Journal of Statistical Sciences, Spring and Summer, 2026
Vol. 20, No. 1, pp 33-52
DOI: 10.61882/jss.20.1.02

# Entropy and Extropy of the Wavelet Distribution in High-Frequency Fractal Systems

Pakgohar, A.[1], Shokri, S.[2]
[1]Department of Statistics, Payame Noor University, Tehran, Iran.
[2]Department of Mathematics and Statistics, Ra.C.,Islamic Azad University, Rasht , Iran.

**Corresponding author:** A. Pakgohar a_pakgohar@pnu.ac.ir

**Received:** 19/1/2025 **Revised:** 25/1/2026 **Accepted and Published Online:** 28/1/2026.

## Introduction

The wavelet transform provides a powerful multi-resolution analysis tool, decomposing signals into different frequency bands across multiple scales. For fractal systems, the energy distribution across these scales follows predictable patterns governed by the fractal parameter $\alpha$. Understanding these patterns through information-theoretic measures offers fundamental insights into signal complexity and predictability.

## Method

The central methodology focuses on modeling the probability mass function of the wavelet energy distribution using a truncated geometric distribution, which directly governs the behavior of wavelet entropy (H(W)) and wavelet extropy (J(W)). This distribution provides a precise approximation of wavelet energy in high-frequency fractal systems, parameterized by alpha (the fractal parameter) and M (the number of decomposition levels). Proofs employ conditional expectations, summation identities, and series expansions to derive the truncated mean and establish convergence to limiting distributions. The behavior of the wavelet energy distribution is key to interpreting entropy and extropy. Across different alpha regimes, the probability mass function transitions from exponential decay (geometric) to uniformity or complete concentration, directly impacting uncertainty (entropy) and dynamical complexity (extropy). For instance, wavelet entropy emerges as a logarithmic function of M in the uniform limit, while extropy is computed

via an infinite series based on power ratios. This approach positions the distribution not merely as a descriptive tool but as a foundational basis for information-theoretic metrics, highlighting the direct link between the probabilistic structure of energy and entropy/extropy characteristics.

**Results and Discussion**
Wavelet entropy increases monotonically and significantly with decomposition levels M, reflecting growing uncertainty as finer frequency scales are incorporated. Extropy Behavior: Wavelet extropy shows modest growth and saturates at higher M values, indicating diminishing predictability information beyond a threshold depth. The extropy saturation point serves as a natural stopping criterion for selecting optimal decomposition levels, balancing information extraction against computational cost. Numerical simulations using fractional Brownian motion (fBm) with varying fractal parameters (alpha) confirmed the theoretical predictions.

**Conclusion**
This study provides a rigorous probabilistic foundation for wavelet energy in high-frequency fractal systems, with convergence results distilling essential distributional traits without reliance on intricate computations. By glimpsing these properties, geometric decay, uniformity, and concentration, the manuscript advances understanding of energy fractality, with ramifications for wavelet transform applications in complex systems.
Future research may extend these to continuous wavelet frames, multifractal spectra, or empirical validations of real-world fractal signals, such as turbulence or financial volatility. Integrating these distributions with information-theoretic metrics, as suggested by the manuscript's title, promises deeper quantifications of uncertainty and order in fractal wavelet energies.

**Keywords:** Wavelet entropy, Wavelet extropy, Truncated geometric distribution, High-frequency fractal system.

**Mathematics Subject Classification (2020):** 60E05, 94A17,62B10,28A80.

©The Author(s). The Publisher is Iranian Statistical Society.
This is an open access article distributed under the terms and conditions of (CC BY-NC 4.0)

**مجله علوم آماری، بهار و تابستان ۱۴۰۵**
**جلد ۲۰، شماره ۱، ص ۳۳ -- ۵۲**
DOI: 10.61882/jss.20.1.02
**مقاله پژوهشی**

# آنتروپی و اکستروپی توزیع انرژی موجک سیستم فراکتالی بالا-فرکانس

علیرضا پاک گوهر[۱]، سهیل شکری[۲]
[۱]گروه آمار، دانشگاه پیام نور
[۲]گروه ریاضی و آمار، واحد رشت، دانشگاه آزاد اسلامی

**نویسنده مسئول :** علیرضا پاک گوهر، a_pakgohar@pnu.ac.ir

تاریخ دریافت: ۱۴۰۳/۱۰/۳۰ تاریخ بازنگری: ۱۴۰۴/۱۱/۶ تاریخ پذیرش و انتشار: ۱۴۰۴/۱۱/۸

**چکیده:** در این مطالعه، توزیع انرژی موجک در سیستم‌های فراکتالی بالا-فرکانس و تحلیل ویژگی‌های آنتروپی و اکستروپی و هم توزیع انرژی موجک با توزیع هندسی بریده‌شده بررسی شد. یافته‌ها نشان داد این توزیع به شدت تحت تأثیر پارامتر فراکتالی آلفا و تعداد سطوح تجزیه قرار دارد. همچنین، آنتروپی و اکستروپی توزیع انرژی موجک در سیستم‌های فراکتالی بالا-فرکانس و خصوصیات آن بررسی شدند. برای اعتبارسنجی نظریه‌ها، سیگنال‌های فراکتالی مصنوعی (حرکت براونی کسری) با پارامترهای مختلف فراکتالی آلفا و سطوح تجزیه شبیه‌سازی شدند. نتایج عددی نشان می‌دهد که آنتروپی موجک به‌طور قابل توجهی با افزایش سطوح تجزیه افزایش می‌یابد، در حالی که اکستروپی رشد کمتری داشته و در سطوح بالاتر به حالت اشباع می‌رسد. این یافته‌ها، اهمیت انتخاب سطح تجزیه مناسب را برجسته می‌کنند.

**واژه‌های کلیدی:** آنتروپی موجک، اکستروپی موجک، انرژی موجک، توزیع هندسی بریده شده، سیستم فراکتالی بالا-فرکانس.
**کد موضوع‌بندی ریاضی (۲۰۲۰):** 60E05، 62B10.

## ۱ مقدمه

سیگنال‌های فرکتالی، که با خودهمانندی و رفتار مقیاس‌پذیری مشخص می‌شوند، در تحلیل داده‌ها کاربرد دارند و در حوزه‌هایی مانند مالی، زیست‌شناسی و علوم شبکه به‌کار می‌روند. تحلیل این سیگنال‌ها با استفاده از ابزارهای

©نویسند(گان). ناشر انجمن آمار ایران است.
این مقاله با دسترسی آزاد تحت شرایط و ضوابط (CC BY-NC 4.0) توزیع شده است.

نظریه اطلاعات، مانند آنتروپی و اکستروپی، می‌تواند به درک بهتر محتوای اطلاعاتی و پیچیدگی آن‌ها کمک کند و به تعیین مانا یا نامانا بودن سیگنال، حافظه آن و طبقه‌بندی در محدوده‌های مقیاسی خاص منجر شود. موجک‌ها ابزارهایی قدرتمند برای تحلیل سیگنال‌های نامانا هستند؛ این ابزارها با تفکیک همزمان اطلاعات زمانی و فرکانسی، در قالب‌های پیوسته و گسسته قابل محاسبه‌اند.

افشاری و همکاران (۱۳۹۹) برآوردگرهای موجک تابع رگرسیون ناپارامتری بر اساس آستانه‌های مختلف تحت توزیع پیشین آمیخته و تابع زیان توان دوم خطا در فضای بسوف را محاسبه کردند. شیرازی (۱۳۹۹) یک برآوردگر سازگار از تابع چگالی چندک به روش آستانه‌ای بلوکی معرفی و سرعت همگرایی این برآوردگر را تحت تابع زیان $L۲$ روی کلاس بزرگی از توابع فضای بسوف به دست آورده است. تحلیل سیگنال‌های فرکتالی با استفاده از ابزارهای نظریه اطلاعات می‌تواند روش‌های سنتی تحلیل سیگنال (مثل تحلیل در حوزه زمان، فرکانس یا زمان–مقیاس) را تکمیل کند. برخی از این روش‌های سنتی شامل تحلیل نوسانات کاهش‌یافته[1]، آماره دامنه تغییرمقیاس‌شده[2]، پریودوگرام[3] و موجک‌ها هستند. روش‌های مبتنی بر نظریه اطلاعات از قبیل آنتروپی و مدل‌های اندازه گیری مکمل آنتروپی از قبیل اکستروپی نه تنها به ما کمک می‌کنند که محتوای اطلاعاتی و پیچیدگی سیگنال‌های فرکتالی را اندازه‌گیری کنیم، بلکه می‌توانند به درک بهتری از این سیگنال‌ها منجر شوند برای مثال، می‌توانند مشخص کنند که یک سیگنال مانا [4] یا نامانا است و حافظه کوتاه مدت یا بلند مدت دارد و حتی می‌توانند سیگنال‌ها را در یک محدوده مقیاسی خاص طبقه‌بندی کنند آشورزاده و بیگلری (۱۴۰۰). تحلیل موجک، به عنوان ابزاری قدرتمند برای تجزیه سیگنال‌ها، امکان استخراج ویژگی‌های محلی را فراهم می‌کند.

**تعریف ۱.** (پاچیکو، ۲۰۲۵): تبدیل موجک سیگنال $X_t$ به صورت

$$d_X(j,k) = \int_{-\infty}^{\infty} X_t \psi_{j,k}(t)\, dt \tag{۱}$$

است، که در آن $d_X(j,k)$ ضرایب موجک در مقیاس $j$ و زمان $k$ و $\psi_{j,k}(t) = ۲^{-j/۲}\psi(۲^{-j}t - k)$ تابع موجک مادر مقیاس‌شده، مشروط بر شرط پذیرش[5] برای $\psi(t)$ است (واژنویتز و همکاران، ۲۰۱۶).

برای فرآیندهای تصادفی با میانگین صفر، امید ضرایب موجک صفر است:

$$\mathbb{E}[d_X(j,k)] = \mathbb{E}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} X_t \psi_{j,k}(t)\, dt\right\} = ۰.$$

[1] Detrended Fluctuation Analysis
[2] Rescaled Range Statistic
[3] Periodogram
[4] Stationary
[5] Admissibility Condition

طیف موجک، معادل گشتاور دوم، به صورت

$$\mathbb{E}[d_X^{۲}(j,k)] = \int_{-\infty}^{\infty} S_X(۲^{-j} f)|\Psi(f)|^{۲}\, df,$$

تعریف می‌شود، که در آن $S_X(f)$ چگالی طیف توان[1] است. برای سیگنال‌های فرکتالی با پارامتر $\alpha$، چگالی طیف توان فرآیندهای خودهمبسته به‌صورت $S_\alpha(f) \sim c|f|^{-\alpha}$ تعریف می‌شود. بنابراین، طیف موجک برای سیگنال‌های فرکتالی به‌صورت

$$\mathbb{E}[d_X^{۲}(j,k)] = ۲^{j\alpha} C(\alpha,\psi) \tag{۲}$$

به‌دست می‌آید (زوزینو و همکاران، ۲۰۰۷)، که در آن $C(\alpha,\psi)$ یک ثابت است که به پارامتر فرکتالی $\alpha$ و تابع موجک مادر $\psi(t)$ بستگی دارد. انرژی موجک یک تابع احتمال است که در مقیاس $j$ به‌صورت

$$p_j = \frac{\mathbb{E}[d_X^{۲}(j,k)]}{\sum_j \mathbb{E}[d_X^{۲}(j,k)]} \tag{۳}$$

تعریف می‌شود (پاچیکو، ۲۰۲۵). در تحلیل موجک، $j$ معمولاً از ۱ تا $M$ در نظر گرفته می‌شود که سطح تجزیه را مشخص می‌کند؛ به‌طوری که $j = ۱$ مربوط به بالاترین فرکانس و ریزترین مقیاس است و با افزایش $j$ به $M$ فرکانس کاهش یافته و به برجسته‌ترین مقیاس (پایین‌ترین فرکانس) در $j = M$ می‌رسد. بر اساس روابط (۲) و (۳) و ثابت بودن $C(\alpha,\psi)$ نسبت به اندیس $j$، داریم

$$p_j = \frac{۲^{j\alpha} C(\alpha,\psi)}{\sum_{j=۱}^{M} ۲^{j\alpha} C(\alpha,\psi)} = \frac{۲^{j\alpha}}{\sum_{j=۱}^{M} ۲^{j\alpha}} = ۲^{\alpha(j-۱)} \frac{۱-۲^{\alpha}}{۱-۲^{\alpha M}}.$$

که در آن $M$ تعداد مقیاس‌های در نظر گرفته شده در یک سیگنال و $\alpha$ به‌عنوان پارامتر فرکتالیتی شناخته می‌شود. پارامتر $M$ تعداد دفعات تجزیه سیگنال به سطوح متوالی، هر یک معادل یک دامنه فرکانسی متفاوت و فراهم‌کننده تحلیل چندمقیاسی، را نشان می‌دهد؛ بنابراین با افزایش $M$، نمایش سیگنال دقیق‌تر شده و ویژگی‌های ظریف‌تر آن ضبط می‌شوند. به‌طور معکوس، مقدار پایین‌تر $M$ نمایش با وضوح پایین‌تر ارائه می‌دهد که بیشتر بر روندهای کلی متمرکز است. همچنین پارامتر $\alpha$ نشان‌دهنده رفتار مقیاس‌پذیری و میزان بی‌نظمی یا پیچیدگی ساختارها است و معمولاً از طریق روش‌های خاصی مانند تحلیل شمارش جعبه‌ای تحلیل هورست[2] یا تحلیل موجک تعیین می‌شود. همچنین، از این پارامتر به‌عنوان شاخصی برای توصیف خودهمبستگی بلندمدت و رفتار فرکتالی در داده‌ها استفاده

[1] Power Spectral Density
[2] Hurst analysis

می‌شود. چنانچه $\alpha$ منفی بشود، به‌معنای وجود ضدپایداری یا رفتار بازگشتی به میانگین است. در این حالت، سیگنال تمایل دارد نوسانات سریع و متناوبی را در مقیاس‌های مختلف از خود نشان دهد که ناشی از همبستگی خودکار منفی در تأخیرهای کوتاه (ضدهمبستگی) است. این رفتار معمولاً در مدل‌های استاندارد کمتر دیده می‌شود اما در برخی سیستم‌های غیرخطی یا خاص ممکن است ظاهر شود. مقدار $\alpha$ منفی در بازه $(-۱, ۰)$ به رفتارهای مانا با حافظه کوتاه‌مدت اشاره دارند (پاچیکو، ۲۰۲۵). در ادامه به‌بررسی خصوصیات توزیع سیستم فرکتالی با مقدار $\alpha$ منفی، به نام سیستم فراکتالی بالا–فرکانس می‌پردازیم. در بخش ۲ به‌بررسی خصوصیات توزیع انرژی موجک در سیستم‌های فراکتالی بالا–فرکانس پرداخته و در بخش ۳ خصوصیات آنتروپی توزیع انرژی موجک سیستم فراکتالی بالا–فرکانس بررسی می‌شود. در بخش ۴ اندازه اکستروپی و ویژگی‌های آن و در بخش ۵ یک مطالعه شبیه‌سازی داده روی توزیع انرژی فراکتال و اندازه های آنتروپی و اکستروپی موجک به ازای مقادیر مختلف $M$ و $\alpha$ محاسبه شده‌اند.

## ۲ توزیع انرژی موجک سیستم فراکتالی بالا–فرکانس

یکی از مشخصه سازی‌های پارامتر $\alpha$ در توزیع انرژی موجک سیستم‌های فراکتالی بالا–فرکانس، تعیین شکل توزیع است.

**تذکر ۱.** تابع احتمال $p_j$ برای سیستم‌های فراکتالی بالا–فرکانس با پارامتر $\alpha < ۰$ نزولی و برای $\alpha > ۰$ صعودی است.

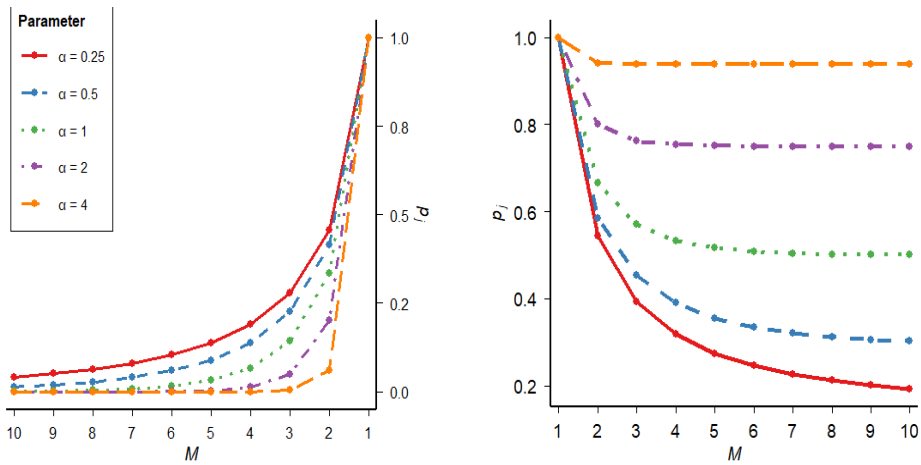
**برهان:** با فرض اینکه نسبت مقادیر متوالی $p_j$ و $p_{j+۱}$ به‌صورت $\frac{p_{j+۱}}{p_j} = ۲^{\alpha}$ تعریف شده باشد، رفتار توالی $\{p_j\}$ کاملاً توسط پارامتر $\alpha \in \mathbb{R}$ تعیین می‌شود. به‌وضوح: اگر $\alpha > ۰$، آنگاه $۲^{\alpha} > ۱$ و در نتیجه $p_{j+۱} > p_j$؛ و چنانچه $\alpha < ۰$، آنگاه $۲^{\alpha} < ۱$ و در نتیجه $p_{j+۱} < p_j$؛ و در نهایت در حالت مرزی $\alpha = ۰$، داریم $۲^{\alpha} = ۱$ و لذا $p_{j+۱} = p_j$.

شکل ۴ نشان می‌دهد رفتار توزیع انرژی موجک نسبت به مقدار پارامتر $\alpha$ متقارن است.

**گزاره ۱.** در یک سیستم فرکتالی بالا–فرکانس، انرژی موجک $p_j$ از توزیع هندسی بریده شده با احتمال شکست $p = ۱ - ۲^{\alpha}$ و نقطه بریده شده $M$ پیروی می‌کند

**برهان:** با فرض $\alpha < ۰$ و تغییر متغیر $۰ < p = ۱ - ۲^{\alpha} < ۱$ و $۰ < q = ۱ - p = ۲^{\alpha} < ۱$ داریم $P(X = j) = q^{j-۱}p, X = ۱, ۲, \cdots,$ و $P(X \leq M) = ۱ - q^{M}$. از سویی طبق تعریف توزیع بریده شده گذشته (دیکریزنزو و لانگوباردی، ۲۰۰۵) داریم:

$$f_M(j) = P(X = j \| X \leq M) = \frac{f_X(x)}{F_X(M)}. \tag{۴}$$




(ب) (الف)

**شکل ۱.** توزیع $p_j$ به ازای مقادیر مختلف $j$ و به تفکیک الف- $\alpha$ منفی و ب- $\alpha$ مثبت

که در آن $f_X(j)$ تابع جرم احتمال و $F_X(M)$ تابع توزیع متغیر تصادفی $X$ در نقطه M هستند.

فرض کنید $X$ یک متغیر تصادفی دارای توزیع هندسی با پارامتر $p$ با تابع جرم احتمال

$$P(X = j) = q^{j-۱}p, \quad j = ۱, ۲, \cdots,$$

و توزیع تجمعی در نقطه $M$ به صورت $F_X(M) = ۱ - q^M$, باشد، که در آن $q = ۱ - p$. اکنون طبق معادله (۴) به ازای داریم

$$f_M(j) = \frac{q^{j-۱}p}{۱ - q^M}, \quad j = ۱, \ldots, M. \tag{۵}$$

**تذکر ۲.** امید ریاضی $X$ در توزیع بریده شده گذشته‌نگر هندسی عبارتست از

$$E(X \mid X \leq M) = \frac{۱ - (M + ۱)q^M + Mq^{M+۱}}{p(۱ - q^M)}.$$

**برهان:** طبق تعریف امید ریاضی

$$\begin{aligned} E(X \mid X \leq M) &= \frac{p}{۱-q^M}\sum_{x=۱}^{M} xq^{x-۱}, \\ &= \frac{۱}{۱-q^M}\cdot\frac{۱-(M+۱)q^M+Mq^{M+۱}}{p}. \end{aligned} \tag{۶}$$

**گزاره ۲.** تابع مولد گشتاور توزیع انرژی موجک سیستم فراکتالی بالا–فرکانس عبارتست از

$$M_J(t) = \frac{(۱-۲^\alpha)e^t}{۱-۲^{\alpha M}} \times \frac{(۲^\alpha e^t)^M - ۱}{۲^\alpha e^t - ۱}. \tag{۷}$$

**برهان:** طبق تعریف تابع مولد گشتاور $M_J(t) = \frac{pe^t}{۱-q^M} \times \frac{(qe^t)^M-۱}{qe^t-۱}$. بنابر گزاره ۱ و تغییر پارامتر $p = ۱-۲^\alpha$، رابطه (۷) ثابت می‌شود.

**فرع ۱.** امید ریاضی انرژی موجک سیستم فراکتالی بالا–فرکانس عبارتست از

$$E(J) = ۱ + \frac{q\big((M-۱)q^M - Mq^{M-۱}+۱\big)}{p(۱-q^M)}. \tag{۸}$$

**برهان:** بنابر خاصیت تابع مولد گشتاور و مشتق گیری از سمت راست رابطه (۷) نسبت به $t$ داریم

$$\begin{aligned} M'_J(t) &= \frac{(۱-۲^\alpha)e^t}{۱-۲^{\alpha M}} \times \frac{(۲^\alpha e^t)^M - ۱}{۲^\alpha e^t - ۱} \\ &+ \frac{M۲^{M\alpha}e^{t(M-۱)}(۲^\alpha e^t - ۱) - ۲^\alpha e^t((۲^\alpha e^t)^M - ۱)}{(۲^\alpha e^t - ۱)^۲}\,\frac{(۱-۲^\alpha)e^t}{۱-۲^{\alpha M}}. \end{aligned}$$

به‌ازای $t = ۰$ داریم

$$E(J) = ۱ + \frac{۲^\alpha\big((M-۱)۲^{\alpha M} - M۲^{\alpha(M-۱)+۱}\big)}{۱-۲^\alpha}.$$

با جایگذاری $p = ۱-۲^\alpha$ امید ریاضی انرژی موجک سیستم فرکتالی تحت توزیع هندسی به‌صورت (۸) به‌دست خواهد آمد.

**فرع ۲.** تابع نرخ خطر[1] و نرخ خطر معکوس انرژی موجک سیستم فراکتالی بازگشتی به‌ترتیب برابرند با

$$HR(J) = \frac{1 - 2^{\alpha}}{2^{\alpha}(1 - 2^{\alpha(j-M)})},$$

$$RHR(J) = \frac{(1 - 2^{\alpha})2^{\alpha(j-1)}}{1 - 2^{\alpha j}}.$$

**فرع ۳.** تابع چندکی و تابع احتمال چندکی متغیر تصادفی انرژی موجک در سیستم فراکتالی بالا-فرکانس به‌ترتیب برابرند با

$$Q(u) = \frac{\ln\left(1 - (1 - 2^{\alpha M})u\right)}{\alpha \ln(2)},$$

$$q(u) = \frac{-(1 - 2^{\alpha M})}{(1 - (1 - 2^{\alpha M})u)\alpha \ln(2)}.$$

## ۲.۱ توزیع های تقریب متغیر تصادفی انرژی موجک سیستم فراکتالی بالا-فرکانس

این بخش توزیع های تقریب متغیر تصادفی انرژی موجک سیستم فراکتالی بالا-فرکانس را به ازای حالات خاص مقادیر $\alpha$ و $M$بررسی می کند. گزاره ۳ همگرایی توزیعی انرژی موجک در سیستم فراکتالی بالا-فرکانس به توزیع هندسی به ازای $M \to \infty$ و کاهش نمایی رفتار انرژی را در سطوح بالاتر موجک، متناظر با خصوصیات مقیاس‌پذیری سیستم‌های فراکتالی را نشان می‌دهد. درگزاره ۴ نشان داده شده است، انرژی موجک در سیستم فراکتالی بالا-فرکانس به ازای $\alpha \to 0^{-}$ همگرایی توزیعی به توزیع یکنواخت گسسته با پارامتر $M$ دارد. به عبارتی وابستگی توزیع به $j$ از بین رفته و همه سطوح انرژی موجک دارای احتمال یکسان می‌شوند که نشان‌دهنده رفتار یکنواخت و بدون ساختار مقیاس‌پذیر غالب در سیستم است. گزاره ۵ نشان داده است انرژی موجک در سیستم فراکتالی بالا-فرکانس به ازای $\alpha \to \infty$ همگرایی توزیعی به توزیع ثابت در نقطه $j = 1$ همگرایی دارد و رفتار انرژی در این نقطه متمرکز شده است.

**گزاره ۳.** تابع جرم احتمال انرژی موجک در سیستم‌های فراکتالی بالا-فرکانس، $f_M(j)$ به ازای $M \to \infty$ به توزیع هندسی استاندارد با پارامتر $q = 1 - p = 2^{\alpha}$ همگرا می‌شود

$$\lim_{M\to\infty} f_M(j) = q^{j-1}p \quad \text{برای} j \in \mathbb{N},$$

[1] Hazarad rate

**برهان:** به ازای $\alpha < ۰$ و $M \to \infty$ داریم $q^M = ۲^{M\alpha} \to ۰$ بنابراین

$$f_M(j) = \frac{q^{j-۱}p}{۱ - q^M} \to q^{j-۱}p.$$

**گزاره ۴.** تابع جرم احتمال انرژی موجک در سیستم‌های فراکتالی بالاـ فرکانس، $f_M(j)$ به ازای $\alpha \to ۰$ به توزیع یکنواخت با پارامتر $M$ همگرا می‌شود.

$$\lim_{\alpha \to ۰^-} f_M(j) = \frac{۱}{M} \quad j = ۱, \ldots, M.$$

**برهان:** بدیهی است به ازای $\alpha \to -۰$ داریم $q = ۲^\alpha \to ۱^-$ از طرفی طبق بسط تیلور داریم $۱ - q^M \simeq M(۱ - q)$. بنابراین $f_M(j) \simeq \frac{۱}{M}$.

**گزاره ۵.** تابع جرم احتمال انرژی موجک در سیستم‌های فراکتالی بالاـ فرکانس، $f_M(j)$ به ازای $\alpha \to -\infty$ به توزیع ثابت در نقطه $j = ۱$ همگرا می‌شود

$$\lim_{\alpha \to -\infty} f_M(j) = ۲^{\alpha(j-۱)} \quad j = ۱, \ldots, M. \tag{۹}$$

**برهان:** با توجه به اینکه $\lim_{\alpha \to -\infty} ۲^\alpha \to ۰^+$، داریم

$$f_M(۱) = \frac{۱ - q}{۱ - q^M} \xrightarrow[q \to ۰^+]{} ۱, \qquad f_M(j) = \frac{q^{j-۱}(۱ - q)}{۱ - q^M} \xrightarrow[q \to ۰^+]{} ۰ \quad (j \geq ۲).$$

بنابراین تابع توزیع تجمعی $F_M(k) = \sum_{j=۱}^{\min(k,M)} f_M(j)$ در حدّ $q \to ۰^+$ عبارتست از

$$\lim_{q \to ۰^+} F_M(k) = \begin{cases} ۰ & k < ۱, \\ ۱ & k \geq ۱. \end{cases}$$

از این رو تقریب توزیع انرژی موجک سیستم بالاـ فرکانس برابر توزیع ثابت در $j = ۱$ می‌یابد.

## ۳ آنتروپی موجک

آنتروپی به‌عنوان یک معیار سنجش بی نظمی کاربردهای بسیاری در نظریه اطلاعات دارد. مشهورترین اندازه آنتروپی موسوم به آنتروپی شانون ببه صورت

$$\mathscr{H}(X) = -\sum p(x)\ln(p(x)) \tag{۱۰}$$

است که میزان عدم قطعیت احتمالی $\{X;p(x)\}$ را اندازه‌گیری می‌کند. لازم به‌ذکر است که در اینجا منظور از اطلاعات ، در واقع محتوای اطلاعات است که به‌میزان اطلاعاتی که توسط نتیجه $x_i$ و بر اساس احتمال آن، یعنی $p(x_i)$ منتقل یا در آن ذخیره می‌شود، اشاره دارد (هوانگ و اینسترومنتز، ۲۰۲۵).

با توجه به تعریف آنتروپی شانون (۱۰) و توزیع انرژی موجک (۵)، آنتروپی موجک عبارتست از

$$\mathscr{H}(W) = \alpha\left(\frac{۱}{۱-۲^{-\alpha}} - \frac{M}{۱-۲^{-\alpha M}}\right) - \ln ۲\left(\frac{۱-۲^{\alpha}}{۱-۲^{\alpha M}}\right). \tag{۱۱}$$

**گزاره ۶.** آنتروپی انرژی موجک در یک سیستم فرکتالی بالا-فرکانس عبارتست از

$$\mathscr{H}(W) = \ln\left(\frac{۱-۲^{\alpha M}}{۱-۲^{\alpha}}\right) - \alpha\ln(۲)\left(\frac{(M-۱)۲^{\alpha M} - M۲^{\alpha(M-۱)+۱}}{۱-۲^{\alpha M}}\frac{۲^{\alpha}}{۱-۲^{\alpha}}\right) \tag{۱۲}$$

**برهان:** طبق تعریف تابع هندسی گذشته نگر ؟ و تعریف آنتروپی شانون در رابطه (۱۰) داریم

$$\mathscr{H}(W) = \ln\left(\frac{۱-q^M}{p}\right) + (۱-E(J))\ln(q). \tag{۱۳}$$

با توجه مقدار $E(J)$ در رابطه (۸) و جایگذاری در رابطه (۱۳) خواهیم داشت

$$\mathscr{H}(W) = \ln\left(\frac{۱-q^M}{p}\right) + \ln(q)\left(\frac{q}{p}\frac{-(M-۱)q^M + Mq^{M-۱} - ۱}{۱-q^M}\right)$$

با جایگذاری $q = ۲^{\alpha}$ خواهیم داشت رابطه (۱۲) به‌دست می‌آید.

**تذکر ۳.** به‌ازای $M = ۱$ در رابطه (۱۱) آنتروپی موجک برابر صفر می‌شود.

**گزاره ۷.** آنتروپی موجک سیگنال فرکتالی بالا-فرکانس با پارامتر فرکتالی $\alpha \in (-\infty, ۰)$ در تعداد بی‌نهایت

مقیاس ($M \to \infty$) به طور تقریبی عبارتست از

$$\mathscr{H}(W) = -\frac{q\ln(q)}{p} - \ln(p). \tag{۱۴}$$

**برهان:** با توجه به آنکه در گزاره ۳ تابع جرم احتمال توزیع انرژی موجک سیگنال فرکتالی بالا-فرکانس به ازای $M \to \infty$ به توزیع هندسی همگرا است بنابراین آنتروپی شانون موجک سیگنال فرکتالی بالا-فرکانس تقریبا با آنتروپی توزیع هندسی همگرا است و

$$H(X) = -\ln(q)\sum_{j=1}^{\infty}(q^{j-1}p)(j-1) - \ln(p). \tag{۱۵}$$

چون میانگین توزیع هندسی برابر $E(J) = \frac{1}{p}$ است، داریم $\sum_{j=1}^{\infty}(q^{j-1}p)(j-1) = \frac{1}{p} - 1 = \frac{q}{p}$ بنابراین رابطه (۱۵) برابر رابطه (۱۴) است.

**گزاره ۸.** آنتروپی موجک در سیستم‌های فراکتالی بالا-فرکانس، به ازای $\alpha \to 0$ به طور تقریبی برابر $\mathscr{H}(W) = \ln(M)$ است.

**برهان:** با توجه به آنکه در گزاره ۴ تابع جرم احتمال توزیع انرژی موجک سیگنال فرکتالی بالا-فرکانس به ازای $\alpha \to 0^-$ به توزیع یکنواخت همگرا است بنابراین آنتروپی شانون موجک سیگنال فرکتالی بالا-فرکانس تقریبا با آنتروپی توزیع یکنواخت گسسته همگرا است $H(X) = \sum_{j=1}^{\infty}\frac{\ln(M)}{M} = \ln(M)$.

گزاره ۸ نشان می‌دهد چنانچه پارامتر فراکتالی به سمت صفر میل کند. آنتروپی موجک در سیستم‌های فراکتالی بالا-فرکانس دارای حداکثر آنتروپی است زیرا توزیع یکنواخت بیشترین آنتروپی ممکن را در بین تمام توزیع‌هایی که روی $M$ نتیجه ممکن تعریف شده‌اند، دارد.

**گزاره ۹.** به ازای $\alpha \to -\infty$ آنتروپی موجک سیستم فراکتالی بالا-فرکانس، به طور تقریبی صفر است.

**برهان:** با توجه به آنکه در گزاره ۵ تابع جرم احتمال توزیع انرژی موجک سیگنال فرکتالی بالا-فرکانس به ازای $\alpha \to -\infty$ به توزیع ثابت همگرا است بنابراین با توجه به اینکه در این توزیع تمام احتمال روی یک مقدار واحد متمرکز شده است آنتروپی شانون موجک سیگنال فرکتالی بالا-فرکانس صفر خواهد شد.

گزاره ۹ نشان داده است به ازای $\alpha \to -\infty$ رفتار توزیع موجک در سیستم‌های فراکتالی بالا-فرکانس، یک رفتار کاملاً قطعی است و هیچ تصادفی در کار نیست.

## ۴ اکستروپی موجک

با توجه به تعریف (لد و همکارانش، ۲۰۱۵) اندازه اکستروپی برای یک توزیع گسسته به صورت

$$\mathscr{J}(X) = -\sum(1 - p(x))\ln(1 - p(x)),$$

است، که در آن $p(x)$ احتمال موفقیت تعریف و به‌اختصار $p$ نشان داده می‌شود. اکستروپی تابع انرژی موجک یک اندازه گذشته نگر بوده (یوسف زاده و پاک گوهر، ۲۰۲۲) و مشابه اثبات گزاره ۶ به صورت

$$\mathscr{J}(W) = -\sum_{J=1}^{M}\left(1 - \frac{q^{j-1}p}{1-q^M}\right)\ln\left(1 - \frac{q^{j-1}p}{1-q^M}\right). \tag{۱۶}$$

است. با استفاده از تقریب تابع لگاریتم $\ln(1-X) = -\frac{1}{\ln(2)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{X^n}{n}$ رابطه (۱۶) به صورت

$$\mathscr{J}(W) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{J=1}^{M}\left(1 - \frac{q^{j-1}p}{1-q^M}\right)\frac{q^{(j-1)n}p^n}{n\ln(2)(1-q^M)^n}. \tag{۱۷}$$

است. از طرفی برای مجموع سری هندسی متناهی داریم

$$\sum_{j=1}^{M} q^{(j-1)n} = \frac{1-q^{Mn}}{1-q^n} \qquad \text{و} \qquad \sum_{j=1}^{M} q^{(j-1)(n+1)} = \frac{1-q^{M(n+1)}}{1-q^{n+1}}.$$

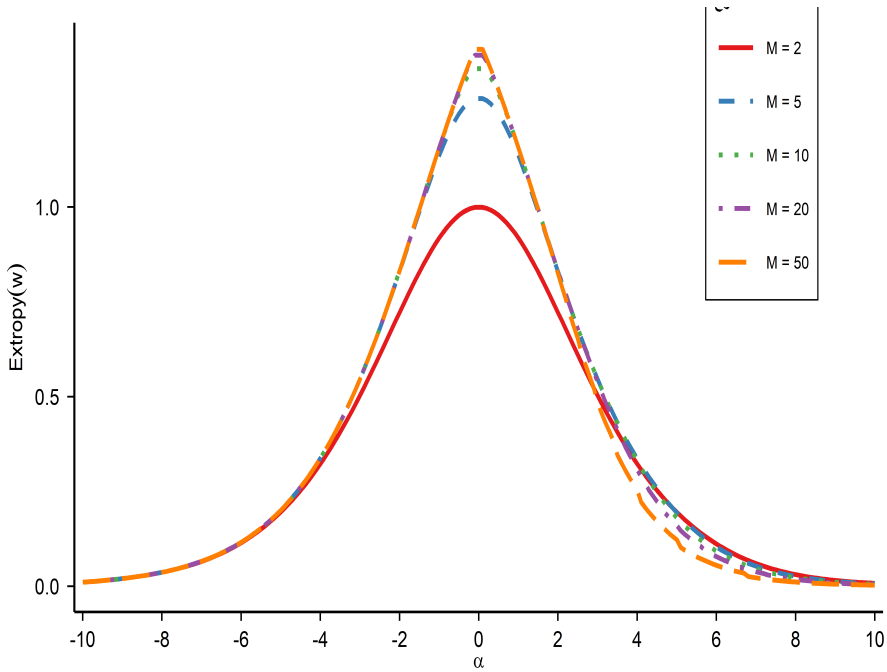
بنابراین

$$\mathscr{J}(W) = \frac{1}{\ln(2)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-2^{\alpha})^n}{n(1-2^{\alpha M})^n}\left[\frac{1-2^{\alpha Mn}}{1-2^{\alpha n}} - \frac{(1-2^{\alpha M(n+1)})(1-2^{\alpha})}{(1-2^{\alpha M})(1-2^{\alpha(n+1)})}\right]. \tag{۱۸}$$

رفتار تابع اکستروپی روی توزیع انرژی موجک در شکل ۲ نشان می‌دهد که اکستروپی نسبت به مقدار پارامتر $\alpha$ متقارن است.

**تذکر ۴.** با جایگذاری $M = 1$ در رابطه (۱۸) آنگاه اندازه اکستروپی موجک صفر می‌شود.

**گزاره ۱۰.** اکستروپی موجک سیگنال فرکتالی بالا–فرکانس با پارامتر فرکتالی $\alpha \in (-\infty, 0)$ در تعداد بی‌نهایت




**شکل ۲.** تغییرات اکستروپی موجک بر اساس پارامتر فرکتالی $\alpha$ و تعداد سطوح **M**

مقیاس $(M \to \infty)$ به اکستروپی توزیع هندسی همگرا و عبارتست از

$$\mathscr{J}(W) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p^n}{n} \left[ \frac{1}{1-q^n} - \frac{p}{1-q^{n+1}}. \right] \tag{19}$$

**برهان:** با توجه به گزاره ۳ توزیع انرژی موجک سیگنال فرکتالی بالا–فرکانس در تعداد بی‌نهایت مقیاس $(M \to \infty)$ به توزیع هندسی همگرا است. اکستروپی توزیع هندسی به صورت

$$J(X) = -\sum_{j=1}^{\infty} \left(1 - q^{j-1}p\right) \ln(1 - q^{j-1}p). \tag{20}$$

است، که با استفاده از بسط تیلور $\ln(1-pq^{j-1}) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p^n q^{n(j-1)}}{n}$ معادل با

$$J(X) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p^n}{n} \left[ \sum_{j=1}^{\infty} (1-pq^{j-1}) q^{n(j-1)}, \right] \tag{۲۱}$$

است. از طرفی $\sum_{j=1}^{\infty}(1-pq^{j-1})q^{n(j-1)} = \sum_{j=1}^{\infty} q^{n(j-1)} - p\sum_{j=1}^{\infty} q^{(n+1)(j-1)}$. با استفاده از جمع سری‌های هندسی، $\sum_{j=1}^{\infty} q^{(n+1)(j-1)} = \frac{1}{1-q^{n+1}}$، $\sum_{j=1}^{\infty} q^{n(j-1)} = \frac{1}{1-q^n}$ داریم

$$\sum_{j=1}^{\infty} (1-p\,q^{j-1})\, q^{n(j-1)} = \frac{1}{1-q^n} - \frac{p}{1-q^{n+1}}. \tag{۲۲}$$

جایگذاری رابطه (۲۲) در (۲۰) اثبات را کامل می‌کند.

**گزاره ۱۱.** اکستروپی موجک در سیستم‌های فراکتالی بالا-فرکانس، به ازای $\alpha \to 0$ به طور تقریبی عبارتست از

$$\mathscr{J}(W) = (M-1)\ln(\frac{M}{M-1}). \tag{۲۳}$$

**برهان:** با توجه به آنکه در گزاره ۴ تابع جرم احتمال توزیع انرژی موجک سیگنال فرکتالی بالا-فرکانس به ازای $\alpha \to 0^-$ به توزیع یکنواخت همگرا است بنابراین اکستروپی شانون موجک سیگنال فرکتالی بالا-فرکانس تقریبا با اکستروپی توزیع یکنواخت گسسته همگرا است و

$$J(X) = -\sum_{j=1}^{M}(1-\frac{1}{M})\ln(1-\frac{1}{M}) = (M-1)\ln(\frac{M}{M-1}).$$

**گزاره ۱۲.** به ازای $\alpha \to -\infty$ اکستروپی موجک سیستم فراکتالی بالا-فرکانس، همگرا به صفر است.

**برهان:** با توجه به رابطه (۹)، اکستروپی موجک عبارتست از

$$\mathscr{J}(W) = -\sum_{j=1}^{M} \left(1-2^{\alpha(j-1)}\right) \ln\left(1-2^{\alpha(j-1)}\right). \tag{۲۴}$$

برای بررسی رفتار این تابع در حالت حدی $\alpha \to -\infty$ حد کل عبارت را محاسبه می‌کنیم

$$\lim_{\alpha\to-\infty} \mathscr{J}(W) = -\sum_{j=1}^{M} \lim_{\alpha\to-\infty} \left[\left(1-2^{\alpha(j-1)}\right) \ln\left(1-2^{\alpha(j-1)}\right)\right].$$

از طرفی به ازای $j = ۱$ و با استفاده از قاعده هوپیتال داریم

$$\lim_{\alpha\to-\infty}\left(۱-۲^{\alpha(۱-۱)}\right)\ln\left(۱-۲^{\alpha(۱-۱)}\right)=\lim_{\alpha\to-\infty}(۱-۱)\ln(۱-۱)=۰.$$

برای $j \geq ۲$ به طور واضح $\lim_{\alpha\to-\infty} ۲^{\alpha(j-۱)} = ۰$ است که با جایگذاری در عبارت اصلی، داریم

$$\lim_{\alpha\to-\infty}\left(۱-۲^{\alpha(j-۱)}\right)\ln\left(۱-۲^{\alpha(j-۱)}\right)=۰.$$

بنابراین، مقدار حد نهایی اکستروپی عبارتست از $\lim_{\alpha\to-\infty}\mathscr{J}(W)=۰$. و اثبات کامل است.

## ۵ اعتبارسنجی با سیگنال‌های فراکتالی مصنوعی

برای بررسی رفتار شاخص‌های موجک در سیگنال‌های با ویژگی‌های فراکتالی مختلف، مجموعه‌ای از سیگنال‌های حرکت براونی کسری[۱] (fBm) با پارامترهای اسکالینگ متنوع تولید شد. پارامتر $\alpha$ که مشخصه‌ای کلیدی در توصیف رفتار مقیاس‌پذیر سیگنال‌ها محسوب می‌شود، در بازه‌ای از مقادیر منفی (رفتار ناپایدار) تا مقادیر مثبت (رفتار پایدار) انتخاب گردید. پارامتر هورست به صورت $H = \frac{\alpha+۱}{۲}$ تعریف شده است. به منظور اطمینان از قابلیت اطمینان نتایج، سه روش مختلف برای تولید سیگنال‌های $fBm$ پیاده‌سازی شد. به همین منظور از کتابخانه تخصصی $NMOF$ استفاده شد. همچنین برای تولید سیگنال‌های $fBm$ تابع $fbmSim$ به کار رفت. همچنین به منظور تولید نویز گوسی سفید و اعمال وزن‌دهی مبتنی بر پارامتر هورست و محاسبه جمع تجمعی سیگنال وزن‌دار شده از رابطه $x(t) = \sum_{i=۱}^{t} w(i)\cdot\epsilon(i)$ استفاده شد. در این روش، $\epsilon(i)$ یک نویز گوسی سفید با توزیع $N(۰,۱)$ است و وزن‌های $w(i)$ متناسب با پارامتر هورست به صورت $w(i) = i^{H۱/۲}$ تعریف می‌شوند. روش طیف توان فراکتالی تولید سیگنال در حوزه فرکانس با طیف توان متناسب با تابع $f^{-۲H-۱}$ و اعمال فازهای تصادفی و تبدیل فوریه معکوس برای بازگشت به حوزه زمان بود.

برای یک مثال شبیه‌سازی، سیگنال‌های فراکتالی با استفاده از $fBm$ تولید شدند که پارامتر فراکتالی $\alpha$ را کنترل می‌کند. بین پارامتر هورست $H$ و $\alpha$ رابطه $H = \frac{\alpha+۱}{۲}$ برقرار است. سیگنال‌ها با طول $N = ۱۰,۰۰۰$ و برای $\alpha \in \{-۳,-۲,-۱,-۰٫۵,-۰٫۳,-۰٫۱,۰٫۱,۰٫۳,۰٫۵,۱,۲,۳\}$ تولید شدند. تجزیه موجک با استفاده از موجک $Haar$ و در سطوح $M = \{۳,۵,۷\}$ انجام شد. انرژی هر سطح $j$ از ضرایب موجک بر اساس $E_j = \sum_k |d_j(k)|^۲$ محاسبه گردید. برای نرمال سازی تابع احتمال $p_j = E_j/\sum_{j=۱}^{M} E_j$ استخراج شد و آنتروپی و اکستروپی موجک با استفاده از توابع $H(W) = -\sum_{j=۱}^{M} p_j \ln p_j$ و $J(W) = -\sum_{j=۱}^{M}(۱-p_j)\ln(۱-p_j)$ محاسبه شدند. تمامی شبیه‌سازی‌ها در محیط R نسخه ۱.۲.۴ و با استفاده از بسته‌های تخصصی

[1] Fractional Brownian Motion

$waveslim$ برای تجزیه موجک و $NMOF$ برای تولید سیگنال‌های فراکتالی انجام شد.

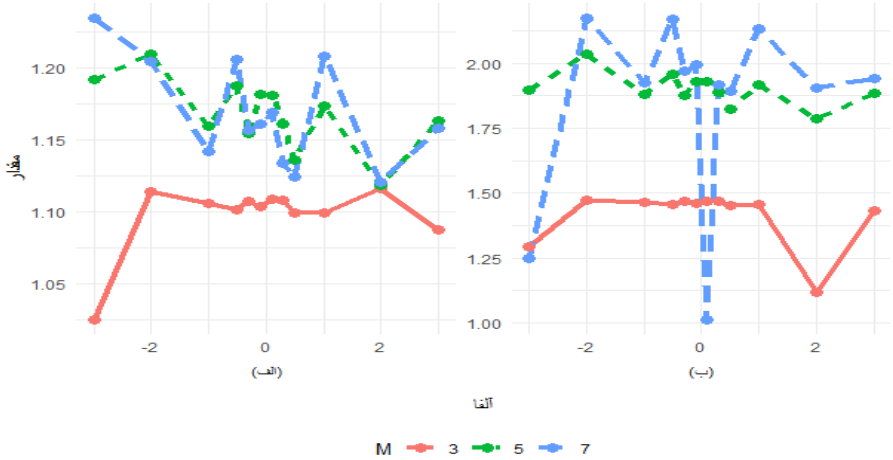
جدول ۱ مقادیر آنتروپی شانون $H(W)$ و اکستروپی $J(W)$ را برای تابع انرژی موجک $p_j$ تحت پارامترهای مختلف $\alpha$ و سطوح تجزیه $M$ ارائه می‌دهد. شکل ۳ رفتار اکستروپی و رفتار آنتروپی شانون را به ازای مقادیر $M$ و $\alpha$ نشان می‌دهند. باتوجه به نتایج شبیه‌سازی، رابطه‌ای سیستماتیکی بین $\alpha$ و شاخص‌های آنتروپی موجک $H(W)$ و اکستروپی موجک $J(W)$ مشاهده نمی‌شود. با افزایش تعداد سطوح تجزیه موجک $M$، مقدار آنتروپی موجک به طور معناداری افزایش می‌یابد در حالی که اکستروپی موجک روند افزایشی کمتری را نشان می‌دهد. با این وجود مقادیر آنتروپی و اکستروپی موجک به ازای سطوح تجزیه ۵ و ۷ تفاوت محسوسی با هم ندارند و می‌توان آن را اشباع تشخیص بی نظمی در سطح تجزیه بالاتر از ۳ تلقی کرد.

**جدول ۱.** محاسبه اکستروپی و آنتروپی موجک مدل شبیه‌سازی

| $\alpha > ۰$ | | | | $\alpha < ۰$ | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **اکستروپی** | **آنتروپی** | **M** | $\alpha$ | **اکستروپی** | **آنتروپی** | **M** | $\alpha$ |
| ۱٫۰۸۷۵ | ۱٫۴۳۲۰ | ۳ | | ۱٫۰۲۵۴ | ۱٫۲۹۱۶۱ | ۳ | |
| ۱٫۱۶۳۵ | ۱٫۸۸۴۳ | ۵ | ۳ | ۱٫۱۹۱۷ | ۱٫۸۹۵۳ | ۵ | -۳ |
| ۱٫۱۵۸۲ | ۱٫۹۴۰۹ | ۷ | | ۱٫۲۳۴۲ | ۱٫۲۴۷۲ | ۷ | |
| ۱٫۱۱۶۰ | ۱٫۱۱۶۰ | ۳ | | ۱٫۱۱۴۲ | ۱٫۴۷۱۴۱ | ۳ | |
| ۱٫۱۱۸۰ | ۱٫۷۸۶۲ | ۵ | ۲ | ۱٫۲۰۹۳ | ۲٫۰۳۶۵ | ۵ | -۲ |
| ۱٫۱۲۰۳ | ۱٫۹۰۶۰ | ۷ | | ۱٫۲۰۴۶ | ۲٫۱۷۲۴ | ۷ | |
| ۱٫۰۹۹۱ | ۱٫۴۵۴۳ | ۳ | | ۱٫۱۰۶۲ | ۱٫۴۶۵۲ | ۳ | |
| ۱٫۱۷۳۲ | ۱٫۹۱۵۳ | ۵ | ۱ | ۱٫۱۵۹۴ | ۱٫۸۸۱۶ | ۵ | -۱ |
| ۱٫۲۰۸۱ | ۲٫۱۳۲۱ | ۷ | | ۱٫۱۴۱۹ | ۱٫۹۲۴۸ | ۷ | |
| ۱٫۰۹۹۵ | ۱٫۴۵۳۵ | ۳ | | ۱٫۱۰۱۵ | ۱٫۴۵۸۲ | ۳ | |
| ۱٫۱۳۶۳ | ۱٫۸۲۱۲ | ۵ | ۰٫۵ | ۱٫۱۸۷۱ | ۱٫۹۵۶۹ | ۵ | −۰٫۵ |
| ۱٫۱۲۴۴ | ۱٫۸۹۲۸ | ۷ | | ۱٫۲۰۵۹ | ۲٫۱۶۹۵ | ۷ | |
| ۱٫۱۰۷۸ | ۱٫۴۶۹۴ | ۳ | | ۱٫۱۰۷۳ | ۱٫۴۶۹۹ | ۳ | |
| ۱٫۱۶۱۲ | ۱٫۸۸۷۴ | ۵ | ۰٫۳ | ۱٫۱۵۴۳ | ۱٫۸۷۴۹ | ۵ | −۰٫۳ |
| ۱٫۱۳۳۶ | ۱٫۹۱۷۷ | ۷ | | ۱٫۱۵۶۷ | ۱٫۹۶۸۵ | ۷ | |
| ۱٫۱۰۹۱ | ۱٫۴۷۰۳ | ۳ | | ۱٫۱۰۳۳ | ۱٫۴۶۲۲ | ۳ | |
| ۱٫۱۸۱۱ | ۱٫۹۲۹۰ | ۵ | ۰٫۱ | ۱٫۱۸۱۸ | ۱٫۹۳۰۲ | ۵ | −۰٫۱ |
| ۱٫۱۶۸۷ | ۱٫۰۱۳۸ | ۷ | | ۱٫۱۶۰۷ | ۱٫۹۹۴۵ | ۷ | |

## بحث و نتیجه‌گیری

در این مطالعه نشان داده شد به ازای مقدار منفی $\alpha$ انرژی موجک از توزیع هندسی بریده شده پیروی می‌کند و رفتار آن به‌شدت تحت تأثیر این پارامتر قرار دارد. این یافته‌ها اهمیت پارامتر $\alpha$ را در مدل‌سازی و تحلیل سیستم‌های فراکتالی بالا–فرکانس برجسته می‌کند. آنتروپی و اکستروپی موجک سیستم‌های فراکتالی بالا–فرکانس با سطح تجزیه سیستم و پارامتر فراکتالی رابطه دارند. به‌عبارتی چنانچه سطح تجزیه یا پارامتر فراکتالی را به حداقل برسانیم ($M = ۱$) یا




**شکل ۳.** (الف) اکستروپی موجک (ب) آنتروپی موجک، به ازای مقادیر مختلف $\alpha$ و $M$

$\alpha \to -\infty$ اندازه‌های آنتروپی موجک و اکستروپی موجک صفر می‌شوند که به‌معنای عدم قطعیت در سطح تجزیه پایین است. به‌ازای $M \to \infty$ حد اکستروپی موجک صفر و آنتروپی موجک ضریب ثابتی از $\alpha$ است. به‌معنای واضح تر، افزایشی شدن تعداد سطح تجزیه به‌معنای بهره دهی اطلاعات نیست. در این مطالعه، توزیع احتمالی انرژی موجک $p_j$ بر اساس توزیع هندسی بریده‌شده مدل‌سازی شد و نشان داده شد که به‌طور طبیعی از ساختار مقیاس‌پذیر سیگنال‌های فراکتالی با پارامتر طیفی منفی ($\alpha < ۰$) ناشی می‌شود. در این چارچوب، پارامتر $\alpha$ نقش کلیدی در شکل‌گیری رفتار توزیع ایفا می‌کند کوچک شدن $\alpha$ منجر به تمرکز بیشتر انرژی موجک در سطوح بالاتر فرکانس (مقیاس‌های ریزتر) می‌شود و با نزدیک‌شدن $\alpha$ به صفر، توزیع به سمت یکنواختی همگرا می‌گردد. تحلیل‌های حدی نشان داد در شرایط خاص، توزیع انرژی موجک و دو شاخص آنتروپی و اکستروپی موجک رفتارهای متمایزی از خود ابراز می‌دارند

- در حد $\alpha \to ۰^-$، توزیع انرژی به توزیع یکنواخت همگرا شده و آنتروپی به حداکثر مقدار ممکن ($\ln M$) می‌رسد، در حالی که اکستروپی به مقدار $(M-۱)\ln(\frac{M}{M-۱})$ همگرا می‌شود؛
- در مقابل، در حد $\alpha \to -\infty$، تمام انرژی در سطح اول موجک ($j = ۱$) متمرکز شده و هر دو شاخص به صفر میل می‌کنند، که نشان‌دهندهٔ یک رفتار شبه‌قطعی یا ثابت است؛
- در حد $M \to \infty$، توزیع به توزیع هندسی استاندارد همگرا شده و آنتروپی به مقدار ثابت $-\frac{q\ln q}{p} - \ln p$ همگرا می‌شود، که در آن $p = ۱ - ۲^{\alpha}$. در حالی که اکستروپی به یک مجموع نامتناهی از توابع هندسی همگرا می‌گردد.

یافته‌های عددی حاصل از شبیه‌سازی سیگنال‌های حرکت براونی کسری ($fBm$) با پارامترهای متنوع $\alpha$ و سطوح تجزیه $M \in \{۳, ۵, ۷\}$ تأیید می‌کند که آنتروپی موجک به‌طور قابل توجهی با افزایش $M$ رشد می‌کند، در حالی

که اکستروپی روند اشباع‌پذیری دارد و پس از $M = ۵$ یا ۷ دیگر بهبود چندانی نشان نمی‌دهد. این نکته از دیدگاه کاربردی بسیار حائز اهمیت است افزایش بی‌رویهٔ سطوح تجزیه موجک لزوماً به افزایش اطلاعات معنادار منجر نمی‌شود و ممکن است تنها نویز را تقویت کند. بنابراین، انتخاب بهینهٔ $M$ باید بر اساس توازن بین پیچیدگی محاسباتی و بازده اطلاعاتی صورت گیرد. بنابراین پیشنهاد می‌شود مطالعه روی انرژی سیگنال محدود به سطوح پایین نباشد به‌طوریکه در مطالعه روی یک سطح تجزیه، فرکانس ها صرفا در دو طبقه جزئیات و تقریب توزیع تقسیم می‌شوند، و اطلاعاتی از سطوح عمیق‌تر وجود ندارد و به‌همین جهت اکستروپی و آنتروپی انرژی موجکی صفر می‌شود. همچنین سیستم‌های فراکتالی بالا–فرکانس به‌ازای اینکه پارامتر فراکتالی چقدر از مقدار ثابت صفر دور می شود فاقد ارایه اطلاعات ارزشمند آنتروپی و اکستروپی خواهند بود.

## تقدیر و تشکر

با سپاس فراوان از داوران محترمی که با دقت و حوصله، مقاله حاضر را بررسی و با ارائه نظرات سازنده، نقش به سزایی در ارتقای کیفیت آن ایفا کردند. همچنین از هیئت تحریریه و ویراستاران مجله که با پیگیری دقیق و حرفه‌ای خود، فرآیند بررسی و انتشار این مقاله را تسهیل نمودند، صمیمانه قدردانی می‌شود.

## مراجع

آشورزاده، م.، بیگلری، ع. (۱۴۰۰)، تشخیص آسیب چندگانه در سازه با استفاده از روش آنتروپی موجک گسسته، نشریه مهندسی عمران فردوسی، (۲)، ۱–۱۵.

افشاری، م.، بازیاری، الف. مرادیان، ی. کرمی کبیر، ح. (۱۳۹۹)، برآوردگرهای بیزی آستانه موجک برای تابع رگرسیون ناپارامتری بر اساس توزیع پیشین آمیخته، مجله علوم آماری، ۱۴(۲)، ۲۸۷–۳۰۶.

ایران‌منش، الف.، اولیاءزاده، ف.، فکور، و. (۱۴۰۰)، برآورد آنتروپی گذشته در داده‌های طول–اریب، مجله علوم آماری، ۱۵(۲)، ۳۶۳–۳۸۰.

شیرازی، الف. (۱۳۹۹)، برآورد موجکی تابع چگالی چندک به روش آستانه‌ای بلوکی تحت تابع زیان ۲L، مجله علوم آماری، ۱۴(۱)، ۱۹۵–۲۱۴.

DiCrescenzo, A., and Longobardi, M. (2004), A Measure of Discrimination Between Past Lifetime Distributions, *Statistics and Probability Letters*, **67**(2), 173–182. https://doi.org/10.1016/j.spl.2003.11.019

Huang, H., and Instruments, T. R. (2025), The Theory of Informity: A Novel Probability Framework, *Algebra, Geometry and Probability Theory*, **80**(1), 53-59. https://doi.org/10.17721/1812-5409.2025/1.7

Lad, F., Sanfilippo, G., and Agrò, G. (2015), Extropy: Complementary Dual of Entropy, *Statistical Science*, **30**(1). https://doi.org/10.1214/14-sts430

Ramirez-Pacheco, Julio. (2025)."Wavelet Extropy of Fractal Signals, *Revista Mexicana de Física E*, 22.1 Jan-Jun: 010211-1.

Wojnowicz, M., Chisholm, G., Wolff, M., and Zhao, X. (2016), Wavelet Decomposition of Software Entropy Reveals Symptoms of Malicious Code, *Journal of Innovation in Digital Ecosystems*, **3**(2), 130–140. https://doi.org/10.1016/j.jides.2016.10.009.

Yousefzadeh, F, and Pakgohar, A. (2022). Some Properties of Quantile Past Lifetime Extropy, *Proceeding of the 8th Seminar on Reliability Theory and its Applications*, Ferdowsi University of Mashhad, Mashhad, Iran, pp: 229-240.

Zunino, L., Pérez, D. G., Garavaglia, M., and Rosso, O. A. (2007), Wavelet Entropy of Stochastic Processes, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, **379**(2), 503-512.