آنتروپی و اکستروپی توزیع انرژی موجک سیستم فراکتالی بالا-فرکانس

علیرضا پاک گوهر[۱]، سهیل شکری[۲]

[۱]گروه آمار، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران

[۲]گروه ریاضی و آمار، واحد رشت، دانشگاه آزاد اسلامی رشت، ایران

چکیده: این مطالعه به بررسی توزیع انرژی موجک در سیستم‌های فراکتالی بالا-فرکانس و تحلیل ویژگی‌های آن با استفاده از معیارهای نظریه اطلاعات می‌پردازد. نوآوری اصلی این مقاله، مدل‌سازی توزیع انرژی موجک (p_j) با استفاده از توزیع هندسی بریده‌شده و ادغام مفهوم اکستروپی برای اندازه‌گیری پیچیدگی سیستم است. نشان داده می‌شود که این توزیع به شدت تحت تأثیر پارامتر فراکتالی α و تعداد سطوح تجزیه M قرار دارد. این پژوهش با محاسبه آنتروپی و اکستروپی موجک، به ترتیب به عنوان معیارهای بی‌نظمی و اطلاعات، به تحلیل کمی پیچیدگی این سیستم‌ها می‌پردازد. مقاله به بررسی خصوصیات این توزیع، از جمله همگرایی آن به توزیع‌های هندسی، یکنواخت و ثابت در شرایط حدی (مانند $M \to \infty$ یا $\alpha \to 0$) می‌پردازد. نتایج نشان می‌دهد که آنتروپی و اکستروپی ابزارهای مکملی برای توصیف کامل رفتار سیستم هستند؛ در حالی که آنتروپی بی‌نظمی را اندازه‌گیری می‌کند، اکستروپی میزان اطلاعات و قطعیت را نشان می‌دهد. این رویکرد، چارچوب نوینی برای تحلیل سیگنال‌های واقعی با پارامترهای متغیر فراهم می‌کند و می‌تواند در تحلیل سیگنال‌های فراکتالی و مدل‌سازی سیستم‌های پیچیده در زمینه‌هایی مانند مالی و زیست‌شناسی به کار رود.

برای اعتبارسنجی نظریه‌ها، سیگنال‌های فراکتالی مصنوعی (حرکت براونی کسری) با پارامترهای مختلف فراکتالی (α) و سطوح تجزیه (M) شبیه‌سازی شدند. نتایج عددی نشان می‌دهد که آنتروپی موجک به‌طور

قابل توجهی با افزایش سطوح تجزیه افزایش می‌یابد، در حالی که اکستروپی رشد کمتری داشته و در سطوح بالاتر به حالت اشباع می‌رسد. این یافته‌ها، اهمیت انتخاب سطح تجزیه مناسب را برجسته می‌کنند. این چارچوب ترکیبی، ابزار قدرتمندی برای تحلیل و مدل‌سازی سیستم‌های پیچیده و غیرایستا در حوزه‌هایی مانند مالی و زیست‌شناسی فراهم می‌کند.

واژه‌های کلیدی: آنتروپی موجک، اکستروپی موجک، انرژی موجک، توزیع هندسی بریده شده، توزیع دژنره، سیستم فراکتالی بالا–فرکانس.

۱ مقدمه

سیگنال‌های فرکتالی، که با خودهمانندی و رفتار مقیاس‌پذیری مشخص می‌شوند، در تحلیل داده‌ها کاربرد دارند و در حوزه‌هایی مانند مالی، زیست‌شناسی و علوم شبکه به‌کار می‌روند. تحلیل این سیگنال‌ها با استفاده از ابزارهای نظریه‌ی اطلاعات، مانند آنتروپی و اکستروپی، می‌تواند به درک بهتر محتوای اطلاعاتی و پیچیدگی آن‌ها کمک کند و به تعیین ایستا یا غیرایستا بودن سیگنال، حافظه‌ی آن و طبقه‌بندی در محدوده‌های مقیاسی خاص منجر شود (درویشیان و قدرتی امیری ، ۱۳۹۸). موجک‌ها ابزارهایی قدرتمند برای تحلیل سیگنال‌های غیرایستا هستند؛ این ابزارها با تفکیک همزمان اطلاعات زمانی و فرکانسی، در قالب‌های پیوسته و گسسته قابل محاسبه‌اند.

سیگنال‌های فرکتالی [۱] به سیگنال‌هایی اطلاق می‌شود که ویژگی‌هایی نظیر خودهمانندی [۲] و رفتار مقیاس‌پذیری [۳] را دارا هستند. این این خصوصیات، به‌ویژه در تحلیل تغییرات رفتاری در بازه‌های مقیاسی مختلف، در حوزه‌های مختلفی از جمله تحلیل سیگنال، مالی، سری زمانی، زیست‌شناسی، زمین‌شناسی، و

آدرس الکترونیکی نویسنده مسئول مقاله: علیرضا پاک گوهر، a_pakgohar@pnu.ac.ir
کد موضوع‌بندی ریاضی (۲۰۱۰): 94A17,62B10,28A80.

[1] Fractal Signals
[2] Scaling Behavior
[3] Self-similarity

علوم شبکه به‌کار می‌رود (فتاحی و همکاران، ۱۳۸۸). تحلیل سیگنال‌های فرکتالی با استفاده از ابزارهای نظریه‌ی اطلاعات [۴] می‌تواند روش‌های سنتی تحلیل سیگنال (مثل تحلیل در حوزه‌ی زمان، فرکانس یا زمان–مقیاس) را تکمیل کند. برخی از این روش‌های سنتی عبارتند از: تحلیل نوسانات کاهش‌یافته [۵] (DFA) ، آماره‌ی بازه‌ی تغییرمقیاس‌شده [۶] (R/S) ، پریودوگرام [۷] و موجک‌ها [۸] . روش‌های مبتنی بر نظریه‌ی اطلاعات از قبیل آنتروپی [۹] و مدل‌های اندازه گیری مکمل آنتروپی از قبیل اکستروپی نه تنها به ما کمک می‌کنند که محتوای اطلاعاتی و پیچیدگی سیگنال‌های فرکتالی را اندازه‌گیری کنیم، بلکه می‌توانند به درک بهتری از این سیگنال‌ها منجر شوند برای مثال، می‌توانند مشخص کنند که یک سیگنال ایستا [۱۰] است یا غیرایستا [۱۱] ، حافظه‌ی کوتاه مدت یا بلند مدت دارد و حتی می‌توانند سیگنال‌ها را در یک محدوده‌ی مقیاسی خاص طبقه‌بندی کنند (پاچیکو، ۲۰۲۵). تحلیل موجک، به عنوان ابزاری قدرتمند برای تجزیه سیگنال‌ها، امکان استخراج ویژگی‌های محلی را فراهم می‌کند. در این راستا، تعریف تبدیل موجک گسسته برای سیگنال X_t به صورت زیر است:

تعریف ۱. تبدیل موجک سیگنال X_t برابر است با (پاچیکو، ۲۰۲۵):

$$d_X(j,k) = \int_{-\infty}^{\infty} X_t \psi_{j,k}(t)\, dt \tag{۱}$$

که در آن $d_X(j,k)$ نشان‌دهنده‌ی ضرایب موجک در مقیاس j و زمان k است و

$$\psi_{j,k}(t) = ۲^{-j/۲}\psi(۲^{-j}t - k)$$

تابع موجک مادر مقیاس‌شده، مشروط بر شرط پذیرش [۱۲] برای $\psi(t)$ است (واژنویتز و همکاران، ۲۰۱۶).

[4] Information Theory
[5] Detrended Fluctuation Analysis
[6] Rescaled Range Statistic
[7] Periodogram
[8] Wavelets
[9] Entropy
[10] Stationary
[11] Non-stationary
[12] Admissibility Condition

برای فرآیندهای تصادفی با میانگین صفر، امید ضرایب موجک صفر است:

$$\mathbb{E}[d_X(j,k)] = \mathbb{E}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} X_t \psi_{j,k}(t)\, dt\right\} = ۰$$

طیف موجک، معادل گشتاور دوم، به صورت

$$\mathbb{E}[d_X^۲(j,k)] = \int_{-\infty}^{\infty} S_X(۲^{-j} f)|\Psi(f)|^۲\, df \tag{۲}$$

تعریف می‌شود که در آن $S_X(f)$ چگالی طیف توان [۱۳] است (پاچیکو، ۲۰۲۵).

برای سیگنال‌های فرکتالی با پارامتر α، چگالی طیف توان فرآیندهای خودهمبسته به‌صورت $S_\alpha(f) \sim c|f|^{-\alpha}$ تعریف می‌شود. اگر این رابطه را در فرمول طیف موجک جایگزین کنیم، طیف موجک برای سیگنال‌های فرکتالی به‌صورت رابطه (۳) به‌دست می‌آید (زوزینو و همکاران، ۲۰۰۶):

$$\mathbb{E}[d_X^۲(j,k)] = ۲^{j\alpha} C(\alpha,\psi) \tag{۳}$$

که در آن $C(\alpha,\psi)$ یک ثابت است که به پارامتر فرکتالی α و تابع موجک مادر $\psi(t)$ بستگی دارد.

در اینجا محاسبات ما روی انرژی موجک است. انرژی موجک p_j یک تابع احتمال است و در مقیاس j به‌صورت زیر تعریف می‌شود (پاچیکو، ۲۰۲۵)

$$p_j = \frac{\mathbb{E}[d_X^۲(j,k)]}{\sum_j \mathbb{E}[d_X^۲(j,k)]} \tag{۴}$$

در تجزیه و تحلیل موجک، j یک شاخص صحیح (که معمولاً از ۱ تا M در نظر گرفته می‌شود) سطح تجزیه را مشخص می‌کند؛ به‌طوری که $j = ۱$ مربوط به بالاترین فرکانس و ریزترین مقیاس است، و با افزایش j به سمت M فرکانس کاهش یافته و به برجسته‌ترین مقیاس (پایین‌ترین فرکانس) در $j = M$

[13] Power Spectral Density

می‌رسیم.

بر اساس تعریف رابطه (۳) برای رابطه (۲) و جایگذاری آن در رابطه (۴) و با در نظر گرفتن اینکه تابع $C(\alpha,\psi)$ مستقل از اندیس j است داریم خواهیم داشت:

$$p_j = \frac{۲^{j\alpha}C(\alpha,\psi)}{\sum_{j=۱}^{M} ۲^{j\alpha}C(\alpha,\psi)} = \frac{۲^{j\alpha}}{\sum_{j=۱}^{M} ۲^{j\alpha}}. \tag{۵}$$

از طرفی با توجه به خاصیت سری هندسی داریم:

$$\sum_{j=۱}^{M} ۲^{j\alpha} = ۲^{\alpha}\left(\frac{۱-۲^{\alpha M}}{۱-۲^{\alpha}}\right) \tag{۶}$$

لذا انرژی موجک برابر است با:

$$p_j = \frac{۲^{j\alpha}}{۲^{\alpha}\left(\frac{۱-۲^{\alpha M}}{۱-۲^{\alpha}}\right)} = ۲^{\alpha(j-۱)} \times \frac{۱-۲^{\alpha}}{۱-۲^{\alpha M}} \tag{۷}$$

که در آن M تعداد مقیاس‌های در نظر گرفته شده در یک سیگنال و α به‌عنوان پارامتر فرکتالیتی شناخته می‌شود. پارامتر M تعداد دفعات تجزیه سیگنال به سطوح متوالی—هر یک معادل یک دامنه فرکانسی متفاوت و فراهم‌کننده تحلیل چندمقیاسی—را نشان می‌دهد؛ بنابراین با افزایش M، نمایش سیگنال دقیق‌تر شده و ویژگی‌های ظریف‌تر آن ضبط می‌شوند. به‌طور معکوس، مقدار پایین‌تر M نمایش با وضوح پایین‌تر ارائه می‌دهد که بیشتر بر روندهای کلی متمرکز است.

پارامتر α نشان‌دهنده رفتار مقیاس‌پذیری و میزان بی‌نظمی یا پیچیدگی ساختارها است و معمولاً از طریق روش‌های خاصی مانند تحلیل شمارش جعبه‌ای [۱۴] تحلیل هورست [۱۵] یا تحلیل موجک تعیین می‌شود. همچنین، از این پارامتر به‌عنوان شاخصی برای توصیف خودهمبستگی بلندمدت و رفتار فرکتالی در داده‌ها استفاده می‌شود. لازم به ذکر است در بخش ۵ از تکنیک هورست برای شبیه‌سازی داده‌ها استفاده شده

[14] Box-Counting
[15] Harold Edwin Hurst

است.

چنانچه α منفی بشود، به‌معنای وجود ضدپایداری [۱۶] یا رفتار بازگشتی به میانگین [۱۷] است. در این حالت، سیگنال تمایل دارد نوسانات سریع و متناوبی را در مقیاس‌های مختلف از خود نشان دهد که ناشی از همبستگی خودکار منفی در تأخیرهای کوتاه [۱۸] (ضدهمبستگی [۱۹])است. این رفتار معمولاً در مدل‌های استاندارد کمتر دیده می‌شود اما در برخی سیستم‌های غیرخطی یا خاص ممکن است ظاهر شود.

مقدار α منفی در بازه $(-۱, ۰)$ به رفتارهای ایستا با حافظه کوتاه‌مدت اشاره دارند (پاچیکو، ۲۰۲۵). در ادامه به‌بررسی خصوصیات توزیع سیستم فرکتالی با مقدار α منفی که به آن سیستم فراکتالی بالا-فرکانس می‌گوییم می‌پردازیم. در بخش ۲ به‌بررسی خصوصیات توزیع انرژی موجک در سیستم‌های فراکتالی بالا-فرکانس پرداخته و در بخش ۳ به‌بررسی خصوصیات آنتروپی توزیع انرژی موجک سیستم فراکتالی بالا-فرکانس می‌پردازیم. در بخش ۴ اندازه اکستروپی و ویژگی‌های آن و در بخش ۵ یک مطالعه شبیه سازی داده روی توزیع انرژی فراکتال و اندازه های آنتروپی و اکستروپی موجک به ازای مقادیر مختلف M و α محاسبه شده‌اند.

۲ توزیع انرژی موجک سیستم فراکتالی بالا-فرکانس

یکی از مشخصه سازی‌های پارامتر α در توزیع انرژی موجک سیستم‌های فراکتالی بالا-فرکانس، تعیین شکل توزیع است. درگزاره (۱) رفتار توزیع نسبت به پارامتر α و هم توزیعی تابع انرژی موجک سیستم فراکتالی بالا-فرکانس با توزیع هندسی بریده شده به‌ازای مقادیر منفی پارامتر α بررسی شده‌است.

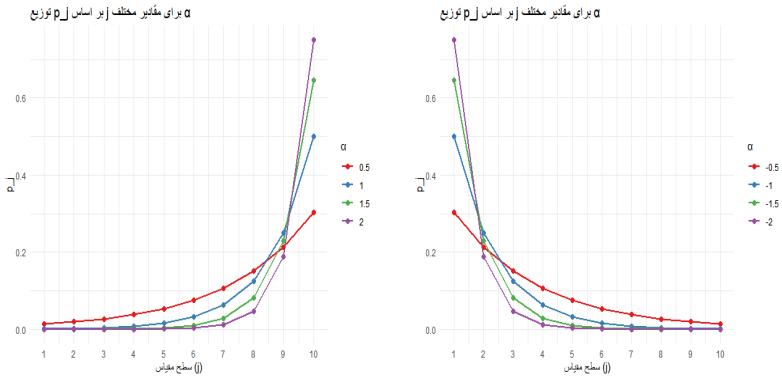
تذکر ۱. تابع احتمال p_j (توزیع انرژی موجک) برای سیستم‌های فراکتالی بالا-فرکانس با پارامتر $\alpha < ۰$ نزولی و برای $\alpha > ۰$ صعودی است.

برهان: با فرض اینکه نسبت مقادیر متوالی p_j و $p_{j+۱}$ به‌صورت $\frac{p_{j+۱}}{p_j} = ۲^{\alpha}$ تعریف شده باشد، رفتار توالی $\{p_j\}$ کاملاً توسط پارامتر $\alpha \in \mathbb{R}$ تعیین می‌شود. به‌وضوح:

[16] Anti-persistence
[17] Mean-reverting
[18] Negative Autocorrelation at Short Lags
[19] Anticorrelation

- اگر $\alpha > ۰$، آنگاه $۲^{\alpha} > ۱$ و در نتیجه $p_{j+۱} > p_j$؛
- اگر $\alpha < ۰$، آنگاه $۲^{\alpha} < ۱$ و در نتیجه $p_{j+۱} < p_j$؛
- و در حالت مرزی $\alpha = ۰$، داریم $۲^{\alpha} = ۱$ و لذا $p_{j+۱} = p_j$.

شکل (۱) نشان می‌دهد رفتار توزیع انرژی موجک نسبت به مقدار پارامتر α متقارن است.



(الف) (ب)

شکل ۱: توزیع p_j بر اساس j برای مقادیر مختلف $\alpha < ۰$، ب- توزیع p_j بر اساس j برای مقادیر مختلف $\alpha > ۰$

گزاره ۱. در یک سیستم فرکتالی بالا-فرکانس، انرژی موجک p_j از توزیع هندسی بریده شده با احتمال شکست $p = ۱ - ۲^{\alpha}$ و نقطه بریده شده M پیروی می‌کند

برهان: با فرض $\alpha < ۰$ و تغییر متغیر $۰ < p = ۱ - ۲^{\alpha} < ۱$ و $۰ < q = ۱ - p = ۲^{\alpha} < ۱$ داریم $P(X = j) = q^{j-۱}p, X = ۱, ۲, \cdots$ و $P(X \leq M) = ۱ - q^{M}$.

از سویی طبق تعریف توزیع بریده شده گذشته نگر (دی کریزنزو و لانگوباردی،۲۰۰۵) داریم:

$$f_M(j) = P(X = j \| X \leq M) = \frac{f_X(x)}{F_X(M)}. \tag{۸}$$

که در آن $f_X(j)$ تابع جرم احتمال و $F_X(M)$ تابع توزیع متغیر تصادفی X در نقطه M هستند.

فرض کنید X یک متغیر تصادفی با توزیع هندسی با پارامتر p باشد، به‌عبارتی:

$$P(X=j)=q^{j-۱}p, \quad j=۱,۲,۳,\cdots,$$

و تابع توزیع تجمعی در نقطه M (که یک عدد صحیح مثبت است) برابر است با:

$$F_X(M)=P(X\leq M)=\sum_{j=۱}^{M}q^{j-۱}p=p\cdot\frac{۱-q^M}{۱-q}=۱-q^M,$$

که در آن $q=۱-p$ اکنون طبق معادله (۸) برای $j=۱,۲,\cdots,M$ داریم:

$$f_M(j)=P(X=j\mid X\leq M)=\frac{f_X(j)}{F_X(M)}=\frac{P(X=j)}{P(X\leq M)}=\frac{q^{j-۱}p}{۱-q^M}. \qquad (۹)$$

تذکر ۲. امید ریاضی X در توزیع بریده شده گذشته نگر هندسی برابر است با:

$$E(X\mid X\leq M)=\frac{۱-(M+۱)q^M+Mq^{M+۱}}{p(۱-q^M)} \qquad (۱۰)$$

برهان: طبق تعریف امید ریاضی داریم:

$$\begin{aligned}E(X\mid X\leq M)&=\sum_{x=۱}^{M}x\cdot P(X=x\mid X\leq M)\\&=\sum_{x=۱}^{M}x\cdot\frac{q^{x-۱}p}{۱-q^M}=\frac{p}{۱-q^M}\sum_{x=۱}^{M}xq^{x-۱}. \qquad (۱۱)\end{aligned}$$

از طرفی داریم:

$$\sum_{x=۱}^{M} q^x = q \cdot \frac{۱ - q^M}{۱ - q}.$$

این در حالی است که:

$$\sum_{x=۱}^{M} x q^{x-۱} = \frac{۱ - (M+۱)q^M + M q^{M+۱}}{(۱-q)^۲}.$$

لذا برای امید شرطی متغیر تصادفی هندسی با شرط $X \leq M$ داریم:

$$\begin{aligned} E(X \mid X \leq M) &= \frac{p}{۱ - q^M} \cdot \frac{۱ - (M+۱)q^M + M q^{M+۱}}{p^۲} \\ &= \frac{۱}{۱ - q^M} \cdot \frac{۱ - (M+۱)q^M + M q^{M+۱}}{p}, \end{aligned} \tag{۱۲}$$

که پس از خلاصه سازی رابطه (۱۰) به‌دست می‌آید.

گزاره ۲. تابع مولد گشتاور توزیع انرژی موجک سیستم فراکتالی بالا–فرکانس برابر است با:

$$M_J(t) = \frac{(۱ - ۲^\alpha)e^t}{۱ - ۲^{\alpha M}} \times \frac{(۲^\alpha e^t)^M - ۱}{۲^\alpha e^t - ۱}. \tag{۱۳}$$

برهان: طبق تعریف تابع مولد گشتاور داریم:

$$M_J(t) = \sum_{j=۱}^{M} \frac{p q^{j-۱}}{۱ - q^M} e^{tj} = \frac{p e^t}{۱ - q^M} \sum_{j=۱}^{M} (e^t q)^{j-۱} = \frac{p e^t}{۱ - q^M} \times \frac{(q e^t)^M - ۱}{q e^t - ۱}$$

بنابراین مطابق گزاره (۱) و تغییر متغیر $p = ۱ - ۲^\alpha$ و $q = ۱ - p$ رابطه (۱۳) ثابت می‌شود.

فرع ۱. امید ریاضی انرژی موجک سیستم فراکتالی بالا-فرکانس برابر است با

$$E(J) = ۱ + \frac{۲^{\alpha}\big((M-۱)۲^{\alpha M} - M۲^{\alpha(M-۱)+۱}\big)}{۱-۲^{\alpha}}. \tag{۱۴}$$

$$E(J) = ۱ + \frac{q\big((M-۱)q^{M} - Mq^{M-۱} + ۱\big)}{p(۱-q^{M})}. \tag{۱۵}$$

برهان: با استفاده از خاصیت تابع مولد گشتاور و مشتق گیری از سمت راست معادله (۱۳) نسبت به t خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} M'_J(t) &= \frac{(۱-۲^{\alpha})e^{t}}{۱-۲^{\alpha M}} \times \frac{(۲^{\alpha}e^{t})^{M}-۱}{۲^{\alpha}e^{t}-۱} \\ &+ \frac{M۲^{M\alpha}e^{t(M-۱)}(۲^{\alpha}e^{t}-۱) - ۲^{\alpha}e^{t}((۲^{\alpha}e^{t})^{M}-۱)}{(۲^{\alpha}e^{t}-۱)^{۲}} \frac{(۱-۲^{\alpha})e^{t}}{۱-۲^{\alpha M}}. \end{aligned} \tag{۱۶}$$

که به‌ازای $t = ۰$ امید ریاضی انرژی موجک برابر است با

$$E(J) = \frac{۱-۲^{\alpha}}{۱-۲^{\alpha M}} \times \frac{۲^{M\alpha}-۱}{۲^{\alpha}-۱} + \frac{M۲^{M\alpha}(۲^{\alpha}-۱) - ۲^{\alpha}(۲^{M\alpha}-۱)}{(۲^{\alpha}-۱)^{۲}} \frac{(۱-۲^{\alpha})}{۱-۲^{\alpha M}} \tag{۱۷}$$

با خلاصه سازی رابطه بالا خواهیم داشت:

$$E(J) = ۱ + \frac{۲^{\alpha}\big((M-۱)۲^{\alpha M} - M۲^{\alpha(M-۱)+۱}\big)}{۱-۲^{\alpha}}. \tag{۱۸}$$

با جایگذاری $p = ۱ - ۲^{\alpha}$ و $q = ۱ - p = ۲^{\alpha}$ امید ریاضی انرژی موجک سیستم فرکتالی تحت توزیع هندسی به‌صورت تابع (۱۵) به‌دست خواهد آمد.

فرع ۲. تابع نرخ خطر [۲۰] و نرخ خطر معکوس [۲۱] انرژی موجک سیستم فراکتالی بازگشتی به‌ترتیب برابرند با

$$HR(J) = \frac{f_M(j)}{\bar{F}_M(j)} = \frac{\frac{pq^{j-۱}}{۱-q^M}}{\frac{q^j-q^M}{۱-q^M}} = \frac{p}{q(۱-q^{j-M})} = \frac{۱-۲^{\alpha}}{۲^{\alpha}(۱-۲^{\alpha(j-M)})}. \qquad (۱۹)$$

$$RHR(J) = \frac{f_M(j)}{F_M(j)} = \frac{\frac{pq^{j-۱}}{۱-q^M}}{\frac{۱-q^j}{۱-q^M}} = \frac{pq^{j-۱}}{۱-q^j} = \frac{(۱-۲^{\alpha})۲^{\alpha(j-۱)}}{۱-۲^{\alpha j}}. \qquad (۲۰)$$

فرع ۳. تابع چندکی و تابع احتمال چندکی متغیر تصادفی انرژی موجک در سیستم فراکتالی بالا-فرکانس به‌ترتیب برابرند با:

$$Q(u) = \frac{\ln\left(۱-(۱-q^M)u\right)}{\ln(q)} = \frac{\ln\left(۱-(۱-۲^{\alpha M})u\right)}{\alpha\ln(۲)}. \qquad (۲۱)$$

$$q(u) = \frac{-(۱-q^M)}{(۱-(۱-q^M)u)\ln(q)} = \frac{-(۱-۲^{\alpha M})}{(۱-(۱-۲^{\alpha M})u)\alpha\ln(۲)}. \qquad (۲۲)$$

۱.۲ توزیع های تقریب متغیر تصادفی انرژی موجک سیستم فراکتالی بالا-فرکانس

در این بخش توزیع های تقریب متغیر تصادفی انرژی موجک سیستم فراکتالی بالا-فرکانس به ازای حالات خاص مقادیر α و M به دست آمده است: گزاره (۳) نشان می‌دهد، انرژی موجک در سیستم فراکتالی بالا-فرکانس به ازای $M \to \infty$ همگرایی توزیعی به توزیع هندسی دارد و کاهش نمایی رفتار انرژی را در سطوح بالاتر موجک، متناظر با خصوصیات مقیاس‌پذیری سیستم‌های فراکتالی، نشان می‌دهد. در گزاره (۴) نشان داده شده است، انرژی موجک در سیستم فراکتالی بالا-فرکانس به ازای $\alpha \to ۰^-$

[20] Hazarad rate (HR)
[21] Rversed Hazarad rate (RHR)

همگرایی توزیعی به توزیع یکنواخت گسسته با پارامتر M دارد. به عبارتی وابستگی توزیع به j از بین رفته و همه سطوح انرژی موجک دارای احتمال یکسان می‌شوند که نشان‌دهنده رفتار یکنواخت و بدون ساختار مقیاس‌پذیر غالب در سیستم است. گزاره (۵) نشان داده است انرژی موجک در سیستم فراکتالی بالا-فرکانس به ازای $\alpha \to \infty$ همگرایی توزیعی به توزیع ثابت در نقطه $j = ۱$ همگرایی دارد و رفتار انرژی در یک نقطه متمرکز شده است.

گزاره ۳. تابع جرم احتمال انرژی موجک در سیستم‌های فراکتالی بالا-فرکانس، $f_M(j)$ به ازای $M \to \infty$ به توزیع هندسی استاندارد با پارامتر $q = ۱ - p = ۲^{\alpha}$ همگرا می‌شود:

$$\lim_{M\to\infty} f_M(j) = q^{j-۱}p \quad \text{برای} j \in \mathbb{N},$$

برهان: بدیهی است به ازای $\alpha < ۰$ و $M \to infty$ داریم $q^M = ۲^{M\alpha} \to ۰$ بنابراین

$$f_M(j) = \frac{q^{j-۱}p}{۱ - q^M} \to q^{j-۱}p$$

گزاره ۴. تابع جرم احتمال انرژی موجک در سیستم‌های فراکتالی بالا-فرکانس، $f_M(j)$ به ازای $\alpha \to ۰$ به توزیع یکنواخت با پارامتر M همگرا می‌شود.

$$\lim_{\alpha\to ۰^-} f_M(j) = \frac{۱}{M} \quad j = ۱, ۲, \ldots, M.$$

برهان: بدیهی است به ازای $\alpha \to -۰$ داریم $q = ۲^{\alpha} \to ۱^-$ از طرفی طبق بسط تیلور داریم: $۱ - q^M \simeq M(۱ - q)$. بنابراین

$$f_M(j) = \frac{q^{j-۱}p}{۱ - q^M} \simeq \frac{q^{j-۱}}{M} \simeq \frac{۱}{M}.$$

گزاره ۵. تابع جرم احتمال انرژی موجک در سیستم‌های فراکتالی بالا-فرکانس، $f_M(j)$ به ازای $\alpha \to$

$-\infty$ به توزیع ثابت در نقطه $j = ۱$ همگرا می‌شود:

$$\lim_{\alpha \to -\infty} f_M(j) = ۲^{\alpha(j-۱)} \quad j = ۱, ۲, \ldots, M. \tag{۲۳}$$

برهان: با توجه به اینکه $\alpha \to -\infty \quad \Longrightarrow \quad q = ۲^{\alpha} \to ۰^{+}$, داریم

$$f_M(۱) = \frac{۱-q}{۱-q^M} \xrightarrow[q \to ۰^{+}]{} ۱, \qquad f_M(j) = \frac{q^{j-۱}(۱-q)}{۱-q^M} \xrightarrow[q \to ۰^{+}]{} ۰ \quad (j \geq ۲).$$

بنابراین تابع توزیع تجمعی $F_M(k) = \sum_{j=۱}^{\min(k,M)} f_M(j)$ در حدّ $q \to ۰^{+}$ برابر است با

$$\lim_{q \to ۰^{+}} F_M(k) = \begin{cases} ۰, & k < ۱, \\ ۱, & k \geq ۱. \end{cases}$$

از این رو تقریب توزیع انرژی موجک سیستم بالا-فرکانس برابر توزیع ثابت در $j = ۱$ می‌یابد.

۳ آنتروپی موجک

آنتروپی به‌عنوان یک معیار سنجش بی نظمی کاربردهای بسیاری در نظریه اطلاعات دارد. مشهورترین اندازه آنتروپی موسوم به آنتروپی شانون به‌صورت زیر تعریف شده‌است:

$$\mathcal{H}(X) = -\sum p(x) \ln(p(x)) \tag{۲۴}$$

در این تعریف، اندازه آنتروپی به‌صورت کمی، میزان عدم قطعیت سیستم احتمالی $\{X; p(x)\}$ را اندازه‌گیری می‌کند. لازم به‌ذکر است که در بحث نظریه اطلاعات شانون، منظور از اطلاعات در واقع محتوای اطلاعات است که به‌میزان اطلاعاتی که توسط نتیجه‌ی x_i و بر اساس احتمال آن، یعنی $p(x_i)$ منتقل یا در آن ذخیره می‌شود، اشاره دارد (هوانگ و اینسترومنتز، ۲۰۲۵).

از آنجا که در اینجا آنتروپی روی توزیع احتمالی موجک بررسی شده است آنتروپی موجک نامیده می‌شود. آنتروپی موجک در موضوعات متنوعی مورد استفاده قرار گرفته است (آشورزاده مقری و بیگلری فدافن، ۱۴۰۰). با توجه به تعریف آنتروپی شانون (۲۴) و تابع انرژی موجک (۹)، آنتروپی موجک برابر است با (پاچیکو، ۲۰۲۵):

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(W) &= -\sum_{j=1}^{M}\left(2^{\alpha(j-1)}\times\frac{1-2^{\alpha}}{1-2^{\alpha M}}\right)\ln\left(2^{\alpha(j-1)}\times\frac{1-2^{\alpha}}{1-2^{\alpha M}}\right)\\ &= -\sum_{j=1}^{M}\left(2^{\alpha(j-1)}\times\frac{1-2^{\alpha}}{1-2^{\alpha M}}\right)\left[\alpha(j-1)\ln 2+\ln\left(\frac{1-2^{\alpha}}{1-2^{\alpha M}}\right)\right]\\ &= \alpha\left\{\frac{1}{1-2^{-\alpha}}-\frac{M}{1-2^{-\alpha M}}\right\}-\ln 2\left\{\frac{1-2^{\alpha}}{1-2^{\alpha M}}\right\} \qquad (25)\end{aligned}$$

گزاره ۶. آنتروپی انرژی موجک در یک سیستم فرکتالی بالا–فرکانس برابر است با

$$\mathcal{H}(W)=\ln(\frac{1-2^{\alpha M}}{1-2^{\alpha}})-\alpha\ln(2)(\frac{(M-1)2^{\alpha M}-M2^{\alpha(M-1)+1}}{1-2^{\alpha M}}\frac{2^{\alpha}}{1-2^{\alpha}}) \qquad (26)$$

برهان: طبق تعریف تابع هندسی گذشته نگر و تعریف آنتروپی شانون در رابطه (۲۴) داریم

$$\mathcal{H}(W)=-\sum_{J=1}^{M}\frac{pq^{j-1}}{1-q^{M}}\ln\left(\frac{pq^{j-1}}{1-q^{M}}\right) \qquad (27)$$

که با ساده سازی داریم

$$\mathcal{H}(W)=-\ln(\frac{p}{1-q^{M}})\sum_{J=1}^{M}\frac{pq^{j-1}}{1-q^{M}}-\sum_{J=1}^{M}\frac{pq^{j-1}}{1-q^{M}}(j-1)\ln(q). \qquad (28)$$

بنابراین

$$\mathcal{H}(W) = \ln(\frac{1-q^M}{p}) + (1 - E(J))\ln(q) \tag{۲۹}$$

با توجه مقدار $E(J)$ در رابطه (۱۵) و جایگذاری در رابطه (۲۹) خواهیم داشت

$$\mathcal{H}(W) = \ln(\frac{1-q^M}{p}) + \ln(q)(\frac{q}{p}\frac{-(M-1)q^M + Mq^{M-1} - 1}{1-q^M}) \tag{۳۰}$$

با جایگذاری $q = 2^\alpha$ خواهیم داشت رابطه (۲۶) به‌دست می‌آید.

تذکر ۳. به‌ازای $M = 1$ در رابطه (۲۵) آنتروپی موجک برابر صفر می‌شود.

گزاره ۷. آنتروپی موجک سیگنال فرکتالی بالا-فرکانس با پارامتر فرکتالی $\alpha \in (-\infty, 0)$ در تعداد بی‌نهایت مقیاس ($M \to \infty$) به طور تقریبی برابر است با

$$\mathcal{H}(W) = -\frac{q\ln(q)}{p} - \ln(p). \tag{۳۱}$$

برهان: با توجه به آنکه در گزاره (۳) تابع جرم احتمال توزیع انرژی موجک سیگنال فرکتالی بالا-فرکانس به ازای $M \to \infty$ به توزیع هندسی همگرا است بنابراین آنتروپی شانون موجک سیگنال فرکتالی بالا-فرکانس تقریبا با آنتروپی توزیع هندسی همگرا است که برابر است با

$$H(X) = -\sum_{j=1}^{\infty}(q^{j-1}p)\ln(q^{j-1}p) = -\ln(q)\sum_{j=1}^{\infty}(q^{j-1}p)(j-1) - \ln(p). \tag{۳۲}$$

از طرفی با توجه به اینکه میانگین توزیع هندسی برابر است با : $E(J) = \frac{1}{p}$ خواهیم داشت:
$\sum_{j=1}^{\infty}(q^{j-1}p)(j-1) = \frac{1}{p} - 1 = \frac{q}{p}$ بنابراین رابطه (۳۲) برابر است با رابطه (۳۱) و اثبات کامل است.

گزاره (۸) نشان می‌دهد چنانچه پارامتر فراکتالی به سمت صفر میل کند. آنتروپی موجک در سیستم‌های

فراکتالی بالا–فرکانس دارای حداکثر آنتروپی است زیرا توزیع یکنواخت بیشترین آنتروپی ممکن را در بین تمام توزیع‌هایی که روی M نتیجه ممکن تعریف شده‌اند، دارد.

گزاره ۸. آنتروپی موجک در سیستم‌های فراکتالی بالا–فرکانس، به ازای $\alpha \to 0$ به طور تقریبی برابر است با

$$\mathcal{H}(W) = \ln(M). \tag{۳۳}$$

برهان: با توجه به آنکه در گزاره (۴) تابع جرم احتمال توزیع انرژی موجک سیگنال فرکتالی بالا–فرکانس به ازای $\alpha \to 0^-$ به توزیع یکنواخت همگرا است بنابراین آنتروپی شانون موجک سیگنال فرکتالی بالا–فرکانس تقریبا با آنتروپی توزیع یکنواخت گسسته همگرا است که برابر است با

$$H(X) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\ln(M)}{M} = \ln(M). \tag{۳۴}$$

گزاره (۹) نشان داده است به ازای $\alpha \to -\infty$ رفتار توزیع موجک در سیستم‌های فراکتالی بالا–فرکانس، یک رفتار کاملاً قطعی است و هیچ تصادفی در کار نیست.

گزاره ۹. به ازای $\alpha \to -\infty$ آنتروپی موجک سیستم فراکتالی بالا–فرکانس، به طور تقریبی صفر است.

برهان: با توجه به آنکه در گزاره (۵) تابع جرم احتمال توزیع انرژی موجک سیگنال فرکتالی بالا–فرکانس به ازای $\alpha \to -\infty$ به توزیع ثابت همگرا است بنابراین با توجه به اینکه در این توزیع تمام احتمال روی یک مقدار واحد متمرکز شده است آنتروپی شانون موجک سیگنال فرکتالی بالا–فرکانس صفر خواهد شد.

۴ اکستروپی موجک

اخیراً مفهوم اکستروپی به‌عنوان دوگانه مکمل آنتروپی شانون مطرح شده‌است. اکستروپی موجک، مفهوم استاندارد دامنه زمانی اکستروپی را به دامنه مقیاس–زمانی گسترش می‌دهد. در این مطالعه اندازه اکستروپی

موجک برای سیگنال‌های فراکتال بالا–فرکانس با مقدار پارامتر α منفی به‌دست می‌آورد.
با توجه به تعریف (لد و همکاران، ۲۰۱۵) اندازه اکستروپی برای یک توزیع گسسته برابر است با:

$$\mathcal{J}(X) = -\sum (1 - p(x)) \ln(1 - p(x)),$$

که در آن $p(x)$ احتمال موفقیت تعریف و به‌اختصار p نشان داده می‌شود. اکستروپی تابع انرژی موجک یک اندازه گذشته نگر بوده (یوسف زاده و پاک گوهر ، ۲۰۲۲) و مشابه اثبات گزاره (۶) برابر است با

$$\mathcal{J}(W) = -\sum_{J=1}^{M} \left(1 - \frac{q^{j-1}p}{1 - q^M}\right) \ln\left(1 - \frac{q^{j-1}p}{1 - q^M}\right). \tag{۳۵}$$

با استفاده از تقریب تابع لگاریتم $\ln(1 - X) = -\frac{1}{\ln(2)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{X^n}{n}$ رابطه (۳۵) برابر است با

$$\mathcal{J}(W) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{J=1}^{M} \left(1 - \frac{q^{j-1}p}{1 - q^M}\right) \frac{q^{(j-1)n} p^n}{n \ln(2)(1 - q^M)^n}. \tag{۳۶}$$

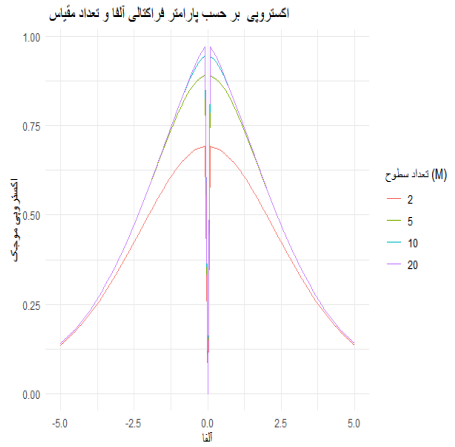
که در آن $q = 1 - p$ احتمال شکست نامیده مي شود. از طرفی برای مجموع سری هندسی متناهی داریم:

$$\sum_{j=1}^{M} q^{(j-1)n} = \frac{1 - q^{Mn}}{1 - q^n} \qquad \text{و} \qquad \sum_{j=1}^{M} q^{(j-1)(n+1)} = \frac{1 - q^{M(n+1)}}{1 - q^{n+1}}.$$

بنابراین داریم

$$\begin{aligned}\mathcal{J}(W) &= \frac{1}{\ln(2)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(1 - q^{Mn}) p^n}{(1 - q^n) n (1 - q^M)^n} - \frac{(1 - q^{M(n+1)}) p^{n+1}}{n (1 - q^M)^{n+1} (1 - q^{n+1})} \right) \\ &= \frac{1}{\ln(2)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - 2^{\alpha})^n}{n (1 - 2^{\alpha M})^n} \left[\frac{1 - 2^{\alpha M n}}{1 - 2^{\alpha n}} - \frac{(1 - 2^{\alpha M(n+1)})(1 - 2^{\alpha})}{(1 - 2^{\alpha M})(1 - 2^{\alpha(n+1)})} \right]. \end{aligned} \tag{۳۷}$$

شکل (۲) رفتار تابع اکستروپی روی توزیع انرژی موجک را نشان می‌دهد. همانطور که نشان داده شده است، اکستروپی نسبت به مقدار پارامتر α متقارن است.



شکل ۲: تغییرات اکستروپی موجک بر اساس پارامتر فرکتالی α و تعداد سطوح M

تذکر ۴. با جایگذاری $M = ۱$ در رابطه (۳۷) آنگاه اندازه اکستروپی موجک صفر می‌شود.

گزاره ۱۰. اکستروپی موجک سیگنال فرکتالی بالا–فرکانس با پارامتر فرکتالی $\alpha \in (-\infty, ۰)$ در تعداد بی‌نهایت مقیاس $(M \to \infty)$ به اکستروپی توزیع هندسی همگرا و برابر است با:

$$\mathcal{J}(W) = \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{p^n}{n} \left[\frac{۱}{۱ - q^n} - \frac{p}{۱ - q^{n+۱}}. \right] \tag{۳۸}$$

برهان: با توجه به گزاره (۳) توزیع انرژی موجک سیگنال فرکتالی بالا–فرکانس در تعداد بی‌نهایت مقیاس $(M \to \infty)$ به توزیع هندسی همگرا است. اکستروپی توزیع هندسی برابر است با

$$J(X) = -\sum_{j=۱}^{\infty} \left(۱ - q^{j-۱}p\right) \ln(۱ - q^{j-۱}p). \tag{۳۹}$$

با استفاده از بسط تیلور برای لگاریتم طبیعی:

$$\ln(1-pq^{j-1}) = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(pq^{j-1})^n}{n} = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{p^n q^{n(j-1)}}{n}$$

رابطه (۳۹) معادل است با:

$$J(X) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{p^n}{n}\left[\sum_{j=1}^{\infty}(1-pq^{j-1})q^{n(j-1)},\right] \tag{۴۰}$$

از طرفی

$$\sum_{j=1}^{\infty}(1-pq^{j-1})q^{n(j-1)} = \sum_{j=1}^{\infty}q^{n(j-1)} - p\sum_{j=1}^{\infty}q^{(n+1)(j-1)}, \tag{۴۱}$$

با استفاده از جمع سری‌های هندسی

$$\sum_{j=1}^{\infty}q^{n(j-1)} = \frac{1}{1-q^n}, \qquad \sum_{j=1}^{\infty}q^{(n+1)(j-1)} = \frac{1}{1-q^{n+1}},$$

داریم

$$\sum_{j=1}^{\infty}(1-p\,q^{j-1})\,q^{n(j-1)} = \frac{1}{1-q^n} - \frac{p}{1-q^{n+1}}. \tag{۴۲}$$

با جایگذاری رابطه (۴۲) در رابطه (۳۹) منجر به رابطه (۳۸) شده و اثبات را کامل می‌کند.

گزاره ۱۱. اکستروپی موجک در سیستم‌های فراکتالی بالا- فرکانس، به ازای $\alpha \to 0$ به طور تقریبی برابر

است با

$$\mathcal{J}(W) = (M-۱)\ln(\frac{M}{M-۱}). \tag{۴۳}$$

برهان: با توجه به آنکه در گزاره (۴) تابع جرم احتمال توزیع انرژی موجک سیگنال فرکتالی بالا-فرکانس به ازای $\alpha \to ۰^-$ به توزیع یکنواخت همگرا است بنابراین اکستروپی شانون موجک سیگنال فرکتالی بالا-فرکانس تقریبا با آنتروپی توزیع یکنواخت گسسته همگرا است که برابر است با

$$J(X) = -\sum_{j=۱}^{M}(۱-\frac{۱}{M})\ln(۱-\frac{۱}{M}) = (M-۱)\ln(\frac{M}{M-۱}). \tag{۴۴}$$

بنابراین اثبات کامل است.

گزاره ۱۲. به ازای $\alpha \to -\infty$ اکستروپی موجک سیستم فراکتالی بالا-فرکانس، همگرا به صفر است.

برهان: با توجه به رابطه (۲۳)، اکستروپی موجک به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathcal{J}(W) = -\sum_{j=۱}^{M}\left(۱-۲^{\alpha(j-۱)}\right)\ln\left(۱-۲^{\alpha(j-۱)}\right). \tag{۴۵}$$

برای بررسی رفتار این تابع در حالت حدی $\alpha \to -\infty$ حد کل عبارت را محاسبه می‌کنیم. چون مجموع دارای تعداد متناهی M جمله است، می‌توانیم حد را به داخل مجموع منتقل کنیم:

$$\lim_{\alpha\to-\infty}\mathcal{J}(W) = -\sum_{j=۱}^{M}\lim_{\alpha\to-\infty}\left[\left(۱-۲^{\alpha(j-۱)}\right)\ln\left(۱-۲^{\alpha(j-۱)}\right)\right]. \tag{۴۶}$$

از طرفی به ازای $j=۱$ عبارت داخل حد به صورت $(۱-۲^{۰})\ln(۱-۲^{۰}) = ۰\times\ln(۰)$ است که

یک حالت نامعین است. با استفاده از قاعده هوپیتال می‌دانیم که:

$$\lim_{\alpha\to-\infty}\left(۱-۲^{\alpha(۱-۱)}\right)\ln\left(۱-۲^{\alpha(۱-۱)}\right)=\lim_{\alpha\to-\infty}(۱-۱)\ln(۱-۱)=۰.$$

برای $j\geq ۲$ به طور واضح داریم: $\lim_{\alpha\to-\infty}۲^{\alpha(j-۱)}=۰$. با جایگذاری این حد در عبارت اصلی، داریم:

$$\lim_{\alpha\to-\infty}\left(۱-۲^{\alpha(j-۱)}\right)\ln\left(۱-۲^{\alpha(j-۱)}\right)=(۱-۰)\ln(۱-۰)=۱\times\ln(۱)=۰.$$

بنابراین، مقدار حد نهایی اکستروپی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\lim_{\alpha\to-\infty}\mathcal{J}(W)=-\sum_{j=۱}^{M}۰=۰. \tag{۴۷}$$

و اثبات کامل است.

۵ نتایج عددی و اعتبارسنجی با سیگنال‌های فراکتالی مصنوعی

برای بررسی رفتار شاخص‌های موجک در سیگنال‌های با ویژگی‌های فراکتالی مختلف، مجموعه‌ای از سیگنال‌های حرکت براونی کسری [۲۲] با پارامترهای اسکالینگ متنوع تولید شد. پارامتر α که مشخصه‌ای کلیدی در توصیف رفتار مقیاس‌پذیر سیگنال‌ها محسوب می‌شود، در بازه‌ای از مقادیر منفی (نشان‌دهنده رفتار ضدپایدار) تا مقادیر مثبت (نشان‌دهنده رفتار پایدار) انتخاب گردید.
روابط تبدیل بین پارامتر α و پارامتر هورست (H) به صورت $H=\frac{\alpha+۱}{۲}$ تعریف می‌شود که در آن H پارامتر هورست بوده و دامنه تغییرات آن بین ۰ تا ۱ است.

[22] Fractional Brownian Motion (fBm)

۱.۵ روش‌های تولید سیگنال

به منظور اطمینان از قابلیت اطمینان نتایج، سه روش مختلف برای تولید سیگنال‌های (fBm) پیاده‌سازی شد:

به همین منظور از کتابخانه تخصصی $NMOF$ استفاده شد. همچنین برای تولید سیگنال‌های fBm تابع $fbmSim$ به کار رفت. همچنین به منظور تولید نویز گوسی سفید و اعمال وزن‌دهی مبتنی بر پارامتر هورست و محاسبه جمع تجمعی سیگنال وزن‌دار شده از رابطه $x(t) = \sum_{i=۱}^{t} w(i) \cdot \epsilon(i)$ استفاده شد. در این روش، $\epsilon(i)$ یک نویز گوسی سفید با توزیع $N(۰, ۱)$ است و وزن‌های $w(i)$ متناسب با پارامتر هورست به صورت $w(i) = i^{H۱/۲}$ تعریف می‌شوند.

روش طیف توان فراکتالی تولید سیگنال در حوزه فرکانس با طیف توان متناسب با تابع $f^{-۲H-۱}$ و اعمال فازهای تصادفی و تبدیل فوریه معکوس برای بازگشت به حوزه زمان بود.

۲.۵ پارامترهای شبیه‌سازی

به‌منظور ارائه یک مثال شبیه سازی در این بخش، سیگنال‌های فراکتالی با استفاده از fBm تولید شدند که پارامتر فراکتالی α (مربوط به توان طیفی $S(f) \sim f^{-\alpha}$) را کنترل می‌کند. رابطه بین پارامتر هورست H و α برابر است با: $H = \frac{\alpha+۱}{۲}$. سیگنال‌ها با طول $N = ۱۰,۰۰۰$ و به ازای $\alpha = \{-۳, -۲, -۱, -۰/۵, -۰/۳, -۰/۱, ۰/۱, ۰/۳, ۰/۵, ۱, ۲, ۳\}$ تولید شدند. تجزیه موجک با استفاده از موجک $Haar$ و در سطوح $M = \{۳, ۵, ۷\}$ انجام شد.

انرژی هر سطح j از ضرایب موجک بر اساس فرمول: $E_j = \sum_k |d_j(k)|^۲$ محاسبه گردید. به منظور نرمال سازی تابع احتمال $p_j = E_j / \sum_{j=۱}^{M} E_j$ استخراج شد. و آنتروپی و اکستروپی موجک با استفاده از توابع زیر محاسبه شدند :

آنتروپی موجک: $H(W) = -\sum_{j=۱}^{M} p_j \ln p_j$

اکستروپی موجک: $J(W) = -\sum_{j=۱}^{M} (۱ - p_j) \ln(۱ - p_j)$

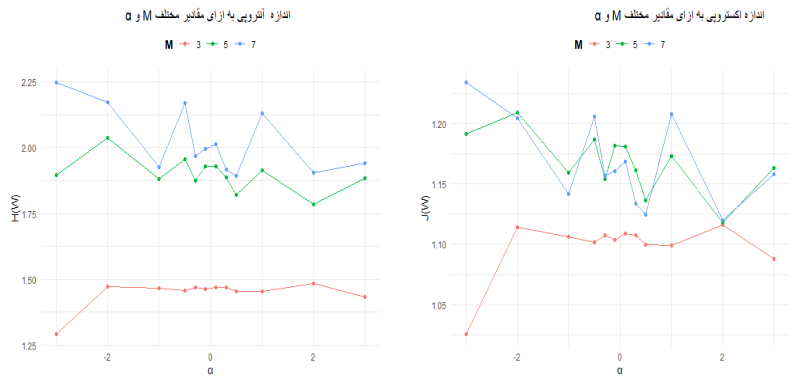
تمامی شبیه‌سازی‌ها در محیط R نسخه ۱.۲.۴ و با استفاده از بسته‌های تخصصی $waveslim$ برای تجزیه موجک و $NMOF$ برای تولید سیگنال‌های فراکتالی انجام شد.

۳.۵ نتایج شبیه سازی

جدول (۱) مقادیر محاسبه‌شده آنتروپی شانون $H(W)$ و اکستروپی $J(W)$ را برای تابع انرژی موجک P_j تحت پارامترهای مختلف α و سطوح تجزیه M ارائه می‌دهد. شکل (۳) رفتار اکستروپی و رفتار آنتروپی شانون را به ازای مقادیر M و α نشان می‌دهند. باتوجه به نتایج شبیه‌سازی‌های انجام‌شده، رابطه سیستماتیکی بین پارامتر α و شاخص‌های آنتروپی موجک $(H(W))$ و اکستروپی موجک $(J(W))$ مشاهده نمی‌شود. با افزایش تعداد سطوح تجزیه موجک (M) ، مقدار آنتروپی موجک به طور معناداری افزایش می‌یابد در حالی که اکستروپی موجک روند افزایشی کمتری را نشان می‌دهد. با این وجود مقادیر آنتروپی و اکستروپی موجک به ازای سطوح تجزیه ۵ و ۷ تفاوت محسوسی با هم ندارند و می‌توان آن را اشباع تشخیص بی نظمی در سطح تجزیه بالاتر از ۳ تلقی کرد.

جدول ۱: محاسبه اکستروپی و آنتروپی موجک مدل شبیه‌سازی برای $\alpha > ۰$ و $\alpha < ۰$

$\alpha < ۰$				$\alpha > ۰$			
α	M	آنتروپی	اکستروپی	α	M	آنتروپی	اکستروپی
-۳/۰	۳	۱/۲۹۱۶۲۱	۱/۰۲۵۳۴۹	۳/۰	۳	۱/۴۳۲۰۲۹	۱/۰۸۷۵۱۵
-۳/۰	۵	۱/۸۹۵۲۹۴	۱/۱۹۱۶۶۲	۳/۰	۵	۱/۸۸۴۲۴۸	۱/۱۶۳۴۵۶
-۳/۰	۷	۲/۲۴۷۱۶۸	۱/۲۳۴۱۹۳	۳/۰	۷	۱/۹۴۰۹۳۲	۱/۱۵۸۱۵۱
-۲/۰	۳	۱/۴۷۱۳۵۷	۱/۱۱۴۱۵۹	۲/۰	۳	۱/۴۸۳۶۵۷	۱/۱۱۶۰۱۷
-۲/۰	۵	۲/۰۳۶۴۶۱	۱/۲۰۹۲۸۴	۲/۰	۵	۱/۷۸۶۱۹۸	۱/۱۱۷۹۴۷
-۲/۰	۷	۲/۱۷۲۳۸۷	۱/۲۰۴۶۳۵	۲/۰	۷	۱/۹۰۵۹۸۹	۱/۱۲۰۲۸۴
-۱/۰	۳	۱/۴۶۵۲۴۳	۱/۱۰۶۲۲۴	۱/۰	۳	۱/۴۵۴۳۱۸	۱/۰۹۹۱۲۸
-۱/۰	۵	۱/۸۸۱۵۹۸	۱/۱۵۹۳۹۴	۱/۰	۵	۱/۹۱۵۲۶۶	۱/۱۷۳۱۸۴
-۱/۰	۷	۱/۹۲۴۷۶۰	۱/۱۴۱۸۷۱	۱/۰	۷	۲/۱۳۲۱۰۹	۱/۲۰۸۰۴۴
-۰/۵	۳	۱/۴۵۸۲۰۵	۱/۱۰۱۴۸۲	۰/۵	۳	۱/۴۵۳۴۵۹	۱/۰۹۹۵۳۴
-۰/۵	۵	۱/۹۵۶۹۳۶	۱/۱۸۷۱۱۷	۰/۵	۵	۱/۸۲۱۲۴۲	۱/۱۳۶۳۳۴
-۰/۵	۷	۲/۱۶۹۴۸۳	۱/۲۰۵۸۹۵	۰/۵	۷	۱/۸۹۲۸۲۵	۱/۱۲۴۳۸۷
-۰/۳	۳	۱/۴۶۹۹۴۰	۱/۱۰۷۳۰۶	۰/۳	۳	۱/۴۶۹۴۲۶	۱/۱۰۷۷۷۰
-۰/۳	۵	۱/۸۷۴۹۰۰	۱/۱۵۴۲۷۶	۰/۳	۵	۱/۸۸۷۴۰۵	۱/۱۶۱۲۳۸
-۰/۳	۷	۱/۹۶۸۵۱۴	۱/۱۵۶۷۴۶	۰/۳	۷	۱/۹۱۷۷۲۳	۱/۱۳۳۵۶۲
-۰/۱	۳	۱/۴۶۲۱۹۳	۱/۱۰۳۳۲۹	۰/۱	۳	۱/۴۷۰۲۹۳	۱/۱۰۹۱۱۱
-۰/۱	۵	۱/۹۳۰۱۶۸	۱/۱۸۱۷۵۷	۰/۱	۵	۱/۹۲۹۰۰۰	۱/۱۸۱۱۳۳
-۰/۱	۷	۱/۹۹۴۵۱۷	۱/۱۶۰۷۱۷	۰/۱	۷	۱/۰۱۳۷۹۹	۱/۱۶۸۶۸۱



(الف) (ب)

شکل ۳: الف– مقدار اکستروپی موجک بر اساس برای مقادیر مختلف α و M، ب– مقدار آنتروپی موجک بر اساس برای مقادیر مختلف α و M

بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله با استفاده از ابزارهای نظریه اطلاعات و تبدیل موجک، ویژگی‌های توزیع انرژی موجک تحلیل شد و ارتباط آن با پارامتر فراکتالی α مطالعه گردید. نتایج نشان داد که چنانچه مقدار α منفی باشد توزیع انرژی موجک از توزیع هندسی بریده شده پیروی می‌کند و رفتار آن به‌شدت تحت تأثیر پارامتر فراکتالی α قرار دارد. این یافته‌ها اهمیت پارامتر α را در مدل‌سازی و تحلیل سیستم‌های فراکتالی بالا–فرکانس برجسته می‌کند.

همچنین، محاسبه آنتروپی موجک و اکستروپی موجک به‌عنوان معیارهای اندازه‌گیری بی‌نظمی و اطلاعات، نشان داد که این شاخص‌ها می‌توانند به‌طور مؤثری برای تحلیل پیچیدگی و ساختار سیستم‌های فراکتالی مورد استفاده قرار گیرند. به‌ویژه، اکستروپی موجک به‌عنوان مکمل آنتروپی، دیدگاه جدیدی در بررسی سیستم‌های دینامیکی و فراکتالی ارائه می‌دهد.

آنتروپی و اکستروپی موجک سیستم‌های فراکتالی بالا–فرکانس با سطح تجزیه سیستم و پارامتر فراکتالی رابطه دارند. به‌عبارتی چنانچه سطح تجزیه یا پارامتر فراکتالی را به حداقل برسانیم ($M = ۱$) یا $\alpha \to -\infty$ اندازه‌های آنتروپی موجک و اکستروپی موجک صفر می‌شوند که به‌معنای عدم قطعیت در

سطح تجزیه پایین است. به‌ازای $M \to \infty$ حد اکستروپی موجک صفر و آنتروپی موجک ضریب ثابتی از α است. به‌معنای واضح تر، برای انتخاب سطح تجزیه بهینه نیازمند بررسی مطالعه دقیق تر بوده و افزایشی شدن تعداد سطح تجزیه به‌معنای بهره دهی اطلاعات نیست.

بنابراین پیشنهاد می‌شود مطالعه روی انرژی سیگنال محدود به سطوح پایین نباشد به‌طوریکه در مطالعه روی یک سطح تجزیه، فرکانس ها صرفا در دو طبقه جزئیات و تقریب توزیع تقسیم می‌شوند، و اطلاعاتی از سطوح عمیق‌تر وجود ندارد و به‌همین جهت اکستروپی و آنتروپی انرژی موجکی صفر می‌شود. همچنین سیستم‌های فراکتالی بالا–فرکانس به‌ازای اینکه پارامتر فراکتالی چقدر از مقدار ثابت صفر دور می شود فاقد ارایه اطلاعات ارزشمند آنتروپی و اکستروپی خواهند بود.

در این پژوهش، توزیع انرژی موجک در سیستم‌های فراکتالی بالا–فرکانس با استفاده از چارچوب نظریه اطلاعات مورد تحلیل قرار گرفته است. نوآوری اصلی این مطالعه، مدل‌سازی توزیع احتمالی انرژی موجک p_j بر اساس توزیع هندسی بریده‌شده است که به‌طور طبیعی از ساختار مقیاس‌پذیر سیگنال‌های فراکتالی با پارامتر طیفی منفی ($\alpha < 0$) ناشی می‌شود. در این چارچوب، پارامتر فراکتالی α نقش کلیدی در شکل‌گیری رفتار توزیع را ایفا می‌کند: هرچه α کوچک‌تر باشد، انرژی موجک بیشتر در سطوح بالاتر فرکانس (مقیاس‌های ریزتر) متمرکز می‌شود، در حالی که با نزدیک‌شدن α به صفر، توزیع به سمت یکنواختی همگرا می‌گردد. این ویژگی، امکان تفسیر فیزیکی و آماری رفتار سیستم را در حوزه‌های مختلف فراهم می‌آورد.

برای کمّی‌سازی پیچیدگی سیستم، دو شاخص مکمل آنتروپی و اکستروپی موجک محاسبه شده‌اند. آنتروپی شانون به‌عنوان معیاری از بی‌نظمی یا عدم قطعیت در توزیع انرژی موجک عمل می‌کند، در حالی که اکستروپی— به‌عنوان دوگانهٔ آنتروپی— میزان اطلاعات قابل استخراج یا «قطعیت ساختاری» را اندازه‌گیری می‌نماید. تحلیل‌های حدی نشان می‌دهد که در شرایط خاص، این دو شاخص رفتارهای متمایزی از خود ابراز می‌دارند:

- در حد $\alpha \to 0^-$، توزیع انرژی به توزیع یکنواخت همگرا شده و آنتروپی به حداکثر مقدار ممکن ($\log M$) می‌رسد، در حالی که اکستروپی به مقدار $(M-1)\log\left(\frac{M}{M-1}\right)$ همگرا می‌شود؛
- در مقابل، در حد $\alpha \to -\infty$، تمام انرژی در سطح اول موجک ($j=1$) متمرکز شده و هر دو شاخص به صفر میل می‌کنند، که نشان‌دهندهٔ یک رفتار شبه‌قطعی یا ثابت است؛

- در حد $M \to \infty$، توزیع به توزیع هندسی استاندارد همگرا شده و آنتروپی به مقدار ثابت $-\frac{q \ln q}{p} - \ln p$ (که در آن $q = ۲^{\alpha}$، $p = ۱ - q$) همگرا می‌شود، در حالی که اکستروپی به یک مجموع نامتناهی از توابع هندسی همگرا می‌گردد.

یافته‌های عددی حاصل از شبیه‌سازی سیگنال‌های حرکت براونی کسری (fBm) با پارامترهای متنوع α و سطوح تجزیه $M \in \{۳, ۵, ۷\}$ تأیید می‌کند که آنتروپی موجک به‌طور قابل توجهی با افزایش M رشد می‌کند، در حالی که اکستروپی روند اشباع‌پذیری دارد و پس از $M = ۵$ یا ۷ دیگر بهبود چندانی نشان نمی‌دهد. این نکته از دیدگاه کاربردی بسیار حائز اهمیت است: افزایش بی‌رویهٔ سطوح تجزیه موجک لزوماً به افزایش اطلاعات معنادار منجر نمی‌شود و ممکن است تنها نویز را تقویت کند. بنابراین، انتخاب بهینهٔ M باید بر اساس توازن بین پیچیدگی محاسباتی و بازده اطلاعاتی صورت گیرد.

تقدیر و تشکر

با سپاس فراوان از کلیه داوران محترمی که با دقت و حوصله، مقاله حاضر را مورد بررسی قرار دادند و با ارائه نظرات سازنده و تخصصی خود، نقش به سزایی در ارتقای کیفیت آن ایفا کردند. همچنین از هیئت تحریریه و ویراستاران مجله که با پیگیری دقیق و حرفه‌ای خود، فرآیند بررسی و انتشار این مقاله را تسهیل نمودند، صمیمانه قدردانی می‌شود.

مراجع

آشورزاده مقری، میلاد.، بیگلری فدافن،علی.۱۴۰۰. تشخیص آسیب چندگانه در سازه با استفاده از روش آنتروپی موجک گسسته. مهندسی عمران ۲. ۱-۱۵.

فتاحی محمدهادی، طالب بیدختی ناصر، رخشنده رو غلامرضا، شمسایی ابوالفضل. پیش پردازش موجکی (Wavelet) و فراکتالی سریهای زمانی جریان رودخانه برای مدل پیش بینی شبکه عصبی مصنوعی. ۱۳۸۸. https://sid.ir/paper/۸۰۹۷۲۱fa/

درویشیان، احسان و قدرتی امیری، غلامرضا. ۱۳۹۸. شناسایی خسارت سازه ها با استفاده از آنالیز موجک بسته ای و کاهش ابعاد داده. https://doi.org/۱۸۹۶.۱۶۰۶.۲۰۱۸.۳۰/J۲۴۲۰۰.۱۰

مینا کدخدایی الیادرانی، سید حمید محمودیان، غزال شیخی. ۱۳۹۳. تشخیص حالت احساسی از سیگنال گفتار در حالت مستقل از گوینده با استفاده از آنتروپی بسته موجک. روشهای هوشمند در صنعت برق ۲۰. ۶۷-۷۴.

Di Crescenzo, A., & Longobardi, M. (2004). A measure of discrimination between past lifetime distributions. Statistics & Probability Letters, 67(2), 173–182. https://doi.org/10.1016/j.spl.2003.11.019

Huang, H., & Instruments, T. R. (2025). The theory of informity: a novel probability framework.

Lad, F., Sanfilippo, G., & Agrò, G. (2015). Extropy: complementary dual of entropy. Statistical Science, 30(1). https://doi.org/10.1214/14-sts430

Ramirez-Pacheco, Julio. (2025).”Wavelet eXtropy of fractal signals.” Revista Mexicana de Física E 22.1 Jan-Jun : 010211-1.

Wojnowicz, M., Chisholm, G., Wolff, M., & Zhao, X. (2016). Wavelet decomposition of software entropy reveals symptoms of malicious code. Journal of Innovation in Digital Ecosystems, 3(2), 130–140. https://doi.org/10.1016/j.jides.2016.10.009.

Yousefzadeh, F, & Pakgohar, A. (2022). Some properties of quantile past lifetime extropy. Proceeding of the 8th Seminar on Reliability Theory and its Applications. Ferdowsi University of Mashhad, Mashhad, Iran. pp: 229-240.

Zunino, L., Pérez, D. G., Garavaglia, M., & Rosso, O. A. (2007). Wavelet entropy of stochastic processes. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, 379(2), 503-512.

Title: Entropy and Extropy of the Wavelet Energy Distribution in Reciprocal Fractal Systems

Abstract

This study investigates the wavelet energy distribution in high-frequency fractal systems and analyzes its characteristics using information-theoretic measures. The main innovation of this paper lies in modeling the wavelet energy distribution (p_j) using a truncated geometric distribution and incorporating the concept of extropy to quantify system complexity. It is demonstrated that this distribution is strongly influenced by the fractal parameter α and the number of decomposition levels M. By computing wavelet entropy and extropy as measures of disorder and information, respectively—the study provides a quantitative analysis of the complexity of these systems. The paper further examines key properties of this distribution, including its convergence to geometric, uniform, and degenerate distributions under limiting conditions (e.g., $M \to \infty$ or $\alpha \to 0$). Results indicate that entropy and extropy serve as complementary tools for a comprehensive description of system behavior: while entropy measures disorder, extropy reflects the degree of information and certainty. This approach establishes a novel framework for analyzing real-world signals with varying parameters and holds potential applications in the analysis of fractal signals and modeling of complex systems in fields such as finance and biology.

To validate the theoretical findings, synthetic fractal signals (fractional Brownian motion) with varying fractal parameters (α) and decomposition levels (M) were simulated. Numerical results show that wavelet entropy increases significantly with the number of decomposition levels (M), whereas extropy exhibits slower growth and saturates at higher decomposition levels.