Journal of Statistical Sciences, Autumn and Winter, 2023
Vol. 17, No. 2, pp 433-458
DOI: 10.61186/jss.17.2.9

Bayesian Estimation of Multi-Component Reliability Parameter Under Adaptive Hybrid Progressive Censoring

Mirsadooghi, F., Kohansal, A.
Department of Statistics, Imam Khomeini International University, Qazvin, Iran.

Corresponding author: A. Kohansal, kohansal@sci.ikiu.ac.ir

Received: 15/7/2023 **Revised:** 18/11/2023 **Accepted and Published Online:** 21/11/2023.

Introduction

In reliability theory, inference on a stress-strength parameter is very interesting for scientists. A multi-component system is referred to a system with more than one component. In this paper, we consider one system with two types of components because of computational complexity. This model is so general because the multi-component stress-strength parameter with one strength variable and stress-strength parameter can be obtained from it. Type-I and Type-II schemes are the two most essential censoring schemes among different censoring schemes, and by mixing them, a hybrid scheme can be derived. The active units cannot be omitted during the test by the above schemes, so a progressive scheme is introduced. In this paper, we studied the adaptive hybrid progressive censoring scheme, which is so general that some censoring schemes can be obtained from it. Also, in this scheme, the sample size is deterministic and not random. Moreover, reaching the n-th failure times is another advantage of this scheme. Recently, the unit generalized Gompertz (UGG) distribution has been introduced as a new transformed model of the Gompertz distribution. This distribution can be converted to some famous distribution, which is a good candidate for fitting into the real data set.

Material and Methods

In this paper, the Bayesian estimation of the multi-component reliability, with the non-identical-component strengths, under the adaptive hybrid progressive censoring samples, in unit generalized Gompertz distribution is

considered. This problem was solved in three cases. In the first case, it is assumed that strengths and stress variables have unknown and uncommon parameters, i.e. $X_1 \sim UGG(\theta_1, c_1, \lambda_1)$, $X_2 \sim UGG(\theta_2, c_2, \lambda_2)$ and $Y \sim UGG(\theta, c, \lambda)$. In this case, the Bayes estimation of $R_{\boldsymbol{s},\boldsymbol{k}}$ is approximated by the MCMC method due to the lack of explicit forms. Also, the HPD credible interval of $R_{\boldsymbol{s},\boldsymbol{k}}$ is obtained in this case. In the second case, it is assumed that strengths and stress variables have two common parameters and one uncommon parameter , i.e. $X_1 \sim UGG(\theta_1, c, \lambda)$, $X_2 \sim UGG(\theta_2, c, \lambda)$ and $Y \sim UGG(\theta, c, \lambda)$, so that all of these parameters are unknown. In this case, using the MCMC method, the Bayes estimation and the associated HPD credible interval of $R_{\boldsymbol{s},\boldsymbol{k}}$ are derived. In the third case, it is assumed that the common parameters in the second case are known. By this assumption, the exact Bayesian estimation of $R_{\boldsymbol{s},\boldsymbol{k}}$ is obtained. Also, it is approximated via Lindley's approximation.

Results and Discussion

The simulation results showed that the performance of the informative priors was better than the non-informative ones. Also, the exact estimation performed better than Lindley's approximation. Moreover, the HPD interval, based on the informative priors, had a better performance based on non-informative priors in terms of average lengths and coverage percentages.

Conclusion

In this paper, in three cases, Bayes estimation of the multi-component reliability is considered, when an adaptive hybrid progressive censoring samples collect the data. In each case, Bayes estimation of the multi-component reliability is obtained with different methods. Different estimations are compared in the Monte Carlo simulation, and the results are implemented on one real data set.

Keywords: Unit generalized Gompertz distribution, Multi-component reliability parameter, Bayesian estimation, Monte Carlo simulation.

Mathematics Subject Classification (2010): 62N01, 62N05

©The Author(s). The Publisher is Iranian Statistical Society.
This is an open access article distributed under the terms and conditions of (CC BY-NC 4.0)

مجله علوم آماری، پاییز و زمستان ۱۴۰۲
جلد ۱۷، شماره ۲، ص ۴۳۳ -- ۴۵۸
DOI: 10.61186/jss.17.2.9
مقاله پژوهشی

برآورد بیزی پارامتر قابلیت اعتماد چندمؤلفه‌ای تحت داده‌های سانسور فزاینده پیوندی بهبود یافته

فاطمه سادات میرصدوقی، اکرم کهن‌سال
گروه آمار، دانشگاه بین‌المللی امام خمینی (ره)

نویسنده مسئول : اکرم کهن‌سال، kohansal@sci.ikiu.ac.ir

تاریخ دریافت: ۱۴۰۱/۳/۲۴ تاریخ بازنگری: ۱۴۰۲/۸/۲۷ تاریخ پذیرش و انتشار: ۱۴۰۲/۸/۳۰

چکیده: در این مقاله، تحت نمونه‌های سانسور فزاینده پیوندی بهبود یافته، برآورد بیزی پارامتر قابلیت اعتماد چندمؤلفه‌ای با مؤلفه‌های مقاومت غیر یکسان در توزیع گومپرتز تعمیم‌یافته یکه، بررسی می‌شود. این مسئله در سه حالت مختلف حل شده است. در حالت اول، فرض می‌شود که متغیرهای تنش و مقاومت دارای پارامترهای غیر مشترک نامعلوم هستند. در حالت دوم فرض می‌شود که متغیرهای تنش و مقاومت دارای دو پارامتر مشترک و یک پارامتر غیر مشترک هستند به‌طوری‌که همه این پارامترها نامعلومند. در حالت سوم، فرض می‌شود که متغیرهای تنش و مقاومت دارای دو پارامتر مشترک معلوم و یک پارامتر غیر مشترک نامعلوم هستند. در هر کدام از این حالت‌ها، برآورد بیزی پارامتر قابلیت اعتماد چندمؤلفه‌ای با مؤلفه‌های مقاومت غیر یکسان، به‌دست می‌آیند. در نهایت با روش شبیه‌سازی مونت کارلو عملکرد برآوردهای مختلف با هم مقایسه شده و نتایج روی یک سری داده واقعی پیاده‌سازی می‌شوند.

واژه‌های کلیدی: توزیع گومپرتز تعمیم‌یافته یکه، پارامتر قابلیت اعتماد چندمؤلفه‌ای، برآورد بیز، شبیه‌سازی مونت کارلو.

کد موضوع‌بندی ریاضی (۲۰۱۰): 62N01، 62N05.

۱ مقدمه

یکی از مطلوب‌ترین مسائل در نظریه قابلیت اعتماد، برای پژوهشگران، استنباط روی مدل تنش-مقاومت است. پارامتر تنش-مقاومت به‌صورت $R = P(Y < X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (1 - F_X(y)) dF_Y(y)$ بیان می‌شود. در

©نویسند(گان). ناشر انجمن آمار ایران است.
این مقاله با دسترسی آزاد تحت شرایط و ضوابط (CC BY-NC 4.0) توزیع شده است.

این رابطه $F_Y(\cdot)$ تابع توزیع تجمعی متغیر تنش Y و $F_X(\cdot)$ تابع توزیع تجمعی متغیر مقاومت X است. تا زمانی که مقاومت اعمال‌شده از تنش آن بیشتر باشد سیستم قابل اعتماد است. نخستین بار ایده این مدل توسط بیرنبام (۱۹۵۶) معرفی شد. یک مدل چندمؤلفه‌ای به مدلی با بیش از یک مؤلفه گفته می‌شود. به‌تازگی این مدل توجه پژوهشگران را به‌خود جلب کرده‌است. این نوع مدل‌ها از یک مؤلفه تنش مشترک و k مؤلفه مقاومت مستقل و هم‌توزیع تشکیل می‌شود و اگر دست‌کم s مؤلفه از k مؤلفه مقاومت بیشتر از تنش باشد، مدل در دسترس است. این مدل‌ها در دنیای واقعی کاربرد بسیاری دارند. که می‌توان به موارد زیر به‌عنوان نمونه اشاره کرد.

فرض کنید متخصصان هواشناسی، در انتخاب بهینه دو ایستگاه A و B را برای نصب توربین‌های بادی دچار تردید هستند. برای انتخاب ایستگاه بهینه می‌توان یک فرایند برنامه‌ریزی شده را در نظر گرفت. در یکی از ماه‌های سرد سال، میانگین روزانه سرعت باد ایستگاه A را به‌عنوان متغیر تنش Y می‌توان در نظر گرفت. همچنین در ایستگاه B داده‌های از ۷ صبح تا ۸ عصر هر روز در همان ماه را به‌عنوان متغیر مقاومت X_1 و داده‌های از ۸ عصر تا ۷ صبح را به‌عنوان متغیر مقاومت X_2 می‌توان در نظر گرفت. دراین‌صورت اگر مقدار قابلیت اعتماد چندمؤلفه‌ای که با این فرایند محاسبه می‌شود از مقدار ۰/۵ بیشتر باشد، ایستگاه B برای نصب توربین‌های بادی به ایستگاه A ترجیح داده می‌شود و برای احتمال‌های کمتر از ۰/۵ نتیجه برعکس خواهد بود (دمیرای و کیزلاسلان ، ۲۰۲۳).

یک هواپیما با چهار موتور را در نظر بگیرید که متغیرهای X_1، X_2، X_3 و X_4 بیانگر قدرت موتورها (متغیرهای مقاومت) و متغیر Y بیانگر عامل دما (متغیر تنش) باشد که روی کارکرد موتورها تاثیرگذار است. فرض کنید سیستم این هواپیما طوری است که حداقل باید دو موتور کار کند تا هواپیما سقوط نکند. بنابراین، احتمال کار کردن حداقل دو موتور از چهار موتور، احتمال سقوط نکردن هواپیما است (پاکدامن و احمدی ، ۲۰۱۸). یک پل را در نظر بگیرید که برای ایمنی بیشتر توسط شش کابل نگه‌داشته است، به‌طوری‌که حداقل لازم است تا چهار کابل از شش کابل پاره نشود تا پل سقوط نکند، بنابراین احتمال پاره نشدن حداقل چهار کابل از شش کابل، احتمال سالم ماندن پل است (پاکدامن و احمدی ، ۲۰۱۸). نخستین بار باتاچاریا و جانسون (۱۹۷۴) این مدل را به‌صورت

$$\begin{aligned} R_{s,k} &= P\big((X_1,\ldots,X_k) \text{ تا از } s \text{ دست‌کم} > Y\big) \\ &= \sum_{p=s}^{k} \binom{k}{p} \int_{-\infty}^{+\infty} \big(1-F_X(y)\big)^p \big(F_X(y)\big)^{k-p} dF_Y(y), \end{aligned}$$

توسیع دادند. متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع $(X_1,\ldots,X_k)$ متغیرهای مقاومت هستند که تابع توزیع تجمعی آن‌ها همان $F_X(\cdot)$ است و متغیر تصادفی Y متغیر تنش و تابع توزیع تجمعی آن به‌صورت $F_Y(\cdot)$ است. برخی پژوهشگران این مدل را برای داده‌های کامل و سانسورشده مطالعه کرده‌اند؛ برای نمونه هاناگل (۱۹۹۹) برای توزیع نمایی، نادار و کیزیلاسلان (۲۰۱۶) برای توزیع وایبول مارشال–اولکین دومتغیره، کهن‌سال (۲۰۱۹) برای توزیع کوماراسوامی با سانسور فزاینده، کیزیلاسلان و نادار (۲۰۱۸) برای توزیع کوماراسوامی دو متغیره، کهن‌سال و شعاعی (۲۰۲۱) برای توزیع وایبول با سانسور فزاینده بهبود یافته. در مدل‌های تنش–مقاومت چندمؤلفه‌ای

که توسط بسیاری از نویسندگان مورد مطالعه قرار می‌گیرد، فرض بر این است که مقاومت‌ها متغیرهای تصادفی (مستقل و هم‌توزیع) هستند، امّا این فرض زمانی‌که ساختارهای مختلف سیستم متفاوت باشند چندان عملی نیست. در ادامه سعی می‌شود مدل‌های تنش–مقاومت چندمؤلفه‌ای با مقاومت‌های تصادفی غیر یکسان، مطالعه شود. یک سیستم با $\boldsymbol{k} = (k_1, \ldots, k_m)$ مؤلفه را در نظر گرفته که در این سیستم مؤلفه‌های k_i از نوع $i = 1, \ldots, m$ هستند. در این‌صورت، فرض می‌شود که $F_i(\cdot)$ تابع توزیع تجمعی مقاومت مؤلفه iام سیستم است و همچنین یک تنش مشترک Y با تابع توزیع تجمعی $F_Y(\cdot)$ روی تمامی مؤلفه‌ها وجود دارد. در این شرایط تا زمانی‌که دست‌کم $\boldsymbol{s} = (s_1, \ldots, s_m)$ مؤلفه از $\boldsymbol{k}$ مؤلفه مقاومت بیشتر از تنش آن باشد سیستم در دسترس است. این مدل به‌صورت

$$R_{\boldsymbol{s},\boldsymbol{k}} = \sum_{p_1=s_1}^{k_1} \cdots \sum_{p_m=s_m}^{k_m} \Big(\prod_{i=1}^{m} \binom{k_i}{p_i}\Big) \int_{-\infty}^{+\infty} \Big(\big(1 - F_i(y)\big)^{p_i} \big(F_i(y)\big)^{k_i - p_i}\Big) dF_Y(y),$$

به‌دست می‌آید (راستونسا و نادار ، ۲۰۱۸). در این مقاله سیستمی دارای ۲ مؤلفه $\boldsymbol{k} = (k_1, k_2)$ بررسی می‌شود، بنابراین پارامتر تنش–مقاومت با دو مقاومت ناهمسان از معادله

$$\begin{aligned} R_{\boldsymbol{s},\boldsymbol{k}} = & \sum_{p_1=s_1}^{k_1} \sum_{p_2=s_2}^{k_2} \binom{k_1}{p_1} \binom{k_2}{p_2} \int_0^{\infty} \big(1 - F_1(y)\big)^{p_1} \\ & \times \big(F_1(y)\big)^{k_1 - p_1} \big(1 - F_2(y)\big)^{p_2} \big(F_2(y)\big)^{k_2 - p_2} dF(y), \end{aligned} \tag{1}$$

به‌دست می‌آید. یکی از توزیع‌ها مهم در نظریه قابلیت اعتماد توزیع گومپرتز است. یعقوب‌زاده و همکاران (۱۳۹۶) کلاسی از توزیع‌های دومتغیره گومپرتز تعمیم‌یافته–سری توانی را مطالعه کرده‌اند. یعقوب‌زاده (۱۳۹۷) پارامترهای مکان و شکل این توزیع را با آماره‌های ترتیبی تعمیم‌یافته برآورد کردند. توزیع گومپرتز تعمیم‌یافته یکه توزیعی پیوسته با تکیه‌گاه $(0, 1)$ است (کاراندیش و همکاران ، ۱۴۰۱). این توزیع که تعمیمی از توزیع گومپرتز است، به‌دلیل شکل خاص منحنی تابع چگالی‌اش، به‌عنوان رقیب جدی برای توزیع‌هایی همچون کوماراسوامی و بتا، در تحلیل بقا و قابلیت اعتماد کاربرد زیادی دارد. توابع چگالی، توزیع و نرخ شکست توزیع گومپرتز تعمیم‌یافته به‌ترتیب

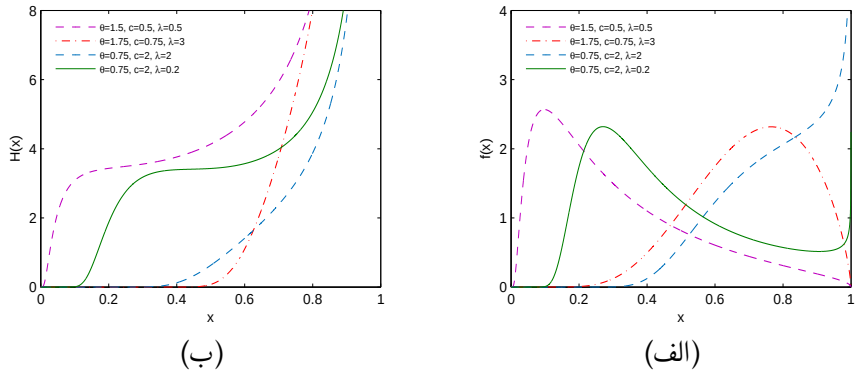
$$f(x) = \theta\lambda x^{-(c+1)} e^{-\frac{\lambda}{c}(x^{-c}-1)} \big(1 - e^{-\frac{\lambda}{c}(x^{-c}-1)}\big)^{\theta-1}, \tag{2}$$

$$F(x) = 1 - \big(1 - e^{-\frac{\lambda}{c}(x^{-c}-1)}\big)^{\theta}, \tag{3}$$

$$H(x) = \frac{\theta\lambda x^{-(c+1)} e^{-\frac{\lambda}{c}(x^{-c}-1)}}{1 - e^{-\frac{\lambda}{c}(x^{-c}-1)}}, \qquad 0 < x < 1,\ \theta, \lambda, c > 0,$$

هستند. از آنجا که توزیع‌های بتا تعمیم‌یافته و توزیع گومپرتز یکه حالت‌های خاصی از توزیع گومپرتز تعمیم‌یافته یکه هستند، لذا نتایج حاصل شده در این مقاله، نتایج کلی است. علاوه بر این، با توجه به‌این‌که تابع نرخ شکست این

توزیع با توجه به مقادیر مختلف پارامترها، صعودی است، لذا اگر در یک مجموعه داده، با بررسی‌های تجربی، نتیجه گرفته شود که تابع نرخ شکست صعودی است، در این‌صورت توزیع گومپرتز تعمیم‌یافته یکه، می‌تواند گزینه مناسبی برای تحلیل داده‌ها باشد. در ادامه، توزیع گومپرتز تعمیم‌یافته یکه با پارامترهای θ، c و λ با نماد $UGG(\theta, c, \lambda)$ نمایش داده می‌شود. در شکل ۱ توابع چگالی و نرخ شکست توزیع گومپرتز تعمیم‌یافته یکه رسم شده است. با توجه



شکل ۱. الف- تابع چگالی، ب- تابع نرخ شکست توزیع گومپرتز تعمیم‌یافته یکه

به‌این‌که تنها تفاوت توزیع متغیرهای تنش و مقاومت در پارامتر θ است، در ادامه توضیحاتی درباره دلیل انتخاب این پارامتر و تاثیر مقادیر مختلف آن در شکل تابع چگالی و نرخ خطر ارائه می‌شود. شکل ۱ نشان می‌دهد که توزیع گومپرتز تعمیم‌یافته یکه به‌ازای مقادیر مختلف θ می‌تواند اشکال مختلفی داشته باشد. این توزیع به‌ازای مقادیر θ کمتر از ۱به صورت J-شکل معکوس، به‌ازای مقادیر θ نزدیک به ۱ به‌صورت تک‌مدی و به‌ازای مقادیر θ بیشتر از ۱ به‌صورت چوله‌به‌چپ است. همچنین تابع نرخ شکست این توزیع نسبت به پارامتر θ یک تابع یکنواخت صعودی است. علاوه بر آن کشیدگی و چولگی این توزیع می‌توان گفت که توزیع گومپرتز تعمیم‌یافته یکه هم چولگی مثبت و منفی و هم حالت متقارن را پوشش می‌دهد و از طرف دیگر همواره برجستگی مثبت دارد. لازم به‌ذکر است که نتایج فوق به‌طور مفصل توسط کاراندیش و همکاران (۱۴۰۱) بررسی شده‌اند.

سانسورهای نوع اول و دوم محبوب‌ترین طرح‌های سانسور هستند. در سانسور نوع اول، آزمایش وقتی خاتمه می‌یابد که زمان معین‌شده، فرا رسد. در سانسور نوع دوم، وقتی تعداد خرابی از پیش انتخاب شده، مشاهده شود، آزمایش خاتمه می‌یابد. متأسفانه هیچ‌یک از این طرح‌های سانسور اجازه حذف واحدهای فعال در طول آزمایش را نمی‌دهد. طرح سانسور فزاینده به آزمایشگر اجازه می‌دهد تا واحدهای فعال را در طول آزمایش حذف کند. برای تشریح این طرح، وضعیتی را در نظر بگیرید که N واحد با توزیع مستقل و یکسان با تابع توزیع تجمعی $F_X(x)$ و تابع چگالی احتمال $f_X(x)$، تحت آزمایش طول عمر قرار گرفته‌اند. بلافاصله پس از نخستین شکست، R_1 واحد تحت بررسی به‌طور تصادفی از آزمایش خارج می‌شوند، پس از دومین شکست، R_2 واحد تحت بررسی و به‌همین‌ترتیب تا این‌که در زمان شکست nام تمامی $R_n = N - R_1 - \ldots - R_{n-1} - n$ واحد تحت بررسی

به‌طور تصادفی از آزمایش خارج می‌شوند. این طرح، سانسور فزاینده نامیده می‌شود و مقادیر مرتب شده حاصل از این نوع سانسور با $X_{1:n:N}^{(R_1,\ldots,R_n)},\ldots,X_{n:n:N}^{(R_1,\ldots,R_n)}$ یا برای سهولت با $X_1,\ldots,X_n$ نمایش داده می‌شوند.

در طرح سانسور فزاینده پیوندی بهبودیافته (نگ و همکاران ، ۲۰۰۹) یک طرح سانسور فزاینده و یک زمان ثابت T در نظر گرفته می‌شود، به‌طوری که اگر nامین شکست قبل از زمان T رخ دهد آزمایش در نقطه زمانی $X_{n:n:N}^{(R_1,\ldots,R_n)}$ متوقف می‌شود. در غیر این صورت فرض می‌شود $J(0 \leqslant J < n)$، تعداد شکست‌های مشاهده شده قبل از زمان T است. در این حالت، بعد از گذشتن زمان T تا رسیدن به زمان آخرین شکست، $X_{n:n:N}^{(R_1,\ldots,R_n)}$، آزمایش ادامه یافته و هیچ واحدی در طول این بازه زمانی از آزمایش حذف نمی‌شود. به‌عبارت دیگر، طرح سانسور به‌صورت $(R_1,R_2,\ldots,R_J,R_{J+1},\ldots,R_{n-1},R_n)$ است به‌طوری‌که $R_{J+1}=\ldots=R_{n-1}=0$ و نمونه مشاهده شده به‌صورت $\{X_{1:n:N},\ldots,X_{n:n:N}\}$ به‌دست می‌آید. در این طرح، تابع درستنمایی به‌صورت

$$L(\theta)\propto\prod_{i=1}^{n}f_X(x_i)\prod_{i=1}^{J}(1-F_X(x_i))^{R_i}(1-F_X(x_n))^{R_n},$$

است. نمونه حاصل از این طرح سانسور با $\{X_1,\ldots,X_n\}$ و طرح حاصل با نماد $\{N,n,T,J,R_1,\ldots,R_n\}$ نشان داده می‌شود، که در آن $X_J<T<X_{J+1}$. در بخش ۲ برآورد بیزی $R_{\boldsymbol{s},\boldsymbol{k}}$ با فرض این‌که متغیرهای مقاومت و تنش دارای توزیع‌های $X_1\sim UGG(\theta_1,c_1,\lambda_1)$، $X_2\sim UGG(\theta_2,c_2,\lambda_2)$ و $Y\sim UGG(\theta,c,\lambda)$ هستند، محاسبه می‌شود. در بخش ۲.۱ با فرض این‌که پارامترهای دوم و سوم متغیرهای فوق مشترک هستند، برآورد بیز برای پارامتر $R_{\boldsymbol{s},\boldsymbol{k}}$ محاسبه می‌شود. باید توجه کرد که این بخش از دیدگاه آماری دارای اهمیت زیادی است، زیرا در این حالت است که پارامتر قابلیت اعتماد چندمؤلفه‌ای $R_{\boldsymbol{s},\boldsymbol{k}}$ دارای فرم بسته بوده و می‌توان برآوردهای آماری مهمی را محاسبه کرد. در بخش ۳ برآورد بیز پارامتر $R_{\boldsymbol{s},\boldsymbol{k}}$ با فرض این‌که پارامترهای مشترک c و λ معلوم هستند، به دو روش دقیق و تقریب لیندلی به‌دست می‌آید. در بخش ۴ یک مطالعه شبیه‌سازی، برای مقایسه برآوردهای تئوری انجام شده و نتایج بر روی یک سری داده واقعی پیاده‌سازی می‌شوند و در نهایت بحث و نتیجه‌گیری ارائه می‌شود.

۲ استنباط بیزی پارامتر $R_{\mathbf{s},\mathbf{k}}$ در حالت کلی

طبق روابط (۲) و (۳)، پارامتر تنش–مقاومت چندمؤلفه‌ای $R_{\boldsymbol{s},\boldsymbol{k}}$، از رابطه (۱)، به‌صورت

$$\begin{aligned}R_{\boldsymbol{s},\boldsymbol{k}}=&\sum_{p_1=s_1}^{k_1}\sum_{p_2=s_2}^{k_2}\binom{k_1}{p_1}\binom{k_2}{p_2}\int_0^1\left(1-e^{-\frac{\lambda_1}{c_1}(y^{-c_1}-1)}\right)^{\theta_1 p_1}\\&\times\left(1-\left(1-e^{-\frac{\lambda_1}{c_1}(y^{-c_1}-1)}\right)^{\theta_1}\right)^{k_1-p_1}\left(1-e^{-\frac{\lambda_2}{c_2}(y^{-c_2}-1)}\right)^{\theta_2 p_2}\\&\times\left(1-\left(1-e^{-\frac{\lambda_2}{c_2}(y^{-c_2}-1)}\right)^{\theta_2}\right)^{k_2-p_2}\theta\lambda y^{-c-1}e^{-\frac{\lambda}{c}(y^{-c}-1)}\left(1-e^{-\frac{\lambda}{c}(y^{-c}-1)}\right)^{\theta-1}dy,\end{aligned}$$

به‌دست می‌آید. در این بخش برآورد بیزی و فاصله باور بیزی پارامتر $R_{\boldsymbol{s},\boldsymbol{k}}$ تحت تابع زیان مربعات خطا و توزیع‌های پیشین گاما به صورت

$$\begin{aligned}
&\theta_1 \sim \Gamma(a_1, b_1), \quad \theta_2 \sim \Gamma(a_2, b_2), \quad \theta \sim \Gamma(a_3, b_3),\\
&c_1 \sim \Gamma(a_4, b_4), \quad c_2 \sim \Gamma(a_5, b_5), \quad c \sim \Gamma(a_6, b_6),\\
&\lambda_1 \sim \Gamma(a_7, b_7), \quad \lambda_2 \sim \Gamma(a_8, b_8), \quad \lambda \sim \Gamma(a_9, b_9),
\end{aligned}$$

به‌دست آورده می‌شود، که در آن منظور از $X \sim \Gamma(a, b)$ داشتن تابع چگالی احتمال به‌فرم $f(x) \propto x^{a-1}e^{-bx}$ است. لازم به‌ذکر است که از آنجا که تمام پارامترهای فوق مقادیر مثبت را اختیار می‌کنند، مناسب‌ترین توزیع برای توصیف چگالی پیشین آنها توزیع گاما است. همچنین انتخاب این توزیع منجر به توابع چگالی پسین مزدوج می‌شود، که این امر باعث راحتی محاسبات خواهد شد. برای محاسبه تابع درستنمایی، می‌توان n سیستمی را در معرض آزمایش طول عمر در نظر گرفت. بنابراین نمونه‌ها به‌صورت

$$Y = \begin{bmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix}, \; X_1 = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & \dots & U_{1k_1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ U_{n1} & U_{n2} & \dots & U_{nk_1} \end{bmatrix}, \; X_2 = \begin{bmatrix} V_{11} & V_{12} & \dots & V_{1k_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ V_{n1} & V_{n2} & \dots & V_{nk_2} \end{bmatrix},$$

در نظر گرفته می‌شوند، که در آن $\{Y_1, \dots, Y_n\}$ نمونه تنش از توزیع $UGG(\theta, c, \lambda)$ و برای $i = 1, \dots, n$، $\{U_{i1}, \dots, U_{ik_1}\}$، نمونه مقاومت از توزیع $UGG(\theta_1, c_1, \lambda_1)$ و $\{V_{i1}, \dots, V_{ik_2}\}$، نمونه مقاومت از توزیع $UGG(\theta_2, c_2, \lambda_2)$ با طرح‌های $\{N, n, T, J, S_1, \dots, S_n\}$، $\{K_1, k_1, T_1, J_1, R_{11}, R_{12}, \dots, R_{1k_1}\}$ و $\{K_2, k_2, T_2, J_2, Q_{11}, Q_{12}, \dots, Q_{1k_2}\}$ سانسور شده باشد.

پارامتر قابلیت اعتماد چندمؤلفه‌ای با دو مؤلفه غیر یکسان به‌صورت

$$R_{\boldsymbol{s},\boldsymbol{k}} = P\left(\begin{array}{c} \text{حداقل } s_1 \text{ تا از } (U_1, \dots, U_{k_1}) \\ \text{و} \\ \text{حداقل } s_2 \text{ تا از } (V_1, \dots, V_{k_2}) \end{array} > Y\right)$$

تعریف می‌شود. بنابراین برای متغیر تنش Y باید k_1 مؤلفه از متغیر مقاومت U و k_2 مؤلفه از متغیر مقاومت V در دسترس باشد. لذا اگر نمونه‌ای به‌اندازه n از متغیر Y وجود داشته باشد، لازم است که از متغیر U به تعداد nk_1 و از متغیر V به تعداد nk_2 نمونه موجود باشد و همین موضوع باعث می‌شود که نمونه انتخابی از Y به‌صورت بردار nتایی و نمونه‌های انتخابی از U و V به‌ترتیب به‌صورت ماتریس‌های nk_1تایی و nk_2تایی باشند. تابع درستنمایی

θ_1، θ_2، θ، c_1، c_2، c، λ_1، λ_2 و λ را می‌توان به‌صورت

$$L(\theta_1,\theta_2,\theta,c_1,c_2,c,\lambda_1,\lambda_2,\lambda) \propto \prod_{i=1}^{n}\Big(\prod_{j_1=1}^{k_1} f_1(u_{ij_1})\prod_{j_1=1}^{J_1}\big(1-F_1(u_{ij_1})\big)^{R_{ij_1}}$$
$$\times\big(1-F_1(u_{ik_1})\big)^{R_{ik_1}}\Big)\times\Big(\prod_{j_2=1}^{k_2} f_2(v_{ij_2})\prod_{j_2=1}^{J_2}\big(1-F_2(v_{ij_2})\big)^{Q_{ij_2}}$$
$$\times\big(1-F_2(v_{ik_2})\big)^{Q_{ik_2}}\Big)f(y_i)\prod_{i=1}^{J}\big(1-F(y_i)\big)^{S_i}\big(1-F(y_n)\big)^{S_n},$$

نوشت؛ این تابع درستنمایی کلی است و می‌توان آن را به توابع درستنمایی دیگر به‌شرح زیر تقلیل داد.

اگر $T_1=T_2=T_3=\infty$، $R_{\boldsymbol{s},\boldsymbol{k}}$ در سانسور فزاینده به‌دست می‌آید.

اگر $T_1=T_2=T_3=\infty$، $R_{ij}=0$، $Q_{ij}=0$ و $S_i=0$، $R_{\boldsymbol{s},\boldsymbol{k}}$ در داده‌های کامل به‌دست می‌آید.

اگر $\boldsymbol{k}=(k,0)$، $R_{s,k}$ در سانسور فزاینده پیوندی بهبود یافته به‌دست می‌آید.

اگر $\boldsymbol{k}=(k,0)$ و $T_1=T_2=\infty$، $R_{s,k}$ در سانسور فزاینده به‌دست می‌آید.

اگر $\boldsymbol{k}=(k,0)$، $T_1=T_2=\infty$، $R_{ij}=0$ و $S_i=0$، $R_{s,k}$ در داده‌های کامل به‌دست می‌آید.

اگر $\boldsymbol{k}=(1,0)$، $R=P(X<Y)$ در سانسور فزاینده پیوندی بهبود یافته به‌دست می‌آید.

اگر $\boldsymbol{k}=(1,0)$ و $T_1=T_2=\infty$، $R=P(X<Y)$ در سانسور فزاینده به‌دست می‌آید.

اگر $\boldsymbol{k}=(1,0)$، $T_1=T_2=\infty$، $R_{ij}=0$ و $S_i=0$، R در داده‌های کامل به‌دست می‌آید.

حال با استفاده از روابط (۲) و (۳)، تابع درستنمایی را می‌توان به‌صورت

$$L(\text{داده‌ها}|\theta_1,\theta_2,\theta,c_1,c_2,c,\lambda_1,\lambda_2,\lambda) \propto \Big(\prod_{i=1}^{n}\prod_{j_1=1}^{k_1}\frac{u_{ij_1}^{-c_1-1}}{A_{c_1,\lambda_1}(u_{ij_1})}\Big)$$
$$\times\Big(\prod_{i=1}^{n}\prod_{j_2=1}^{k_2}\frac{v_{ij_2}^{-c_2-1}}{A_{c_2,\lambda_2}(v_{ij_2})}\Big)\Big(\prod_{i=1}^{n}\frac{y_i^{-c-1}}{A_{c,\lambda}(y_i)}\Big)\times e^{\theta_1 E(c_1,\lambda_1)+\theta_2 F(c_2,\lambda_2)+\theta G(c,\lambda)}$$
$$\times e^{-\frac{\lambda_1}{c_1}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j_1=1}^{k_1}(u_{ij_1}^{-c_1}-1)-\frac{\lambda_2}{c_2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j_2=1}^{k_2}(v_{ij_2}^{-c_2}-1)-\frac{\lambda}{c}\sum_{i=1}^{n}(y_i^{-c}-1)}(\theta_1\lambda_1)^{nk_1}(\theta_2\lambda_2)^{nk_2}(\theta\lambda)^{n},$$

نوشت، که در آن $A_{c,\lambda}(b)=1-e^{-\frac{\lambda}{c}(b^{-c}-1)}$ و

$$E(c,\lambda)=\sum_{i=1}^{n}\Big[\sum_{j_1=1}^{k_1}\log A_{c,\lambda}(u_{ij_1})+\sum_{j_1=1}^{J_1}R_{ij_1}\log A_{c,\lambda}(u_{ij_1})+\sum_{i=1}^{n}R_{ik_1}\log A_{c,\lambda}(u_{ik_1})\Big],$$

$$F(c,\lambda)=\sum_{i=1}^{n}\Big[\sum_{j_2=1}^{k_2}\log A_{c,\lambda}(v_{ij_2})+\sum_{j_2=1}^{J_2}Q_{ij_2}\log A_{c,\lambda}(v_{ij_2})+Q_{ik_2}\log A_{c,\lambda}(v_{ik_2})\Big],$$
$$G(c,\lambda)=\sum_{i=1}^{n}\log A_{c,\lambda}(y_i)+\sum_{i=1}^{J}S_i\log A_{c,\lambda}(y_i)+S_n\log A_{c,\lambda}(y_n),$$

بنابراین، تابع چگالی پسین توأم θ_1، θ_2، θ، c_1، c_2، c، λ_1، λ_2 و λ از رابطه

$$\pi(\theta_1,\theta_2,\theta,c_1,c_2,c,\lambda_1,\lambda_2,\lambda|\text{داده‌ها})\propto L(\text{داده‌ها}|\theta_1,\theta_2,\theta,c_1,c_2,c,\lambda_1,\lambda_2,\lambda)$$
$$\times\,\pi_1(\theta_1)\pi_2(\theta_2)\pi_3(\theta)\pi_4(c_1)\pi_5(c_2)\pi_6(c)\pi_7(\lambda_1)\pi_8(\lambda_2)\pi_9(\lambda),$$

به‌دست می‌آید. چون برآورد بیزی پارامترها و $R_{\boldsymbol{s},\boldsymbol{k}}$ را نمی‌توان به فرم بسته به‌دست آورد، برای استفاده از روش تقریب MCMC نخست توابع چگالی شرطی کامل پارامترها به‌صورت

$$\theta_1|c,\lambda\sim\Gamma\big(nk_1+a_1,b_1-E(c,\lambda)\big),\ \theta_2|c,\lambda\sim\Gamma\big(nk_2+a_2,b_2-F(c,\lambda)\big),$$
$$\theta|c,\lambda\sim\Gamma\big(n+a_3,b_3-G(c,\lambda)\big),$$
$$\pi(c_1|\theta_1,\lambda_1)\propto\Big(\prod_{i=1}^{n}\prod_{j_1=1}^{k_1}\frac{u_{ij_1}^{-c_1-1}}{A_{c_1,\lambda_1}(u_{ij_1})}\Big)c_1^{a_4-1}e^{\theta_1E(c_1,\lambda_1)-\frac{\lambda_1}{c_1}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j_1=1}^{k_1}(u_{ij_1}^{-c_1}-1)-b_4c_1},$$
$$\pi(c_2|\theta_2,\lambda_2)\propto\Big(\prod_{i=1}^{n}\prod_{j_2=1}^{k_2}\frac{v_{ij_2}^{-c_2-1}}{A_{c_2,\lambda_2}(v_{ij_2})}\Big)c_2^{a_5-1}e^{\theta_2F(c_2,\lambda_2)-\frac{\lambda_2}{c_2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j_2=1}^{k_2}(v_{ij_2}^{-c_2}-1)-b_5c_2},$$
$$\pi(c|\theta,\lambda)\propto\Big(\prod_{i=1}^{n}\frac{y_i^{-c-1}}{A_{c,\lambda}(y_i)}\Big)c^{a_6-1}e^{\theta G(c,\lambda)-\frac{\lambda}{c}\sum_{i=1}^{n}(y_i^{-c}-1)-b_6c},$$
$$\pi(\lambda_1|\theta_1,c_1)\propto\Big(\prod_{i=1}^{n}\prod_{j_1=1}^{k_1}A_{c_1,\lambda_1}^{-1}(u_{ij_1})\Big)\lambda_1^{nk_1+a_7-1}e^{\theta_1E(c_1,\lambda_1)-\frac{\lambda_1}{c_1}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j_1=1}^{k_1}(u_{ij_1}^{-c_1}-1)-b_7\lambda_1},$$
$$\pi(\lambda_2|\theta_2,c_2)\propto\Big(\prod_{i=1}^{n}\prod_{j_2=1}^{k_2}A_{c_2,\lambda_2}^{-1}(v_{ij_2})\Big)\lambda_2^{nk_2+a_8-1}e^{\theta_2F(c_2,\lambda_2)-\frac{\lambda_2}{c_2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j_2=1}^{k_2}(v_{ij_2}^{-c_2}-1)-b_8\lambda_2},$$
$$\pi(\lambda|\theta,c)\propto\Big(\prod_{i=1}^{n}A_{c,\lambda}^{-1}(y_i)\Big)\lambda^{n+a_9-1}e^{\theta G(c,\lambda)-\frac{\lambda}{c}\sum_{i=1}^{n}(y_i^{-c}-1)-b_9\lambda},$$

به‌دست می‌آیند. همان‌طورکه ملاحظه می‌شود تابع چگالی احتمال پسین پارامترهای c_1، c_2، c، λ_1، λ_2 و λ توزیع شناخته شده‌ای نیست، بنابراین، تولید نمونه تصادفی از آن‌ها باید با الگوریتم متروپولیس–هستینگز انجام شود.

الگوریتم ۱. الگوریتم گیبز در حالت کلی

گام ۱– مقادیر $\theta_{1(0)}, \theta_{2(0)}, \theta_{(0)}, c_{1(0)}, c_{2(0)}, c_{(0)}, \lambda_{1(0)}, \lambda_{2(0)}, \lambda_{(0)}$ را به‌عنوان مقادیر اولیه در نظر بگیرید.

گام ۲– قرار دهید $t = 1$.

گام ۳– با استفاده از الگوریتم متروپولیس–هستینگز $c_{1(t)}$ را از $\pi(c_1|\theta_{1(t-1)}, \lambda_{1(t-1)})$، با در نظر گرفتن توزیع $N(c_{1(t-1)}, 1)$ به‌عنوان توزیع پیشنهادی، به‌صورت زیر تولید کنید.

الف– $\omega_{(t)}$ را از توزیع $\Omega(\cdot|c_{1(t-1)}) = N(c_{1(t-1)}, 1)$ و نیز u را از توزیع $U(0, 1)$ تولید کنید.

ب– اگر $u < \min(1, \delta)$ آنگاه قرار دهید $c_{1(t)} = \omega_{(t)}$ که در آن

$$\delta = \frac{\pi(\omega_{(t)}|\theta_{1(t-1)}, \lambda_{1(t-1)})}{\pi(c_{1(t-1)}|\theta_{1(t-1)}, \lambda_{1(t-1)})} \frac{\Omega(c_{1(t-1)}|\omega_{(t)})}{\Omega(\omega_{(t)}|c_{1(t-1)})},$$

در غیر این‌صورت به مرحله الف باز گردید.

گام ۴– مقدار $c_{2(t)}$ را از $\pi(c_2|\theta_{2(t-1)}, \lambda_{2(t-1)})$، با در نظر گرفتن توزیع پیشنهادی $N(c_{2(t-1)}, 1)$ تولید کنید.

گام ۵– مقدار $c_{(t)}$ را از $\pi(c|\theta_{(t-1)}, \lambda_{(t-1)})$، با در نظر گرفتن توزیع پیشنهادی $N(c_{(t-1)}, 1)$ تولید کنید.

گام ۶– مقدار $\lambda_{1(t)}$ را از $\pi(\lambda_1|\theta_{1(t-1)}, c_{1(t-1)})$، با در نظر گرفتن توزیع پیشنهادی $N(\lambda_{1(t-1)}, 1)$ تولید کنید.

گام ۷– مقدار $\lambda_{2(t)}$ را از $\pi(\lambda_2|\theta_{2(t-1)}, c_{2(t-1)})$، با در نظر گرفتن توزیع پیشنهادی $N(\lambda_{2(t-1)}, 1)$ تولید کنید.

گام ۸– مقدار $\lambda_{(t)}$ را از $\pi(\lambda|\theta_{(t-1)}, c_{(t-1)})$، با در نظر گرفتن توزیع پیشنهادی $N(\lambda_{(t-1)}, 1)$ تولید کنید.

گام ۹– مقدار $\theta_{1(t)}$ را از $\Gamma\big(nk_1 + a_1, b_1 - E(c_{1(t)}, \lambda_{1(t)})\big)$ تولید کنید.

گام ۱۰– مقدار $\theta_{2(t)}$ را از $\Gamma\big(nk_2 + a_2, b_2 - F(c_{2(t)}, \lambda_{2(t)})\big)$ تولید کنید.

گام ۱۱– مقدار $\theta_{(t)}$ را از $\Gamma\big(n + a_3, b_3 - G(c_{(t)}, \lambda_{(t)})\big)$ تولید کنید.

گام ۱۲– مقدار زیر را را محاسبه کنید.

$$\begin{aligned}
R_{\boldsymbol{s},\boldsymbol{k}} = &\sum_{p_1=s_1}^{k_1} \sum_{p_2=s_2}^{k_2} \binom{k_1}{p_1}\binom{k_2}{p_2} \int_0^1 \big(1 - e^{-\frac{\lambda_{1(t)}}{c_{1(t)}}(y^{-c_{1(t)}}-1)}\big)^{\theta_{1(t)}p_1} \\
&\times \Big(1 - \big(1 - e^{-\frac{\lambda_{1(t)}}{c_1}(y^{-c_{1(t)}}-1)}\big)^{\theta_{1(t)}}\Big)^{k_1-p_1} \big(1 - e^{-\frac{\lambda_{2(t)}}{c_{2(t)}}(y^{-c_{2(t)}}-1)}\big)^{\theta_{2(t)}p_2} \\
&\times \Big(1 - \big(1 - e^{-\frac{\lambda_{2(t)}}{c_2}(y^{-c_{2(t)}}-1)}\big)^{\theta_{2(t)}}\Big)^{k_2-p_2} \theta_{(t)}\lambda_{(t)} y^{-c_{(t)}-1} e^{-\frac{\lambda_{(t)}}{c_{(t)}}(y^{-c_{(t)}}-1)} \\
&\times \big(1 - e^{-\frac{\lambda_{(t)}}{c_{(t)}}(y^{-c_{(t)}}-1)}\big)^{\theta_{(t)}-1} dy,
\end{aligned}$$

گام ۱۳- قرار دهید $t = t + 1$.
گام ۱۴- گام‌های ۳ تا ۱۳ را T_b بار تکرار کنید.

با این الگوریتم، برآورد بیزی $R_{\boldsymbol{s},\boldsymbol{k}}$ تحت تابع زیان توان‌های‌دوم خطا به‌صورت $\hat{R}_{\boldsymbol{s},\boldsymbol{k}} = \frac{1}{T_b}\sum_{t=1}^{T_b} R_{t(\boldsymbol{s},\boldsymbol{k})}$، به‌دست می‌آید. همچنین، با به‌کار بردن ایده چن و شائو (۱۹۹۹)، یک بازه اطمینان باور بیزی در سطح $100(1-\eta)\%$ برای $R_{\boldsymbol{s},\boldsymbol{k}}$ می‌توان ساخت. برای این کار مقادیر $R_{1(\boldsymbol{s},\boldsymbol{k})}, \ldots, R_{T(\boldsymbol{s},\boldsymbol{k})}$ را به‌صورت $R_{(1(\boldsymbol{s},\boldsymbol{k}))}, \ldots, R_{(T(\boldsymbol{s},\boldsymbol{k}))}$ مرتب کرده و تمام بازه‌های اطمینان $100(1-\eta)\%$ پارامتر $R_{\boldsymbol{s},\boldsymbol{k}}$ به‌صورت

$$(R_{(1(\boldsymbol{s},\boldsymbol{k}))}, R_{([T_b(\boldsymbol{s},\boldsymbol{k})(1-\eta)])}), \ldots, (R_{([T_b(\boldsymbol{s},\boldsymbol{k})(\eta)])}, R_{(T_b(\boldsymbol{s},\boldsymbol{k}))})$$

به‌دست می‌آیند، که در آن $[T_b]$، بزرگترین عدد صحیح کوچکتر یا برابر با T_b است. بازه اطمینان باور بیزی پارامتر $R_{\boldsymbol{s},\boldsymbol{k}}$ کوچکترین بازه در بین بازه‌های اطمینان بالا است.

۲.۱ استنباط بیزی پارامتر $R_{\mathbf{s},\mathbf{k}}$ با پارامترهای مشترک و نامعلوم c و λ

با فرض آن‌که $X_1 \sim UGG(\theta_1, c, \lambda)$، $X_2 \sim UGG(\theta_2, c, \lambda)$ و $Y \sim UGG(\theta, c, \lambda)$، طبق روابط (۲) و (۳)، پارامتر تنش-مقاومت چندمؤلفه‌ای $R_{\boldsymbol{s},\boldsymbol{k}}$، از رابطه (۱)، به‌صورت

$$R_{\boldsymbol{s},\boldsymbol{k}} = \sum_{\boldsymbol{k}}^{\boldsymbol{s}} \theta \int_0^1 t^{\theta_1(p_1+q_1)+\theta_2(p_2+q_2)+\theta-1} dt = \sum_{\boldsymbol{k}}^{\boldsymbol{s}} \frac{\theta}{\theta_1 p + \theta_2 q + \theta},$$

به‌دست می‌آید، که در آن

$$\sum_{\boldsymbol{k}}^{\boldsymbol{s}} = \sum_{p_1=s_1}^{k_1} \sum_{p_2=s_2}^{k_2} \sum_{q_1=0}^{k_1-p_1} \sum_{q_2=0}^{k_2-p_2} \binom{k_1}{p_1}\binom{k_2}{p_2}\binom{k_1-p_1}{q_1}\binom{k_2-p_2}{q_2}(-1)^{q_1+q_2},$$

و $p = p_1 + q_1$، $q = p_2 + q_2$ است. در ادامه این بخش به بررسی برآورد بیز و فاصله باور بیزی پارامتر $R_{\boldsymbol{s},\boldsymbol{k}}$ تحت تابع زیان مربعات خطا، زمانیکه θ_1، θ_2، θ، c و λ دارای توابع چگالی پیشین به‌ترتیب

$$\theta_1 \sim \Gamma(a_1, b_1),\ \theta_2 \sim \Gamma(a_2, b_2),\ \theta \sim \Gamma(a_3, b_3),\ c \sim \Gamma(a_4, b_4),\ \lambda \sim \Gamma(a_5, b_5),$$

هستند، پرداخته می‌شود. مشابه بخش قبل، توابع چگالی احتمال پسین شرطی کامل پارامترهای θ_1، θ_2، θ، c و λ به‌دست می‌آیند. همچنین برای محاسبه برآورد بیزی پارامتر $R_{\boldsymbol{s},\boldsymbol{k}}$ تحت تابع زیان توان‌های‌دوم خطا، از الگوریتم گیبز استفاده می‌شود که حالت خاصی از الگوریتم گیبز ارائه شده در بخش قبل است و شامل ۱۰ گام است. علاوه

بر این با به‌کار بردن ایده چن و شائو (۱۹۹۹)، یک بازه اطمینان باور بیزی در سطح $100(1-\eta)\%$ برای پارامتر $R_{\boldsymbol{s},\boldsymbol{k}}$ می‌توان ساخت.

۳ استنباط بیزی پارامتر $R_{\mathrm{s,k}}$ با پارامترهای مشترک و معلوم c و λ

در این بخش استنباط بیزی پارامتر $R_{\boldsymbol{s},\boldsymbol{k}}$ تحت تابع زیان مربعات خطا، زمانیکه θ_1، θ_2 و θ دارای توزیع‌های پیشین گاما مستقل هستند، به‌صورت برآورد بیز دقیق و روش تقریب لیندلی محاسبه می‌شود.

۳.۱ روش بیز دقیق

بر مبنای نمونه سانسور مشاهده شده، تابع درستنمایی را می‌توان به‌صورت

$$L(\text{داده‌ها}, c, \lambda|\theta_1, \theta_2, \theta) \propto \theta_1^{nk_1}\theta_2^{nk_2}\theta^n e^{\theta_1 E(c,\lambda)+\theta_2 F(c,\lambda)+\theta G(c,\lambda)},$$

نوشت. لذا، تابع چگالی پسین توام را پس از چند مرحله ساده کردن،می‌توان به‌صورت

$$\pi(\theta_1, \theta_2, \theta|\text{داده‌ها}, c, \lambda) = \big(b_1 - E(c,\lambda)\big)^{nk_1+a_1}\big(b_2 - F(c,\lambda)\big)^{nk_2+a_2}$$
$$\times \big(b_3 - G(c,\lambda)\big)^{n+a_3}\frac{e^{\theta_1\left(b_1-E(c,\lambda)\right)+\theta_2\left(b_2-F(c,\lambda)\right)+\theta\left(b_3-G(c,\lambda)\right)}}{\Gamma(nk_1+a_1)\Gamma(nk_2+a_2)\Gamma(n+a_3)}$$

به‌دست آورد. بنابراین، برآورد بیزی پارامتر $R_{\boldsymbol{s},\boldsymbol{k}}$، تحت تابع زیان مربعات خطا از حل انتگرال

$$R_{\boldsymbol{s},\boldsymbol{k}} = \sum_{\boldsymbol{k}}^{\boldsymbol{s}}\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{\theta\pi(\theta_1, \theta_2, \theta|\text{داده‌ها}, c, \lambda)d\theta_1 d\theta_2 d\theta}{\theta_1 p + \theta_2 q + \theta},$$

به‌دست می‌آید. با به‌کار بردن ایده کهن‌سال و همکاران (۲۰۲۱)، قسمت انتگرال سه گانه، به‌صورت

$$M = \begin{cases} \frac{\nu_3(1-w_1)^{\nu_1}(1-w_2)^{\nu_2}}{\nu_1+\nu_2+\nu_3}\,B_1, & |w_1|<1, |w_2|<1,\\ \frac{\nu_3}{\nu_1+\nu_2+\nu_3}\,B_2, & w_1<-1, w_2<-1,\\ \frac{\nu_3(1-w_1)}{\nu_1+\nu_2+\nu_3}\,B_3, & |w_1|<1, w_2<-1,\\ \frac{\nu_3(1-w_2)}{\nu_1+\nu_2+\nu_3}\,B_4, & w_1<-1, |w_2|<1,\end{cases}$$

حل می‌شود، که در آن

$$\begin{aligned}
B_۱ &= F_۱(\nu_۱+\nu_۲+\nu_۳,\nu_۱,\nu_۲,۱+\nu_۱+\nu_۲+\nu_۳;w_۱,w_۲),\\
B_۲ &= F_۱(۱,\nu_۱,\nu_۲,۱+\nu_۱+\nu_۲+\nu_۳;\frac{w_۱}{w_۱-۱},\frac{w_۲}{w_۲-۱}),\\
B_۳ &= F_۱(۱,\nu_۳+۱,\nu_۲,۱+\nu_۱+\nu_۲+\nu_۳;w_۱,\frac{w_۱-w_۲}{۱-w_۲}),\\
B_۴ &= F_۱(۱,\nu_۱,\nu_۳+۱,۱+\nu_۱+\nu_۲+\nu_۳;\frac{w_۲-w_۱}{۱-w_۱},w_۲),
\end{aligned}$$

هستند. همچنین $\nu_۱=nk_۱+a_۱$، $\nu_۲=nk_۲+a_۲$، $\nu_۳=n+a_۳$،

$$w_۱=۱-\frac{b_۱-E(c,\lambda)}{(p_۱+q_۱)(b_۳-G(c,\lambda))},\ w_۲=۱-\frac{b_۲-F(c,\lambda)}{(p_۲+q_۲)(b_۳-G(c,\lambda))},$$

و مقدار

$$F_۱(\alpha,\beta,\beta',\gamma;x,y)=\frac{\int_۰^۱ t^{\alpha-۱}(۱-t)^{\gamma-\alpha-۱}(۱-tx)^{-\beta}(۱-ty)^{-\beta'}dt}{B(\alpha,\gamma-\alpha)},$$

سری هایپرجئومتریک است که توسط بسیاری از نرم‌افزارها مانند متلب به‌راحتی قابل محاسبه است. بنابراین برآورد بیزی پارامتر $R_{\boldsymbol{s},\boldsymbol{k}}$ تحت تابع زیان توان‌های‌دوم خطا به‌صورت $\hat{R}_{\boldsymbol{s},\boldsymbol{k}}=\sum_{\boldsymbol{k}}^{\boldsymbol{s}}M$ به‌دست می‌آید. همچنین، با به‌کار بردن ایده چن و شائو (۱۹۹۹)، یک بازه اطمینان باور بیزی در سطح $۱۰۰(۱-\eta)\%$ برای پارامتر $R_{\boldsymbol{s},\boldsymbol{k}}$ می‌توان ساخت.

۳.۲ روش تقریب لیندلی

یکی از مهمترین روش‌های تقریبی برای به‌دست آوردن برآورد بیزی توسط لیندلی (۱۹۸۰) معرفی شده است. این روش به‌صورت زیر توصیف می‌شود. فرض شود $u(\beta)$ تابعی از پارامتر β باشد. برآورد بیز $u(\beta)$، تحت تابع زیان مربعات خطا، برابر با $\mathbb{E}(u(\beta))=\frac{\int u(\beta)e^{\ell(\beta)+\rho(\beta)}d\beta}{\int e^{\ell(\beta)+\rho(\beta)}d\beta}$ است که در آن $\ell(\beta)$ لگاریتم تابع درستنمایی و $\rho(\beta)$ لگاریتم تابع چگالی پیشین β است. بنابراین تقریب لیندلی $E(u(\beta)|\text{داده‌ها})$ به‌صورت

$$\mathbb{E}(u(\beta)|\text{داده‌ها})=u+\frac{۱}{۲}\sum_i\sum_j(u_{ij}+۲u_i\rho_j)\sigma_{ij}+\frac{۱}{۲}\sum_i\sum_j\sum_k\sum_p\ell_{ijk}\sigma_{ij}\sigma_{kp}u_p,$$

است، که در آن $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_m)$، $i, j, k, p = 1, \ldots, m$، $\hat{\beta}$ برآورد ماکسیمم درستنمایی پارامتر β، $u = u(\beta)$، $u_i = \frac{\partial u}{\partial \beta_i}$، $u_{ij} = \frac{\partial^2 u}{\partial \beta_i \partial \beta_j}$، $\ell_{ijk} = \frac{\partial^3 \ell}{\partial \beta_i \partial \beta_j \partial \beta_k}$ و $\rho_j = \frac{\partial \rho}{\partial \beta_j}$ است. همچنین، σ_{ij}، (i, j)امین درایه در ماتریس معکوس $[-\ell_{ij}]$ است. در حالت سه‌پارامتری $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$، جمع‌ها در رابطه اخیر به‌صورت ساده‌تر

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(u(\beta)) &= u + u_1 d_1 + u_2 d_2 + u_3 d_3 + d_4 + d_5 \\ &+ \frac{1}{2}\big(A(u_1\sigma_{11} + u_2\sigma_{12} + u_3\sigma_{13}) + B(u_1\sigma_{21} + u_2\sigma_{22} + u_3\sigma_{23}) \\ &+ C(u_1\sigma_{31} + u_2\sigma_{32} + u_3\sigma_{33})\big), \end{aligned} \tag{4}$$

نتیجه می‌شوند، که در آن

$$\begin{aligned} d_i &= \rho_1\sigma_{i1} + \rho_2\sigma_{i2} + \rho_3\sigma_{i3}, \qquad i = 1, 2, 3, \\ d_4 &= u_{12}\sigma_{12} + u_{13}\sigma_{13} + u_{23}\sigma_{23},\ d_5 = \frac{1}{2}(u_{11}\sigma_{11} + u_{22}\sigma_{22} + u_{33}\sigma_{33}), \\ A &= \ell_{111}\sigma_{11} + 2\ell_{121}\sigma_{12} + 2\ell_{131}\sigma_{13} + 2\ell_{231}\sigma_{23} + \ell_{221}\sigma_{22} + \ell_{331}\sigma_{33}, \\ B &= \ell_{112}\sigma_{11} + 2\ell_{121}\sigma_{12} + 2\ell_{132}\sigma_{13} + 2\ell_{232}\sigma_{23} + \ell_{222}\sigma_{22} + \ell_{332}\sigma_{33}, \\ C &= \ell_{113}\sigma_{11} + 2\ell_{123}\sigma_{12} + 2\ell_{133}\sigma_{13} + 2\ell_{233}\sigma_{23} + \ell_{223}\sigma_{22} + \ell_{333}\sigma_{33}. \end{aligned}$$

رابطه (۴) را باید به‌وسیله $\hat{\beta} = (\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \hat{\beta}_3)$، یعنی برآورد ماکسیمم درستنمایی $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ به دست آورد، در حالت توزیع گومپرتز تعمیم‌یافته یکه، با فرض معلوم بودن c و λ برآوردهای ماکسیمم درستنمایی پارامترهای θ_1، θ_2 و θ به‌ترتیب به صورت

$$\hat{\theta}_1 = -nk_1\big(E(c, \lambda)\big)^{-1},\ \hat{\theta}_2 = -nk_2\big(F(c, \lambda)\big)^{-1},\ \hat{\theta} = -n\big(G(c, \lambda)\big)^{-1},$$

محاسبه می‌شوند. حال با قرار دادن $(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (\theta_1, \theta_2, \theta)$ و $u = R_{\boldsymbol{s},\boldsymbol{k}}$، مقادیر

$$\begin{aligned} &\ell_{11} = -\frac{nk_1}{\theta_1^2},\ \ell_{22} = -\frac{nk_2}{\theta_2^2},\ \ell_{33} = -\frac{n}{\theta^2}, \\ &\rho_1 = \frac{a_1 - 1}{\theta_1} - b_1,\ \rho_2 = \frac{a_2 - 1}{\theta_2} - b_2,\ \rho_3 = \frac{a_3 - 1}{\theta} - b_3, \end{aligned}$$

حاصل می‌شوند، که در آن σ_{ij} به‌وسیله ℓ_{ij} به‌دست می‌آید. علاوه بر این

$$\ell_{۱۱۱} = \frac{۲nk_۱}{\theta_۱^۳},\ \ell_{۲۲۲} = \frac{۲nk_۲}{\theta_۲^۳},\ \ell_{۳۳۳} = \frac{۲n}{\theta^۳},$$

و نیز سایر $\ell_{ij} = ۰$ و $\ell_{ijk} = ۰$ هستند. همچنین

$$\begin{aligned}
u_۱ &= \sum_{\boldsymbol{k}}^{\boldsymbol{s}} \frac{-\theta p}{\left(\theta_۱ p + \theta_۲ q + \theta\right)^۲}, \quad u_۲ = \sum_{\boldsymbol{k}}^{\boldsymbol{s}} \frac{-\theta q}{\left(\theta_۱ p + \theta_۲ q + \theta\right)^۲},\\
u_۳ &= \sum_{\boldsymbol{k}}^{\boldsymbol{s}} \frac{\theta_۱ p + \theta_۲ q}{\left(\theta_۱ p + \theta_۲ q + \theta\right)^۲}, \quad u_{۱۱} = \sum_{\boldsymbol{k}}^{\boldsymbol{s}} \frac{۲\theta p^۲}{\left(\theta_۱ p + \theta_۲ q + \theta\right)^۳},\\
u_{۲۲} &= \sum_{\boldsymbol{k}}^{\boldsymbol{s}} \frac{۲\theta q^۲}{\left(\theta_۱ p + \theta_۲ q + \theta\right)^۳}, \quad u_{۳۳} = \sum_{\boldsymbol{k}}^{\boldsymbol{s}} \frac{-۲\left(\theta_۱ p + \theta_۲ q\right)}{\left(\theta_۱ p + \theta_۲ q + \theta\right)^۳},\\
u_{۱۲} &= \sum_{\boldsymbol{k}}^{\boldsymbol{s}} \frac{۲\theta pq}{\left(\theta_۱ p + \theta_۲ q + \theta\right)^۳}, \quad u_{۱۳} = \sum_{\boldsymbol{k}}^{\boldsymbol{s}} \frac{-p\left(\theta_۱ p + \theta_۲ q - \theta\right)}{\left(\theta_۱ p + \theta_۲ q + \theta\right)^۳},\\
u_{۲۳} &= \sum_{\boldsymbol{k}}^{\boldsymbol{s}} \frac{-q\left(\theta_۱ p + \theta_۲ q - \theta\right)}{\left(\theta_۱ p + \theta_۲ q + \theta\right)^۳}.
\end{aligned}$$

در نتیجه، تحت تابع زیان مربعات خطا، برآورد بیز $R_{\boldsymbol{s},\boldsymbol{k}}$ از رابطه (۴) به‌دست می‌آید.

۴ مطالعات شبیه‌سازی و تحلیل مثال کاربردی

در این بخش با استفاده از یک مطالعه شبیه‌سازی برآوردگرهای مختلف با هم مقایسه شده و نتایج تئوری روی یک سری داده واقعی پیاده‌سازی می‌شوند.

۴.۱ مطالعات شبیه‌سازی

در این بخش با استفاده از شبیه‌سازی مونت‌کارلو، کارایی برآوردگرهای مختلف مقایسه می‌شود. کارایی برآوردگرهای نقطه‌ای با استفاده از میانگین توان‌های دوم خطا (MSE) و همچنین، برآوردگرهای فاصله‌ای با استفاده از طول بازه اطمینان (AL) و احتمالات پوشش فواصل (CP) انجام شده‌است. در این شبیه‌سازی از مقادیر پارامترهای متفاوت استفاده می‌شود. تعداد تکرارها در شبیه‌سازی ۲۰۰۰ است و در الگوریتم MCMC تعداد تکرارها برابر با $T_b = ۳۰۰۰$ است. همچنین مقادیر $T_۱ = T_۲ = ۰/۶۵$ در نظر گرفته شده است. برای محاسبه برآوردگرها از توابع چگالی پیشین مختلف استفاده شده و تمامی فواصل اطمینان در سطح معناداری ٪۹۵ محاسبه شده‌اند. در جدول ۱ طرح‌های سانسوری که در شبیه‌سازی استفاده می‌شوند، بیان شده است. در این جدول منظور از

a^{*b}، به‌معنای $\underbrace{a,\ldots,a}_{\text{b بار}}$ است. در حالت اول، که حالت کلی را بررسی می‌کند، مقادیر برآوردهای بیز، براساس

جدول ۱. طرح‌های سانسور.

طرح سانسور		$(k_۲, K_۲)$	طرح سانسور		$(k_۱, K_۱)$	طرح سانسور		(n, N)
$(۱^{*۵})$	$Q_۱$	$(۵, ۱۰)$	$(۱^{*۵})$	$R_۱$	$(۵, ۱۰)$	$(۱^{*۵})$	$S_۱$	$(۵, ۱۰)$
$(۵, ۰^{*۴})$	$Q_۲$		$(۵, ۰^{*۴})$	$R_۲$		$(۵, ۰^{*۴})$	$S_۲$	
$(۰^{*۴}, ۵)$	$Q_۳$		$(۰^{*۴}, ۵)$	$R_۳$		$(۰^{*۴}, ۵)$	$S_۳$	
$(۱^{*۱۰})$	$Q_۴$	$(۱۰, ۲۰)$	$(۱^{*۱۰})$	$R_۴$	$(۱۰, ۲۰)$	$(۱^{*۱۰})$	$S_۴$	$(۱۰, ۲۰)$
$(۱۰, ۰^{*۹})$	$Q_۵$		$(۱۰, ۰^{*۹})$	$R_۵$		$(۱۰, ۰^{*۹})$	$S_۵$	
$(۰^{*۹}, ۱۰)$	$Q_۶$		$(۰^{*۹}, ۱۰)$	$R_۶$		$(۰^{*۹}, ۱۰)$	$S_۶$	

$(\theta_۱, \theta_۲, \theta, c_۱, c_۲, c, \lambda_۱, \lambda_۲, \lambda) = (۲, ۰/۵, ۲, ۲, ۰/۵, ۴, ۲, ۱, ۲)$، برای یافتن نتایج شبیه‌سازی به‌کار گرفته شده‌اند. علاوه بر آن استنباط بیزی با استفاده از دو توزیع پیشین متفاوت به‌صورت

$$\text{پیشین ۱}: \quad a_i = ۰, \quad b_i = ۰, \quad i = ۱, \ldots, ۹,$$

$$\text{پیشین ۲}: \quad a_i = ۰/۲, \quad b_i = ۰/۴, \quad i = ۱, \ldots, ۹,$$

بررسی شده است. نتایج شبیه‌سازی در جدول ۲ آمده است. در حالت دوم، با فرض این‌که پارامترهای مشترک c و λ

جدول ۲. نتایج شبیه‌سازی در حالت کلی.

پیشین ۲ (MCMC)			پیشین ۱ (MCMC)				
CP	AL	MSE	CP	AL	MSE	طرح سانسور	$(k_۱, k_۲, n, s_۱, s_۲)$
۰/۹۴۶	۰/۴۸۷۵	۰/۰۳۸۱	۰/۹۴۰	۰/۵۱۲۷	۰/۰۵۷۸	$(R_۱, Q_۱, S_۱)$	$(۵, ۵, ۵, ۲, ۲)$
۰/۹۴۷	۰/۴۸۵۱	۰/۰۳۹۱	۰/۹۴۱	۰/۵۱۶۴	۰/۰۵۷۰	$(R_۲, Q_۲, S_۲)$	
۰/۹۴۷	۰/۴۸۴۸	۰/۰۳۸۳	۰/۹۴۰	۰/۵۱۸۰	۰/۰۵۸۵	$(R_۳, Q_۳, S_۳)$	
۰/۹۴۹	۰/۴۰۱۰	۰/۰۳۱۹	۰/۹۴۶	۰/۴۶۸۱	۰/۰۵۲۷	$(R_۱, Q_۱, S_۴)$	$(۵, ۵, ۱۰, ۲, ۲)$
۰/۹۴۸	۰/۴۰۲۷	۰/۰۳۲۰	۰/۹۴۵	۰/۴۶۶۲	۰/۰۵۲۰	$(R_۲, Q_۲, S_۵)$	
۰/۹۴۹	۰/۴۰۶۹	۰/۰۳۱۱	۰/۹۴۶	۰/۴۶۳۷	۰/۰۵۳۱	$(R_۳, Q_۳, S_۶)$	
۰/۹۵۰	۰/۳۷۲۹	۰/۰۳۴۶	۰/۹۴۹	۰/۴۰۲۶	۰/۰۵۵۹	$(R_۴, Q_۴, S_۱)$	$(۱۰, ۱۰, ۵, ۲, ۲)$
۰/۹۵۱	۰/۳۷۱۹	۰/۰۳۴۹	۰/۹۴۸	۰/۴۰۳۵	۰/۰۵۶۱	$(R_۵, Q_۵, S_۲)$	
۰/۹۵۱	۰/۳۷۰۳	۰/۰۳۵۳	۰/۹۴۸	۰/۴۰۹۰	۰/۰۵۵۰	$(R_۶, Q_۶, S_۳)$	
۰/۹۵۲	۰/۲۴۶۷	۰/۰۲۵۲	۰/۹۵۰	۰/۳۰۱۵	۰/۰۴۶۸	$(R_۴, Q_۴, S_۴)$	$(۱۰, ۱۰, ۱۰, ۲, ۲)$
۰/۹۵۳	۰/۲۴۱۵	۰/۰۲۵۰	۰/۹۵۱	۰/۳۰۱۸	۰/۰۴۶۰	$(R_۵, Q_۵, S_۵)$	
۰/۹۵۲	۰/۲۴۲۹	۰/۰۲۵۹	۰/۹۵۰	۰/۳۰۴۹	۰/۰۴۷۳	$(R_۶, Q_۶, S_۶)$	

نامعلومند، مقادیر برآوردها براساس $(\theta_۱, \theta_۲, \theta, c, \lambda) = (۰/۵, ۱/۵, ۰/۵, ۰/۵, ۱/۵)$، برای یافتن نتایج شبیه‌سازی

به‌کار گرفته شده‌اند. علاوه بر آن استنباط بیزی با استفاده از دو توزیع پیشین متفاوت به‌صورت

$$\text{پیشین ۳}: \quad a_i = ۰, \quad b_i = ۰, \quad i = ۱, \ldots, ۵,$$
$$\text{پیشین ۴}: \quad a_i = ۰/۱, \quad b_i = ۰/۳, \quad i = ۱, \ldots, ۵,$$

بررسی شده است. نتایج شبیه‌سازی در جدول ۳ آمده است. در نهایت در حالت سوم، با فرض این‌که پارامترهای

جدول ۳. نتایج شبیه‌سازی با پارامترهای مشترک و نامعلوم.

پیشین ۴ (MCMC)			پیشین ۳ (MCMC)				
CP	AL	MSE	CP	AL	MSE	طرح سانسور	$(k_۱, k_۲, n, s_۱, s_۲)$
۰/۹۴۷	۰/۴۱۵۲	۰/۰۳۲۵	۰/۹۴۰	۰/۴۵۹۳	۰/۰۵۱۲	$(R_۱, Q_۱, S_۱)$	$(۵, ۵, ۵, ۲, ۲)$
۰/۹۴۶	۰/۴۱۲۱	۰/۰۳۲۰	۰/۹۴۱	۰/۴۵۲۱	۰/۰۵۰۸	$(R_۲, Q_۲, S_۲)$	
۰/۹۴۶	۰/۴۱۰۹	۰/۰۳۳۱	۰/۹۴۰	۰/۴۵۸۱	۰/۰۵۱۹	$(R_۳, Q_۳, S_۳)$	
۰/۹۴۹	۰/۲۸۱۵	۰/۰۲۶۴	۰/۹۴۶	۰/۳۲۳۲	۰/۰۴۵۲	$(R_۱, Q_۱, S_۴)$	$(۵, ۵, ۱۰, ۲, ۲)$
۰/۹۴۸	۰/۲۸۳۵	۰/۰۲۶۰	۰/۹۴۵	۰/۳۲۰۱	۰/۰۴۵۸	$(R_۲, Q_۲, S_۵)$	
۰/۹۴۹	۰/۲۸۴۹	۰/۰۲۵۵	۰/۹۴۶	۰/۳۲۱۸	۰/۰۴۴۹	$(R_۳, Q_۳, S_۶)$	
۰/۹۵۰	۰/۳۱۲۲	۰/۰۲۸۳	۰/۹۴۹	۰/۳۵۹۴	۰/۰۴۷۹	$(R_۴, Q_۴, S_۱)$	$(۱۰, ۱۰, ۵, ۲, ۲)$
۰/۹۵۱	۰/۳۱۸۴	۰/۰۲۷۹	۰/۹۴۸	۰/۳۵۴۴	۰/۰۴۷۰	$(R_۵, Q_۵, S_۲)$	
۰/۹۵۱	۰/۳۱۳۱	۰/۰۲۸۰	۰/۹۴۹	۰/۳۵۶۱	۰/۰۴۶۸	$(R_۶, Q_۶, S_۳)$	
۰/۹۵۲	۰/۲۰۲۰	۰/۰۲۱۰	۰/۹۵۰	۰/۲۴۳۸	۰/۰۴۰۱	$(R_۴, Q_۴, S_۴)$	$(۱۰, ۱۰, ۱۰, ۲, ۲)$
۰/۹۵۲	۰/۲۰۸۱	۰/۰۲۱۵	۰/۹۵۱	۰/۲۴۰۵	۰/۰۴۰۹	$(R_۵, Q_۵, S_۵)$	
۰/۹۵۳	۰/۲۰۲۹	۰/۰۲۰۹	۰/۹۵۰	۰/۲۴۲۹	۰/۰۴۱۸	$(R_۶, Q_۶, S_۶)$	

مشترک c و λ معلومند، مقادیر برآوردها براساس $(\theta_۱, \theta_۲, \theta) = (۲, ۰/۵, ۱/۵)$، برای یافتن نتایج شبیه‌سازی به‌کار گرفته شده‌اند. علاوه بر آن استنباط بیزی با استفاده از دو توزیع پیشین متفاوت به‌صورت

$$\text{پیشین ۵}: \quad a_i = ۰, \quad b_i = ۰, \quad i = ۱, \ldots, ۳,$$
$$\text{پیشین ۶}: \quad a_i = ۰/۲, \quad b_i = ۰/۵, \quad i = ۱, \ldots, ۳,$$

بررسی شده است. نتایج شبیه‌سازی در جدول ۴ آمده است. از جداول ۴-۲، ملاحظه می‌شود که بهترین عملکرد، برحسب MSE، به توابع چگالی پیشین آگاهی‌بخش تعلق دارد. همچنین، برآورد بیزی به‌دست آمده به روش بیز دقیق نسبت به روش لیندلی، در حالت کلی دارای عملکرد بهتری است. علاوه بر این، ملاحظه می‌شود که فواصل باور HPD براساس توابع چگالی پیشین آگاهی‌بخش، دارای طول فاصله کوتاه‌تر و درصد پوشش بیشتری هستند و لذا بهترین عملکرد را نسبت به توابع چگالی پیشین ناآگاهی‌بخش دارند. همچنین به‌عنوان یک نتیجه کلی، مشاهده می‌شود که برای s و k ثابت، با افزایش n و نیز برای s و n ثابت، با افزایش k، مقادیر MSEها و طول فاصله اطمینان کاهش یافته و درصد پوشش افزایش می‌یابد. این نتیجه به این دلیل اتفاق می‌افتد که با افزایش n و k

جدول ۴. نتایج شبیه‌سازی با پارامترهای مشترک و معلوم.

		پیشین ۵				پیشین ۶			
		دقیق		لیندلی		دقیق		لیندلی	
(k_1, k_2, n, s_1, s_2)	طرح سانسور	MSE	AL	CP	MSE	MSE	AL	CP	MSE
$(5, 5, 5, 2, 2)$	(R_1, Q_1, S_1)	۰/۰۵۳۲	۰/۴۸۲۰	۰/۹۴۰	۰/۰۵۸۹	۰/۰۳۳۵	۰/۴۴۲۸	۰/۹۴۶	۰/۰۳۸۰
	(R_2, Q_2, S_2)	۰/۰۵۳۸	۰/۴۸۵۱	۰/۹۴۱	۰/۰۵۹۰	۰/۰۳۳۰	۰/۴۴۲۱	۰/۹۴۸	۰/۰۳۷۹
	(R_3, Q_3, S_3)	۰/۰۵۳۰	۰/۴۸۹۰	۰/۹۴۰	۰/۰۵۸۰	۰/۰۳۴۹	۰/۴۴۳۸	۰/۹۴۸	۰/۰۳۸۹
$(5, 5, 10, 2, 2)$	(R_1, Q_1, S_4)	۰/۰۴۸۲	۰/۳۸۸۰	۰/۹۴۶	۰/۰۵۱۲	۰/۰۲۸۰	۰/۴۱۹۵	۰/۹۴۹	۰/۰۳۲۸
	(R_2, Q_2, S_5)	۰/۰۴۸۰	۰/۳۸۲۴	۰/۹۴۵	۰/۰۵۱۵	۰/۰۲۹۵	۰/۴۱۴۱	۰/۹۴۹	۰/۰۳۲۰
	(R_3, Q_3, S_6)	۰/۰۴۹۰	۰/۳۸۴۹	۰/۹۴۵	۰/۰۵۲۱	۰/۰۲۸۶	۰/۴۱۳۶	۰/۹۴۸	۰/۰۳۲۹
$(10, 10, 5, 2, 2)$	(R_4, Q_4, S_1)	۰/۰۵۱۴	۰/۴۳۱۲	۰/۹۴۹	۰/۰۵۳۷	۰/۰۳۱۹	۰/۳۸۱۹	۰/۹۵۰	۰/۰۳۴۵
	(R_5, Q_5, S_2)	۰/۰۵۱۹	۰/۴۳۹۱	۰/۹۴۸	۰/۰۵۴۰	۰/۰۳۲۰	۰/۳۸۰۹	۰/۹۵۱	۰/۰۳۴۰
	(R_6, Q_6, S_3)	۰/۰۵۲۴	۰/۴۳۲۰	۰/۹۴۹	۰/۰۵۳۹	۰/۰۳۱۷	۰/۳۸۳۰	۰/۹۵۰	۰/۰۳۵۱
$(10, 10, 10, 2, 2)$	(R_4, Q_4, S_4)	۰/۰۴۲۲	۰/۳۳۹۵	۰/۹۵۱	۰/۰۴۷۹	۰/۰۲۲۷	۰/۲۶۴۳	۰/۹۵۳	۰/۰۲۹۶
	(R_5, Q_5, S_5)	۰/۰۴۲۰	۰/۳۳۲۵	۰/۹۵۰	۰/۰۴۸۰	۰/۰۲۳۰	۰/۲۶۱۵	۰/۹۵۳	۰/۰۳۰۱
	(R_6, Q_6, S_6)	۰/۰۴۲۹	۰/۳۳۷۲	۰/۹۵۱	۰/۰۴۷۳	۰/۰۲۲۹	۰/۲۶۷۵	۰/۹۵۲	۰/۰۲۹۰

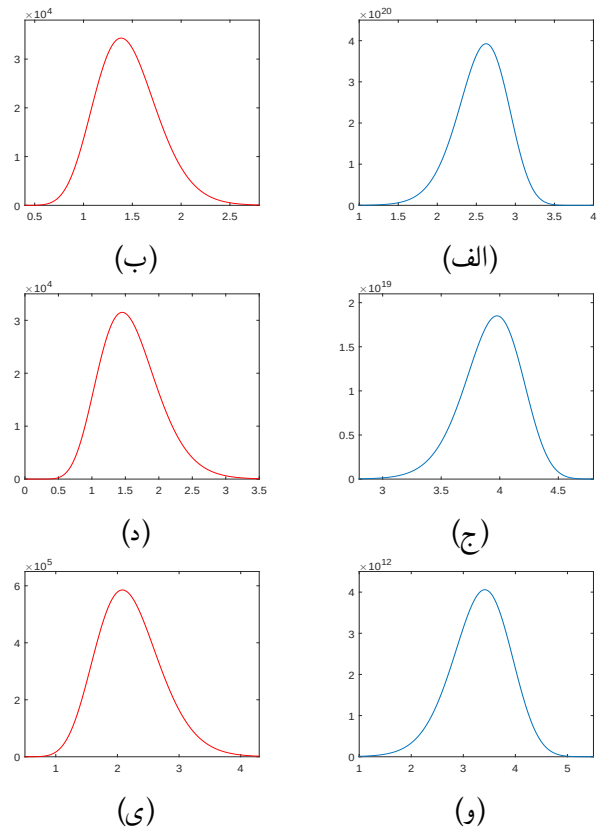
تعداد داده‌های سانسور شده کمتر می‌شود و لذا اطلاعات بیشتری به‌دست می‌آید.

برای پیاده‌سازی الگوریتم متروپلیس–هستینگز، در حالت‌های کلی و حالتی که پارامترهای مشترک نامعلومند (حالت دوم)، باید توزیع پیشنهادی شبیه توابع چگالی پیسین $\lambda, \lambda_i,\ i = 1, 2$ و $c, c_i,\ i = 1, 2$ باشد. چند نمودار از این توابع چگالی پسین برای طرح‌های سانسور مختلف فزاینده و فزاینده پیوندی بهبودیافته، در شکل‌های ۳–۲ ارائه شده است. همان‌طورکه ملاحظه می‌شود نمودار توزیع پسین بسیار به توزیع نرمال شباهت دارد، لذا الگوریتم متروپلیس–هستینگز با توزیع پیشنهادی نرمال برای تولید کردن نمونه‌های تصادفی از توابع چگالی پسین پارامترهای فوق به‌کار گرفته شده است.

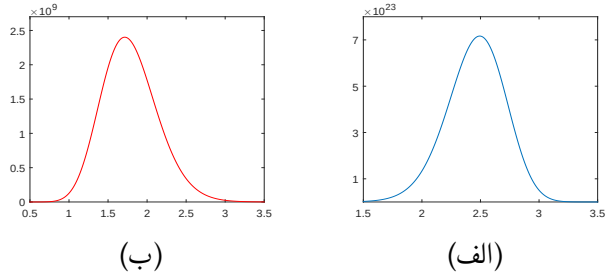
برای مشاهده همگرایی روش MCMC، در حالت‌های کلی و دوم، از نمودار اثربخشی در طرح‌های سانسور و توابع چگالی پیشین مختلف استفاده شده است. برخی از این نمودارهای اثربخشی در شکل‌های ۵–۴ ارائه شده است. همان‌طورکه ملاحظه می‌شود در تمامی موارد، نمودارهای اثربخشی، همگرایی روش MCMC را نشان می‌دهند.

۴.۲ تحلیل مثال کاربردی

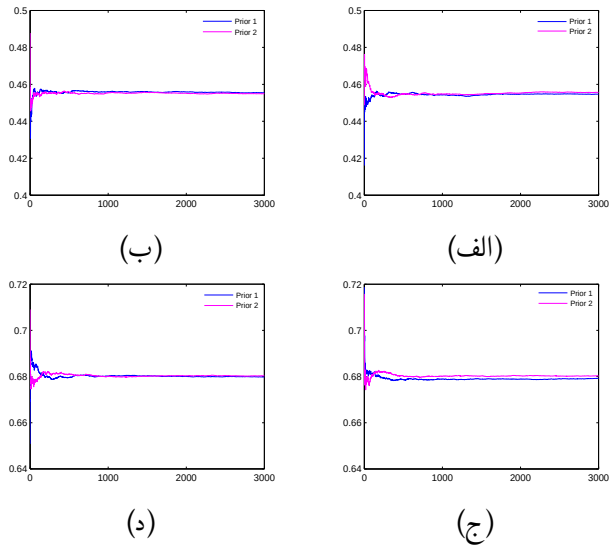
مجموعه داده‌های این بخش به‌دست‌آمده از مخزن آب ایستگاه شاستا در ایالت کالیفرنیا امریکا است که در لینک http://cdec.water.ca.gov/dynamicapp/queryMonthly?SHA قابل دسترس هستند. این داده‌ها اولین بار توسط کیزیلاسلان و نادار (۲۰۱۸) در تحلیل مدل‌های تنش–مقاومت استفاده شدند و سپس نویسندگان دیگری نیز آن‌ها را مورد مطالعه قرار دادند. موضوع خشکسالی، در صنعت کشاورزی از اهمیت بسیاری برخوردار است، زیرا ممکن است آسیب جدی به تولید محصولات وارد کند. بنابراین محاسبه احتمال وقوع خشکسالی برای کشاورزان اهمیت بسیاری دارد. یک فرایند برنامه‌ریزی شده برای رخداد این پیشامد را می‌توان به‌صورت زیر مطرح کرد. اگر ظرفیت آب مخزن در ماه‌های اوت و ژوئیه در حداقل ۲ سال از ۵ سال آینده بیشتر از میزان آب



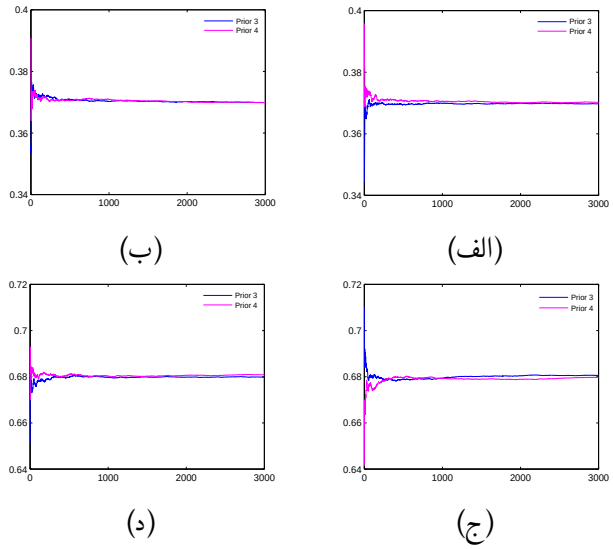
شکل ۲. نمودار تابع چگالی پسین در حالت کلی با طرح سانسور سطر اول: $(R_۲, Q_۲, S_۵)$ الف) $c_۱$ پیشین ۱ و ب) $\lambda_۱$ پیشین ۲، سطر دوم: طرح سانسور $(R_۱, Q_۱, S_۱)$ ج) $c_۲$ پیشین ۲ و د) $\lambda_۲$ پیشین ۱، سطر سوم: $(R_۶, Q_۶, S_۳)$ و) c پیشین ۱ و ی) λ پیشین ۲



شکل ۳. نمودار تابع چگالی پسین در حالت دوم با طرح سانسور $(R_۴, Q_۴, S_۴)$ الف) c پیشین ۴ و ب) λ پیشین ۳



شکل ۴. نمودار اثربخشی در حالت کلی سطر اول: $\boldsymbol{k} = (۵, ۵)$ الف) طرح سانسور $(R_۱, Q_۱, S_۱)$ و ب) طرح سانسور $(R_۲, Q_۲, S_۲)$، سطر دوم: $\boldsymbol{k} = (۱۰, ۱۰)$ ج) طرح سانسور $(R_۲, Q_۲, S_۵)$ و د) طرح سانسور $(R_۳, Q_۳, S_۶)$



شکل ۵. نمودار اثربخشی در حالت دوم سطر اول: $\boldsymbol{k} = (۵, ۵)$ الف) طرح سانسور $(R_۲, Q_۲, S_۲)$ و ب) طرح سانسور $(R_۳, Q_۳, S_۳)$، سطر دوم: $\boldsymbol{k} = (۱۰, ۱۰)$ ج) طرح سانسور $(R_۱, Q_۱, S_۴)$ و د) طرح سانسور $(R_۳, Q_۳, S_۶)$

بدست آمده در ماه دسامبر سال قبل باشد، می‌توان ادعا نمود که در سال‌های آتی، با خشکسالی شدید مواجه نخواهیم شد. در این فرایند، قابلیت اعتماد چندمؤلفه‌ای با دومؤلفه مقاومت غیریکسان می‌تواند به‌عنوان احتمال عدم وقوع خشکسالی در نظر گرفته شود. باید توجه کرد که در تحلیل داده‌های فوق محققان می‌توانند به دلایل مختلفی با داده‌های سانسور شده مواجه شوند. این دلایل ممکن است بلایای طبیعی مانند سیل، زلزله و طوفان یا ناشی از فعالیت‌های انسانی مانند فشارهای مالی، خطاهای ناخواسته و موارد دیگر باشد.

در تحلیل داده‌های کامل، مقادیر $U_{۱۱}, \ldots, U_{۱۵}$ و $V_{۱۱}, \ldots, V_{۱۵}$ ظرفیت آب مخزن در ماه‌های به‌ترتیب ژوئیه و اوت ۱۹۷۶ تا ۱۸۸۰، مقادیر $U_{۲۱}, \ldots, U_{۲۵}$ و $V_{۲۱}, \ldots, V_{۲۵}$ ظرفیت آب مخزن در ماه‌های به‌ترتیب ژوئیه و اوت ۱۹۸۲ تا ۱۹۸۶ هستند و با ادامه این روند مقادیر $U_{۷۱}, \ldots, U_{۷۵}$ و $V_{۷۱}, \ldots, V_{۷۵}$ ظرفیت آب مخزن در ماه‌های به‌ترتیب ژوئیه و اوت ۲۰۱۲ تا ۲۰۱۶ هستند. همچنین مقادیر $Y_{۱}, \ldots, Y_{۷}$ ظرفیت آب مخزن در ماه دسامبر سال‌های ۱۹۷۵، ۱۹۸۱ تا ۲۰۱۱ هستند. برای ساده‌سازی محاسبات، داده‌ها با تقیسم به ظرفیت کل مخزن یعنی مقدار ۴۵۵۲۰۰۰ اکر–فوت، در مقیاس ۰ تا ۱ بازنویسی می‌شود و توجه به این نکته ضروری است که این کار تأثیری بر استنباط آماری ندارد. حال در مرحله اول توزیع گومپرتز تعمیم‌یافته یکه بر سه مجموعه‌داده مدنظر برازش داده می‌شود. نتایج حاصل شده در جدول ۵ آمده است. همانطورکه ملاحظه می‌شود، با توجه به p–مقدارها، توزیع گومپرتز

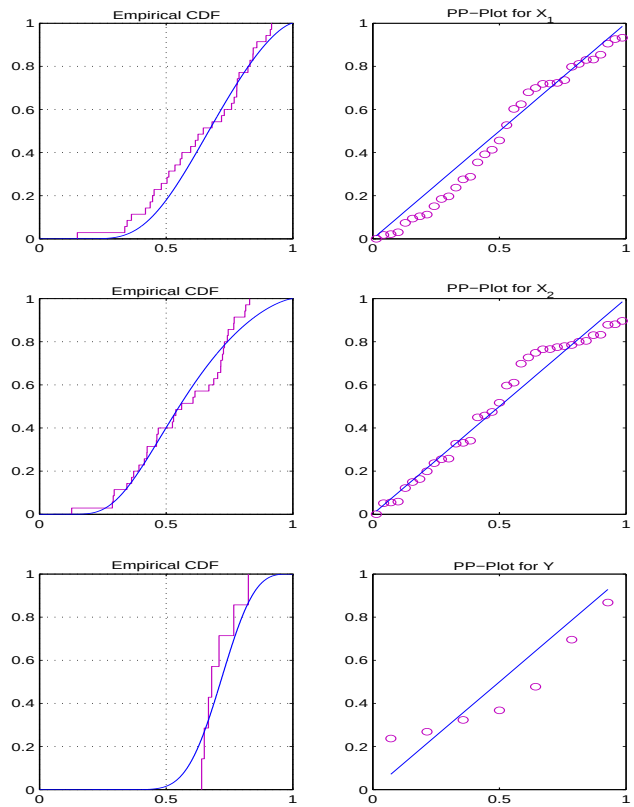
جدول ۵. برآورد پارامترها، p–مقدار و فاصله کولموگروف–اسمیرنوف (KS) در برازش داده‌ها

داده‌ها	$\hat{\theta}$	$\hat{c}$	$\hat{\lambda}$	p–مقدار	KS
$X_{۱}$	۱٫۵۱۰۴	۲٫۱۱۵۹	۱٫۴۷۴۸	۰٫۶۷۸۲	۰٫۱۱۷۳
$X_{۲}$	۱٫۴۰۱۲	۱٫۳۲۱۳	۱٫۰۴۲۱	۰٫۵۷۹۴	۰٫۱۲۷۲
Y	۳٫۸۳۶۵	۱٫۸۸۹۸	۳٫۸۴۲۴	۰٫۷۴۸۰	۰٫۲۳۷۱

تعمیم‌یافته یکه توزیع مناسبی برای تحلیل داده‌هاست. از آنجا که $\hat{c}$ و $\hat{\lambda}$ها در سه مجموعه داده، با هم برابر نیستند، لذا تنها حالت کلی برای تحلیل داده‌ها استفاده می‌شود. شکل ۶ توابع توزیع تجربی و نمودارهای $p-p$ را نشان می‌دهد. برای داده‌های کامل با قرار دادن $\boldsymbol{s} = (۲, ۲)$ و $\boldsymbol{k} = (۵, ۵)$، برآورد بیزی و همچنین بازه اطمینان HPD به‌دست می‌آیند. اکنون دو طرح سانسور فزاینده به‌شرح

$$\text{طرح ۱}: \quad R_{۱} = Q_{۱} = (۰^{*۵}), \quad S_{۱} = (۰, ۰, ۱, ۰, ۰, ۰),$$
$$\text{طرح ۲}: \quad R_{۲} = Q_{۲} = (۰^{*۵}), \quad S_{۲} = (۱, ۰, ۰, ۱, ۰),$$

را در نظر گرفته که در طرح سانسور ۱، مقادیر $T = T_{۱} = T_{۲} = ۰٫۹$ و در طرح سانسور ۲، مقادیر $T = T_{۱} = T_{۲} = ۰٫۵$ است. ملاحظه می‌شود که در هر دو طرح سانسور $\boldsymbol{k} = (۵, ۵)$ و $\boldsymbol{s} = (۲, ۲)$ است و لذا ساختار سیستم عوض نشده است. همچنین برای یافتن برآوردگرهای بیزی و بازه اطمینان HPD، ابرپارامترها به‌صورت $a_i = b_i = ۰$ برای $i = ۱, \ldots, ۹$ در نظر گرفته می‌شود. نتایج در جدول ۶ آمده است. با توجه به مقادیر این نتیجه حاصل می‌شود که برآورد بر اساس داده‌های کامل نتیجه مناسب‌تری دارد و در بین طرح‌های سانسور، طرح



شکل ۶. تابع توزیع تجربی (سمت چپ) و نمودار $p-p$ (سمت راست)، برای $X_۱$ سطر اول، برای $X_۲$ سطر دوم و برای Y سطر سوم.

سانسور ۱ برآورد مناسب‌تری را ارائه می‌دهد. از آنجا که مقادیر به‌دست آمده برای پارامتر قابلیت اعتماد چندمؤلفه‌ای مقادیر کوچکی هستند، لذا می‌توان نتیجه گرفت که رخدادن خشکسالی بسیار محتمل است و باید برنامه‌ریزی‌هایی در این راستا انجام شود تا از وقوع خسارت‌های احتمالی جلوگیری شود.

جدول ۶. برآورد $R_{s,k}$ در داده‌های کامل و طرح‌های سانسور مختلف.

	برآورد بیزی	HPD
داده کامل	۰/۱۱۵۶	(۰/۰۷۵۴, ۰/۱۳۵۴)
طرح سانسور ۱	۰/۱۰۰۹	(۰/۰۴۹۸, ۰/۱۲۲۳)
طرح سانسور ۲	۰/۰۹۹۷	(۰/۰۴۰۲, ۰/۱۱۸۷)

بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله، تحت نمونه‌های سانسور فزاینده پیوندی بهبود یافته، برآورد بیزی پارامتر قابلیت اعتماد چندمؤلفه‌ای، $R_{\boldsymbol{s},\boldsymbol{k}}$ با مؤلفه‌های مقاومت غیر یکسان در توزیع گومپرتز تعمیم‌یافته یکه، بررسی می‌شود. از آنجا که توزیع گومپرتز تعمیم‌یافته یکه، با تغییر پارامترها به توزیع گومپرتز یکه و توزیع بتا تعمیم‌یافته تبدیل می‌شود و نیز سانسور فزاینده پیوندی بهبود یافته نیز می‌تواند به حداقل سه نوع سانسور دیگر تبدیل شود و از طرف دیگر پارامتر $R_{\boldsymbol{s},\boldsymbol{k}}$ نیز به حداقل دو پارامتر دیگر قابل تبدیل است، لذا مسئله حل شده در مقاله بسیار کلی است و نتایج چندین مسئله دیگر را در بر دارد. در این مقاله، برآورد پارامتر $R_{\boldsymbol{s},\boldsymbol{k}}$، در سه حالت مختلف بررسی می‌شود. در حالت اول، برآورد نقطه‌ای و فاصله‌ای بیزی، وقتی که $X_1 \sim UGG(\theta_1, c, \lambda)$، $X_2 \sim UGG(\theta_2, c, \lambda)$ و $Y \sim UGG(\theta, c, \lambda)$ است و تمام این پارامترها نامعلومند، محاسبه می‌شود. از آنجا که در این حالت، برآورد بیزی فرم بسته‌ای ندارد، به‌روش MCMC تقریب زده شده است. در حالت دوم، وقتی که پارامترهای c و λ معلوم هستند، برآورد دقیق بیزی و نیز برآورد تقریبی آن به روش تقریب لیندلی به‌دست آمده است. در حالت سوم، برآورد نقطه‌ای و فاصله‌ای بیزی، وقتی که $X_1 \sim UGG(\theta_1, c_1, \lambda_1)$، $X_2 \sim UGG(\theta_2, c_2, \lambda_2)$ و $Y \sim UGG(\theta, c, \lambda)$ است و تمام این پارامترها نامعلومند، محاسبه می‌شود. نتایج شبیه‌سازی نشان‌دهنده آن است که در بین برآوردگرهای بیزی، بهترین عملکرد به توابع پیشین آگاهی‌بخش مربوط است. علاوه بر این روش دقیق نسبت به تقریب لیندلی، عملکرد بهتری دارد. مقایسه بازه‌های اطمینان نیز نشان می‌دهد که عملکرد بهتر، یعنی طول کمتر و درصد پوشش بیشتر، متلق به توابع پیشین آگاهی‌بخش است. همچنین نتایج شبیه‌سازی نشان می‌دهد که با کاهش تعداد داده‌های سانسور شده عملکرد برآوردهای نقطه‌ای و فاصله‌ای بهبود می‌یابد.

تقدیر و تشکر

نویسندگان از داوران مقاله، ویراستار و سردبیر محترم مجله که با نظرات ارزشمند خود در بهبود کیفیت مقاله نقش مهمی داشته‌اند، سپاسگزارند.

مراجع

کاراندیش، م. ا.، ارمز، ا. و بصیرت، م. (۱۴۰۱)، توزیع گومپرتز تعمیم‌یافته یکه و کاربردهای آن، اندیشه آماری، **۵۳**، ۸۱-۹۲.

یعقوب‌زاده، ش.، روزگار، ر. و جعفری، ع.ا. (۱۳۹۶)، کلاسی از توزیع‌های دومتغیره گومپرتز تعمیم‌یافته–سری توانی، علوم آماری، **۱۱**، ۱۰۰-۷۷.

یعقوب‌زاده، ش. (۱۳۹۷)، برآورد پارامترهای مکان و شکل توزیع گومپرتز با آماره‌های ترتیبی تعمیم‌یافته، علوم آماری، ۱۲، ۲۷۹-۲۵۵.

Bhattacharyya, G. K. and Johnson, R. A. (1974), Estimation of Reliability in Multicomponent Stress-Strength Model, *Journal of the American Statistical Association*, **69**, 966-970.

Birnbaum, Z. W. (1956), On a Use of the Mann-Whitney Statistics, *Mathematical Statistics and Probability*, **1**, 13-17.

Chen, M. H. and Shao, Q. M. (1999), Monte Carlo Estimation of Bayesian Credible and HPD Intervals, *Journal of Computational and Graphical Statistics*, **8**, 69-92.

Demiray, D. and Kizilaslan, F. (2023), Reliability Estimation of a Consecutive k-out-of-n System for Non-Identical Strength Components with Applications to Wind Speed Data, *Quality Technology & Quantitative Management*, DOI: 10.1080/16843703.2023.2173426.

Hanagal, D. D. (1999), Estimation of System Reliability, *Statistical Papers*, **40**, 99-106.

Kang, S. G., Lee, W. D. and Kim, Y. (2021), Objective Bayesian Analysis for Generalized Exponential Stress-Strength Model, *Computational Statistics*, **36**, 2079-2109.

Kizilaslan, F. and Nadar, M. (2018), Estimation of Reliability in a Multicomponent Stress-Strength Model based on a Bivariate Kumaraswamy Distribution, *Statistical Papers*, **59**, 307-340.

Kohansal, A. (2019), On Estimation of Reliability in a Multicomponent Stress-Strength Model for a Kumaraswamy Distribution Based on Progressively Censored Sample, *Statistical Papers*, **60**, 2185-2224.

Kohansal, A. and Shoaee, S. (2021), Bayesian and Classical Estimation of Reliability in a Multicomponent Stress-Strength Model under Adaptive Hybrid Progressive Censored Data, *Statistical Papers*, **62**, 309-359.

Kohansal, A., Fernández, A. J. and Pérez-González, C. J. (2021), Multi-Component Stress-Strength Parameter Estimation of a Non-Identical-Component Strengths System under the Adaptive Hybrid Progressive Censoring Samples, *Statistics*, **55**, 925-962.

Lindley, D. V. (1980), Approximate Bayesian Methods, *Trabajos de Estadistica*, **3**, 281-288.

Nadar, M. and Kizilaslan, F. (2016), Estimation of Reliability in a Multicomponent Stress-Strength Model based on a Marshall-Olkin Bivariate Weibull Distribution, *IEEE Transactions on Reliability*, **65**, 370-380.

Ng, H. K. T, Kundu, D. and Chan, P. S. (2009), Statistical Analysis of Exponential Lifetimes Under an Adaptive Type-II Progressively Censoring Scheme. *Naval Research Logistics*, **56**, 687-698.

Pakdaman, Z. and Ahmadi, J. (2018), Point Estimation of the Stress-Strength Reliability Parameter for Parallel System with Independent and Non-Identical Components, *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, **47**, 1193-1203.

Rasethuntsa, T. R. and Nadar, M. (2018), Stress-Strength Reliability of a Non-Identical-Component Strengths System based on Upper Record Values from the Family of Kumaraswamy Generalized Distributions, *Statistics*, **52**, 684-716.