تابعی کراندار بین مقادیر ۰ و k است.

۲- به‌صورت نامتناهی مشتق‌پذیر و در نتیجه پیوسته است.

۳- تابعی است که به ازای مقادیر ابتدایی و انتهایی برابر است با k، یعنی $L(۰)=L(\infty)=k$.

۴- دارای مینیمم یکتا در ۰ به‌ازای $\frac{\beta}{\delta}=۱$ و به‌علاوه تابعی نزولی در بازه $(۰,۱)$ و صعودی در بازه $(۱,\infty)$ است.

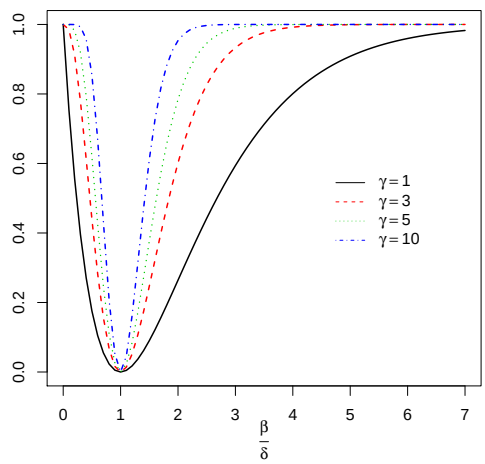
۵- تابعی نامتقارن و غیر محدب است.

۶- کم‌برآوردکردن دارای جریمه بیش‌تری از بیش‌برآورد کردن است زیرا به ازای هر $\epsilon>۰$ داریم $\frac{L(\delta-\epsilon)}{L(\delta+\epsilon)}\geq ۱$.

۲.۱ محاسبه برآوردگر بیزی β تحت تابع زیان گامای برگردانده

فرض کنید $\underset{\sim}{x}=(x_۱,\ldots,x_r)$ نمونه‌های سانسور شده از توزیع بر نوع ۱۲ با تابع چگالی (۱) و تابع درستنمایی (۳) باشند. با در نظر گرفتن تابع چگالی پیشین گاما برای β بصورت

$$\pi(\beta\mid a,b)=\frac{b^a}{\Gamma(a)}\beta^{a-۱}e^{-b\beta}, a>۰, b>۰, \beta>۰, \tag{۵}$$



شکل ۱. تابع زیان گامای برگردانده نسبت به $\frac{\beta}{\delta}$ به ازای $k = ۱$ و مقادیر مختلف γ.

تابع چگالی پسین β به شرط $\underset{\sim}{x}$ به صورت

$$\pi(\beta|\underset{\sim}{x}) = \frac{(b+T)^{r+a}}{\Gamma(r+a)}\beta^{r+a-۱}e^{-\beta(b+T)} \tag{۶}$$

به‌دست می‌آید. برای محاسبه برآوردگر بیز پارامتر β ابتدا به محاسبه مخاطره پسین برآوردگر دلخواه δ تحت تابع زیان (۴) پرداخته می‌شود. برای راحتی محاسبات، $k = ۱$ فرض می‌شود. مخاطره پسین برآوردگر δ برابر است با

$$\begin{aligned}
\rho(\delta) &= \mathbb{E}\Big[L(\delta,\beta)|\underset{\sim}{x}\Big] \\
&= \int_{۰}^{\infty} L(\delta,\theta)\pi(\beta|\underset{\sim}{x})d\beta \\
&= \int_{۰}^{\infty} \Big[۱-(\frac{\beta}{\delta})^{\gamma}e^{-\gamma(\frac{\beta}{\delta}-۱)}\Big]\Big[\frac{[b+T]^{a+r}}{\Gamma(a+r)}\beta^{a+r-۱}e^{-\beta(b+T)}\Big]d\beta \\
&\propto ۱-(\frac{e}{\delta})^{\gamma}\int_{۰}^{\infty}\beta^{a+r+\gamma-۱}e^{-\beta(b+T+\frac{\gamma}{\delta})}d\beta \\
&= ۱-(\frac{e}{\delta})^{\gamma}\frac{\Gamma(a+r+\gamma)}{[b+T+\frac{\gamma}{\delta}]^{a+r+\gamma}}.
\end{aligned} \tag{۷}$$

برآوردگر بیزی β با مینیمم کردن (۷)، یا مشتق گرفتن از لگاریتم تابع $(\frac{e}{\delta})^{\gamma}\frac{\Gamma(a+r+\gamma)}{[b+T+\frac{\gamma}{\delta}]^{a+r+\gamma}}$ نسبت به δ، به صورت $\hat{\beta}_B=\frac{r+a}{b+T}$ حاصل می‌شود.

۳ برآوردگرهای E-بیزی

در این بخش، به معرفی و محاسبه برآوردگر دیگری پرداخته می‌شود که اخیراً توسط بسیاری از نویسندگان مورد استفاده قرار گرفته است. برآوردگر E-بیزی پارامتر β برای اولین بار توسط هان (۱۹۹۷) به صورت

$$\hat{\beta}_{EB}=\int\int_{\mathbb{D}}\hat{\beta}_B\ \pi(a,b)dadb, \tag{۸}$$

معرفی شد که در آن $\hat{\beta}_B$ برآوردگر بیز، $\pi(a,b)$ تابع چگالی پیشینی برای ابرپارامترهای (a,b) و $\mathbb{D}$ دامنه مقادیر (a,b) است.

با توجه به هان (۱۹۹۷)، ابرپارامترهای پیشین (a,b)، باید طوری تعیین شوند که $\pi(\beta\mid a,b)$ تابعی نزولی از β باشد. مشتق $\pi(\beta\mid a,b)$ نسبت به β برابر است با

$$\frac{d\pi(\beta\mid a,b)}{d\beta}=\frac{b^a}{\Gamma(a)}\beta^{a-۲}e^{-b\beta}\{(a-۱)-b\beta\}.$$

در نتیجه برای تضمین شرط $\frac{d\pi(\beta\mid a,b)}{d\beta}<۰$ لازم است $b>۰$ و $۰<a<۱$ برقرار باشند. با توجه به برگر (۱۹۸۵)، مقادیر بزرگ b منجر به کاهش استواری برآوردگر بیزی می‌شود. در نتیجه b باید از بالا کراندار باشد در نتیجه محدودیت به صورت $۰<a<۱$ و $۰<b<c$ خواهد بود که در آن $c>۰$.

اکنون با در نظر گرفتن سه توزیع پیشین برای (a,b) به صورت

$$\pi_۱(a,b)=\frac{a^{u-۱}(۱-a)^{v-۱}}{cB(u,v)},۰<a<۱,۰<b<c,$$
$$\pi_۲(a,b)=\frac{۲(c-b)a^{u-۱}(۱-a)^{v-۱}}{c^۲B(u,v)},۰<a<۱,۰<b<c,$$
$$\pi_۳(a,b)=\frac{۲ba^{u-۱}(۱-a)^{v-۱}}{c^۲B(u,v)},۰<a<۱,۰<b<c.$$

برآوردگرهای E -بیزی پارامترهای β تحت تابع زیان گامای برگردانده (۴) به‌دست آورده می‌شود.

قضیه ۱. اگر $\underset{\sim}{x}=(x_۱,\ldots,x_r)$ یک نمونه تصادفی سانسورشده برخاسته از توزیع بر نوع ۱۲ با تابع چگالی (۱)

باشد، آن‌گاه داریم

الف- برای پیشین $\pi_1(a,b)$، برآوردگرهای E -بیزی β برابر است با:

$$\hat{\beta}_{EB1} = \frac{r(u+v)+u}{c(u+v)} \ \ln\big(\frac{T+c}{T}\big),$$

ب- اگر توزیع پیشین $\pi_2(a,b)$ را در نظر بگیریم، آن‌گاه:

$$\hat{\beta}_{EB2} = \frac{2r(u+v)+u}{c^2(u+v)}\big[(c+T)\ln\big(\frac{T+c}{T}\big)-c\big],$$

ج- اگر توزیع پیشین به‌صورت $\pi_3(a,b)$ باشد، آن‌گاه برآوردگر E -بیزی β برابر است با:

$$\hat{\beta}_{EB3} = \frac{2r(u+v)+u}{c^2(u+v)}\big[c+T\ln\big(\frac{T}{T+c}\big)\big].$$

برهان: الف- تحت پیشین $\pi_1(a,b)$ داریم:

$$\begin{aligned}
\hat{\beta}_{EB_1} &= \int_0^c\int_0^1 \hat{\beta}_B\pi_1(a,b)dadb \\
&= \int_0^c\int_0^1 \frac{r+a}{b+T}\frac{a^{u-1}(1-a)^{v-1}}{cB(u,v)}dadb \\
&= \frac{1}{cB(u,v)}\int_0^c \frac{1}{b+T}db\int_0^1 (r+a)a^{u-1}(1-a)^{v-1}da \\
&= \frac{r(u+v)+u}{c(u+v)} \ \ln\big(\frac{T+c}{T}\big)\ . \qquad (9)
\end{aligned}$$

ب- اگر پیشین $\pi_2(a,b)$ باشد، آن‌گاه

$$\begin{aligned}
\hat{\beta}_{EB_2} &= \int_0^c\int_0^1 \hat{\beta}_B\ \pi_2(a,b)dadb \\
&= \int_0^c\int_0^1 \frac{r+a}{b+T}\frac{2(c-b)a^{u-1}(1-a)^{v-1}}{c^2B(u,v)}\ dadb \\
&= \frac{2}{c^2B(u,v)}\int_0^c \frac{c-b}{b+T}db\int_0^1 (r+a)a^{u-1}(1-a)^{v-1}da \\
&= \frac{2[r(u+v)+u]}{c^2(u+v)}\big[(c+T)\ln\big(\frac{T+c}{T}\big)-c\big]\ . \qquad (10)
\end{aligned}$$

ج- با در نظر گرفتن پیشین $\pi_3(a,b)$ داریم

$$\begin{aligned}\hat{\beta}_{EB_3} &= \int_0^c \int_0^1 \hat{\beta}_B\ \pi_3(a,b)dadb \\ &= \int_0^c \int_0^1 \frac{r+a}{b+T}\frac{2ba^{u-1}(1-a)^{v-1}}{c^2B(u,v)}dadb \\ &= \frac{2}{c^2B(u,v)}\int_0^c \frac{b}{b+T}db\int_0^1 (r+a)a^{u-1}(1-a)^{v-1}da \\ &= \frac{2[r(u+v)+u]}{c^2(u+v)}\left[c+T\ln\left(\frac{T}{T+c}\right)\right]. \end{aligned} \tag{11}$$

۴ رابطه بین برآوردگرهای E-بیزی و ویژگی‌های مجانبی آن‌ها

قضیه ۲. با توجه به برآوردگرهای E-بیزی در رابطه‌های (۹)، (۱۰) و (۱۱) داریم

الف- $\hat{\beta}_{EB_3} < \hat{\beta}_{EB_1} < \hat{\beta}_{EB_2}$

ب- $\lim_{T\longrightarrow\infty}\hat{\beta}_{EB_1} = \lim_{T\longrightarrow\infty}\hat{\beta}_{EB_2} = \lim_{T\longrightarrow\infty}\hat{\beta}_{EB_3} = 0$

برهان: الف- بر اساس رابطه‌های (۹)، (۱۰) و (۱۱)

$$\begin{aligned}\hat{\beta}_{EB_2} - \hat{\beta}_{EB_1} &= \hat{\beta}_{EB_1} - \hat{\beta}_{EB_3} \\ &= \frac{r(u+v)+u}{c(u+v)}\left\{\frac{2T+c}{c}\ln\left(1+\frac{c}{T}\right)-2\right\}. \end{aligned} \tag{12}$$

از طرفی به ازای $-1 < x < 1$ و با استفاده از بسط تیلور $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{3} - \dots$ داریم

$$\begin{aligned}\frac{2T+c}{c}\ln\left(1+\frac{c}{T}\right)-2 &= \frac{2T+c}{c}\left\{\frac{c}{T}-\frac{1}{2}\left(\frac{c}{T}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{c}{T}\right)^3-\frac{1}{4}\left(\frac{c}{T}\right)^4+\dots\right\}-2 \\ &= \left(2-\frac{c}{T}+\frac{2}{3}\left(\frac{c}{T}\right)^2-\frac{1}{2}\left(\frac{c}{T}\right)^2+\frac{2}{5}\left(\frac{c}{T}\right)^4+\dots\right) \\ &+ \left(\frac{c}{T}-\frac{1}{2}\left(\frac{c}{T}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{c}{T}\right)^3-\frac{1}{4}\left(\frac{c}{T}\right)^4+\dots\right)-2 \\ &= \frac{c^2}{6T^2}\left(1-\frac{c}{T}\right)+\frac{c^4}{60T^4}\left(9-\frac{8c}{T}\right)+\dots \end{aligned} \tag{13}$$

بر اساس رابطه‌های (۱۲) و (۱۳) رابطه $\hat{\beta}_{EB_2} - \hat{\beta}_{EB_1} = \hat{\beta}_{EB_1} - \hat{\beta}_{EB_3} > 0$ حاصل می‌شود، در نتیجه $\hat{\beta}_{EB_3} < \hat{\beta}_{EB_1} < \hat{\beta}_{EB_2}$.

ب- از رابطه‌های (۱۲) و (۱۳) داریم

$$\begin{aligned}\lim_{T\longrightarrow\infty}(\hat{\beta}_{EB_1}-\hat{\beta}_{EB_2}) &= \lim_{T\longrightarrow\infty}(\hat{\beta}_{EB_1}-\hat{\beta}_{EB_3})\\ &= \frac{r(u+v)+u}{c(u+v)}\lim_{T\longrightarrow\infty}\big[\frac{c^2}{6T^2}(1-\frac{c}{T})+\frac{c^4}{60T^4}(9-\frac{8c}{T})\big]\\ &= 0,\end{aligned}$$

که اثبات را کامل می‌کند.

بنا بر قسمت اول قضیه ۲ رابطه $Bias(\hat{\beta}_{EB_3}) < Bias(\hat{\beta}_{EB_1}) < Bias(\hat{\beta}_{EB_2})$ در مورد اریبی حاصل می‌شود.

۵ شبیه‌سازی مونت کارلو و مقایسه برآوردگرها

در این بخش، یک شبیه‌سازی مونت کارلو برای مقایسه برآوردگرهای E-بیزی ارائه شده انجام می‌شود. مطالعه شبیه‌سازی با استفاده از گام‌های زیر صورت می‌گیرد:

۱- نمونه‌های $x_1,\ldots,x_n$ به اندازه‌های $n=20,40,60$ از توزیع بر نوع ۱۲ با پارامترهای $(\alpha,\beta)=(1,0/1)$ با استفاده از تبدیل $x=[1-(1-u)^{-\frac{1}{\beta}}]^{\frac{1}{\alpha}}$ تولید می‌شوند که در آن u یکنواخت در بازه $(0,1)$ است.

۲- داده‌های سانسور شده $x_1,\ldots,x_r$ به ازای مقادیر مختلف $r=15,20,30,35,40,50,55,60$ به‌دست آمده و مقدار $T=\sum_{i=1}^{r}\ln(1+x_i^{\alpha})+(n-r)\ln(1+x_i^{\alpha})$ محاسبه می‌شود.

۳- برآورد ماکسیمم درستنمایی، $\hat{\beta}_{ML}$، برآورد بیز، $\hat{\beta}_B$، به ازای پیشین $(a,b)=(0/4,3)$ و برآوردگرهای E-بیزی، $\hat{\beta}_{EB_i}$، $i=1,2,3$ به ازای مقادیر $c=10$ و $(u,v)=(2,3)$ محاسبه می‌شوند.

۴- مراحل فوق $N=10^4$ بار تکرار می‌شود و میانگین اریبی برآوردها (AB) و میانگین مخاطره آن‌ها (AR) تحت تابع زیان گامای برگردانده به‌صورت

$$\begin{aligned}AB(\hat{\beta}^{(k)}) &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(\hat{\beta}_i^{(k)}-\beta),\\ AR(\hat{\beta}^{(k)}) &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\big[1-(\frac{\beta}{\hat{\beta}_i^{(k)}})^{\gamma}e^{-\gamma(\frac{\beta}{\hat{\beta}_i^{(k)}}-1)}\big],\end{aligned}$$

محاسبه می‌شوند که در آن مقدار γ برابر ۲ در نظر گرفته شده است. $\hat{\beta}^{(1)}$ برآوردگر ML، $\hat{\beta}^{(2)}$ برآوردگر بیزی و $\hat{\beta}^{(3)}$، $\hat{\beta}^{(4)}$ و $\hat{\beta}^{(5)}$ به ترتیب برآوردگرهای E-بیزی $\hat{\beta}_{EB_1}$، $\hat{\beta}_{EB_2}$ و $\hat{\beta}_{EB_3}$ هستند. نمودار اریبی برآوردگرها در

شکل ۲ و میانگین برآوردهای اریبی شبیه‌سازی شده و مخاطره برآوردها در جدول ۱ آمده است. از این جدول نتیجه می‌شود :

۱- رابطه $Bias(\hat{\beta}_{EB۳}) < Bias(\hat{\beta}_{EB۱}) < Bias(\hat{\beta}_{EB۲})$ بین اریبی برآوردهای E-بیزی برقرار است.

۲- رابطه $AR(\hat{\beta}_{EB۳}) < AR(\hat{\beta}_{EB۲}) < AR(\hat{\beta}_{EB۱}) < AR(\hat{\beta}_{B}) < AR(\hat{\beta}_{ML})$ بین مخاطره برآوردها برقرار است، که نشان می دهد برآوردگر E-بیزی $\hat{\beta}_{EB۳}$ عملکرد بهتری نسبت به سایر برآوردگرها دارد.

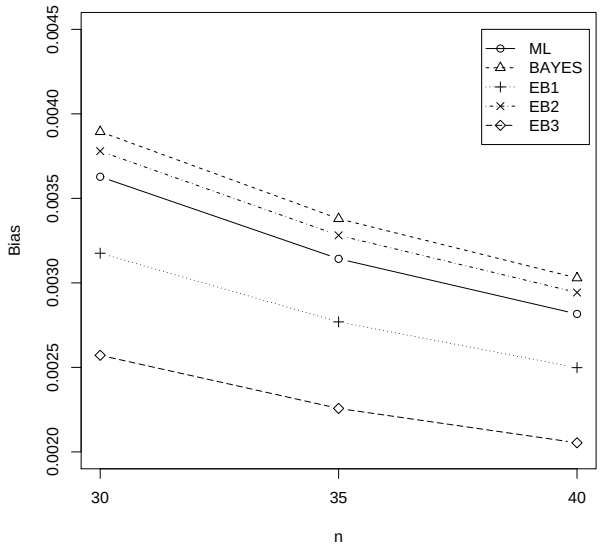
۳- با افزایش حجم نمونه از مقدار برآوردها و مخاطر آن‌ها کاسته می‌شود (عملکرد آن‌ها بهبود می‌یابد).

جدول ۱. مقادیر برآوردهای اریبی شبیه‌سازی شده (سطر اول) و مخاطره آن‌ها (سطر دوم) به ازای $\beta = ۰/۱$ و $\alpha = ۱$.

$\hat{\beta}_{EB۳}$	$\hat{\beta}_{EB۲}$	$\hat{\beta}_{EB۱}$	$\hat{\beta}_{B}$	$\hat{\beta}_{ML}$	r	n
۰/۰۰۵۲	۰/۰۰۷۸	۰/۰۰۶۵	۰/۰۰۸۱	۰/۰۰۷۷	۱۵	۲۰
۰/۰۵۶۳	۰/۰۵۸۷	۰/۰۵۷۴	۰/۰۵۸۹	۰/۰۶۱۱		
۰/۰۰۴۱	۰/۰۰۶۰	۰/۰۰۵۱	۰/۰۰۶۲	۰/۰۰۵۹	۲۰	
۰/۰۴۵۰	۰/۰۴۶۵	۰/۰۴۵۷	۰/۰۴۶۶	۰/۰۴۷۹		
۰/۰۰۲۶	۰/۰۰۳۸	۰/۰۰۳۲	۰/۰۰۳۹	۰/۰۰۳۶	۳۰	۴۰
۰/۰۳۰۸	۰/۰۳۱۵	۰/۰۳۱۱	۰/۰۳۱۵	۰/۰۳۲۱		
۰/۰۰۲۳	۰/۰۰۳۳	۰/۰۰۲۸	۰/۰۰۳۴	۰/۰۰۳۱	۳۵	
۰/۰۲۶۷	۰/۰۲۷۲	۰/۰۲۶۹	۰/۰۲۷۲	۰/۰۲۷۷		
۰/۰۰۲۱	۰/۰۰۲۹	۰/۰۰۲۵	۰/۰۰۳۰	۰/۰۰۲۸	۴۰	
۰/۰۲۳۷	۰/۰۲۴۱	۰/۰۲۳۹	۰/۰۲۴۱	۰/۰۲۴۵		
۰/۰۰۱۶	۰/۰۰۲۳	۰/۰۰۱۹	۰/۰۰۲۳	۰/۰۰۲۲	۵۰	۶۰
۰/۰۱۹۲	۰/۰۱۹۵	۰/۰۱۹۳	۰/۰۱۹۵	۰/۰۱۹۷		
۰/۰۰۱۴	۰/۰۰۲۱	۰/۰۰۱۸	۰/۰۰۲۱	۰/۰۰۲۰	۵۵	
۰/۰۱۷۵	۰/۰۱۷۷	۰/۰۱۷۶	۰/۰۱۷۷	۰/۰۱۷۹		
۰/۰۰۱۳	۰/۰۰۱۹	۰/۰۰۱۶	۰/۰۰۱۹	۰/۰۰۱۸	۶۰	
۰/۰۱۶۰	۰/۰۱۶۲	۰/۰۱۶۱	۰/۰۱۶۲	۰/۰۱۶۴		

۶ بحث ونتیجه گیری

توزیع بر نوع ۱۲، به عنوان یکی از پرکاربردترین توزیع‌های آماری در مدل‌بندی انواع مختلف داده‌های واقعی و طرح سانسور نوع ۲ به عنوان یکی از مهم‌ترین طرح‌های نمونه‌گیری، مورد مطالعه قرار گرفته‌اند. برآوردگرهای بیزی و E-بیزی تحت یک تابع زیان کراندار به نام گامای برگردانده محاسبه شدند. برای مقایسه برآوردگرهای معرفی شده یک مطالعه شبیه‌سازی انجام شد که نتایج در قالب جدول ۱ آمده است. مقدار $\alpha = ۱$ و $\beta = ۰/۱$ برای پارامترها در نظر گرفته شد. با توجه به اینکه $E(\beta|a,b) = a/b$ و $E(b|c) \in \{c/۳, c/۲, ۲c/۳\}$، مقادیر $a = ۰/۴$ و $b = ۳$ در نظر گرفته شد. همچنین با انتخاب $u = ۲$، $\nu = ۳$ و $c = ۱۰$ می توان تضمین کرد که پیشین های $\pi_i(a,b)$ دارای میانگین $E(a|u,\nu) = ۰/۴$ و $E(b|c) \approx ۳$ هستند. نتایج نشان می‌دهد که برآوردگرهای



شکل ۲. نمودار اریبی برآوردها

E-بیزی عملکرد بهتری نسبت به برآوردگرهای ماکسیمم درستنمایی و بیزی دارند. همچنین برآوردگر $\hat{\beta}_{EB۳}$ بطور یکنواخت عملکرد بهتری نسبت به سایر برآوردگرها دارد.

تقدیر و تشکر

نویسندگان از پیشنهادات سردبیر، داوران و ویراستار محترم مجله که باعث بهبود سطح کیفی و ارائه مقاله شده است کمال تشکر و قدردانی را دارند.

مراجع

یعقوب‌زاده، ش. (۱۳۹۹)، برآورد E-بیزی پارامتر قابلیت اعتماد در توزیع رایلی وارون تحت نمونه‌گیری مجموعه رتبه‌دار، مجله علوم آماری، **۱۴**، ۲۵۱-۲۷۱.

Arabi Belaghi, R., Arashi, M., and Tabatabaey, S. M. M. (2015), On the Construction of Preliminary Test Estimator Based on Record Values for the Burr XII Model, *Communications in Statistics - Theory and Methods*, **44**, 1-23.

Berger, J. O. (1985), The robust Bayesian viewpoint (with discussion), In Robustness of Bayesian Analysis (J. Kadane ed.), North Holland, Amsterdam.

Gonzalez-Lopez, V. A., Gholizadeh, R., and Galarza, C. (2017), E-Bayesian Estimation for System Reliability and Availability Analysis Based on Exponential Distribution, *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, **46**, 6221-6241.

Han, M. (1997), The Structure of Hierarchical Prior Distribution and Its Applications, *Chinese Operations Research and Management Science*, **6**, 31-40.

Han, M. (2017), The E-Bayesian and Hierarchical Bayesian Estimations of Pareto Distribution Parameter Under Different Loss Functions, *Journal of Statistical Computation and Simulation*, **87**, 577-593.

Jaheen, Z. F., and Okasha, H. M. (2011), E-bayesian Estimation for the Burr Type XII Model Based on Type-II Censoring, *Applied Mathematical Modelling*, **35**, 4730-4737.

Kiapour, A. (2018), Bayes, E-Bayes and Robust Bayes Premium Estimation and Prediction under the Squared Log Error Loss Function, *Journal of the Iranian Statistical Society*, **17**, 33-47.

Kiapour, A. (2022), Bayesian Estimation of the Expected Queue Length of a System M/M/1 with Certain and Uncertain Priors, *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **51**, 5310-5317.

Meghnatisi, Z., and Nematollahi, N. (2009), Inadmissibility of Usual and Mixed Estimators of Two Ordered Gamma Scale Parameters Under Reflected Gamma Loss Function, *Journal of Mathematical Extension*, **3**, 89-99.

Naghizadeh Qomi, M., Nematollahi, N., and Parsian, A. (2015), On Admissibility and Inadmissibility of Estimators after Selection Under Reflected Gamma Loss Function, *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, **44**, 1109-1124.

Naghizadeh Qomi, M., Dey S., and Fathollahi, M. (2019), Performance of a Class of Bayesian Shrinkage Estimators Based on Rayleigh Record Data under Reflected Gamma Loss Function, *Journal of the Iranian Statistical Society*, **18**, 155-172.

Soliman, A. (2005), Estimation of Parameters of Life from Progressively Censored Data Using Burr-XII Model, *IEEE Transactions on Reliability*, **54**, 34-42.

Towhidi, M and Behboodian, J. (1999), Estimation of Scale Parameter Under a Reflected Gamma Loss Function, *Journal of Sciences*, **10**, 265-269.

Towhidi, M., and Behboodian, J. (2002), Minimax Estimation of a Bounded Parameter Under Some Bounded Loss Functions, *Far East Journal of Theoretical Statistics*, **6**, 39-48.

Wang, F. K., Keats, J. B., Zimmer, W. J. (1996), Maximum Likelihood Estimation of the Burr XII Distribution with Censored and Uncensored Data, *Microelectron Reliability*, **36**, 359-362.

Wang, L., Shi, Y. (2010), Empirical Bayes Inference for the Burr Model Based on Records, *Applied Mathematical Sciences*, **4**, 1663-1670.