Journal of Statistical Sciences, Spring and Summer, 2024
Vol. 18, No. 1, pp 19-38
DOI: 10.61186/jss.18.1.2

Stochastic Comparisons of $(n-1)$-out-of-n Systems with Additive Hazard Rate Components under Random Shocks

Hossein Panahi, A.[1], Jafari, H.[1], Saadat Kia, G.[2]
[1]Department of Statistics, Razi University, Kermanshah, Iran.
[2]Department of Basic Science, Kermanshah University of Technology, Iran.

Corresponding author: G. Saadat Kia, gh.saadatkia@kut.ac.ir

Received: 25/7/2023 **Revised:** 30/1/2024 **Accepted and Published Online:** 9/2/2024.

Introduction

Fail-safe systems are commonly used in many day-to-day applied structures because of their fault tolerance or failure-survivability design. A fail-safe is a special design feature that will respond when a failure occurs so that no harm happens to the system itself. The brake system in a train is an excellent example of a fail-safe system in which the brakes are held in off-position by air pressure, and if a brake line splits or a carriage separates, the air pressure will be lost. In that case, the brakes will be applied by a local air reservoir. Balakrishnan et al. (2015) established necessary and sufficient conditions for comparing two fail-safe systems with independent homogeneous exponential components. Zhang et al. (2019) presented adequate (and necessary) conditions on the lifetimes of components and their survival probabilities from random shocks for comparing the lifetimes of two fail-safe systems. Cai et al. (2017) compared the hazard rate order of second-order statistics arising from two sets of independent multiple-outlier proportional hazard rates (PHR) samples. Zhang et al. (2019) have discussed the usual stochastic, hazard rate, and likelihood ratio orderings between two fail-safe systems comprising independent components subject to independent random shocks. Barmalzan et al. (2022) established stochastic comparisons of two fail-safe systems with dependent components having an Archimedean copula for the joint survival function and general exponentiated location-scale lifetime distributions. Hazra et al. (2022) recently obtained comparison results for the second-smallest and the second-largest order statistics from a general semiparametric family of distributions. In the present work, from a reliabil-

ity viewpoint, we consider the lifetimes of fail-safe systems under the random shocks (i.e., the second-order statistics) in a general scenario when (i) the component lifetimes are independent and (ii) the component lifetimes are dependent with their joint survival function represented by an Archimedean copula and having additive hazard rate lifetimes.

Results and Discussion
Often, reliability systems suffer shocks from external stress factors, stressing the system at random. These random shocks may have non-ignorable effects on the reliability of the system. In this paper, we provide sufficient and necessary conditions on components' lifetimes and their survival probabilities from random shocks for comparing the lifetimes of two $(n-1)$-out-of-n systems in two cases: (i) when additive hazard rate components are independent, and then (ii) when additive hazard rate components are dependent. The hazard rate reversed hazard rate and likelihood ratio orders of these results can be considered a topic for future research.

Conclusion
A $(n-1)$-out-of-n system is a special design feature that will respond when a failure occurs so that no harm happens to the system. There are many similar fail-safe systems in day-to-day use. In this paper, under some conditions and by using the concept of vector majorization and related orders, we have discussed stochastic comparisons of $(n-1)$-out-of-n systems with additive hazard rate components under random shocks in the sense of usual stochastic order.

Keywords: Majorization Order; Schur-convixity; Archimedean Copula; $(n-1)$-out-of-n systems; Additive Hazard Rate Model.

Mathematics Subject Classification (2010): 60E15, 90B25.

©The Author(s). The Publisher is Iranian Statistical Society.
This is an open access article distributed under the terms and conditions of (CC BY-NC 4.0)

مجله علوم آماری، بهار و تابستان ۱۴۰۳
جلد ۱۸، شماره ۱، ص ۱۹ -- ۳۸
DOI: 10.61186/jss.18.1.2
مقاله پژوهشی

مقایسه‌های تصادفی سیستم‌های $(n-1)$ از n با مولفه‌هایی از مدل نرخ خطر جمع‌پذیر تحت شوک‌های تصادفی

عابد حسین پناهی[1]، حبیب جعفری[1] و قباد سعادت‌کیا[2]

[1] گروه آمار، دانشگاه رازی، کرمانشاه

[2]دانشکده علوم پایه، دانشگاه صنعتی کرمانشاه

نویسنده مسئول : قباد سعادت‌کیا، gh.saadatkia@kut.ac.ir

تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۵/۳ تاریخ بازنگری: ۱۴۰۲/۱۱/۱۰ تاریخ پذیرش و انتشار: ۱۴۰۲/۱۱/۲۰

چکیده: اغلب سیستم‌های قابلیت اعتماد از شوک‌هایی که به صورت تصادفی از منابع خارجی ایجاد می شوند، تاثیر می‌پذیرند. این شوک‌ها ممکن است تاثیرات قابل توجهی روی قابلیت اعتماد سیستم داشته باشند. در این مقاله، شرایط لازم و کافی روی طول عمرهای مولفه‌ها و احتمالات بقای آنها پس از شوک تصادفی، برای مقایسه طول عمر دو سیستم $(n-1)$ از n فراهم شده است: ابتدا حالتی که مولفه‌ها مستقل هستند و سپس حالتی که مولفه‌ها وابسته هستند.

واژه‌های کلیدی: ترتیب بیشاندن، شور-محدب بودن، مفصل ارشمیدسی، سیستم‌های $(n-1)$ از n، مدل نرخ خطر جمع‌پذیر.
کد موضوع‌بندی ریاضی (۲۰۱۰): 62P05, 60E15.

۱ مقدمه

آماره‌های مرتب که به صورت $X_{1:n}, \cdots, X_{n:n}$ نمایش داده می‌شوند با مرتب کردن متغیرهای تصادفی $X_1, \cdots, X_n$ از کوچک به بزرگ حاصل می‌شود. این آماره‌ها کاربردهای زیادی در قابلیت اعتماد، نظریه مزایده، نظریه صف، بیم‌سنجی، مدیریت ریسک و غیره دارند. به عنوان مثال، در کاربردهای قابلیتی، آماره $X_{n-k+1:n}$ متناظر با طول عمر یک سیستم k از n است. این سیستم تا زمانی کار می‌کند که حداقل k مولفه از سیستم، سالم باشد. به ویژه،

©نویسند(گان). ناشر انجمن آمار ایران است.
این مقاله با دسترسی آزاد تحت شرایط و ضوابط (CC BY-NC 4.0) توزیع شده است.

$k=n$ و $k=1$ به ترتیب بیانگر طول عمر سیستم‌های سری و موازی است. یک حالت مهم دیگر، سیستم‌های $(n-1)$ از n هستند که در آنها خرابی یکی از مولفه‌ها تاثیری بر فعالیت سیستم نداشته $(Safe)$ اما با از کار افتادن دومین مولفه، سیستم نیز از فعالیت باز می‌ماند $(Fail)$. بنابراین سیستم‌های $(n-1)$ از n به سیستم‌های $Fail-Safe$ نیز در مباحث قابلیت اعتماد معروف هستند (بارلو و پروشان ، ۱۹۷۵).

در بسیاری از موارد عملی به ویژه در جوامع صنعتی، توزیع طول عمر قطعات تولید شده در یک کارخانه، می‌توانند به صورت متفاوت در نظر گرفته شوند. به عنوان مثال، هنگامی که قطعات تولید شده از کارخانه‌های مختلف، آمیخته شوند یا اینکه قطعات از یک کارخانه یکسان، تولید شوند اما ویژگی‌های عملیاتی یا محیطی تغییر کنند. در چنین مواردی، توزیع طول عمر اجزا با یکدیگر، متفاوت است و از خانواده خاصی از توزیع‌ها پیروی می‌کنند که توسط یک پارامتر مشخص، نمایه می‌شوند. بنابراین توزیع طول عمر قطعات تولید شده را می‌توان به صورت یک مدل نیمه پارامتری در نظر گرفت که در عمل منطقی به نظر می‌رسد، زیرا از مواد اولیه یکسانی برای تولید محصولات یک کارخانه استفاده شده است اما به دلیل شیفت‌های کاری متفاوت، نیروی انسانی متفاوت و خطوط تولید متفاوت، محصولات ساخته شده ممکن است توزیع یکسانی نداشته باشند و از یک مدل نیمه پارامتری تبعیت کنند (چا و فینکلشتاین ، ۲۰۱۳؛ حضرا و فینکلشتاین ، ۲۰۱۸).

یک مدل نیمه پارامتری مهم با کاربردهای فراوان در نظریه قابلیت اعتماد، مدل نرخ خطر جمع‌پذیر[1] است. تابع نرخ خطر این مدل به صورت $r(t)=r_0(t;\alpha)+\theta$ است که در آن $r_0(t;\alpha)$ نشان‌دهنده یک تابع نرخ خطر پایه است. با توجه به ارتباط بین تابع بقا و تابع نرخ خطر، می‌توان نشان داد تابع بقای این مدل (AH) به صورت

$$\bar{F}(t)=e^{-\theta t}\bar{F}_0(t;\alpha), \qquad t>0,\ \theta>0$$

است. فینکلیشتاین (۲۰۰۸) به بررسی ویژگی‌های قابلیتی مدل AH پرداخت و کاربردهایی از این مدل را ارائه نمود (فینکلشتاین و ایسالوا ، ۲۰۰۱، ۲۰۰۶). با توجه به اینکه از مواد اولیه یکسانی برای تولید محصولات ساخته شده در یک کارخانه استفاده می‌شود، اجزاء دارای نرخ خطر پایه مشترک $r_0(t;\alpha)$ هستند، اما به دلیل شیفت‌های کاری متفاوت، نیروی انسانی متفاوت و خطوط تولید متفاوت و غیره، دارای پارامترهای نرخ خطر جمع‌پذیر متفاوت θ_i هستند. به همین دلیل، در این مقاله فرض می‌شود طول عمر اجزای سیستم از مدل AH پیروی نماید.

در بسیاری از موارد، سیستم‌ها متاثر از شوک‌هایی هستند که منتج از عوامل بیرونی است. این شوک‌های تصادفی ممکن است تاثیرات غیر قابل انکاری روی قابلیت اعتماد یک سیستم بگذارند. مقایسه مشخصه‌های مهم طول عمر این‌گونه سیستم‌ها، موضوعی جذاب در نظریه قابلیت اعتماد است، زیرا سیستم‌های پیچیده را می‌توان در حالت ساده‌تری بررسی کرد. فرض کنید $X_1,\cdots,X_n$ متغیرهای تصادفی مستقل نامنفی با $X_i\sim AH(\theta_i;\bar{F}(t;\alpha_i))$ باشند که در آن $\bar{F}(\cdot;\alpha_i)$ تابع بقای پایه به ازای $i=1,\cdots,n$ است. فرض کنید $I_{p_1},\cdots,I_{p_n}(I_{p_1^*},\cdots,I_{p_n^*})$ یک مجموعه از متغیرهای برنولی مستقل، و مستقل از X_i ها با $\mathbb{E}[I_{p_i}]=$

[1] Additive Hazard Rate Model

$p_i(\mathbb{E}[I_{p_i^*}] = p_i^*)$ باشند. قرار دهید $Y_i = I_{p_i} X_i$ و $Y_i^* = I_{p_i^*} X_i$. در این مقاله، به بررسی مقایسه‌های تصادفی $Y_{2:n}$ و $Y_{2:n}^*$ که طول عمرهای دو سیستم متناظر $(n-1)$ از n هستند پرداخته می‌شود. همچنین وقتی X_iها وابسته هستند از تابع مفصل ارشمیدسی برای بیان تابع بقای توام آنها استفاده شده است. سپس به مقایسه‌های تصادفی بین دو سیستم متناظر $(n-1)$ از n پرداخته شده است. از نقطه نظری دیگر سیستم‌هایی با تعداد متناهی مولفه را در نظر بگیرید که هرکدام با یک راه‌انداز شروع به کار می‌کنند که با یک متغیر تصادفی برنولی مدل‌بندی می‌شوند. چنین حالت‌هایی ممکن است در عمل به وفور اتفاق بیفتد. برای مثال قابلیت اعتماد و کارکرد نیروگاه‌ها معمولاً با روش راه‌اندازی توربین گازی شروع می‌شود.

تفسیری دیگر از نتایج این مقاله در زمینه نظریه مزایده است. در نظریه مناقصه دومین قیمت[1]، پیشنهاد دهندگان[2] (فروشندگان) پیشنهادات مهر و موم شده خود را به حراج دهنده[3] (خریدار) ارائه می‌دهند که هنگام شروع حراج درخواست خرید اقلام را می‌کنند. کمترین قیمت پیشنهادی، به عنوان برنده پیشنهاد اعلام می‌شود و مبلغ دومین کمترین قیمت از طرف حراج دهنده به او پرداخت می‌شود. این نوع از حراج، اغلب توسط شرکت‌های بزرگ و ادارات دولتی برای خرید لوازم و خدمات استفاده می‌شود. در صورتی که n پیشنهاد دهنده وجود داشته باشد که قیمت‌های $X_1, \cdots, X_n$ را ارسال می‌کنند، هزینه حراج را می‌توان به صورت $X_{2:n}$ بیان کرد. اما ممکن است به دلیل برخی شرایط پیش‌بینی نشده، تعدادی از پیشنهاد دهندگان قبل از شروع مناقصه، از مناقصه خارج شوند. در نتیجه، هزینه نهایی در حراج، برابر دومین آماره مرتب متشکل از $I_{p_1} X_1, \cdots, I_{p_n} X_n$ است که در آن I_{p_i} نشان می‌دهد که آیا پیشنهاد دهنده iـام در حراج شرکت می کند یا خیر. بالاکریشنان و همکاران (۲۰۱۵) شرایط لازم و کافی را برای مقایسه سیستم‌های $(n-1)$ از n متشکل از مولفه‌های همگن نمایی از لحاظ ترتیب مانده عمر، ترتیب پراکندگی، ترتیب نرخ خطر و ترتیب نسبت درستنمایی ارائه کردند. با استفاده از این نتایج، می‌توان یک سیستم $(n-1)$ از n متشکل از مولفه‌های ناهمگن نمایی را با هر سیستم $(m-1)$ از m متشکل از مولفه‌های همگن نمایی مقایسه کرد. کای و همکاران (۲۰۱۷) ترتیب نرخ خطر را میان این‌گونه سیستم‌ها بررسی و اثبات کردند. ژانگ وهمکاران (۲۰۱۹) نیز شرایط لازم و کافی را برای مقایسه سیستم‌های $(n-1)$ از n تحت شوک تصادفی، از لحاظ ترتیب تصادفی معمولی ، نرخ خطر و ترتیب نسبت درستنمایی به دست آوردند. امینی سرشت و همکاران (۲۰۱۶) ترتیب‌های استار، لورنتس، پراکندگی میان سیستم‌های $(n-1)$ از n متشکل از مولفه‌های مستقل نرخ خطر متناسب با چندین دورافتاده اثبات کردند.

برمال‌زن و همکاران (۲۰۲۲) به مقایسه دو سیستم $(n-1)$ از n با مولفه‌های وابسته تحت مفصل ارشمیدسی پرداختند. حضرا و همکاران (۲۰۲۲) نتایجی را برای دومین بزرگترین آماره مرتب و دومین کوچکترین آماره مرتب دوم، از نظر ترتیب‌های تصادفی معمولی، نرخ خطر و نرخ خطر وارون تحت یک خانواده نیمه پارامتری کلی از توزیع‌ها به دست آوردند. برمال‌زن و همکاران (۱۴۰۰) تحت شرایطی روی پارامترهای مقیاس و بیشاندن ضعیف

[1] Second-price Reverse Auction
[2] Bidders
[3] Auctioneer

از پایین میان بردار اندازه نمونه‌ها در مدل مقیاس، ترتیب نرخ خطر میان سیستم‌های $(n-1)$ از n متشکل از مولفه‌های مقیاس با چندین دورافتاده، اثبات کردند. همچنین تحت شرایطی مشخص روی مفصل ارشمیدسی و پارامترها، ترتیب تصادفی معمولی میان این‌گونه سیستم‌ها را با مولفه‌های وابسته مورد بحث بررسی و توجه قرار دادند. حسین‌زاده و همکاران (۱۴۰۱) به مقایسه تصادفی سیستم‌های $(n-1)$ از n متشکل از مولفه‌های نرخ خطر متناسب اصلاح شده با چندین دور افتاده از لحاظ ترتیب نرخ خطر پرداختند. هاولادر و همکاران (۲۰۲۳) به مقایسه تصادفی سیستم‌های $(n-1)$ از n با مولفه‌های وابسته پرداختند وقتی که مولفه‌ها تحت تاثیر شوک‌های تصادفی هستند. این نویسندگان، با ارائه یک مثال، نشان دادند که مقایسه تصادفی این‌گونه سیستم‌ها، قابل تعمیم از ترتیب تصادفی معمولی به ترتیب نرخ خطر نیست.

در بخش ۲، تعاریف و مفاهیم مورد نیاز در رابطه با ترتیب‌های تصادفی، نظریه بیشاندن و تابع مفصل ارائه شده است که در بخش‌های بعدی مقاله، از آنها استفاده می‌شود. مقایسه‌های تصادفی سیستم‌های $(n-1)$ از n متشکل از مولفه‌های مستقل مدل نرخ خطر جمع‌پذیر تحت شوک‌های تصادفی، در بخش ۳ انجام شده است. در بخش ۴ به بررسی مقایسه‌های تصادفی سیستم‌های $(n-1)$ از n متشکل از مولفه‌های وابسته مدل نرخ خطر جمع‌پذیر تحت شوک‌های تصادفی و تحت مفصل ارشمیدسی، پرداخته شده است. سرانجام، بحث و نتیجه گیری در انتهای مقاله، بیان شده است.

۲ تعاریف و مفاهیم مورد نیاز

در این مقاله، واژه‌های صعودی به معنای غیرنزولی و نزولی به معنای غیرصعودی و نماد $a \overset{sgn}{=} b$ به معنای هم علامت بودن a و b است.

تعریف ۱. (شیکد و شانتیکومار، ۲۰۰۷) فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی نامنفی با توابع توزیع $F_X(x) = P(X \leq x)$ و $F_Y(x) = P(Y \leq x)$، توابع بقای $\bar{F}_X(x) = 1 - F_X(x)$ و $\bar{F}_Y(x) = 1 - F_Y(x)$، باشند. X در ترتیب تصادفی معمولی[1] بزرگتر از Y است $(X \geq_{st} Y)$ هرگاه نابرابری $\bar{F}_X(x) \geq \bar{F}_Y(x)$ به ازای $x \geq 0$ برقرار باشد.

توجه شود که مولر و استویان (۲۰۰۲) و شیکد و شانتیکومار (۲۰۰۷) منابع مناسبی برای بررسی و شناخت ترتیب‌های تصادفی و کاربردهای آنها هستند.

تعریف ۲. فرض کنید $a_{(1)} \leq \ldots \leq a_{(n)}$ و $b_{(1)} \leq \ldots \leq b_{(n)}$ به‌ترتیب نشان‌دهنده مقادیر مرتب شده متناظر با بردارهای $\mathbf{a} = (a_1, \cdots, a_n)$ و $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_n)$ باشند.

الف- بردار $\mathbf{a}$ به معنای بیشاندن[2] بزرگتر از بردار $\mathbf{b}$ است $(\mathbf{a} \overset{m}{\succeq} \mathbf{b})$ هرگاه به ازای هر $i = 1, \ldots, n-1$،

[1] Usual Stochastic Order
[2] Majorization

$\sum_{j=1}^{i} a_{(j)} \leq \sum_{j=1}^{i} b_{(j)}$ و $\sum_{j=1}^{n} a_{(j)} = \sum_{j=1}^{n} b_{(j)}$.

ب- بردار $\mathbf{a}$ به معنای بیشاندن ضعیف از بالا[1] بزرگتر از بردار $\mathbf{b}$ است ($\mathbf{a} \overset{w}{\succeq} \mathbf{b}$) هرگاه به ازای هر $i = 1, \ldots, n$، $\sum_{j=1}^{i} a_{(j)} \leq \sum_{j=1}^{i} b_{(j)}$.

مفهوم بیشاندن ارتباط نزدیکی با پراکندگی دارد. زیرا اگر $\mathbf{a}$ به معنای بیشاندن بزرگتر از $\mathbf{b}$ باشد ($\mathbf{a} \overset{m}{\succeq} \mathbf{b}$) آنگاه دامنه بردار $\mathbf{a}$ یعنی $a_{(n)} - a_{(1)}$ بزرگتر از دامنه بردار $\mathbf{b}$ یعنی $b_{(n)} - b_{(1)}$ است و در نتیجه بردار $\mathbf{a}$ پراکنده‌تر از بردار $\mathbf{b}$ است. باید توجه داشت که ترتیب بیشاندن، ترتیب بیشاندن ضعیف از بالا را نتیجه می‌دهد.

تعریف ۳. *(مارشال و همکاران ، ۲۰۱۱)* تابع حقیقی مقدار ϕ روی مجموعه $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{R}^n$ شور- محدب[2] نامیده می‌شود هرگاه

$$\boldsymbol{u} \overset{m}{\succeq} \boldsymbol{v} \Rightarrow \phi(\boldsymbol{u}) \geq \phi(\boldsymbol{v}), \quad \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{A}.$$

همچنین تابع ϕ روی $\mathbb{A}$ شور- مقعر[3] نامیده می‌شود هرگاه $-\phi$ روی $\mathbb{A}$ شور- محدب باشد.

لم ۱. *(مارشال و همکاران ، ۲۰۱۱)* فرض کنید $I \subset \mathbb{R}$ و $\Psi : I^n \to \mathbb{R}$ تابعی مشتق‌پذیر و پیوسته باشد. تابع Ψ روی I^n شور- محدب *(شور- مقعر)* است اگر و فقط اگر

الف- تابع Ψ روی I^n متقارن باشد.

ب- به ازای $i \neq j$ و $\mathbf{z} \in I^n$ نابرابری

$$(z_i - z_j)\big(\frac{\partial \Psi}{\partial z_i}(\mathbf{z}) - \frac{\partial \Psi}{\partial z_j}(\mathbf{z})\big) \geq 0 \ (\leq 0),$$

برقرار باشد که در آن $\frac{\partial \Psi}{\partial z_i}(\mathbf{z})$ مشتق تابع Ψ نسبت به مولفه i -ام است.

لم ۲. *(مارشال و همکاران ، ۲۰۱۱)* تابع حقیقی مقدار ϕ را روی $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{R}^n$ در نظر بگیرید. $\boldsymbol{u} \overset{w}{\succeq} \boldsymbol{v}$ نابرابری $\phi(\boldsymbol{u}) \geq \phi(\boldsymbol{v})$ را نتیجه می‌دهد اگر و فقط اگر ϕ تابعی نزولی و شور- محدب در $\mathbb{A}$ باشد.

چندین روش برای نشان دادن وابستگی بین متغیرهای تصادفی وجود دارد (کوتز و همکاران ، ۲۰۱۹) اما در این میان، نظریه مفصل یک ابزار مفید برای اهداف مورد نظر است. به دلیل اهمیت و کاربرد فراوان مفصل ارشمیدسی در زمینه‌های مختلف، بسیاری از خواص این نوع مفصل در متون و مقالات آماری مورد بررسی قرار گرفته

[1] Weakly SuperMajorization
[2] Schur-convex
[3] Schur-concave

است (نلسن ، ۲۰۰۶) . دو دلیل از مهمترین دلایل استفاده زیاد از این نوع تابع مفصل ۱) سادگی ساخت این کلاس و اعضای آن ۲) شامل شدن بسیاری از مفصل‌های معروف مانند مفصل کلایتون[1]، مفصل علی-میکائیل-حق[2]، مفصل گامبل-هوگارد[3]، مفصل استقلال و غیره است.

تعریف ۴. *(نلسن ، ۲۰۰۶)* تابع حقیقی مقدار h روی بازه $(a,b) \subset [-\infty,+\infty]$ یک تابع n -یکنوا[4] نامیده می‌شود هرگاه

$$(-1)^k \frac{d^k}{dx^k} h(x) > 0, \qquad x \in (a,b),\ k = 0, \cdots, n-2,$$

و تابع $(-1)^{n-2} \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}} h(x)$ تابعی نزولی و محدب در بازه (a,b) باشد.

تعریف ۵. *(نلسن ، ۲۰۰۶)* برای تابع n -یکنوا $\psi : [0,\infty) \to [0,1]$ با این شرایط که $\psi(0) = 1$، $\lim_{x\to\infty} \psi(x) = 0$، فرض کنید $\psi = \phi^{-1}$ وارون از راست پیوسته باشد. تابع C_ϕ را مفصل ارشمیدسی با تابع مولد ϕ نامند هرگاه

$$C_\psi(u_1, \cdots, u_n) = \psi(\phi(u_1) + \cdots + \phi(u_n)), \quad u_i \in [0,1],\ i = 1, \cdots, n.$$

۳ نتایجی با مولفه‌های مستقل

در این بخش، به مقایسه‌های تصادفی سیستم‌های $(n-1)$ از n متشکل از مولفه‌های مستقل مدل نرخ خطر جمع‌پذیر تحت شوک‌های تصادفی، پرداخته می‌شود. قرار دهید

$$\mathcal{E}_n^+ = \{(x_1, \cdots, x_n) : x_1 \geq \cdots \geq x_n > 0\},$$
$$\mathcal{D}_n^+ = \{(x_1, \cdots, x_n) : 0 < x_1 \leq \cdots \leq x_n\}.$$

قضیه ۱. فرض کنید $X_1, \cdots, X_n$ متغیرهای تصادفی مستقل نامنفی با $X_i \sim AH(\theta_i; \bar{F}(\cdot;\alpha_i))$ باشند که در آن $\bar{F}(\cdot;\alpha_i)$ تابع بقای پایه به ازای $i = 1, \cdots, n$ است. همچنین فرض کنید $I_{p_1}, \cdots, I_{p_n}$ $(I_{p_1^*}, \cdots, I_{p_n^*})$ یک مجموعه از متغیرهای برنولی مستقل، و مستقل از X_i ها باشند که $\mathbb{E}[I_{p_i}] = p_i$ $(\mathbb{E}[I_{p_i^*}] = p_i^*)$. قرار دهید $Y_i = I_{p_i} X_i$ و $Y_i^* = I_{p_i^*} X_i$ باشد. تحت شرایط:

[1] Clayton Copula
[2] Ali-Mikhail-Haq Copula
[3] Gumbel-Hougaard Copula
[4] n-monotone

الف- تابع $g:[0,1]\longmapsto\mathbb{R}_+$ مشتق‌پذیر و نزولی باشد.
ب- تابع $g^{-1}(u)$ تابعی لوگ-محدب در $u\in\mathbb{R}_+$ باشد.
ج- تابع $\bar{F}(\cdot;\alpha)$ تابعی نزولی در α باشد.
به ازای $\boldsymbol{g(p)},\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha}\in\mathcal{E}_n^+$ یا $\boldsymbol{g(p)},\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha}\in\mathcal{D}_n^+$ داریم:

$$\big(g(p_1),g(p_2),\cdots,g(p_n)\big)\overset{w}{\succeq}\big(g(p_1^*),g(p_2^*),\cdots,g(p_n^*)\big)\Longrightarrow Y_{2:n}\geq_{st}Y_{2:n}^*.$$

برهان: اثبات فقط برای $\boldsymbol{g(p)},\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha}\in\mathcal{E}_n^+$ انجام می‌شود و اثبات حالت بعد، مشابه است. فرض کنید $g(p_i)=u_i$ و g^{-1} وارون تابع g باشد. تابع بقای $Y_{2:n}$ به ازای $t\geq 0$ به صورت

$$\begin{aligned}
\bar{F}_{Y_{2:n}}(t) &= \sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}(Y_i\leq t,Y_j>t,\,j\neq i)+\mathbb{P}(Y_1>t,\cdots,Y_n>t)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\big[(1-p_ie^{-\theta_it}\bar{F}(t;\alpha_i))\prod_{j\neq i}^{n}p_je^{-\theta_jt}\bar{F}(t;\alpha_j)\big]+\prod_{i=1}^{n}p_ie^{-\theta_it}\bar{F}(t;\alpha_i)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\prod_{j\neq i}^{n}p_je^{-\theta_jt}\bar{F}(t;\alpha_j)-(n-1)\prod_{i=1}^{n}p_ie^{-\theta_it}\bar{F}(t;\alpha_i)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\prod_{j\neq i}^{n}g^{-1}(u_j)e^{-\theta_jt}\bar{F}(t;\alpha_j)-(n-1)\prod_{i=1}^{n}g^{-1}(u_i)e^{-\theta_it}\bar{F}(t;\alpha_i)
\end{aligned}$$

است. برای بدست آوردن نتیجه لازم، براساس لم ۲، کافی است برای مقادیر ثابت $t\geq 0$، تابع $\bar{F}_{Y_{2:n}}(t)$ تابعی نزولی و شور-محدب در u_i باشد. مشتق $\bar{F}_{Y_{2:n}}(t)$ نسبت به u_k به صورت

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\bar{F}_{Y_{2:n}}(t)}{\partial u_k} &= \frac{\partial\log g^{-1}(u_k)}{\partial u_k}\big[\sum_{i\neq k}^{n}\prod_{j\neq i}^{n}g^{-1}(u_j)e^{-\theta_jt}\bar{F}(t;\alpha_j)\\
&- (n-1)\prod_{i=1}^{n}g^{-1}(u_i)e^{-\theta_jt}\bar{F}(t;\alpha_j)\big],
\end{aligned}$$

است. چون $g^{-1}(u_i)e^{-\theta_it}\bar{F}(t;\alpha_i)$ به ازای $i=1,\cdots,n$، همواره بین $[0,1]$ است داریم:

$$\prod_{j\neq i}^{n}g^{-1}(u_j)e^{-\theta_jt}\bar{F}(t;\alpha_j)\geq\prod_{i=1}^{n}g^{-1}(u_i)e^{-\theta_it}\bar{F}(t;\alpha_i)$$

و در نتیجه

$$\sum_{i\neq k}^{n}\prod_{j\neq i}^{n} g^{-1}(u_j)e^{-\theta_j t}\bar{F}(t;\alpha_j) \quad \geq \quad (n-1)\prod_{i=1}^{n} g^{-1}(u_i)e^{-\theta_i t}\bar{F}(t;\alpha_i).$$

با توجه به شرط (الف) قضیه، $\frac{\partial g^{-1}(u_k)}{\partial u_k} < 0$ است که نشان می‌دهد $\bar{F}_{Y_{2:n}}(t)$ تابعی نزولی در u_k است. همچنین

$$\begin{aligned}
J(\boldsymbol{u}) \quad &:= \quad \frac{\partial \bar{F}_{Y_{2:n}}(t)}{\partial u_1} - \frac{\partial \bar{F}_{Y_{2:n}}(t)}{\partial u_2} \\
&\geq \quad \frac{\partial \log g^{-1}(u_2)}{\partial u_2}\Big[\sum_{i\neq 1}^{n}\prod_{j\neq i}^{n} g^{-1}(u_j)e^{-\theta_j t}\bar{F}(t;\alpha_j) \\
&- \quad \sum_{i\neq 2}^{n}\prod_{j\neq i}^{n} g^{-1}(u_j)e^{-\theta_j t}\bar{F}(t;\alpha_j)\Big] \\
&= \quad \frac{\partial g^{-1}(u_2)}{\partial u_2} \times \frac{1}{g^{-1}(u_2)}\prod_{j\neq 1, j\neq 2}^{n} g^{-1}(u_j)e^{-\theta_j t}\bar{F}(t;\alpha_j)\big[g^{-1}(u_1)e^{-\theta_1 t}\bar{F}(t;\alpha_1) \\
&- \quad g^{-1}(u_2)e^{-\theta_2 t}\bar{F}(t;\alpha_2)\big].
\end{aligned}$$

اولین نابرابری براساس شرط (ب) قضیه درست است. تحت شرط (الف) و به ازای $u_1 \geq u_2$، داریم $g^{-1}(u_1) < g^{-1}(u_2)$. با بکارگیری شرط (پ) و همچنین به ازای $\alpha_1 \geq \alpha_2$ و $\theta_1 \geq \theta_2$ داریم:

$$e^{-\theta_1 t}\bar{F}(t;\alpha_1) \leq e^{-\theta_1 t}\bar{F}(t;\alpha_2) \leq e^{-\theta_2 t}\bar{F}(t;\alpha_2).$$

اکنون با استفاده از نتایج بدست آمده، نابرابری

$$g^{-1}(u_1)e^{-\theta_1 t}\bar{F}(t;\alpha_1) \;-\; g^{-1}(u_2)e^{-\theta_2 t}\bar{F}(t;\alpha_2) < \; 0,$$

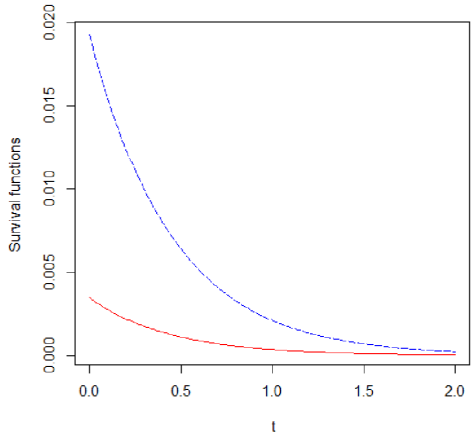
برقرار است. از شرط (الف) ونابرابری $\frac{\partial g^{-1}(u_2)}{\partial u_2} < 0$ نتیجه می‌شود

$$\frac{\partial \bar{F}_{Y_{2:n}}(t)}{\partial u_1} - \frac{\partial \bar{F}_{Y_{2:n}}(t)}{\partial u_2} \;\geq\; 0.$$

بنا بر لم ۱، $\bar{F}_{Y_{2:n}}(t)$ تابعی شور-محدب در u_i است.

تذکر ۱. نکته‌ای که لازم است توجه شود این است که شرایط *(الف)* و *(ب)* در قضیه ۱ شرایط ناسازگاری نیستند و مصداق‌هایی وجود دارند که این شرایط به صورت همزمان برقرار هستند. به عنوان مثال، توابع کلی $g(p) = \theta^{-1}(p^{-\theta} - 1)$ به ازای $\theta \in (0, \infty)$ و $g(p) = (1 - \log p)^{\beta} - 1$ به ازای $\beta \in (0, 1]$ در شرایط *(الف)* و *(ب)* در قضیه ۱ صدق می‌نمایند. همچنین در رابطه با شرط *(پ)* قضیه ۱ می‌توان چنین اظهار نظر نمود. دو خانواده کلی از توزیع‌ها، خانواده توزیع‌های مقیاس و خانواده توزیع‌های نرخ خطر متناسب هستند که به ترتیب دارای توابع بقاهای $\bar{F}(t;\alpha) = \bar{F}(\alpha\, t)$ و $\bar{F}(t;\alpha) = \bar{F}^{\alpha}(t)$ هستند. این دو خانواده از توزیع‌ها، کاربردهای زیادی در مباحث قابلیت اعتماد و تحلیل بقا دارند. بسادگی می‌توان نشان داد که این دو خانواده از توزیع‌ها در شرط *(پ)* قضیه ۱ صدق می‌کنند.

مثال ۱. فرض کنید $\bar{F}(t;\alpha_i) = e^{-\alpha_i t}$، $(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = (0.9, 0.5, 0.3)$، $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (0.2, 1, 0.4)$، $(p_1, p_2, p_3) = (e^{-6}, e^{-1}, e^{-3})$ و $(p_1^*, p_2^*, p_3^*) = (e^{-5}, e^{-2}, e^{-4})$ باشد. اگر $g(p) = -\log p$ باشد آنگاه بدیهی است $\big(g(p_1), g(p_2), g(p_3)\big) \overset{w}{\succeq} \big(g(p_1^*), g(p_2^*), g(p_3^*)\big)$. توابع بقای $Y_{2:3}$ و $Y_{2:3}^*$ در شکل ۱



شکل ۱. منحنی آبی رنگ، تابع بقای $Y_{2:3}$ و منحنی قرمز رنگ، تابع بقای $Y_{2:3}^*$

نمایش داده شده است که نتیجه می‌دهد $Y_{2:3} \geq_{st} Y_{2:3}^*$ است.

قضیه ۲. فرض کنید $X_1, \cdots, X_n$ و $X_1^*, \cdots, X_n^*$ دو مجموعه از متغیرهای تصادفی مستقل نامنفی باشند بطوری که $X_i \sim AH(\theta_i; \bar{F}(\cdot;\alpha_i))$ و $X_i^* \sim AH(\theta_i^*; \bar{F}(\cdot;\alpha_i^*))$ باشند، که در آن $\bar{F}(\cdot;\alpha_i)$ و $\bar{F}(\cdot;\alpha_i^*)$ توابع بقای پایه به ازای $i = 1, \cdots, n$ هستند. فرض کنید $I_{p_1}, \cdots, I_{p_n}$ یک مجموعه از متغیرهای برنولی مستقل و مستقل از X_i ها با $\mathbb{E}[I_{p_i}] = p_i$ باشند. قرار دهید $Y_i = I_{p_i} X_i$ و $Y_i^* = I_{p_i} X_i^*$ باشد. تحت شرایط:

الف- تابع $g : [0, 1] \longmapsto \mathbb{R}_+$ مشتق‌پذیر و اکیداً صعودی باشد.

ب- تابع $\bar{F}(\cdot;\alpha)$ تابعی نزولی در α باشد.
ج- تابع $\bar{F}(\cdot;\alpha)$ تابعی لوگ-محدب در α باشد.
به ازای $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{p}) \in \mathcal{E}_n^+$، $\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\theta}^* \in \mathcal{D}_n^+$، $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}^* \in \mathcal{D}_n^+$ یا $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{p}) \in \mathcal{D}_n^+$، $\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\theta}^* \in \mathcal{E}_n^+$، $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}^* \in \mathcal{E}_n^+$ داریم:

$$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n) \overset{w}{\succeq} (\alpha_1^*,\alpha_2^*,\cdots,\alpha_n^*) \Longrightarrow Y_{2:n} \geq_{st} Y_{2:n}^*.$$

برهان: اثبات فقط برای $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{p}) \in \mathcal{E}_n^+$، $\boldsymbol{\theta} \in \mathcal{D}_n^+$، $\boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{D}_n^+$ انجام می‌شود. زیرا اثبات حالت بعدی، مشابه است. فرض کنید $g(p_i)=u_i$ و g^{-1} تابع وارون g باشد. به ازای $t \geq 0$ داریم

$$\bar{F}_{Y_{2:n}}(t) = \sum_{i=1}^{n}\prod_{j\neq i}^{n} g^{-1}(u_j)e^{-\theta_j t}\bar{F}(t;\alpha_j) - (n-1)\prod_{i=1}^{n} g^{-1}(u_i)e^{-\theta_i t}\bar{F}(t;\alpha_i).$$

برای رسیدن به نتیجه لازم، براساس لم ۲ کافی است نشان داده شود به ازای $t>0$، تابع $\bar{F}_{Y_{2:n}}(t)$ تابعی نزولی و شور-محدب در α_i است. مشتق تابع $\bar{F}_{Y_{2:n}}(t)$ نسبت α_k به صورت

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{F}_{Y_{2:n}}(t)}{\partial \alpha_k} &= \frac{\partial \log \bar{F}(t;\alpha_k)}{\partial \alpha_k}\Big[\sum_{i\neq k}^{n}\prod_{j\neq i}^{n} g^{-1}(u_j)e^{-\theta_j t}\bar{F}(t;\alpha_j)\\ &- (n-1)\prod_{i=1}^{n} g^{-1}(u_i)e^{-\theta_i t}\bar{F}(t;\alpha_i)\Big],\end{aligned}$$

است. واضح است که

$$\sum_{i\neq k}^{n}\prod_{j\neq i}^{n} g^{-1}(u_j)e^{-\theta_j t}\bar{F}(t;\alpha_j) - (n-1)\prod_{i=1}^{n} g^{-1}(u_i)e^{-\theta_i t}\bar{F}(t;\alpha_i) \geq 0,$$

با استفاده از شرط (ب)، نتیجه می‌شود $\bar{F}_{Y_{2:n}}(t)$ تابعی نزولی بر حسب α_i است و می‌توان نشان داد

$$\begin{aligned}I(\boldsymbol{\alpha}) &:= \frac{\partial \bar{F}_{Y_{2:n}}(t)}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial \bar{F}_{Y_{2:n}}(t)}{\partial \alpha_2}\\ &\leq \frac{\partial \log \bar{F}(t;\alpha_2)}{\partial \alpha_2}\Big[\sum_{i\neq 1}^{n}\prod_{j\neq i}^{n} g^{-1}(u_j)\bar{F}(t;\alpha_j) - \sum_{i\neq 2}^{n}\prod_{j\neq i}^{n} g^{-1}(u_j)\bar{F}(t;\alpha_j)\Big]\\ &= \frac{\partial \bar{F}(t;\alpha_2)}{\partial \alpha_2} \times \frac{1}{\bar{F}(t;\alpha_2)}\prod_{j\neq 1, j\neq 2}^{n} g^{-1}(u_j)e^{-\theta_j t}\bar{F}(t;\alpha_j)\big[g^{-1}(u_1)e^{-\theta_1 t}\bar{F}(t;\alpha_1)\\ &- g^{-1}(u_2)e^{-\theta_2 t}\bar{F}(t;\alpha_2)\big],\end{aligned}$$

که در آن اولین نابرابری به توجه به شرط (ج) و واقعیت زیر به ازای $\alpha_1 \leq \alpha_2$ برقرار است.

$$\frac{\partial \log \bar{F}(t,\alpha_1)}{\partial \alpha_1} \leq \frac{\partial \log \bar{F}(t,\alpha_2)}{\partial \alpha_2} \leq 0.$$

همچنین به ازای $u_1 \geq u_2$ و $\alpha_1 \leq \alpha_2$ و $\theta_1 \leq \theta_2$ نابرابری

$$g^{-1}(u_1)e^{-\theta_1 t}\bar{F}(t;\alpha_1) \ - \ g^{-1}(u_2)e^{-\theta_2 t}\bar{F}(t;\alpha_2) \ > \ 0,$$

برقرار است. بنابراین، می‌توان نتیجه گرفت:

$$\frac{\partial \bar{F}_{Y_{r:n}}(t)}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial \bar{F}_{Y_{r:n}}(t)}{\partial \alpha_2} \ \leq \ 0,$$

یا تحت این فرضیه که $\alpha_1 \leq \alpha_2$ است، داریم:

$$(\alpha_1 - \alpha_2)\{\frac{\partial \bar{F}_{Y_{r:n}}(t)}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial \bar{F}_{Y_{r:n}}(t)}{\partial \alpha_2}\} \geq 0.$$

بنا بر لم ۱، $\bar{F}_{Y_{r:n}}(t)$ تابعی شور-محدب در α_i است.

تذکر ۲. به عنوان مصداق‌هایی برای شرط *(الف)* در قضیه ۲، می‌توان به $g(p) = p/(1-p)$، $g(p) = \log(1+p)$ و $g(p) = p^\theta$ به ازای $\theta > 0$ اشاره کرد. همچنین در رابطه با همزمان برقرار بودن شرایط *(ب)* و *(ج)* در قضیه ۲، خانواده توزیع‌های نرخ خطر متناسب همواره صدق می کند اما خانواده توزیع‌های مقیاس با شرط نزولی بودن تابع نرخ خطر پایه، در شرایط مذکور صدق می‌کند.

۴ نتایجی با مولفه‌های وابسته

حجم عمده‌ایی از مطالعات روی مقایسه‌های تصادفی سیستم‌های $(n-1)$ از n در حالتی است که مولفه‌های سیستم به صورت مستقل هستند. اما وقتی که چنین سیستم‌هایی در حال کار هستند ممکن است عواملی مانند شرایط محیطی و عوامل تنش، روی تمام اجزای سیستم تاثیر گذارند. پس منطقی است که طول عمر اجزای یک سیستم به صورت وابسته در نظر گرفته شود. هاولادر و همکاران (۲۰۲۳) تحت بیشاندن ضعیف از بالا و صعودی بودن $\bar{F}(\cdot;\alpha)$ نسبت به α، به مقایسه تصادفی سیستم‌های $(n-1)$ از n با مولفه‌های وابسته پرداختند وقتی که مولفه‌ها تحت شوک‌های تصادفی هستند. در قضیه بعدی، تحت شرایط متفاوت‌تر یعنی بیشاندن ضعیف از پایین و نزولی

بودن $\bar{F}(\cdot;\alpha)$ نسبت به α در مدل نرخ خطر جمع‌پذیر، به مقایسه تصادفی $(n-1)$ از n پرداخته شده است.

قضیه ۳. فرض کنید $X_1,\cdots,X_n$ و $X_1^*,\cdots,X_n^*$ متغیرهای تصادفی نامنفی وابسته تحت مفصل ارشمیدسی با تابع مولد ϕ باشند بطوری که $X_i \sim AH(\theta_i;\bar{F}(\cdot;\alpha_i))$ و $X_i^* \sim AH(\theta_i^*;\bar{F}(\cdot;\alpha_i^*))$. همچنین فرض کنید $I_{p_1},\cdots,I_{p_n}$ یک مجموعه از متغیرهای برنولی مستقل، و مستقل از X_i ها با $\mathbb{E}[I_{p_i}]=p_i$ باشند. قرار دهید $Y_i=I_{p_i}X_i$ و $Y_i^*=I_{p_i}X_i^*$ باشد. تحت شرایط:

الف- تابع $g:[0,1]\longmapsto\mathbb{R}_+$ مشتق‌پذیر و اکیداً صعودی باشد.

ب- تابع $\bar{F}(\cdot;\alpha)$ تابعی نزولی و لوگ-محدب در α باشد.

ج- تابع $\psi(t)$ تابعی لوگ-مقعر در t باشد.

به ازای $\boldsymbol{g(p)}\in\mathcal{E}_n^+$، $\boldsymbol{\theta}\in\mathcal{D}_n^+$، $\boldsymbol{\alpha}\in\mathcal{D}_n^+$ یا $\boldsymbol{g(p)}\in\mathcal{D}_n^+$، $\boldsymbol{\theta}\in\mathcal{E}_n^+$، $\boldsymbol{\alpha}\in\mathcal{E}_n^+$ داریم:

$$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\overset{w}{\succeq}(\alpha_1^*,\alpha_2^*,\cdots,\alpha_n^*)\Longrightarrow Y_{2:n}\geq_{st}Y_{2:n}^*.$$

برهان: اثبات فقط برای $\boldsymbol{g(p)}\in\mathcal{E}_n^+$، $\boldsymbol{\theta}\in\mathcal{D}_n^+$ و $\boldsymbol{\alpha}\in\mathcal{D}_n^+$ انجام می‌شود. تابع بقا $Y_{2:n}$ به ازای $t\geq 0$ می‌تواند به صورت

$$\begin{aligned}\bar{F}_{Y_{2:n}}(t) &= \sum_{i=1}^{n}\big(\prod_{j\neq i}^{n}g^{-1}(u_j)\big)\big(\psi\big[\sum_{j\neq i}^{n}\phi(e^{-\theta_i t}\bar{F}(t;\alpha_i))\big]\big)\\ &- (n-1)\big(\prod_{i=1}^{n}g^{-1}(u_i)\big)\big(\psi\big[\sum_{i=1}^{n}\phi(e^{-\theta_i t}\bar{F}(t;\alpha_i))\big]\big),\end{aligned}$$

بیان شود. برای بدست آوردن نتیجه لازم، براساس لم ۲ کافی است به ازای $t\geq 0$، نشان داده شود $\bar{F}_{Y_{2:n}}(t)$ تابعی نزولی و شور-محدب در α_i است. مشتق $\bar{F}_{Y_{2:n}}(t)$ نسبت به α_k به صورت

$$\begin{aligned}\frac{\partial\bar{F}_{Y_{2:n}}(t)}{\partial\alpha_k} &= \big[\sum_{i\neq k}^{n}\big(\prod_{j\neq i}^{n}g^{-1}(u_j)\big)\big(\psi'\big[\sum_{j\neq i}^{n}\phi(e^{-\theta_j t}\bar{F}(t;\alpha_j))\big]\big)\\ &- (n-1)\big(\prod_{i=1}^{n}g^{-1}(u_i)\big)\big(\psi'\big[\sum_{i=1}^{n}\phi(e^{-\theta_i t}\bar{F}(t;\alpha_i))\big]\big)\big]\\ &\times \frac{\psi(\phi(e^{-\theta_k t}\bar{F}(t;\alpha_k)))}{\psi'(\phi(e^{-\theta_k t}\bar{F}(t;\alpha_k)))}\times\frac{\partial\log(\bar{F}(t;\alpha_k))}{\partial\alpha_k},\end{aligned}$$

است و بسادگی می‌توان نشان داد

$$\prod_{j\neq i}^{n} g^{-1}(u_j) \geq \prod_{m=1}^{n} g^{-1}(u_m) \geq 0, \quad i \in \{1, \cdots, n\}$$
$$\sum_{j\neq i}^{n} \phi(e^{-\theta_j t}\bar{F}(t;\alpha_j)) \leq \sum_{m=1}^{n} \phi(e^{-\theta_m t}\bar{F}(t;\alpha_m)),$$

در نتیجه $\psi'(\sum_{j\neq i}^{n} \phi(e^{-\theta_j t}\bar{F}(t;\alpha_j))) \leq \psi'(\sum_{m=1}^{n} \phi(e^{-\theta_m t}\bar{F}(t;\alpha_m))) \leq 0$. بنابراین

$$\begin{aligned} A &= \sum_{i\neq k}^{n} \Big\{ \big(\prod_{j\neq i}^{n} g^{-1}(u_j)\big)\big(\psi'\big[\sum_{j\neq i}^{n} \phi(e^{-\theta_j t}\bar{F}(t;\alpha_j))\big]\big) \\ &- \big(\prod_{i=1}^{n} g^{-1}(u_i)\big)\big(\psi'\big[\sum_{i=1}^{n} \phi(e^{-\theta_i t}\bar{F}(t;\alpha_i))\big]\big)\Big\} \leq 0, \end{aligned}$$

چون $\bar{F}(x;\alpha_i)$ نسبت به α_i نزولی است، $\frac{\partial \log(\bar{F}(t;\alpha_i))}{\partial \alpha_i} \leq 0$. در نتیجه $\bar{F}_{Y_{r:n}}(t)$ تابعی نزولی از α_i است. بنابراین

$$\begin{aligned} J(\boldsymbol{\alpha}) &:= \frac{\partial \bar{F}_{Y_{r:n}}(t)}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial \bar{F}_{Y_{r:n}}(t)}{\partial \alpha_2} \\ &\leq \Big\{ \sum_{i\neq 1}^{n} \big(\prod_{j\neq i}^{n} g^{-1}(u_j)\big)\big(\psi'\big[\sum_{j\neq i}^{n} \phi(e^{-\theta_j t}\bar{F}(t;\alpha_j))\big]\big) \\ &- \sum_{i\neq 2}^{n} \big(\prod_{j\neq i}^{n} g^{-1}(u_j)\big)\big(\psi'\big[\sum_{j\neq i}^{n} \phi(e^{-\theta_j t}\bar{F}(t;\alpha_j))\big]\big)\Big\} \\ &\times \frac{\psi(\phi(e^{-\theta_1 t}\bar{F}(t;\alpha_1)))}{\psi'(\phi(e^{-\theta_1 t}\bar{F}(t;\alpha_1)))} \times \frac{\partial \log(\bar{F}(t;\alpha_1))}{\partial \alpha_1} \\ &\overset{sgn}{=} \Big\{ g^{-1}(u_1)\big(\psi'\big[\sum_{j\neq 2}^{n} \phi(e^{-\theta_j t}\bar{F}(t;\alpha_j))\big]\big) \\ &- g^{-1}(u_2)\big(\psi'\big[\sum_{j\neq 1}^{n} \phi(e^{-\theta_j t}\bar{F}(t;\alpha_j))\big]\big)\Big\} \\ &\times \frac{\psi(\phi(e^{-\theta_1 t}\bar{F}(t;\alpha_1)))}{\psi'(\phi(e^{-\theta_1 t}\bar{F}(t;\alpha_1)))} \times \frac{\partial \log(\bar{F}(t;\alpha_1))}{\partial \alpha_1} \leq 0. \end{aligned}$$

نابرابری‌های اول و دوم برقرارند زیرا $\bar{F}(x;\alpha)$ تابعی نزولی از α است و ϕ نیز نزولی است، به ازای $\alpha_1 \leq \alpha_2$ و

$\theta_1 \leq \theta_2$ داریم:

$$\phi(e^{-\theta_1 t}\bar{F}(t;\alpha_1)) \leq \phi(e^{-\theta_2 t}\bar{F}(t;\alpha_2)). \tag{1}$$

بنابراین

$$\begin{aligned}\sum_{j\neq 1}^{n}\phi(e^{-\theta_j t}(\bar{F}(t;\alpha_j)) &\geq \sum_{j=1}^{n}\phi(e^{-\theta_j t}\bar{F}(t;\alpha_j)) - \phi(e^{-\theta_j t}\bar{F}(t;\alpha_2)) \\ &= \sum_{j\neq 2}^{n}\phi(e^{-\theta_j t}\bar{F}(t;\alpha_j)).\end{aligned}$$

با استفاده از محدب بودن ψ می‌توان نتیجه گرفت:

$$0 \geq \psi'\big[\sum_{j\neq 1}^{n}\phi(e^{-\theta_j t}\bar{F}(t;\alpha_j))\big] \geq \psi'\big[\sum_{j\neq 2}^{n}\phi(e^{-\theta_j t}\bar{F}(t;\alpha_j))\big]$$

و در نتیجه

$$0 \leq -\psi'\big[\sum_{j\neq 1}^{n}\phi(e^{-\theta_j t}\bar{F}(t;\alpha_j))\big] \leq -\psi'\big[\sum_{j\neq 2}^{n}\phi(e^{-\theta_j t}\bar{F}(t;\alpha_j))\big]. \tag{2}$$

از طرف دیگر، چون g صعودی است g^{-1} نیز همچنین صعودی است و به ازای $u_1 \geq u_2$ داریم:

$$u_1 \geq u_2 \Longrightarrow 0 \leq g^{-1}(u_2) \leq g^{-1}(u_1). \tag{3}$$

با استفاده از روابط (۲) و (۳) داریم:

$$g^{-1}(u_2)\psi'\big[\sum_{j\neq 1}^{n}\phi(e^{-\theta_j t}\bar{F}(t;\alpha_j))\big] \geq g^{-1}(u_1)\psi'\big[\sum_{j\neq 2}^{n}\phi(e^{-\theta_j t}\bar{F}(t;\alpha_j))\big]. \tag{4}$$

چون ψ تابعی لوگ-مقعر است (معادل با صعودی بودن ψ/ψ' است) براساس رابطه (۱) نتیجه می‌شود:

$$\frac{\psi(\phi(e^{-\theta_1 t}\bar{F}(t;\alpha_1)))}{\psi'(\phi(e^{-\theta_1 t}\bar{F}(t;\alpha_1)))} \leq \frac{\psi(\phi(e^{-\theta_2 t}\bar{F}(t;\alpha_2)))}{\psi'(\phi(e^{-\theta_2 t}\bar{F}(t;\alpha_2)))} \leq 0. \tag{5}$$

چون $\bar{F}(x;\alpha)$ تابعی نزولی و لوگ–محدب نسبت به α است با توجه به شرط $\alpha_1 \leq \alpha_2$ داریم:

$$\frac{\partial \log(\bar{F}(t;\alpha_1))}{\partial \alpha_1} \leq \frac{\partial \log(\bar{F}(t;\alpha_2))}{\partial \alpha_2} \leq 0. \tag{۶}$$

بر اساس روابط (۵) و (۶) نتیجه می‌شود:

$$\frac{\psi(\phi(e^{-\theta_1 t}\bar{F}(t;\alpha_1)))}{\psi'(\phi(e^{-\theta_1 t}\bar{F}(t;\alpha_1)))}\frac{\partial \log(\bar{F}(t;\alpha_1))}{\partial \alpha_1} \geq \frac{\psi(\phi(e^{-\theta_2 t}\bar{F}(t;\alpha_2)))}{\psi'(\phi(e^{-\theta_2 t}\bar{F}(t;\alpha_2)))}\frac{\partial \log(\bar{F}(t;\alpha_2))}{\partial \alpha_2} \geq 0.$$

اکنون بر اساس رابطه (۴) می‌توان نتیجه گرفت $J(\boldsymbol{\alpha}) \leq 0$ و در نتیجه

$$(\alpha_1 - \alpha_2)\Big(\frac{\partial \bar{F}_{Y_{2:n}}(t)}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial \bar{F}_{Y_{2:n}}(t)}{\partial \alpha_2}\Big) \geq 0,$$

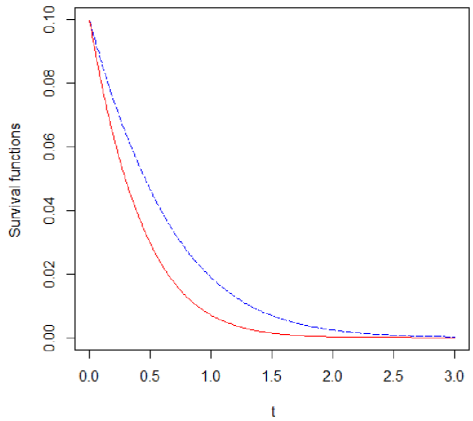
که براساس لم ۱، $\bar{F}_{Y_{2:n}}(t)$ تابعی شور–محدب در α است.

تذکر ۳. می‌توان شرط لوگ–مقعر بودن در قضیه ۳ را در خانواده مفصل‌های ارشمیدسی، بررسی کرد. به عنوان مثال، مفصل گامبل–هوگارد با تابع $\psi(t) = e^{1-(1+t)^\theta}$ را برای $\theta \geq 1$ در نظر بگیرید. واضح است $\log\psi(t) = 1-(1+t)^\theta$، که به ازای $\theta \geq 1$ تابعی مقعر بر حسب $t \in [0,1]$ است.

مثال ۲. فرض کنید $\bar{F}(t;\alpha_i) = e^{-\alpha_i t}$ باشد. همچنین فرض کنید $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) = (0.1, 0.3, 0.7)$، $(\alpha_1^*,\alpha_2^*,\alpha_3^*) = (0.2, 0.2, 1)$، $(\theta_1,\theta_2,\theta_3) = (0.3, 0.5, 0.9)$، $(\theta_1^*,\theta_2^*,\theta_3^*) = (0.4, 0.4, 1)$ و $(p_1,p_2,p_3) = (e^{0.6}-1, e^{0.3}-1, e^{0.1}-1)$ باشد. با قرار دادن $g(p) = \log(1+p)$، می‌توان نشان داد $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) \overset{w}{\succeq} (\alpha_1^*,\alpha_2^*,\alpha_3^*)$ است. در این حالت، تحت تابع مفصل هوگارد با تابع مولد $\psi(t) = e^{1-(1+t)^2}$، نمودار توابع بقای $Y_{2:3}$ و $Y_{2:3}^*$ در شکل ۲ نشان داده شده است که نتیجه می‌دهد $Y_{2:3} \geq_{st} Y_{2:3}^*$.

بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله، شرایط لازم و کافی روی طول عمرهای مولفه‌ها و احتمالات بقای آنها پس از شوک تصادفی، برای مقایسه طول عمر دو سیستم $(n-1)$ از n، ابتدا برای حالتی که مولفه‌ها مستقل هستند و سپس برای حالتی که مولفه‌ها وابسته هستند، مورد بحث قرار گرفت. بررسی سایر ترتیب‌های تصادفی مانند ترتیب نرخ خطر، نرخ خطر وارون و نسبت درستنمایی برای این‌گونه سیستم‌ها با مولفه‌های مستقل و همچنین وابسته، می‌تواند به عنوان یکی از مطالعات آینده برای پژوهشگران علاقمند در این زمینه مطرح شود.



شکل ۲. منحنی آبی رنگ، تابع بقای $Y_{۲:۳}$ و منحنی قرمز رنگ، تابع بقای $Y^*_{۲:۳}$

تقدیر و تشکر

نویسندگان از پیشنهادات ارزنده داوران محترم و ویراستار مجله که باعث ارائه بهتر و افزایش سطح کیفی مقاله شده است، کمال قدردانی و تشکر را دارند. نویسنده دوم بابت حمایت مالی دانشگاه زابل از این مقاله، تشکر و قدردانی می‌نماید.

مراجع

برمال‌زن، ق. حسین‌زاده، ع. امینی سرشت، ا. (۱۴۰۰)، چندین ترتیب تصادفی میان سیستم‌های $(n-۱)$ از n متشکل از مولفه‌های مقیاس، مجله علوم آماری، **۱۵**، ۴۴۲-۴۲۷.

حسین‌زاده، ع. برمال‌زن، ستاری. م. (۱۴۰۱)، مقایسه تصادفی سیستم‌های $(n-۱)$ از n متشکل از مولفه‌های نرخ خطر متناسب اصلاح شده با چندین دور افتاده از لحاظ ترتیب نرخ خطر، مجله علوم آماری، **۱**، ۹۱-۱۰۸.

Amini-Seresht, E., Qiao, J., Zhang, Y. and Zhao, P. (2016), On the Skewness of Order Statistics in Multiple-outlier PHR Models, *Metrika*, **79**, 817-836.

Balakrishnan, N., Haidari, A., Barmalzan, G. (2015), Improved Ordering Results for

Fail-safe Systems with Exponential Components, *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **44**, 2010-2023.

Barmalzan, G., Kosari, S., Akbar Hosseinzadeh, A. and Balakrishnan, N. (2022), Ordering Fail-safe Systems Having Dependent Components with Archimedean Copula and Exponentiated Location-Scale Distributions, *Statistics*, **56**, 631-661.

Barmalzan, G., Najafabadi, A.T.P. and Balakrishnan, N. (2017), Ordering Properties of the Smallest and Largest Claim Amounts in a General Scale Model, *Scandinavian Actuarial Journal*, **2017**(2), 105–124.

Barlow, R.E. and Proschan, F. (1975), *Statistical Theory of Reliability and Life Testing: Probability Models*, Silver Spring, Maryland.

Cai, X., Zhang, Y. and Zhao, P. (2017), Hazard Rate Ordering of the Second Order Statistics from Multiple-Outlier PHR Samples, *Statistics*, **51**, 615-626.

Finkelstein, M. (2008). *Failure Rate Modelling for Reliability and Risk*, Springer

Finkelstein, M. and Esaulova, V. (2001), Modelling a Failure Rate for a Mixture of Distribution Function, *Probability in the Engineering and Informational Sciences*, **15**, 383-400.

Finkelstein, M. and Esaulova, V. (2006), On Mixture Failure Rates Ordering.,*Communications in Statistics-Theory and Methods* **35**, 1943-1955.

Hawlader, B., Kundu, P. and Kundu, A. (2023). Stochastic Comparisons of Lifetimes of Fail-safe Systems with Dependent and Heterogeneous Components under Random Shocks.,*Statistics*, **57**, 694-709.

Hazra, N.K., Barmalzan, G. and Hosseinzadeh, A.A. (2022), Ordering Properties of the Second Smallest and the Second largest Order Statistics from a General Semiparametric Family of Distributions *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 1-18.

Cha, J.H. and Finkelstein, M. (2013), The Failure Rate Dynamics in Heterogeneous Populations, *Reliability Engineering & System Safety,* **112**, 120-128.

Hazra, N.K. and Finkelstein, M. (2018), On Stochastic Comparisons of Finite Mixtures for Some Semiparametric Families of Distributions.,*Test*, **27**, 988-1006.

Kotz, S., Balakrishnan, N. and Johnson, N.L. (2000), *Continuous Multivariate Distributions*, Vol. 1, Second edition, New York: John Wiley & Sons.

Marshall, A.W., Olkin, I. and Arnold, B.C. (2011), *Inequalities: Theory of Majorization and Its Applications,* Springer, New York.

Müller, A. and Stoyan, D. (2002), *Comparison Methods for Stochastic Models and Risks,* John Wiley & Sons, New York.

Nelsen, R.B. (2006), *An Introduction to Copulas*, New York: Springer.

Shaked, M. and Shanthikumar, J.G. (2007), *Stochastic Orders,* Springer, New York.

Zhang, Y., Amini-Seresht, E. and Zhao, P. (2019), On Fail-safe Systems under Random Shocks, *Applied Stochastic Models in Business and Industry*, **35**, 591-602.