مجله علوم آماری، بهار و تابستان ۱۳۸۹
جلد ۴، شماره ۱، ص ۸۹-۱۰۴

# D-کارایی طرح‌های D-بهینه برای مدل پواسون با عرض از مبداء تصادفی

**مهرداد نیاپرست، سحر مهرمنصور**

**گروه آمار، دانشگاه رازی کرمانشاه**

**تاریخ دریافت: ۱۳۸۸/۹/۲۵ تاریخ آخرین بازنگری: ۱۳۸۹/۴/۱۹**

**چکیده** : عمده تحقیقات بهینه‌سازی طرح برای مدل‌های با اثرات آمیخته روی مدل‌های خطی و مدل‌های با پاسخ دودویی تمرکز دارد. اخیراً مدل‌های پواسون با اثرات تصادفی نیز توسط بعضی از محققین در نظر گرفته شده است. در این مقاله حالتی خاص از مدل‌های آمیختهٔ پواسون، تحت عنوان مدل پواسون با عرض از مبدأ تصادفی، بررسی می‌شود. تغییرات طرح آزمایش بر حسب واریانس اثر تصادفی را به‌دست آورده و نشان داده می‌شود که این تغییرات وابسته به پارامتر واریانس است. به کمک ملاک D-کارایی تأثیر اثر تصادفی روی نقاط طرح در مقایسه با مدل‌های متناظر بدون اثرات تصادفی بررسی و نشان داده می‌شود که این کارایی به مقدار واریانس اثر بستگی دارد.

**واژه‌های کلیدی** : D -بهینه، شبه‌درستنمایی، D-کارایی، مدل رگرسیونی پواسون، ماتریس شبه اطلاع فیشر، اثر تصادفی.

---

آدرس الکترونیک مسئول مقاله: مهرداد نیاپرست، Niaparast@razi.ac.ir
کد موضوع‌بندی ریاضی (۲۰۱۰): 62K05

[ Downloaded from jss.irstat.ir on 2026-11-23 ]

[ DOR: 20.1001.1.17358183.1389.4.1.15.3 ]

## ۱ مقدمه:

تاریخ بهینه‌سازی طرح آزمایش‌ها به سال ۱۹۱۸ بر می‌گردد که اسمیت براساس مینیمم کردن بدترین حالت خطای پیش‌بینی برای مدل خطی تک متغیره تا مرتبه ۶ بهترین مجموعه از نقاط $x_i$ ها را برای دیدن متغیر پاسخ به‌دست آورد. مرور کلی فدرو (۱۹۷۲)، سیلوی (۱۹۸۰) و پوکلسهایم (۱۹۸۳) نشان می‌دهد که قسمت اعظم کار در زمینهٔ بهینه‌سازی طرح آزمایش‌ها روی مدل‌های خطی است. در حالی‌که مدل‌های خطی تعمیم‌یافته و غیر خطی از نقطه‌نظر کاربردی از اهمیت بیشتری برخوردارند. سختی اصلی در این زمینه به این نکته برمی‌گردد که ماتریس اطلاع فیشر براساس تابع درستنمایی به مقادیر پارامترها وابسته است. این وابستگی باعث یک مشکل دو سویه می‌شود. از یک طرف برای پیدا کردن طرح آزمایش بهینه باید مقادیر پارامتر را بدانیم و از طرف دیگر برای دانستن مقادیر پارامتر نیاز به دانستن طرح آزمایش است. چرنوف (۱۹۵۳) و باکس و لوکاس (۱۹۵۹) استفاده از بهینه‌سازی موضعی طرح آزمایش را برای مدل‌های غیر خطی پیشنهاد دادند در این روش طرح بهینه برای مدل براساس مقادیر آغازین پارامترها به‌دست می‌آید. چون در مدل‌های آمیخته خطی تعمیم‌یافته، فرم بسته‌ای برای تابع درستنمایی به‌دست نمی‌آید، روش شبه درستنمایی مورد استفاده قرار می‌گیرد، که در آن فقط نیاز به دانستن گشتاورهای اول و دوم است (مک کولاک و نلدر، ۱۹۹۸). نیاپرست (۲۰۰۹) با روش شبه‌درستنمایی طرح D-بهینه را برای مدل ساده با اثر عرض از مبداء تصادفی به‌دست آورد. در این مقاله این روش به طرح‌های D-بهینه برای مدل پواسون مرتبهٔ دوم با اثر عرض از مبداء تصادفی تعمیم داده می‌شود. هم‌چنین به کمک ملاک D-کارایی تأثیر اثر تصادفی بر روی کارایی طرح‌های D-بهینه بررسی می‌شود.

در بخش ۲ به تعریف مدل پرداخته و ساختار کوواریانس آن به‌دست آورده می‌شود. در بخش ۳ ضمن تشریح روش شبه درستنمایی، با استفاده از آن ماتریس اطلاع برای پارامترها به‌دست آورده می‌شود. در بخش‌های ۴ و ۵ ملاک D-بهینه[۱]

[۱] D-optimal criterion

[ Downloaded from jss.irstat.ir on 2026-11-23 ]

[ DOR: 20.1001.1.17358183.1389.4.1.15.3 ]

معرفی می‌شود، سپس این ملاک برای دو مدل خاص به‌دست آورده خواهد شد.

## ۲ مدل

مدل رگرسیونی پواسون با اثر عرض از مبدأ تصادفی را به‌صورت

$$Y_{ijk}|b_i \overset{ind}{\sim} P(\mu_{ij}^{(b_i)}) \qquad \begin{cases} i = ۱,\ldots,s & \\ j = ۱,\ldots,t_i & \sum_j m_{ij} = m_i \\ k = ۱,\ldots,m_{ij} & n = \sum_i m_i \end{cases}$$

در نظر بگیرید، که در آن $E(Y_{ijk}|b_i) = \mu_{ij}^{(b_i)} = \exp(b_i + \mathbf{f}^T(x_{ij})\beta)$ مشخص کنندهٔ تابع پیوند کانونی، $Y_{ijk}$ بیان‌گر تکرار$k$ام برای موضوع[۲] $i$ام در نقطهٔ $x_{ij}$ از ناحیهٔ طرح، $m_{ij}$ نشان‌دهنده تعداد تکرارهای موضوع $i$ در نقطه $x_{ij}$، $\mathbf{f}^T = (f_۰,\ldots,f_{p-۱})$ بردار شامل توابعی معلوم از $x$، $\beta$ بردار p-بعدی پارامترها رگرسیونی، $b_i$ اثر تصادفی دارای توزیع نرمال با میانگین صفر و واریانس $\sigma^۲$ است. به‌عبارت دیگر $\beta_۰ + b_i$ اثر عرض از مبدأ تصادفی است. هم‌چنین فرض کنید برای موضوع‌های مختلف اثرهای تصادفی ناهمبسته‌اند. به‌عبارت دیگر $Cov(b_i, b_{i'}) = ۰$، به ازای هر $i \neq i'$. توجه شود که با توجه به تعریف مدل

$$Var(Y_{ijk}|b_i) = E(Y_{ijk}|b_i) = \mu_{ij}^{(b_i)}$$

همانند نیاپرست (۲۰۰۹) و با توجه به خاصیت $b_i$ها، مشاهدات از یک موضوع دارای ساختار واریانس به‌صورت

$$\begin{aligned} Var(Y_{ijk}) &= Var(E(Y_{ijk}|b_i)) + E(Var(Y_{ijk}|b_i)) \\ &= e^{۲f^T(x_{ij})\beta+\sigma^۲}(e^{\sigma^۲} - ۱) + e^{f^T(x_{ij})\beta+\frac{۱}{۲}\sigma^۲} \\ &= \mu_{ij}^۲(e^{\sigma^۲} - ۱) + \mu_{ij} \end{aligned}$$

و کوواریانس به‌صورت

$$Cov(Y_{ijk}, Y_{ij'k'}) = Cov(E(Y_{ijk}|b_i), E(Y_{ij'k'}|b_i)) + E(Cov(Y_{ijk}, Y_{ij'k'}|b_i))$$

[۲] individual

[ Downloaded from jss.irstat.ir on 2026-11-23 ]

[ DOR: 20.1001.1.17358183.1389.4.1.15.3 ]

$$= \begin{cases} \mu_{ij}\mu_{ij'}(e^{\sigma^2}-1) & (j,k)\neq(j',k') \\ 0 & i\neq i' \end{cases}$$

هستند، که در آن

$$\mu_{ij} = E(Y_{ijk}) = E(E(Y_{ijk}|b_i)) = e^{f^T(x_{ij})\beta+\frac{1}{2}\sigma^2}$$

فرض کنید $\mathbf{Y}_i=(\mathbf{Y}_{i1}^T,\ldots,\mathbf{Y}_{it_i}^T)^T$ یک بردار $m_i\times 1$ از مقادیر موضوع $i$ام باشد، که در آن $\mathbf{Y}_{ij}=(Y_{ij1},\ldots,Y_{ijm_{ij}})^T$ به ازای $j=1,\ldots,t_i$، یک بردار $m_{ij}\times 1$ از تکرارهای موضوع $i$ام در سطر $j$ام از $x$ $(x_{ij})$ است. با استفاده از جبر ماتریس‌ها داریم

$$V_i = Var(Y_i) = \dot{A}_i + \dot{a}_i\dot{a}_i^T \qquad (1)$$

که در آن

$$\dot{a}_i = \sqrt{e^{\sigma^2}-1}\left(\mu_{i1}1_{m_{i1}}^T\ldots\mu_{it_i}1_{m_{it_i}}^T\right)^T$$
$$\dot{A}_i = diag\left(\mu_{i1}I_{m_{i1}},\ldots,\mu_{it_i}I_{m_{it_i}}\right)$$

به طوری که $I_v$ ماتریس همانی $v\times v$ و $\mathbf{1}_v$ بردار $v\times 1$ با عناصر ۱ است. توجه شود که $\mu_i=(\mu_{i1},\ldots,\mu_{it_i})^T$ به بردار $\beta$ از طریق $\mu_{ij}$ وابسته است. اگر $\mathbf{Y}=(\mathbf{Y}_1^T,\ldots,\mathbf{Y}_s^T)^T$ بردار کل مشاهدات باشد با توجه به ناهمبستگی موضوعات مختلف داریم $V=Var(\mathbf{Y})=diag\left(V_1,\ldots,V_s\right)$ در این مقاله دو حالت خاص در نظر گرفته می‌شود.

۱- مدل رگرسیونی پواسون ساده با عرض از مبدأ تصادفی[۳] (SM):

$$\mu_{ij}^{(b_i)} = \exp(b_i+\beta_0+\beta_1 x_{ij})$$

۲- مدل رگرسیونی پواسون درجه دوم با عرض از مبدأ تصادفی[۴] (QM):

$$\mu_{ij}^{(b_i)} = \exp(b_i+\beta_0+\beta_1 x_{ij}+\beta_2 x_{ij}^2)$$

[۳] Simple Model

[۴] Quadratic Model

[ Downloaded from jss.irstat.ir on 2026-11-23 ]

[ DOR: 20.1001.1.17358183.1389.4.1.15.3 ]

## ۳ شبه‌درستنمایی

برخلاف مدل‌های تعمیم‌یافته خطی با اثرات ثابت، روش ماکسیمم درستنمایی قابل استفاده برای تخمین پارامترهای مدل‌های آمیخته خطی تعمیم‌یافته از جمله مدل‌های ارائه شده در این مقاله نیست. تابع لگاریتم درستنمایی

$$\ell(\beta; y) = \sum \log \int \prod_{j=1}^{t_i} \prod_{k=1}^{m_{ij}} \frac{e^{\mu_{ij}^{b_i}} (\mu_{ij}^{b_i})^{y_{ijk}}}{y_{ijk}!} . \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} b_i^2} db_i$$

شامل انتگرال‌گیری روی مقادیر اثرات تصادفی $b_i$ است. بنابراین نه تنها برآورد پارامترها با روش‌های غیرعددی میسر نیست، بلکه به دست‌آوردن ماتریس اطلاع فیشر، ماتریس کواریانس $\frac{\partial}{\partial\beta} \log \ell(\beta : \mathbf{y})$ نیز مقدور نمی‌باشد. اگرچه تلاش‌هایی برای حل این مشکل صورت گرفته است ولی تاکنون نتیجه قابل قبولی ارائه نشده است (برای مطالعه بیشتر می‌توان به میلکه و شوابه (۲۰۱۰) اشاره کرد). برای حل این مشکل روش‌های جایگزین استفاده می‌شود. در این مقاله روش شبه‌درستنمایی به‌عنوان روشی تقریبی برای درستنمایی به‌کار برده می‌شود.

با توجه به مک کولاک و نلدر (۱۹۹۸)، برآوردگر شبه‌درستنمایی $\beta$ جواب معادله شبه‌درستنمایی $U(\hat{\beta}, \mathbf{y}) = 0$ است، که در آن $U(\beta, \mathbf{y}) = D^T V^{-1}(\mu(\beta))(\mathbf{y} - \mu(\beta))$ تابع شبه–امتیاز[۵]، D ماتریس ژاکوبین شامل مشتقات جزیی مرتبه اول از عناصر $\mu(\beta)$، $V(\mu(\beta)) = V$ ماتریس کوواریانس همیشه مثبت است. لازم به ذکر است این روش با روش درستنمایی در حالتی که مشاهدات از توزیع نرمال باشند یکی است. واریانس تابع شبه–امتیاز $U(\beta, \mathbf{Y})$ به‌صورت زیر است.

$$Var(U(\beta, Y)) = -E(\frac{\partial U(\beta, Y)}{\partial \beta}) = D^T (V(\mu(\beta)))^{-1} D$$

این ماتریس نقش ماتریس اطلاع فیشر را بازی می‌کند و به همین دلیل ماتریس شبه–اطلاع[۶] نامیده می‌شود. فرض کنید که طرح آزمایش تقریبی[۷] $\xi_i$ برای موضوع

[۵] Quasi-Score function

[۶] Quasi-Information

[۷] Approximate Design

[ Downloaded from jss.irstat.ir on 2026-11-23 ]

[ DOR: 20.1001.1.17358183.1389.4.1.15.3 ]

$i$ام به‌صورت

$$\xi_i = \left\{ \begin{array}{c} x_{i1}, \ldots, x_{it_i} \\ p_{i1}, \ldots, p_{it_i} \end{array} \right\}$$

باشد، که در آن $x_{ij}$ها نقاط تکیه‌گاه طرح و $p_{ij}$ نسبتی از نمونه است که در نقطه $x_{ij}$ مشاهده می‌شود. بدیهی است که‌به ازای هر $i$، $\sum_{j=1}^{t_i} p_{ij} = 1$. با توجه به رابطه (۱) برای هر $\xi_i$ داریم

$$\eta_\beta(\xi_i) = D_i^T(\dot{A}_i + \dot{a}_i\dot{a}_i^T)^{-1}D_i = \dot{F}_i^T(\dot{A}_i^{-1} + (e^{\sigma^2} - 1)1_{m_i}1_{m_i}^T)^{-1}\dot{F}_i \quad (۲)$$

که در آن $\dot{F}_i^T = D_i^T\dot{A}_i^{-1}$. نیاپرست (۲۰۰۹) نشان داد ماتریس شبه–اطلاع (۱) را می‌توان به‌صورت

$$\eta_\beta(\xi_i) = e^{\frac{1}{2}\sigma^2}(e^{\frac{1}{2}\sigma^2}(F_i^T\dot{A}_i\dot{F}_i)^{-1} + k)^{-1} = e^{\frac{1}{2}\sigma^2}(M^{-1}(\xi_i) + k)^{-1} \quad (۳)$$

نوشت، که در آن $M(\xi_i) = e^{-\frac{1}{2}\sigma^2}F_i^TA_iF_i$ ماتریس اطلاع مدل بدون اثر تصادفی، $A_i = diag\Big(m_{i1}\mu_{i1}, \ldots, m_{it_i}\mu_{it_i}\Big)$، $F_i^T = \Big(\mathbf{f}(x_{i1}), \ldots, \mathbf{f}(x_{it_i})\Big)$، $k = e^{\frac{1}{2}\sigma^2}\mathbf{c}\mathbf{c}^T$ و $\mathbf{c} = \sqrt{e^{\sigma^2} - 1}(1 \quad 0 \quad \ldots \quad 0)$ است. وی نشان داد تمام موضوعات را می‌توان تحت یک طرح آزمایش مشاهده نموده و اندیس $i$ را از کلیه روابط بالا حذف کرد.

## ۴ D–بهینه موضعی برای SM

یکی از معیارهای بهینه‌سازی طرح، ملاک D–بهینگی است که بر اساس دترمینان ماتریس اطلاع تعریف می‌شود.

**تعریف ۱** : $\xi^*$ یک طرح D–بهینه است اگر برای هر $\xi$ نابرابری

$$\det(\eta_\beta(\xi^*)) \geq \det(\eta_\beta(\xi))$$

برقرار باشد، یا به‌طور معادل

$$\xi^* = arg\max_{\xi} \log[\det(\eta_\beta(\xi))]$$

[ Downloaded from jss.irstat.ir on 2026-11-23 ]

[ DOR: 20.1001.1.17358183.1389.4.1.15.3 ]

در بسیاری از کاربردها به‌خصوص در علوم پزشکی و زیستی ناحیه طرح معمولاً زیرمجموعه نامنفی از اعداد حقیقی است. در این مقاله اگر ناحیه طرح اعداد حقیقی نامنفی $[h,\infty)$، به ازای $h \geq 0$ باشد تحت عنوان ناحیه طرح نامحدود و اگر به صورت زیرمجموعه‌ای از اعداد حقیقی نامنفی $[h,g]$ باشد تحت عنوان ناحیه طرح محدود شناخته می‌شود. فرض کنید میانگین $Y_{ijk}$ به‌عنوان تابعی از $x_j$ یکنوای نزولی باشد. به‌عبارت دیگر در رابطهٔ $\mu(x_j) = e^{\beta_0+\beta_1 x_j+\frac{1}{2}\sigma^2}$ فرض شود $\beta_1 \leq 0$. اگر $\mu_h = \mu(h)$ امید ریاضی $Y_{ijk}$ در h از ناحیه طرح باشد، میانگین استاندارد شده کانونی $\tilde{\mu}_j = \tilde{\mu}(x_j) = \frac{\mu(x_j)}{\mu(h)}$ متناظر با ناحیه طرح نامحدود و ناحیه طرح محدود $\tilde{\mu}_j$ به ترتیب متعلق به $(0,1]$ و $[\tilde{\mu}_g,1]$ خواهد بود. لم زیر به ما کمک می کند که در جستجوی طرح D–بهینه، تنها طرح‌هایی با دو نقطه تکیه‌گاه در نظر گرفته شوند.

**لم ۱** (نیاپرست، ۲۰۰۹): برای مدل SM طرح آزمایش D–بهینه $\xi^*$ دارای دو مقدار مختلف $x_1^*$ و $x_2^*$ است، به‌عبارت دیگر $\xi^*$ به‌صورت زیر است.

$$\xi^* = \begin{Bmatrix} x_1^* & x_2^* \\ p^* & (1-p^*) \end{Bmatrix}$$

با توجه به لم ۱، در قضیه زیر دترمینان ماتریس اطلاع بدست آورده شده است.

**قضیه ۱** (نیاپرست، ۲۰۰۹): مدل SM را در نظر بگیرید، برای طرح دو نقطه‌ای $\xi = \begin{Bmatrix} x_1 & x_2 \\ p & (1-p) \end{Bmatrix}$ برای برآورد $\beta$ داریم

$$\det(\eta_\beta(\xi)) \propto \frac{p(1-p)\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_2(\ln\tilde{\mu}_1 - \ln\tilde{\mu}_2)^2}{1+\gamma(m,\beta_0(h),\sigma^2)(p\tilde{\mu}_1+(1-p)\tilde{\mu}_2)}$$

که در آن $\gamma(m,\beta_0(h),\sigma^2) = me^{\beta_0(h)+\frac{1}{2}\sigma^2}(e^{\sigma^2}-1)$ ، $\beta_0(h) = \beta_0 + \beta_1 h$.

با استفاده از قضیه ۱ می‌توان برای مقادیر مختلف $\gamma(m,\beta_0(h),\sigma^2)$ طرح D–بهینه را به‌دست آورد. جدول ۱ این طرح‌ها را به ازاء بعضی از مقادیر $\gamma$ نشان می‌دهد. توجه شود $\tilde{\mu}_2^* = 0$ معادل $x_2^* = h$ است. بنابراین یکی از نقاط طرح، نقطه

[ Downloaded from jss.irstat.ir on 2026-11-23 ]
[ DOR: 20.1001.1.17358183.1389.4.1.15.3 ]

کنترل یا کران پایین ناحیه طرح است. برای مدل رگرسیونی پواسون ساده با اثرات ثابت، یعنی $\sigma^2 = 0$، داریم $\gamma(m, \beta_0(h), \sigma^2) = 0$ به ازای هر $m$ و $\beta_0(h)$. در این حالت همان‌گونه که در جدول ۱ ملاحظه می‌شود ۵۰% داده‌ها باید در نقطه $h$ مشاهده شوند و ۵۰% مابقی نیز در نقطه $h+\frac{1}{\beta_1}\ln(0/1353)$ مشاهده گردند. این نتیجه با نتیجه ارائه شده در یان‌پینگ و همکاران (۲۰۰۶) منطبق است.

جدول ۱: طرح‌های D–بهینه برای مدل SM

| $\tilde{\mu}_2^*$ | $\tilde{\mu}_1^*$ | $p_1^*$ | $\lambda(m, \beta_0, \sigma^2)$ |
|---|---|---|---|
| ۱ | ۰/۱۳۵۳ | ۰/۵ | ۰ |
| ۱ | ۰/۱۲۷۹ | ۰/۵۴۳ | ۰/۵ |
| ۱ | ۰/۱۱۵۵ | ۰/۶۰۹ | ۲ |
| ۱ | ۰/۱۰۴۴ | ۰/۶۶۵ | ۵ |
| ۱ | ۰/۰۹۶۲ | ۰/۷۰۳ | ۱۰ |
| ۱ | ۰/۰۸۶۴ | ۰/۷۴۶ | ۳۰ |
| ۱ | ۰/۰۸۲۵ | ۰/۷۶۲ | ۶۰ |
| ۱ | ۰/۰۸۰۷ | ۰/۷۶۹ | ۱۰۰ |
| ۱ | ۰/۰۷۷۹ | ۰/۷۸۱ | ۱۰۰۰ |
| ۱ | ۰/۰۷۷۶ | ۰/۷۸۲ | ۱۰۰۰۰ |

به لحاظ نظری $x_i$ها می‌توانند به سمت $\infty$ میل کنند. ولی در عمل این اتفاق قابل مشاهده نیست و در آزمایش‌های واقعی مقادیر بسیار کوچک برای $\tilde{\mu}$ قابل تصور نمی‌باشد. بنابراین در عمل معمولاً طرح‌های با ناحیه محدود در نظر گرفته می‌شود، که در آن $x_j \in [h, g]$ و $\tilde{\mu}_j \in [\tilde{\mu}_g, 1]$.

یک راه کلی، انتخاب طرح استاندارد است، که در آن نقاط ابتدا و انتهای طرح یعنی $h$ و $g$ با احتمال مساوی در نظر گرفته می‌شوند. از چنین طرحی در مدل خطی با تعداد دو پارامتر داریم استفاده می‌شود. اگر D–کارایی به‌صورت

$$D\text{–کارایی} = \left(\frac{\det \eta_\beta(\xi)}{\det \eta_\beta(\xi^*)}\right)^{\frac{1}{p}}$$

تعریف شود، می‌توان به بررسی کارایی یک طرح نسبت به طرح D–بهینه ارائه شده پرداخت. این کارایی کمک می‌کند که نیرومندی طرح D–بهینه را بتوان اندازه‌گیری کرد. بدین معنی که اگر در حضور عامل تصادفی این عامل در نظر گرفته نشود تا

[ Downloaded from jss.irstat.ir on 2026-11-23 ]
[ DOR: 20.1001.1.17358183.1389.4.1.15.3 ]

چه اندازه می‌تواند در کارایی طرح D-بهینه تأثیر داشته باشد. نتایج ارائه شده در جدول ۲ نشان می‌دهد که برای حالت $\tilde{\mu}_g =$ ۰/۰۱، که ناحیه طرح بسیار بزرگ و به ناحیه نامحدود نزدیک است استفاده از طرح استاندارد نسبت به طرح D-بهینه نامناسبتر است. در حالی که در وقتی ناحیه طرح محدودتر است، یعنی $\tilde{\mu}_g =$ ۰/۲، استفاده از طرح استاندارد تأثیر چندانی ندارد.

جدول ۲: D-کارایی طرح استاندارد نسبت به طرح D-بهینه برای مدل SM

| $\gamma(m, \beta_\circ(h), \sigma^2)$ | D-کارایی ($\tilde{\mu}_g =$ ۰/۰۱) | D-کارایی ($\tilde{\mu}_g =$ ۰/۲) |
|---|---|---|
| ۰ | ۰/۶۲۵۹ | ۱ |
| ۰/۵ | ۰/۶۳۱۱ | ۰/۹۹۷۰ |
| ۲ | ۰/۶۲۹۱ | ۰/۹۸۲۷ |
| ۵ | ۰/۶۱۸۷ | ۰/۹۶۵۹ |
| ۱۰ | ۰/۶۰۸۱ | ۰/۹۵۴۱ |

## ۵ D-بهینه موضعی برای QM

گاهی ممکن است اثر متغیر پیشگوکننده بر روی میانگین متغیر پاسخ از آنچه به‌وسیله مدل SM بیان می‌شود قوی‌تر باشد، بنابراین مدل QM ممکن است مناسب باشد. در این بخش طرح D-بهینه برای این مدل در نظر گرفته می‌شود. همانند بخش ۳ فرض می‌شود تمام مشاهدات تحت یک طرح آزمایش مشاهده می‌شوند بنابراین امیدریاضی $Y_{ijk}$، یعنی

$$\mu_j = \mu(x_j) = e^{\frac{1}{2}\sigma^2 + \beta_\circ + \beta_1 x_j + \beta_2 x_j^2}$$

به‌عنوان تابعی نزولی از $x_j$ در نظر گرفته می‌شود.

**لم ۲** : برای مدل QM طرح D-بهینه دارای ۳ نقطه مجزای $x_1^*, x_2^*, x_3^*$ به ترتیب با نسبت‌های $p_1^*, p_2^*, p_3^*$ است به‌عبارت دیگر طرح D-بهینه $\xi^* = \begin{Bmatrix} x_1^* & x_2^* & x_3^* \\ p_1^* & p_2^* & p_3^* \end{Bmatrix}$ است.

[ Downloaded from jss.irstat.ir on 2026-11-23 ]

[ DOR: 20.1001.1.17358183.1389.4.1.15.3 ]

**برهان** : با توجه به قضیه هم‌ارزی شرط لازم و کافی برای D-بهینه بودن $\xi^*$ برای برآورد $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ عبارت است از

$$\mu(x) f^T(x) M^{-1}(\xi^*) \eta^{-1}(\xi^*) M^{-1}(\xi^*) f(x) \leq tr[\eta^{-1}(\xi^*) M^{-1}(\xi^*)] \qquad (۴)$$

(برای توضیح بیشتر صفحات ۷۹-۷۶ فدرو و هکل(۱۹۹۷) دیده شود.) در اینجا $f^T(x) = (1 \quad x \quad x^2)$ و $\mu(x) = e^{\beta_0+\beta_1 x+\beta_2 x^2+\frac{1}{2}\sigma^2}$ است. از آنجا که $M^{-1}(\xi^*)\eta^{-1}(\xi^*)M^{-1}(\xi^*)$ ماتریس ۳×۳ متقارن، همیشه مثبت و معلومی است می‌توان آن را به‌صورت

$$M^{-1}(\xi^*)\eta^{-1}(\xi^*)M^{-1}(\xi^*) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}$$

در نظر گرفت. بنابراین رابطه (۴) را می‌توان به‌صورت

$$\mu(x)\begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \end{pmatrix} \leq \nu$$

یا

$$\begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \end{pmatrix} \leq k(x)$$

نشان داد، که در آن $k(x) = \frac{\nu}{\mu(x)}$. سمت چپ نامساوی بالا را می‌توان به‌صورت یک چندجمله‌ای از مرتبه ۴ نوشت. بنابراین شرط لازم و کافی برای اینکه $\xi^*$ طرح D-بهینه باشد، این است که به‌صورت

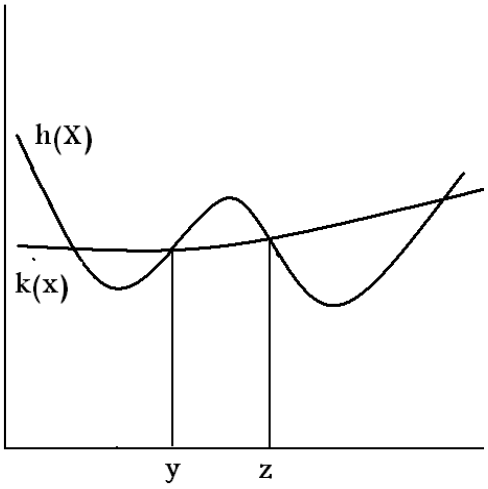
$$h(x) \leq k(x), \quad h(x) = a_4 x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 > 0$$

خلاصه شود، که در آن $a_i$ به ازای $i = 0, \ldots, 4$ اعداد ثابتی هستند. با توجه به همیشه مثبت فرض‌شدن $\eta^{-1}(\xi^*)M^{-1}(\xi^*)$، فرم درجه دوم $h(x) > 0 \quad \forall x$، دارای یک ماکسیمم موضعی است. حال فرض کنید برای $x$هایی که $\mu(x)$ در آن نزولی یا

[ Downloaded from jss.irstat.ir on 2026-11-23 ]

[ DOR: 20.1001.1.17358183.1389.4.1.15.3 ]

$k(x)$ در آن صعودی است بخواهد در بیش از سه نقطه، برای مثال چهار نقطه، $h(x) = k(x)$ باشد. بنابراین همان‌گونه که در شکل ۱ ملاحظه می‌شود، باید دو نقطه $y$ و $z$ وجود داشته باشند که در این فاصله $h(x) \geq k(x)$ و این با قضیه هم‌ارزی در تناقض است. بنابراین باید در سه نقطه همدیگر را قطع کنند.□ توجه شود که در این مدل نیز ناحیه‌های طرح از پائین کراندار هستند و مانند حالت قبل منظور از ناحیه طرح کراندار، کراندار از بالا است، یعنی $[h, g]$ و ناحیه طرح نامحدود $[h, \infty)$ است. برای سادگی در ادامه فرض می‌کنیم $h = ۰$. قضیه زیر با استفاده از لم ۱، دترمینان ماتریس اطلاع فیشر را برای $\beta$ مشخص می‌کند.




شکل ۱: نمای کلی از رابطه $h(x), k(x)$

**قضیه ۲** : مدل $QM$ را در نظر بگیرید. برای طرح آزمایش سه نقطه‌ای $\xi = \left\{ \begin{array}{ccc} x_۱ & x_۲ & x_۳ \\ p_۱ & p_۲ & (۱ - p_۱ - p_۲) \end{array} \right\}$ دترمینان ماتریس اطلاع به‌صورت

$$\det(\eta(\xi)) = \frac{۱}{۱ + \lambda(m, \beta_۰, \sigma^۲)} \qquad (۵)$$
$$p_۱ p_۲ (۱ - p_۱ - p_۲) \tilde{\mu}_۱ \tilde{\mu}_۲ \tilde{\mu}_۳ \{x_۱^۲(x_۲ - x_۳) - x_۲^۲(x_۱ - x_۳) + x_۳^۲(x_۱ - x_۲)\}$$

[ Downloaded from jss.irstat.ir on 2026-11-23 ]

[ DOR: 20.1001.1.17358183.1389.4.1.15.3 ]

است، که در آن $\tilde{\mu}_j = \frac{\mu_j}{\mu_\circ}$، $\mu_\circ = e^{\beta_\circ + \frac{1}{2}\sigma^2}$، $x_j = \frac{1}{\sqrt{2\beta_2}}\{\sqrt{r} - \sqrt{r + 4\log\tilde{\mu}_j}\}$ برای حالتی که $\beta_2 > 0$ و $x_j = \frac{1}{\sqrt{-2\beta_2}}\{\sqrt{-r} - \sqrt{-r - 4\log\tilde{\mu}_j}\}$ برای حالتی که $\beta_2 < 0$، $r = \frac{\beta_1^2}{2\beta_2}$ و $\lambda(m, \beta_\circ, \sigma^2) = m\mu_\circ(e^{\sigma^2} - 1)$.

**برهان** : با استفاده از رابطه (۳) داریم

$$\eta_\beta(\xi) = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\sigma^2}(\mathrm{M}^{-1}(\xi) + \mathrm{k})^{-1} = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\sigma^2}(\mathrm{M}^{-1} + \mathbf{c}\mathbf{c}^{\mathrm{T}})^{-1} =$$

$$\begin{pmatrix} \sum \mathrm{m_j}\mu_\mathrm{j} & \sum \mathrm{m_j}\mu_\mathrm{j}\mathrm{x_j} & \sum \mathrm{m_j}\mu_\mathrm{j}\mathrm{x_j^2} \\ \sum \mathrm{m_j}\mu_\mathrm{j}\mathrm{x_j} & \sum \mathrm{m_j}\mu_\mathrm{j}\mathrm{x_j^2} & \sum \mathrm{m_j}\mu_\mathrm{j}\mathrm{x_j^3} \\ \sum \mathrm{m_j}\mu_\mathrm{j}\mathrm{x_j^2} & \sum \mathrm{m_j}\mu_\mathrm{j}\mathrm{x_j^3} & \sum \mathrm{m_j}\mu_\mathrm{j}\mathrm{x_j^4} \end{pmatrix} - \frac{\mathrm{e}^{\sigma^2} - 1}{1 + (\mathrm{e}^{\sigma^2} - 1)\sum_{\mathrm{j}=1}^{3} \mathrm{m_j}\mu_\mathrm{j}}$$

$$\begin{pmatrix} (\sum \mathrm{m_j}\mu_\mathrm{j})^2 & (\sum \mathrm{m_j}\mu_\mathrm{j})(\sum \mathrm{m_j}\mu_\mathrm{j}\mathrm{x_j}) & (\sum \mathrm{m_j}\mu_\mathrm{j})(\sum \mathrm{m_j}\mu_\mathrm{j}\mathrm{x_j^2}) \\ (\sum \mathrm{m_j}\mu_\mathrm{j})(\sum \mathrm{m_j}\mu_\mathrm{j}\mathrm{x_j}) & (\sum \mathrm{m_j}\mu_\mathrm{j})^2 & (\sum \mathrm{m_j}\mu_\mathrm{j}\mathrm{x_j})(\sum \mathrm{m_j}\mu_\mathrm{j}\mathrm{x_j^2}) \\ (\sum \mathrm{m_j}\mu_\mathrm{j})(\sum \mathrm{m_j}\mu_\mathrm{j}\mathrm{x_j^2}) & (\sum \mathrm{m_j}\mu_\mathrm{j}\mathrm{x_j})(\sum \mathrm{m_j}\mu_\mathrm{j}\mathrm{x_j^2}) & (\sum \mathrm{m_j}\mu_\mathrm{j})^2 \end{pmatrix}$$

که دترمینان $\eta_\beta(\xi)$ پس از ساده کردن به صورت (۵) خواهد شد. □

می‌توان برای به‌دست آوردن D–بهینه برای تخمین پارامترها در مدل QM با استفاده از روشهای عددی دترمینان $\eta(\xi)$ را ماکسیمم کرد. طرح‌های D–بهینه را می‌توان به ازاء بعضی مقادیر $\lambda(m, \beta_\circ, \sigma^2)$ و r به‌دست آورد، که در جدول‌های ۳ و ۴ آورده شده‌اند. برای بررسی کارایی مدل، در این حالت نیز طرح سه نقطه‌ای استاندارد که شامل دو نقطهٔ ابتدایی و انتهایی ناحیه طرح و نقطه‌ی میانی آن و با وزن‌های ثابت است، در نظر گرفته شد. جدول ۵ نشان می‌دهد که طرح استاندارد سه نقطه‌ای تا زمانی که $\tilde{\mu}_g$ خیلی کوچک نیست، یا به‌عبارت دیگر g بسیار بزرگ نباشد، نسبت به طرح D–بهینه کارایی کمتری دارد.

نتایج نشان می‌دهد که با افزایش $r$ و بالطبع $\lambda(m, \beta_\circ, \sigma^2)$ کارایی کاهش می‌یابد، هم‌چنین با افزایش ضریب تأثیر مرتبه دوم $x$ یعنی $\beta_2$ ، نیز کارایی کاهش می‌یابد.

[ Downloaded from jss.irstat.ir on 2026-11-23 ]

[ DOR: 20.1001.1.17358183.1389.4.1.15.3 ]

## بحث و نتیجه‌گیری

اولین بارنیاپرست (۲۰۰۹) از روش شبه درستنمایی به‌عنوان روش جایگزین روش درستنمایی جهت به‌دست آوردن طرح D–بهینه برای مدل ساده پواسون با اثر عرض از مبداء تصادفی استفاده کرد. در این مقاله روش مذکور برای مدل پواسون به مرتبه دوم تعمیم داده شد. نتایج نشان داد در این حالت طرح D–بهینه شامل دقیقاً سه نقطه است که از این نظر نتیجه مشابه مدل خطی با سه پارامتر و هم چنین تعمیم یافته مدل ساده است. با استفاده از نتایج نظری ، طرح‌های D–بهینه برای مدل‌های پواسون ساده و درجه دوم با اثر عرض از مبداء تصادفی به‌دست آورده شد. نتایج نشان داد طرح D–بهینه برای این مدل‌ها علی‌رغم یکسان بودن در تعداد نقاط طرح، کاملاً متفاوت با طرح D–بهینه برای مدل‌های خطی و حتی مدل‌های پواسون بدون اثر تصادفی است. بررسی D–کارایی نشان داد در صورتی‌که اثر تصادفی در نظر گرفته نشود، کارایی مدل کاهش می‌یابد، به‌خصوص در حالتی‌که $\sigma^2$ بزرگ باشد.

جدول ۳: طرح‌های D–بهینه برای مدل QM (ناحیه طرح نامحدود)

| $\tilde{\mu}_3^*$ | $\tilde{\mu}_2^*$ | $\tilde{\mu}_1^*$ | $p_2^*$ | $p_1^*$ | $\lambda(m,\beta_0,\sigma^2)$ | $r$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ۱ | ۰/۳۲۹۴ | ۰/۰۱۴۹ | ۰/۳۳۳ | ۰/۳۳۳ | ۰ | |
| ۱ | ۰/۲۸۰۱ | ۰/۰۱۲۸ | ۰/۳۴۴ | ۰/۴۴۰ | ۱۰ | |
| ۱ | ۰/۲۶۲۰ | ۰/۰۱۲۰ | ۰/۳۳۹ | ۰/۴۸ | ۱۰۰ | −۲۰ |
| ۱ | ۰/۲۵۸۴ | ۰/۰۱۱۸ | ۰/۳۳۷ | ۰/۴۸۹ | ۱۰۰۰ | |
| ۱ | ۰/۲۵۸۵ | ۰/۰۱۱۸ | ۰/۳۳۷ | ۰/۴۸۹ | ۱۰۰۰۰ | |
| ۱ | ۰/۳۰۵۰ | ۰/۰۱۱۷ | ۰/۳۳۳ | ۰/۳۳۳ | ۰ | |
| ۱ | ۰/۲۵۵۹ | ۰/۰۱۰۱ | ۰/۳۴۹ | ۰/۴۳۹ | ۱۰ | |
| ۱ | ۰/۲۳۶۷ | ۰/۰۰۹۳ | ۰/۳۴۳ | ۰/۴۸۳ | ۱۰۰ | −۵۰ |
| ۱ | ۰/۲۳۳۲ | ۰/۰۰۹۲ | ۰/۳۴۲ | ۰/۴۹۰ | ۱۰۰۰ | |
| ۱ | ۰/۲۳۲۷ | ۰/۰۰۹۱ | ۰/۳۴۱ | ۰/۴۹۱ | ۱۰۰۰۰ | |

[ Downloaded from jss.irstat.ir on 2026-11-23 ]

[ DOR: 20.1001.1.17358183.1389.4.1.15.3 ]

جدول ۴: طرح‌های D–بهینه برای مدل QM (ناحیه طرح کران‌دار $\tilde{\mu}_g =$ ۰/۱)

| $\tilde{\mu}_3^*$ | $\tilde{\mu}_2^*$ | $\tilde{\mu}_1^*$ | $p_2^*$ | $p_1^*$ | $\lambda(m,\beta_0,\sigma^2)$ | $r$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ۱ | ۰/۴۵۰۰ | ۰/۱ | ۰/۳۳۳ | ۰/۳۳۳ | ۰ | |
| ۱ | ۰/۴۱۸۸ | ۰/۱ | ۰/۳۳۴ | ۰/۴۲۱ | ۱۰ | |
| ۱ | ۰/۴۱۷۷ | ۰/۱ | ۰/۳۳۲ | ۰/۴۴۲ | ۱۰۰ | −۲۰ |
| ۱ | ۰/۴۱۰۹ | ۰/۱ | ۰/۳۳۱ | ۰/۴۴۶ | ۱۰۰۰ | |
| ۱ | ۰/۴۱۰۹ | ۰/۱ | ۰/۳۳۰ | ۰/۴۴۶ | ۱۰۰۰۰ | |
| ۱ | ۰/۴۳۹۷ | ۰/۱ | ۰/۳۳۳ | ۰/۳۳۳ | ۰ | |
| ۱ | ۰/۴۰۷۷ | ۰/۱ | ۰/۳۳۷ | ۰/۴۱۷ | ۱۰ | |
| ۱ | ۰/۴۰۲۳ | ۰/۱ | ۰/۳۳۵ | ۰/۴۴۲ | ۱۰۰ | −۵۰ |
| ۱ | ۰/۴۰۰۰ | ۰/۱ | ۰/۳۳۹ | ۰/۴۳۸ | ۱۰۰۰ | |
| ۱ | ۰/۹۹۸ | ۰/۱ | ۰/۳۳۵ | ۰/۴۴۳ | ۱۰۰۰۰ | |

جدول ۵: D–کارایی مدل استاندارد نسبت به طرح D–بهینه برای مدل QM

| $r$ | | | | $\lambda(m,\beta_0,\sigma^2)$ |
|---|---|---|---|---|
| −۵۰ | −۳۰ | −۲۰ | −۱۰ | |
| ۰/۹۰۷۰ | ۰/۹۱۱۳ | ۰/۹۱۴۸ | ۰/۹۲۰۰ | ۰ |
| ۰/۸۳۵۳ | ۰/۸۴۲۴ | ۰/۸۴۹۰ | ۰/۸۶۰۹ | ۱۰ |
| ۰/۸۰۶۳ | ۰/۸۱۴۴ | ۰/۸۲۲۲ | ۰/۸۳۶۷ | ۱۰۰ |
| ۰/۸۰۱۹ | ۰/۸۱۰۱ | ۰/۸۱۸۱ | ۰/۸۰۸۹ | ۱۰۰۰ |
| ۰/۸۰۱۸ | ۰/۸۱۰۰ | ۰/۸۱۷۹ | ۰/۸۰۰۶ | ۱۰۰۰۰ |

## مراجع

Box G. E. P. and Lucas H. L. (1959), Design of Experiments in Non-Linear Situations,*Biometrika*, **46**, 77 90.

Chernoff H. (1953), Locally Optimal Designs for Estimating Parameters, *The Annals of Mathematical Statistics*, **26**, 586-602.

[ Downloaded from jss.irstat.ir on 2026-11-23 ]

[ DOR: 20.1001.1.17358183.1389.4.1.15.3 ]

Fedorov V. V. (1972), *Theory of Optimal Experiments*, Academic Press, New York.

McCullagh P. and Nelder J. A., (1998), *Generalized Linear Models (Reprinted)*, Chapman and Hall, London.

Mielke, T. and Schwabe, R. (2010), Some Considerations on the Fisher Information in Nonlinear Mixed Effects Models, *MODa 9-Advances in Model-Oriented Design and Analysis* (eds. A. Giovagnoli, A. C. Atkinson, B. Torsney and C. May), 129-136.

Niaparast, M. (2009), On Optimal Design for a Poisson Regression Model with Random Intercept, *Statatistcs and Probability Letters*, **79**, 741-747.

Pukelsheim, F. (1993), *Optimal Design of Experiments*, Wiley, New York.

Silvey, S. D. (1980), *Optimal Design*, Chapman Hall, London.

Smith K. (1918), On the Standard Deviations of Adjusted and Interpolated Values of an Observed Polynomial Function and Its Constants and the Guidance They Give Towards a Proper Choice of the Distribution of Observations, *Biometrika*, **12**, 1-85.

Yanping, W., Raymond, H. M., Smith, E. P. and Keying, Ye, (2006), D-Optimal Designs for Poisson Regression Models, *Journal of Statistical Planning Inference*, **136**, 2831-2845.

[ Downloaded from jss.irstat.ir on 2026-11-23 ]

[ DOR: 20.1001.1.17358183.1389.4.1.15.3 ]

**Journal of Statistical Sciences, Spring & Summer 2010** **142**

**Vol. 4, No. 1, pp 89-103.**

# D-efficiency of D-optimal Designs for Poisson Model with Random Intercept

**M. Niaparast and S. Mehrmansour**

Deptartment of Statistics, Razi University, Kermanshah, Iran.

**Abstract:** The main part of optimal designs in the mixed effects models concentrates on linear models and binary models. Recently, Poisson models with random effects have been considered by some researchers. In this paper, an especial case of the mixed effects Poisson model, namely Poisson regression with random intercept is considered. Experimental design variations are obtained in terms of the random effect variance and indicated that the variations depend on the variance parameter. Using D-efficiency criterion, the impression of random effect on the experimental setting points is studied. These points are compared with the optimal experimental setting points in the corresponding model without random effect. We indicate that the D-efficiency depends on the variance of random effect.

**Keywords:**D-optimality, Quasi-Likelihood, D-efficiency, Poisson Regression Model, Quasi-information Matrix, Random Effect .

**Mathematics Subject Classification (2010):** 62K05

[ Downloaded from jss.irstat.ir on 2026-11-23 ]

[ DOR: 20.1001.1.17358183.1389.4.1.15.3 ]