Journal of Statistical Sciences, Spring and Summer, 2026
Vol. 20, No. 1, pp 121-148
DOI: 10.61882/jss.20.1.06

Stochastic Comparison of Extreme Order Statistics Corresponding to Two Sets of Dependent Scale Additive Hazard Rate Model Random Variables under Random Shocks

Shekari, M.[1], Saadat Kia, G.[2]
[1]Department of Statistics, University of Hormozgan, Hormozgan, Iran.
[2]Department of Basic Science, Kermanshah University of Technology, Kermanshah, Iran.

Corresponding author: M. Shekari, shekarimuni@hormozgan.ac.ir

Received: 22/11/2025 **Revised:** 24/2/2026 **Accepted and Published Online:** 26/2/2026.

Introduction

In reliability theory and survival analysis, the lifetime of a system is often influenced by external risk factors, such as random shocks, which may partially or completely damage its components. Classical additive hazard models, introduced by Aalen (1989), provide a flexible framework for incorporating such external effects. However, these models are limited by their monotone structure, which cannot account for scenarios where environmental factors may accelerate or decelerate the aging process. To overcome this limitation, the scaled additive hazard (SAH) model has been developed, incorporating a scale parameter that modulates the baseline hazard along the time axis.

In practical settings, components within a system are rarely independent, often sharing a common operating environment that induces positive dependence. Archimedean copulas offer a powerful and flexible tool for modeling such dependencies (Nelsen, 2006). Several recent studies have investigated stochastic comparisons of systems with dependent components. However, the simultaneous effects of parameter heterogeneity, dependence structure, and random shocks on the reliability of series and parallel systems under the SAH model have not been systematically explored. This paper addresses this gap by deriving sufficient conditions for stochastic dominance and hazard rate ordering of extreme order statistics arising from two sets of dependent, non-identically distributed SAH components subject to independent random shocks.

Material and Methods
We consider two types of systems: parallel systems, whose lifetime corresponds to the largest order statistic $X^p_{n:n} = \max(I_{p_1}X_1, \ldots, I_{p_n}X_n)$, and series systems, whose lifetime corresponds to the smallest order statistic $X^p_{1:n} = \min(I_{p_1}X_1, \ldots, I_{p_n}X_n)$. Here, $X_i \sim \mathrm{SAH}(\alpha_i, \theta_i)$ with survival function $\bar{F}_{X_i}(x) = \bar{F}^{\alpha_i}(x/\alpha_i)e^{-\theta_i x}$, and I_{p_i} are independent Bernoulli variables indicating whether the component survives a random shock. Using majorization theory, we establish sufficient conditions for comparing parallel and series systems in terms of the usual stochastic order and hazard rate order.

Results and Discussion
In this paper, we investigate stochastic comparisons of the lifetimes of series and parallel systems comprising of components following the scale additive hazard rate model subject to random shocks, where dependence among component lifetimes is modeled via Archimedean copulas. Extensive numerical examples illustrate the theoretical findings, and a sensitivity analysis reveals that the scale parameter is the dominant driver of system reliability, whereas the additive shock parameter uniformly degrades performance. A practical case study involving an environmental monitoring system confirms the applicability of the results. The following problems can be suggested as future research directions: (i) Investigating non-Archimedean dependence models using Vine copulas, (ii) Generalizing the results to additive hazard models with random or time-dependent parameters.

Conclusion
The results of this paper highlight the intricate interplay between parameter heterogeneity and dependence structure, offering practical guidance for reliability engineers and risk analysts in optimizing system design and resource allocation.

Keywords: Usual Stochastic Order, Hazrad Rate Order, Extreme Order Statistics, Additive Hazard Rate Model, Archimedean Copulas.

Mathematics Subject Classification (2020): 60E15, 90B25.

©The Author(s). The Publisher is Iranian Statistical Society.
This is an open access article distributed under the terms and conditions of (CC BY-NC 4.0)

مجله علوم آماری، بهار و تابستان ۱۴۰۵
جلد ۲۰، شماره ۱، ص ۱۲۱ -- ۱۴۸
DOI: 10.61882/jss.20.1.06
مقاله پژوهشی

مقایسه تصادفی آماره‌های مرتب غایی متناظر با دو مجموعه از متغیرهای تصادفی مدل نرخ خطر جمع‌پذیر مقیاسی وابسته تحت شوک‌های تصادفی

مرضیه شکاری[۱]، قباد سعادت‌کیا[۲]

[۱]گروه آمار، دانشکده علوم پایه، دانشگاه هرمزگان
[۲]دانشکده علوم پایه، دانشگاه صنعتی کرمانشاه

نویسنده مسئول : مرضیه شکاری، shekarimuni@hormozgan.ac.ir

تاریخ دریافت: ۱۴۰۴/۹/۱ تاریخ بازنگری: ۱۴۰۴/۱۲/۵ تاریخ پذیرش و انتشار: ۱۴۰۴/۱۲/۷

چکیده: در این مقاله، مقایسه‌های تصادفی طول عمر سیستم‌های سری و موازی متشکل از مؤلفه‌های مدل نرخ خطر جمع‌پذیر مقیاسی تحت تأثیر شوک‌های تصادفی، با استفاده از مفصل‌های ارشمیدسی مورد مطالعه قرار گرفته است. با اعمال شرایط مناسب روی تابع توزیع پایه، پارامترهای مدل، توابع مولد و احتمالات وقوع شوک‌ها، شرایط کافی برای مقایسه طول عمر دو سیستم از نظر ترتیب تصادفی معمولی و ترتیب نرخ خطر مورد مطالعه قرارگرفته است. نتایج این مقاله، نشان می‌دهند که چگونه ناهمگنی پارامترها و ساختار وابستگی، بر قابلیت اعتماد سیستم تأثیر می‌گذارند. علاوه‌براین، چندین مثال عددی برای تأیید اعتبار یافته‌های نظری ارائه شده است.

واژه‌های کلیدی: ترتیب تصادفی معمولی، ترتیب نرخ خطر، آماره‌های مرتب غایی، مدل نرخ خطر جمع‌پذیر مقیاسی، مفصل‌های ارشمیدسی، شوک‌های تصادفی.
کد موضوع‌بندی ریاضی (۲۰۲۰): 60E15، 90B25.

۱ مقدمه

برخی از سیستم‌ها در حوزه‌هایی نظیر پتروشیمی، راه‌آهن، صنعت خودرو، شبکه‌های ارتباطی و ایمنی از اجزایی تشکیل شده‌اند که به‌طور هماهنگ برای دستیابی به هدفی خاص فعالیت می‌کنند. یک سیستم را می‌توان مجموعه‌ای

©نویسند(گان). ناشر انجمن آمار ایران است.
این مقاله با دسترسی آزاد تحت شرایط و ضوابط (CC BY-NC 4.0) توزیع شده است.

از مؤلفه‌ها دانست که با اتصال به یکدیگر، هدف مشخصی را با سطح قابل قبولی از قابلیت اعتماد و کارایی دنبال می‌کنند. نقش هر مؤلفه در سیستم، بسته به نحوه ارتباط آن با سایر اجزا، می‌تواند مستقل یا وابسته باشد. از دیدگاه صنعتی، قابلیت اعتماد و ایمنی چنین سیستم‌هایی از مسائل بنیادین محسوب می‌شوند که به مرور زمان و براساس تجربه ارتقا یافته‌اند.

فرض کنید $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ یک بردار تصادفی وابسته و غیرهم‌توزیع باشد که در آن هر X_i دارای تابع توزیع F_{X_i} و توابع بقای $\bar{F}_{X_i}$ هستند. علاوه‌براین، فرض کنید $I_{p_1}, \ldots, I_{p_n}$ متغیرهای تصادفی برنولی مستقل با $E(I_{p_i}) = p_i$ باشند که از X_iها مستقل هستند و برای نشان دادن وضعیت خرابی مؤلفه‌های سیستم با طول عمرهای تصادفی $X_1, \ldots, X_n$ به‌کار می‌روند. به‌طور خاص، اگر $I_{p_i} = 1$ باشد، مؤلفه i، تحت شوک‌های تصادفی، سالم است؛ در غیر این صورت، اگر مؤلفه i در اثر شوک‌ها خراب شده باشد $I_{p_i} = 0$ خواهد بود. بنابراین می‌توان $X_1 I_{p_1}, \ldots, X_n I_{p_n}$ را به‌عنوان طول عمر مؤلفه‌های تحت تأثیر شوک‌های تصادفی تعریف کرد و آن را با $X_i^{p_i} = X_i I_{p_i}$ نشان داد. بدین ترتیب، تابع بقای متغیر تصادفی $X_i^{p_i}$ به‌صورت $\bar{F}_{X_i^{p_i}}(x) = p_i \bar{F}_{X_i}(x)$ خواهد بود. این مدل‌سازی، سناریوی عملی توزیع میزان خسارت را به خوبی پوشش می‌دهد. اگر خسارتی گزارش شود، تابع بقای میزان خسارت $\bar{F}(X)$ خواهد بود و این با احتمال p_i رخ می‌دهد. اما ممکن است اصلاً خسارتی گزارش نشود که این امر با احتمال $(1 - p_i)$ روی می‌دهد. بنابراین، آماره‌های مرتب $X_{n:n}^p = \max(I_{p_1} X_1, \ldots, I_{p_n} X_n)$ و $X_{1:n}^p = \min(I_{p_1} X_1, \ldots, I_{p_n} X_n)$ به‌ترتیب نشان‌دهنده بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین میزان خسارت هستند. مطالعات بسیاری به مقایسه تصادفی سبدهای ریسک براساس بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین خسارت‌ها پرداخته‌اند که در آن فرض استقلال متقابل بین متغیرهای تصادفی در نظر گرفته شده است (برمال‌زن و همکاران، ۲۰۱۶، ۲۰۱۷؛ فانگ و بالاکریشنان، ۲۰۱۸؛ بالاکریشنان و همکاران، ۲۰۱۸؛ ژانگ و همکاران، ۲۰۱۹؛ نادب و همکاران، ۲۰۲۰؛ پانجا و همکاران، ۲۰۲۱).

در این میان، ژانگ و همکاران (۲۰۱۹) در چارچوب مدل نرخ خطر متناسب، نتایجی برای بزرگترین و کوچکترین میزان خسارت ارائه کردند. برمال‌زن و همکاران (۲۰۲۰) مقایسه بزرگ‌ترین خسارت‌ها را برای متغیرهای مستقل و مقایسه کوچک‌ترین خسارت‌ها را برای متغیرهای وابسته تحت مدل مکان–مقیاس و مفصل بقای ارشمیدسی مورد بررسی قرار دادند. تورادو و نوارو (۲۰۲۱) توابع توزیع بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین خسارت‌های ریسک‌های وابسته را به‌صورت توابع نیمه‌تحریف‌شده از توزیع‌های حاشیه‌ای ارائه دادند و سپس مقایسه‌های تصادفی میان آن‌ها را تحت روابط خاصی بین این توابع انجام دادند. از سوی دیگر، داس و همکاران (۲۰۲۲) نتایج ترتیب تصادفی برای کوچک‌ترین خسارت‌های دو سبد ریسک را استخراج کردند، در شرایطی که خسارت‌ها از مدل مکان–مقیاس نمایی‌شده پیروی کرده و وابستگی آن‌ها تحت مفصل بقای ارشمیدسی برقرار باشد. در مطالعات اخیر، اسلام و گوپتا (۲۰۲۴) به مقایسه سیستم‌ها تحت مفصل ارشمیدسی و شوک تصادفی در چارچوب مدل مکان–مقیاس پرداخته‌اند. امینی‌سرشت و همکاران (۲۰۲۴) نیز مقایسه آماره‌های مرتب از متغیرهای تصادفی وابسته ناهمگن را بررسی کرده‌اند.

در تحلیل بقا، متغیر تصادفی X، اغلب تحت تأثیر عوامل خارجی قرار می‌گیرد که رفتار X را تغییر می‌دهند. این

عوامل معمولاً متغیر کمکی[1] نامیده می‌شوند. سپس متغیر تصادفی دیگری به نام Z تعریف می‌شود که اثر متغیر کمکی بر X را شامل می‌شود. رابطه بین X و Z را می‌توان با استفاده از مدل‌های مختلفی مانند مدل نرخ خطر متناسب که از طریق نرخ خطرهای $r_X(x)$ و $r_Z(x)$ (به‌ترتیب برای X و Z) که به‌صورت $r_Z(x) = \theta r_X(x),\ \theta > 0$, تعریف می‌شود توسط کاکس (۱۹۷۲) معرفی شد. اگرچه مدل نرخ خطر متناسب به‌عنوان مشهورترین مدل در مطالعات بقا در نظر گرفته شده است، با این وجود، آلتمن و همکاران (۱۹۹۵) در یک بازبینی سیستماتیک از مجلات، دریافتند که تنها ۵ درصد از مقالات منتشرشده سعی در بررسی مفروضات مدل نرخ خطر متناسب کاکس داشته‌اند. بنابراین نمی‌توان تحلیل‌های انجام‌شده را کاملاً توجیه کرد. به‌عنوان جایگزینی برای مدل نرخ خطر متناسب، آلن (۱۹۸۹) مدل نرخ خطر جمع‌پذیر[2] را به‌صورت یک مدل رگرسیون خطی پیشنهاد کرد که پیشگام انواع مختلفی از مدل‌های نرخ خطر جمع‌پذیر موجود فعلی است. در ساده‌ترین شکل آن، Y دارای مدل خطر جمع‌پذیری X است هرگاه تابع نرخ خطر Y را بتوان به‌صورت

$$r_Y(x) = r_X(x) + \theta, \qquad x > 0, \theta > 0, \tag{۱}$$

نوشت که در آن نرخ خطر پایه[3] $r_X(x)$ به یک مقدار ثابت θ اضافه می‌شود. یک مثال واقعی ساده از رابطه (۱)، وقتی مشاهده می‌شود که یک قطعه که برای آزمایش نرخ خطر $r_X(x)$ در آزمایشگاه آزمون شده است، به محیطی دیگری منتقل شود که احتمال خرابی قطعات در آن بیشتر است. لی و لینگ (۲۰۱۲) و نایر و سنکاران (۲۰۱۲) رابطه (۱) را با در نظر گرفتن θ به‌جای یک ثابت، به‌عنوان یک متغیر تصادفی گسترش داده‌اند. ژانگ و ژانگ (۲۰۱۴) مدل را با این فرض که نرخ‌های خطر در بازه‌های زمانی مختلف به‌صورت متفاوتی جمع می‌شوند، اصلاح کردند. اثنا عشری و اسدی (۲۰۱۶) مدل نرخ خطر جمعی–ضربی را معرفی کردند و رئیسی و یاری (۲۰۱۸) مدل نرخ خطر جمع‌پذیر تعمیم‌یافته را ارائه کرده‌اند. یکی از معایب مدل کلاسیک نرخ خطر جمع‌پذیر و تعمیم‌های آن این است که وقتی Y مدل نرخ خطرات جمع‌پذیر X است، همواره $r_Y(x)$ بزرگ‌تر از $r_X(x)$ است.

در این مقاله مدل نرخ خطر جمع‌پذیر با معرفی دو پارامتر اضافی، تعمیم داده می‌شود که می‌توانند رفتار نرخ خطر Y را به روشی انعطاف‌پذیرتر تنظیم کنند. بر این اساس، یک مدل نرخ خطر جمع‌پذیر مقیاسی[4] (SAH) به‌صورت

$$r_Y(x) = r_X\left(\frac{x}{\alpha}\right) + \theta, \tag{۲}$$

پیشنهاد می‌شود و به‌صورت $Y \sim \mathrm{SAH}(\alpha, \theta)$ نمایش داده می‌شود. واضح است که وقتی $\alpha = 1$ باشد، رابطه (۲) به رابطه (۱) تبدیل می‌شود که در نظریه قابلیت اعتماد و تحلیل بقا کاربردهای فراوانی دارد. این موضوع دامنه

[1] Covariates
[2] Additive Hazards Rate Model
[3] Baseline Hazard Rate
[4] Scaled Additive Hazard Rate Model

کاربرد آن را فقط به سناریوهایی محدود می‌سازد که در آنها شرایط محیطی یا عملیاتی همواره منجر به تشدید نرخ خرابی می‌شود. برای رفع این محدودیت مفهومی و افزایش انعطاف‌پذیری مدل در تطابق با واقعیت‌های پیچیده‌تر، پارامتر مقیاس α را به عنوان یک عامل تنظیم کننده مقیاس زمانی معرفی می‌شود. مدل تعمیم‌یافته در رابطه (۲) نه تنها امکان افزایش نرخ خطر، بلکه کاهش کنترل شده آن را نیز فراهم می‌آورد. از دیدگاه ریاضی، پارامتر α با اعمال یک تبدیل مقیاس بر متغیر زمان در تابع نرخ خطر پایه عمل می‌کند. مقادیر $\alpha > ۱$ باعث گسترش مقیاس زمانی (کاهش نرخ خطر موثر) و مقادیر $۰ < \alpha < ۱$ باعث فشردگی آن (افزایش نرخ خطر موثر) می‌شوند. این ویژگی، مدل را قادر می‌سازد تا طیف وسیعی از شرایط عملی را پوشش دهد. از جمله حالتی که یک سیستم در یک محیط بهینه‌تر یا با مواد کیفیت‌تر ($\alpha > ۱$) عمل می‌کند و نرخ خطر پایه آن کاهش می‌یابد، اما همچنان تحت یک خطر جمع‌پذیر ثابت ناشی از عوامل خارجی (θ) قرار دارد. بنابراین مدل SAH با گسستن از رابطه تک جهتی مدل کلاسیک، ابزاری و توانمندتر برای تحلیل مقایسه‌ای در نظریه قابلیت اعتماد و ریسک ارائه می‌دهد.

ساختار این مقاله به این صورت است: در بخش ۲، تعاریف و مفاهیم مورد نیاز در رابطه با ترتیب‌های تصادفی و نظریه بیشاندن ارائه شده است. بخش‌های ۳ و ۴ به ترتیب نتایج اصلی برای مقایسه تصادفی بزرگترین و کوچکترین آماره‌های را ارائه می‌دهند. در بخش ۵، صحت برخی از قضایا با مثال نشان داده شده است. سرانجام در بخش ۶، یک مطالعه شبیه‌سازی و یک کاربرد، ارائه شده است.

۲ تعاریف و مفاهیم مورد نیاز

در این بخش، تعاریف و مفاهیم مورد نیاز در رابطه با ترتیب‌های تصادفی، نظریه بیشاندن و تابع مفصل ارائه شده است که در بخش‌های بعدی از آنها استفاده می‌شود. در سرتاسر مقاله، واژه‌های صعودی به معنای غیر نزولی و نزولی به معنای غیر صعودی است.

تعریف ۱. فرض کنید $x_{(۱)} \leqslant \cdots \leqslant x_{(n)}$ و $y_{(۱)} \leqslant \cdots \leqslant y_{(n)}$ به‌ترتیب مقادیر مرتب‌شده متناظر با بردارهای $\boldsymbol{x} = (x_۱, \ldots, x_n)$ و $\boldsymbol{y} = (y_۱, \ldots, y_n)$ باشند. بردار $\boldsymbol{x}$ به معنای:

الف) بیشاندن[1] کوچک‌تر از بردار $\boldsymbol{y}$ است ($\boldsymbol{x} \overset{m}{\preceq} \boldsymbol{y}$)، هرگاه $\sum_{i=۱}^{n} x_{(i)} = \sum_{i=۱}^{n} y_{(i)}$ و به ازای $j = ۱, \ldots, n-۱$ نابرابری $\sum_{i=۱}^{j} x_{(i)} \geq \sum_{i=۱}^{j} y_{(i)}$ برقرار باشد.

ب) بیشاندن ضعیف از بالا[2] کوچک‌تر از بردار $\boldsymbol{y}$ است ($\boldsymbol{x} \overset{w}{\preceq} \boldsymbol{y}$)، هرگاه به ازای $j = ۱, \ldots, n$ نابرابری $\sum_{i=۱}^{j} x_{(i)} \geqslant \sum_{i=۱}^{j} y_{(i)}$ برقرار باشد.

پ) بیشاندن ضعیف از پایین[3] کوچک‌تر از بردار $\boldsymbol{y}$ است ($\boldsymbol{x} \underset{w}{\preceq} \boldsymbol{y}$)، هرگاه به ازای $j = ۱, \ldots, n$ نابرابری $\sum_{i=j}^{n} x_{(i)} \leqslant \sum_{i=j}^{n} y_{(i)}$ برقرار باشد.

[1] Majorization
[2] Weakly Supermajorization
[3] Weakly Submajorization

رابطه $\boldsymbol{x} \underset{w}{\succeq} \boldsymbol{y} \Longleftarrow \boldsymbol{x} \overset{m}{\succeq} \boldsymbol{y} \Longrightarrow \boldsymbol{x} \overset{w}{\succeq} \boldsymbol{y}$ بین ترتیب‌های بیشاندن مطرح شده، برقرار است.

تعریف ۲. تابع حقیقی‌مقدار ϕ روی مجموعه $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{R}^n$ شور-محدب نامیده می‌شود هرگاه

$$\boldsymbol{a} \overset{m}{\succeq} \boldsymbol{b} \Longrightarrow \phi(\boldsymbol{a}) \geqslant \phi(\boldsymbol{b}), \qquad \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{A}.$$

همچنین، تابع ϕ شور-مقعر نامیده می‌شود هرگاه جهت نامساوی فوق، عوض شود.

لم ۱. *(مارشال و همکاران، ۲۰۱۱)* فرض کنید که $\mathbb{I} \subseteq \mathbb{R}$ یک بازه باز و $\phi : \mathbb{I}^n \to \mathbb{R}$ یک تابع پیوسته مشتق‌پذیر باشد. تابع ϕ روی $\mathbb{I}^n$ شور-محدب[1] *(شور-مقعر[2])* نامیده می‌شود اگر و فقط اگر تابع ϕ تحت هر جایگزینی از مؤلفه‌ها، روی $\mathbb{I}^n$ متقارن باشد و برای هر $j \neq i$ و هر $\boldsymbol{a} \in \mathbb{I}^n$، نابرابری

$$(a_i - a_j)\big(\frac{\partial \phi}{\partial a_i}(\boldsymbol{a}) - \frac{\partial \phi}{\partial a_j}(\boldsymbol{a})\big) \geqslant 0 (\leqslant 0),$$

برقرار باشد که در آن $\frac{\partial \phi}{\partial z_i}$ بیانگر مشتق جزئی تابع ϕ نسبت به مؤلفه i-ام است.

لم ۲. *(مارشال و همکاران، ۲۰۱۱)* تابع حقیقی‌مقدار ϕ را روی $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{R}^n$ در نظر بگیرید. در این صورت،

الف) $\boldsymbol{a} \succeq_w \boldsymbol{b}$ نتیجه می‌دهد $\phi(\boldsymbol{a}) \geqslant \phi(\boldsymbol{b})$ اگر و فقط اگر ϕ تابعی صعودی و شور-محدب روی $\mathbb{A}$ باشد.

ب) $\boldsymbol{a} \overset{w}{\succeq} \boldsymbol{b}$ نتیجه می‌دهد $\phi(\boldsymbol{a}) \geqslant \phi(\boldsymbol{b})$ اگر و فقط اگر ϕ تابعی نزولی و شور-محدب روی $\mathbb{A}$ باشد.

لم ۳. فرض کنید $\varphi : \mathscr{D}(\mathscr{E}) \to \mathbb{R}$ یک تابع پیوسته و مشتق‌پذیر در نقاط درونی $\mathscr{D}(\mathscr{E})$ است. در این صورت برای هر $\boldsymbol{\vartheta}$ و $\boldsymbol{\eta}$ روی $\mathscr{D}(\mathscr{E})$، $\boldsymbol{\vartheta} \succeq_w \boldsymbol{\eta} \implies \varphi(\boldsymbol{\vartheta}) \geqslant \varphi(\boldsymbol{\eta})$ اگر و فقط اگر $\frac{\partial \varphi(z)}{\partial z_1} \geqslant \cdots \geqslant \frac{\partial \varphi(z)}{\partial z_n} \geqslant 0$ باشد. به طور مشابه, $\boldsymbol{\vartheta} \overset{w}{\succeq} \boldsymbol{\eta} \implies \varphi(\boldsymbol{\vartheta}) \geqslant \varphi(\boldsymbol{\eta})$ اگر و فقط اگر $0 \geqslant \frac{\partial \varphi(z)}{\partial z_1} \geqslant \cdots \geqslant \frac{\partial \varphi(z)}{\partial z_n}$ باشد.

تعریف ۳. بردار تصادفی $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ را با تابع توزیع توأم F، تابع بقای توأم $\bar{F}$ و توابع توزیع حاشیه‌ای تک‌متغیره $F_1, \ldots, F_n$ در نظر بگیرید. همچنین فرض کنید $C : [0,1]^n \to [0,1]$ و $\hat{C} : [0,1]^n \to [0,1]$, چنان موجود باشند که برای هر $x_i \in (-\infty, \infty)$ داشته باشیم:

$$F(x_1, \ldots, x_n) = C(F_1(x_1), \ldots, F_n(x_n)),$$
$$\bar{F}(x_1, \ldots, x_n) = \hat{C}(\bar{F}_1(x_1), \ldots, \bar{F}_n(x_n)).$$

آنگاه C و $\hat{C}$ به‌ترتیب تابع مفصل[3] و تابع مفصل بقا[4] نامیده می‌شوند.

[1] Schur-convex
[2] Schur-concave
[3] Copula Function
[4] Survival Copula Function

تعریف ۴. *(نلسن، ۲۰۰۶)* به ازای تابع نزولی و پیوسته $\phi : [0,\infty) \to [0,1]$، به‌طوری‌که $\phi(0) = 1$، $\phi(\infty) = 0$ و $\psi = \phi^{-1}$ یک تابع شبه‌وارون از راست پیوسته باشد تابع

$$C_\phi(u_1,\ldots,u_n) = \phi[\psi(u_1) + \cdots + \psi(u_n)], \quad u_i \in [0,1], \quad i = 1,\ldots,n,$$

مفصل ارشمیدسی با تابع مولد ϕ نامیده می‌شود هرگاه $(-1)^{n-2}\frac{d^{n-2}}{dt^{n-2}}\phi(t)$ تابعی نزولی و محدب باشد و

$$(-1)^k \frac{d^k}{dt^k}\phi(t) > 0, \qquad k = 0,1,\ldots,n-2,$$

تعریف ۵. تابع g یک تابع زیرجمعی نامیده می‌شود هرگاه $g(x+y) \geqslant g(x) + g(y)$ باشد.

تعریف ۶. *(شیکد وشانتیکومار، ۲۰۰۷)* فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی نامنفی به‌ترتیب با توابع چگالی احتمال $f(x)$ و $g(x)$، توابع توزیع $F(x)$ و $G(x)$، توابع بقای $\bar{F}(x)$ و $\bar{G}(x)$، توابع نرخ خطر $r_X(x) = f(x)/\bar{F}(x)$ و $r_Y(x) = g(x)/\bar{G}(x)$، باشند.

الف) X در ترتیب تصادفی معمولی[1]، کوچک‌تر از Y است $(X \leqslant_{st} Y)$ هرگاه به ازای هر $x \geqslant 0$، رابطه $\bar{F}(x) \leqslant \bar{G}(x)$ برقرار باشد.

ب) X در ترتیب نرخ خطر[2]، کوچک‌تر از Y است $(X \leqslant_{hr} Y)$ هرگاه به ازای هر $x \geqslant 0$، رابطه $r_X(x) \geqslant r_Y(x)$ برقرار باشد.

بین ترتیب‌های تصادفی فوق، رابطه $X \leq_{hr} Y \Longrightarrow X \leq_{st} Y$ برقرار است. برای جزئیات بیشتر در مورد ترتیب‌های تصادفی و کاربردهای آن، به شیکد وشانتیکومار (۲۰۰۷)، امینی‌سرشت و برمال‌زن (۱۳۹۹، ۱۴۰۰)، قنبری و همکاران (۱۳۹۹)، برمال‌زن و همکاران (۱۴۰۰) و حیدری و همکاران (۱۴۰۱) مراجعه شود.

۳ نتایجی در مورد بزرگ‌ترین آماره ترتیبی

در این بخش، قضایای مربوط به بزرگترین آماره ترتیبی ارائه می‌شود. برای این منظور قرار دهید:

$$A_n = \{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) : x_i, y_i \geqslant 0, (x_i - x_j)(y_i - y_j) \geqslant 0, i,j = 1,\ldots,n\},$$
$$B_n = \{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) : x_i, y_i \geqslant 0, (x_i - x_j)(y_i - y_j) \leqslant 0, i,j = 1,\ldots,n\}$$

[1] Usual Stochastic Order
[2] Hazard Rate Order

قضیه ۱. فرض کنید $\boldsymbol{X}^p = (I_{p_1}X_1, \ldots, I_{p_n}X_n)$ و $\boldsymbol{X}^q = (I_{q_1}X_1, \ldots, I_{q_n}X_n)$ بردارهای تصادفی وابسته و غیرهم‌توزیع با $X_i \sim \mathrm{SAH}(\alpha_i, \theta_i)$ و مفصل ارشمیدسی با تابع مولد ϕ باشند. همچنین فرض کنید $I_{p_1}, \ldots, I_{p_n}$ و $I_{q_1}, \ldots, I_{q_n}$ متغیرهای تصادفی برنولی مستقل با بردار پارامترهای $\boldsymbol{p} = (p_1, \ldots, p_n)$ و $\boldsymbol{q} = (q_1, \ldots, q_n)$ باشند به‌طوری‌که مستقل از X_iها هستند. اگر تابع $\bar{F}^{\alpha}(\frac{x}{\alpha})$ در α صعودی، ϕ لگ‌ـ محدب و h تابعی صعودی و مقعر باشد آنگاه به ازای $(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{\theta}) \in B_n$، $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\theta}) \in B_n$، $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{p}) \in A_n$ داریم: $h(\boldsymbol{p}) \preceq_w h(\boldsymbol{q}) \Longrightarrow X^p_{n:n} \leqslant_{st} X^q_{n:n}$.

برهان: تابع بقای $X^p_{n:n}$ به صورت

$$\bar{F}_{X^p_{n:n}}(x) = 1 - \phi\Big(\sum_{k=1}^{n} \psi\big(1 - h^{-1}(u_k)\bar{F}^{\alpha_k}\big(\frac{x}{\alpha_k}\big)e^{-\theta_k x}\big)\Big)$$

است که در آن $h(p_k) = u_k$ برای $u_k \in [0, 1]$ است. برای به‌دست آوردن نتیجه مطلوب، کافی است نشان داده شود $\bar{F}_{X^p_{n:n}}(x)$ نسبت به u_i صعودی و شورـمحدب است. بنابراین:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{F}_{X^p_{n:n}}(x)}{\partial u_i} &= \phi'\Big(\sum_{k=1}^{n} \psi\big(1 - h^{-1}(u_k)\bar{F}^{\alpha_k}\big(\frac{x}{\alpha_k}\big)e^{-\theta_k x}\big)\Big)\frac{\frac{\partial h^{-1}(u_i)}{\partial u_i} \cdot \bar{F}^{\alpha_i}\big(\frac{x}{\alpha_i}\big)e^{-\theta_i x}}{1 - h^{-1}(u_i)\bar{F}^{\alpha_i}\big(\frac{x}{\alpha_i}\big)e^{-\theta_i x}} \\ &\times \frac{\phi\big(\psi\big(1 - h^{-1}(u_i)\bar{F}^{\alpha_i}\big(\frac{x}{\alpha_i}\big)e^{-\theta_i x}\big)\big)}{\phi'\big(\psi\big(1 - h^{-1}(u_i)\bar{F}^{\alpha_i}\big(\frac{x}{\alpha_i}\big)e^{-\theta_i x}\big)\big)} \geq 0\end{aligned}$$

نابرابری فوق، براساس صعودی بودن تابع h^{-1} و نزولی بودن توابع ϕ و ψ به‌دست می‌آید که نشان می‌دهد $\bar{F}_{X^p_{n:n}}(x)$ تابعی صعودی است. همچنین به ازای $i \neq j$ داریم:

$$\begin{aligned}(u_i - u_j)\Big(\frac{\partial \bar{F}_{X^p_{n:n}}(x)}{\partial u_i} - \frac{\partial \bar{F}_{X^p_{n:n}}(x)}{\partial u_j}\Big) \overset{sgn}{=} \Big[&\frac{\frac{\partial h^{-1}(u_i)}{\partial u_i}\bar{F}^{\alpha_i}\big(\frac{x}{\alpha_i}\big)e^{-\theta_i x}}{1 - h^{-1}(u_i)\bar{F}^{\alpha_i}\big(\frac{x}{\alpha_i}\big)e^{-\theta_i x}} \\ &\times \Big(\frac{-\phi}{\phi'}\big(\psi(1 - h^{-1}(u_i)\bar{F}^{\alpha_i}\big(\frac{x}{\alpha_i}\big)e^{-\theta_i x})\big)\Big) \\ &- \frac{\frac{\partial h^{-1}(u_j)}{\partial u_j}\bar{F}^{\alpha_j}\big(\frac{x}{\alpha_j}\big)e^{-\theta_j x}}{1 - h^{-1}(u_j)\bar{F}^{\alpha_j}\big(\frac{x}{\alpha_j}\big)e^{-\theta_j x}} \\ &\times \Big(\frac{-\phi}{\phi'}\big(\psi(1 - h^{-1}(u_j)\bar{F}^{\alpha_j}\big(\frac{x}{\alpha_j}\big)e^{-\theta_j x})\big)\Big)\Big],\end{aligned}$$

که در آن $a \overset{sgn}{=} b$ به معنای هم‌علامت بودن a و b است. بدون از دست دادن کلیت، فرض کنید $u_i \geqslant u_j$، $\alpha_i \geqslant \alpha_j$ و $\theta_i \leqslant \theta_j$، باشند. بنابراین برای شور–محدب بودن باید نشان داد عبارت فوق، نامنفی است. با قرار دادن $K_1(u_i,\alpha_i,\theta_i) = \frac{\frac{\partial h^{-1}(u_i)}{\partial u_i}\bar{F}^{\alpha_i}\left(\frac{x}{\alpha_i}\right)e^{-\theta_i x}}{1-h^{-1}(u_i)\bar{F}^{\alpha_i}\left(\frac{x}{\alpha_i}\right)e^{-\theta_i x}}$ داریم:

$$\begin{aligned}\frac{\partial K_1}{\partial u_i} &\overset{sgn}{=} \bar{F}^{\alpha_i}\big(\frac{x}{\alpha_i}\big)e^{-\theta_i x}\big(1-h^{-1}(u_i)\bar{F}^{\alpha_i}\big(\frac{x}{\alpha_i}\big)e^{-\theta_i x}\big)\frac{\partial}{\partial u_i}\big(\frac{\partial h^{-1}(u_i)}{\partial u_i}\big)\\ &+\big(\bar{F}^{\alpha_i}\big(\frac{x}{\alpha_i}\big)e^{-\theta_i x}\frac{\partial h^{-1}(u_i)}{\partial u_i}\big)^2 \geq 0\end{aligned}$$

این نابرابری از محدب و صعودی بودن $h^{-1}(u_i)$ نسبت به u_i نتیجه می‌شود و نشان می‌دهد K_1 نسبت به u_i صعودی است. همچنین می‌توان نشان داد که K_1 نسبت به α_i صعودی و نسبت به θ_i نزولی است به‌طوری‌که برای هر $(x \geqslant 0)$ و $i = 1,\ldots,n$ داریم:

$$\frac{\partial K_1}{\partial \alpha_i} \overset{sgn}{=} \frac{\partial h^{-1}(u_i)}{\partial u_i} \geqslant 0 \quad , \quad \frac{\partial K_1}{\partial \theta_i} \overset{sgn}{=} -x\frac{\partial h^{-1}(u_i)}{\partial u_i} \leqslant 0.$$

نتایج فوق، نشان می‌دهند که به ازای $u_i \geqslant u_j$، $\alpha_i \geqslant \alpha_j$ و $\theta_i \leqslant \theta_j$ نابرابری

$$K_1(u_i,\alpha_i,\theta_i) \geqslant K_1(u_j,\alpha_j,\theta_j), \tag{۳}$$

برقرار است. همچنین اگر تابع K_2 به‌صورت $K_2(u_i,\alpha_i,\theta_i) = h^{-1}(u_i)\bar{F}^{\alpha_i}\left(\frac{x}{\alpha_i}\right)e^{-\theta_i x}$ تعریف شود آنگاه به راحتی می‌توان نشان داد تابع K_2 نسبت به u_i و α_i صعودی و نسبت به θ_i نزولی است. بنابراین از فرض لگ–محدب بودن ϕ (صعودی بودن $\frac{-\phi}{\phi'}$) و فرض نزولی بودن تابع ψ، نابرابری زیر نتیجه می‌شود به‌طوری‌که برای $u_i \geqslant u_j$، $\alpha_i \geqslant \alpha_j$ و $\theta_i \leqslant \theta_j$ داریم:

$$\frac{-\phi}{\phi'}(\psi(K_2(u_i,\alpha_i,\theta_i))) \geqslant \frac{-\phi}{\phi'}(\psi(K_2(u_j,\alpha_j,\theta_j))), \tag{۴}$$

بنابر روابط (۳) و (۴) و لم‌های ۲ و ۳، $\bar{F}_{X^p_{n:n}}(x)$ تابعی شور–محدب در u_i است و اثبات کامل می‌شود.

تذکر ۱. در کاربردهای قابلیت اعتماد و بیمه‌ای، پارامترهای $p_1,\ldots,p_n$ می‌توانند متناظر با احتمالات آسیب ندیدن n مؤلفه در سیستم، در برابر شوک‌های تصادفی یا احتمالات ثبت ادعای بیمه‌ای توسط n مشتری در سبد بیمه باشند. به‌عنوان مثال، توابع $h(\boldsymbol{p}) = p^b$ برای $b \in \mathbb{R}^+$ و $h(p) = \frac{1-pe^{-b}}{1-e^{-b}}$ برای $b \in (0,1]$ می‌توانند دو انتخاب باشند که در شرط صعودی بودن h در قضیه ۱ صدق می‌کنند.

قضیه ۲. فرض کنید $\boldsymbol{X^p} = (I_{p_1}X_1, \ldots, I_{p_n}X_n)$ و $\boldsymbol{Y^p} = (I_{p_1}Y_1, \ldots, I_{p_n}Y_n)$ بردارهای تصادفی وابسته و غیرهم‌توزیع با $X_i \sim \mathrm{SAH}(\alpha_i, \theta_i)$ و $Y_i \sim \mathrm{SAH}(\lambda_i, \theta_i)$ با مفصل ارشمیدسی یکسان با تابع مولد ϕ باشند. همچنین فرض کنید $I_{p_1}, \ldots, I_{p_n}$ متغیرهای تصادفی برنولی مستقل با پارامترهای $\boldsymbol{p} = (p_1, \ldots, p_n)$ باشند که از X_iها و Y_iها مستقل هستند. تحت شرایط:

الف) $u\psi'(1-u)$ در $u \in (0,1)$ نزولی باشد.

ب) $\bar{F}^{\alpha}(\frac{x}{\alpha})$ صعودی و لگ‌ـ محدب نسبت به α باشد.

به ازای $\boldsymbol{\alpha} \in D_+$، $\boldsymbol{\lambda} \in D_+$، $\boldsymbol{p} \in D_+$ و $\boldsymbol{\theta} \in \epsilon_+$، داریم: $\boldsymbol{\alpha} \underset{w}{\preceq} \boldsymbol{\lambda} \Longrightarrow X^p_{n:n} \underset{st}{\leqslant} Y^p_{n:n}$.

برهان: تابع بقای $X^p_{n:n}$ به صورت $\bar{F}_{X^p_{n:n}}(x) = 1 - \phi\big(\sum_{j=1}^{n} \psi\big(1 - p_j\bar{F}^{\alpha_j}(\frac{x}{\alpha_j})e^{-\theta_i x}\big)\big)$ است. مشتق جزئی $\bar{F}_{X^p_{n:n}}(x)$ نسبت به α_i به‌صورت

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{F}_{X^p_{n:n}}(x)}{\partial \alpha_i} &= p_i \cdot \frac{\partial \bar{F}^{\alpha_i}(\frac{x}{\alpha_i})e^{-\theta_i x}}{\partial \alpha_i} \dot{\psi}'(1 - p_i\bar{F}^{\alpha_i}(\frac{x}{\alpha_i})e^{-\theta_i x}) \\ &\quad \times \phi'\big(\sum_{j=1}^{n} \psi(1 - p_j\bar{F}^{\alpha_j}(\frac{x}{\alpha_j})e^{-\theta_i x})\big) \geq 0,\end{aligned}$$

است. نابرابری بالا از ویژگی‌های $\psi' \leqslant 0$ و $\phi' \leqslant 0$ و صعودی بودن $\bar{F}^{\alpha}(\frac{x}{\alpha})$ نسبت به α به‌دست می‌آید. بنابراین، برای $i \neq j$، داریم:

$$\frac{\partial \bar{F}_{X^p_{n:n}}(x)}{\partial \alpha_i} - \frac{\partial \bar{F}_{X^p_{n:n}}(x)}{\partial \alpha_j} = \phi'\big(\sum_{j=1}^{n} \psi(1 - p_j\bar{F}^{\alpha_j}(\frac{x}{\alpha_j})e^{-\theta_i x})\big) \cdot \xi_{ij}(x),$$

که در آن ξ_{ij} به‌صورت

$$\begin{aligned}\xi_{ij}(x) &= p_i \cdot \frac{\partial \bar{F}^{\alpha_i}(\frac{x}{\alpha_i})e^{-\theta_i x}}{\partial \alpha_i} \times \psi'(1 - p_i\bar{F}^{\alpha_i}(\frac{x}{\alpha_i})e^{-\theta_i x}) \\ &\quad - p_j \cdot \frac{\partial \bar{F}^{\alpha_j}(\frac{x}{\alpha_j})e^{-\theta_i x}}{\partial \alpha_j} \times \psi'(1 - p_i\bar{F}^{\alpha_i}(\frac{x}{\alpha_i})e^{-\theta_i x}),\end{aligned}$$

تعریف می‌شود. با توجه به اینکه $\phi' \leqslant 0$ است طبق لم‌های ۲ و ۳، کافی است نشان داده شود $\xi_{ij}(x)$ به‌ازای

$\alpha_i > \alpha_j$ و $\theta_i < \theta_j$، نامثبت است. برای این منظور، داریم:

$$\xi_{ij}(x) \leqslant \Big[\frac{\frac{\partial \bar{F}^{\alpha_i}\left(\frac{x}{\alpha_i}\right)}{\partial \alpha_i}}{\bar{F}^{\alpha_i}\left(\frac{x}{\alpha_i}\right)} - \frac{\frac{\partial \bar{F}^{\alpha_j}\left(\frac{x}{\alpha_j}\right)}{\partial \alpha_j}}{\bar{F}^{\alpha_j}\left(\frac{x}{\alpha_j}\right)}\Big]\big(p_j \bar{F}^{\alpha_j}\big(\frac{x}{\alpha_j}\big)e^{-\theta_i x}\psi'\big(1 - p_j \bar{F}^{\alpha_j}\big(\frac{x}{\alpha_j}\big)e^{-\theta_i x}\big)\big) \leq 0.$$

در عبارات بالا، نخستین نابرابری از فرض (الف) نتیجه می‌شود، در حالی که دومین نابرابری از فرض (ب) و این واقعیت که ψ' یک تابع نامثبت است، نتیجه می‌شود. بنابراین $\bar{F}_{X^p_{n:n}}(x)$ شور-محدب است.

قضیه ۳. فرض کنید $\boldsymbol{X^p} = (I_{p_1}X_1, \ldots, I_{p_n}X_n)$ و $\boldsymbol{Y^p} = (I_{p_1}Y_1, \ldots, I_{p_n}Y_n)$ بردارهای تصادفی وابسته و غیرهم‌توزیع با $X_i \sim \mathrm{SAH}(\alpha_i, \theta_i)$ و $Y_i \sim \mathrm{SAH}(\lambda_i, \theta_i)$ با مفصل ارشمیدسی یکسان با تابع مولد ϕ باشند. اگر فرض شود $\psi_2 \circ \phi_1$ تابعی زبرجمعی، $u\psi_1'(1-u)$ نزولی و $\bar{F}^{\alpha}(\frac{x}{\alpha})$ در α صعودی و لگ-محدب باشد آنگاه به ازای $\boldsymbol{\alpha} \in D_+$، $\boldsymbol{p} \in D_+$، $\boldsymbol{\lambda} \in D_+$ و $\boldsymbol{\theta} \in \epsilon_+$ داریم:

$$\boldsymbol{\alpha} \underset{w}{\preceq} \boldsymbol{\lambda} \Rightarrow X^p_{n:n} \underset{st}{\leqslant} Y^p_{n:n}.$$

برهان: اگر بردار تصادفی $\boldsymbol{Z}^p = (I_{p_1}Z_1, \ldots, I_{p_n}Z_n)$ متغیرهاي تصادفی وابسته با مولد ϕ_1 در نظر گرفته شود که در آن $Z_i \sim \mathrm{SAH}(\lambda_i, \theta_i)$ است آنگاه طبق مفروضات این قضیه و نتایج قضیه ۲ از فرض $\boldsymbol{\alpha} \overset{w}{\preceq} \boldsymbol{\lambda}$، نابرابری $\bar{F}_{X^p_{n:n}}(x) \leqslant \bar{F}_{Z^p_{n:n}}(x)$ حاصل می‌شود. بنابراین داریم:

$$\phi_1\big(\sum_{i=1}^{n}\psi_1\big(1 - p_i\bar{F}^{\alpha_i}\big(\frac{x}{\alpha_i}\big)e^{-\theta_i x}\big)\big) \geqslant \phi_1\big(\sum_{i=1}^{n}\psi_1\big(1 - p_i\bar{F}^{\lambda_i}\big(\frac{x}{\lambda_i}\big)e^{-\theta_i x}\big)\big), \qquad (5)$$

از طرفی، خاصیت زبرجمعی[1] $\psi_2 \circ \phi_1$ نتیجه می‌دهد:

$$\phi_1\big(\sum_{i=1}^{n}\psi_1\big(1 - p_i\bar{F}^{\lambda_i}\big(\frac{x}{\lambda_i}\big)e^{-\theta_i x}\big)\big) \geqslant \phi_2\big(\sum_{i=1}^{n}\psi_2\big(1 - p_i\bar{F}^{\lambda_i}\big(\frac{x}{\lambda_i}\big)e^{-\theta_i x}\big)\big), \qquad (6)$$

از روابط (۳) و (۶)، نابرابري

$$\phi_1\big(\sum_{i=1}^{n}\psi_1\big(1 - p_i\bar{F}^{\alpha_i}\big(\frac{x}{\alpha_i}\big)e^{-\theta_i x}\big)\big) \geqslant \phi_2\big(\sum_{i=1}^{n}\psi_2\big(1 - p_i\bar{F}^{\lambda_i}\big(\frac{x}{\lambda_i}\big)e^{-\theta_i x}\big)\big), \qquad (7)$$

بدست می‌آید که نشان می‌دهد $\bar{F}_{X^p_{n:n}}(x) \leqslant \bar{F}_{Y^p_{n:n}}(x)$ و نتیجه لازم حاصل می‌شود.

[1] Supper Additive

قضیه ۴. فرض کنید $\boldsymbol{X}^p = (I_{p_1}X_1, \ldots, I_{p_n}X_n)$ و $\boldsymbol{Y}^p = (I_{p_1}Y_1, \ldots, I_{p_n}Y_n)$ بردارهای تصادفی وابسته و غیرهم‌توزیع با $X_i \sim \mathrm{SAH}(\alpha_i, \theta_i)$ و $Y_i \sim \mathrm{SAH}(\lambda_i, \theta_i)$ و مفصل ارشمیدسی با تابع مولد مشترک ϕ باشند. تحت شرایط:

الف) $\bar{F}^{\alpha}\big(\frac{x}{\alpha}\big)$ نسبت به α تابعی صعودی و محدب باشد.
ب) $r\big(\frac{x}{\alpha}\big)$ تابعی صعودی و محدب در α باشد.
ج) $(1-\phi)$ لگ‌ـ مقعر باشد.
د) $\frac{\phi(1-\phi)}{\phi'}$ تابعی نزولی و مقعر باشد.

به ازای $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{p}) \in A_n$ ، $(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{p}) \in A_n$، $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\theta}) \in B_n$ و $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\theta}) \in B_n$، داریم:

$$\boldsymbol{\alpha} \overset{w}{\preceq} \boldsymbol{\lambda} \Rightarrow X^p_{n:n} \underset{hr}{\leqslant} Y^p_{n:n}$$

برهان: به ازای $x \geq 0$، توابع بقا و چگالی $X^p_{n:n}$ به‌ترتیب به صورت

$$\begin{aligned}
\overline{F}_{X^p_{n:n}}(x) &= 1 - \phi\Big(\sum_{i=1}^{n} \psi\big(1 - p_i \overline{F}^{\alpha_i}\big(\frac{x}{\alpha_i}\big)e^{-\theta_i x}\big)\Big),\\
f_{X^p_{n:n}}(x) &= \phi'\Big(\sum_{i=1}^{n} \psi\Big(1 - p_i \bar{F}^{\alpha_i}\big(\frac{x}{\alpha_i}\big)e^{-\theta_i x}\Big)\Big)\\
&\quad \times \sum_{i=1}^{n}\Big(r\Big(\frac{x}{\alpha_i}\Big) + \theta_i\Big)\Big(p_i \bar{F}^{\alpha_i}\big(\frac{x}{\alpha_i}\big)e^{-\theta_i x}\Big)\psi'\Big(1 - p_i \bar{F}^{\alpha_i}\big(\frac{x}{\alpha_i}\big)e^{-\theta_i x}\Big),
\end{aligned}$$

هستند. بنابراین تابع نرخ خطر متناظر به صورت $r_{X^p_{n:n}}(x) = A_z \sum_{i=1}^{n} B_{\alpha_i} C_{z_i}$ است که در آن

$$\begin{aligned}
z_i &= \psi\big(1 - p_i \bar{F}^{\alpha_i}\big(\frac{x}{\alpha_i}\big)e^{-\theta_i x}\big) \quad , \quad A_z = \frac{\phi'}{1-\phi}\big(\sum_{i=1}^{n} z_i\big) \leqslant 0,\\
C_{z_i} &= \frac{\phi(z_i)(1-\phi(z_i))}{\phi'(z_i)} \leqslant 0 \quad , \quad B_{\alpha_i} = \frac{r\big(\frac{x}{\alpha_i}\big) + \theta_i}{1 - p_i \bar{F}^{\alpha_i}\big(\frac{x}{\alpha_i}\big)e^{-\theta_i x}} \geqslant 0,
\end{aligned}$$

است. برای اثبات $X^p_{n:n} \leqslant_{hr} Y^p_{n:n}$ باید نشان داده شود $r_{X^p_{n:n}}(x) \geqslant r_{Y^p_{n:n}}(x)$ یا $r_{X^p_{n:n}}(x)$ تابعی صعودی و شور‌ـ مقعر در $\boldsymbol{\alpha}$ است. مشتق جزئی $r_{X^p_{n:n}}(x)$ نسبت به α_i به‌صورت

$$\frac{\partial r_{X^p_{n:n}}(x)}{\partial \alpha_i} = \frac{\partial A_z}{\partial \alpha_i}\sum_{i=1}^{n} B_{\alpha_i} C_{z_i} + A_z\big(\frac{\partial B_{\alpha_i}}{\partial \alpha_i} \cdot C_{z_i} + \frac{\partial C_{z_i}}{\partial \alpha_i} \cdot B_{\alpha_i}\big),$$

است. با توجه به اینکه $\frac{\partial A_z}{\partial z_i} = \frac{\partial A_z}{\partial z_j} = \frac{\partial A_z}{\partial z}$ است بنابراین به ازای $i \neq j$ داریم:

$$\begin{aligned}(\alpha_i - \alpha_j)\Big(\frac{\partial r_{X^p_{n:n}}(x)}{\partial \alpha_i} - \frac{\partial r_{X^p_{n:n}}(x)}{\partial \alpha_j}\Big) &= (\alpha_i - \alpha_j)\Big(\frac{\partial z_i}{\partial \alpha_i} - \frac{\partial z_j}{\partial \alpha_j}\Big)\frac{\partial A_z}{\partial z} \cdot \sum_{i=1}^{n} B_i C_{z_i} \\ &+ (\alpha_i - \alpha_j) \\ &\times \Big[\Big(\frac{\partial C_{z_i}}{\partial z_i} \cdot \frac{\partial z_i}{\partial \alpha_i} \cdot B_{\alpha_i} - \frac{\partial C_{z_j}}{\partial z_j} \cdot \frac{\partial z_j}{\partial \alpha_j} \cdot B_{\alpha_j}\Big) \\ &+ \Big(\frac{\partial B_{\alpha_i}}{\partial \alpha_i} \cdot C_{z_i} - \frac{\partial B_{\alpha_j}}{\partial \alpha_j} \cdot C_{z_j}\Big)\Big] \\ &\leqslant (\alpha_i - \alpha_j)\Big(\frac{\partial B_{\alpha_i}}{\partial \alpha_i} \cdot C_{z_i} - \frac{\partial B_{\alpha_j}}{\partial \alpha_j} \cdot C_{z_j}\Big) \leqslant 0.\end{aligned}$$

نابرابری اول از لگ–مقعر بودن $1-\phi$ (معادل با صعودی بودن $\frac{\phi'}{1-\phi}$) و از صعودی بودن A_z نسبت به z، همچنین صعودی و محدب بودن z_i نسبت به α_i و نامثبت بودن C_{z_i} نتیجه می‌شود. از طرف دیگر، بنابر نزولی و مقعر بودن C_{z_i} نسبت به z_i و صعودی بودن B_{α_i} و صعودی و محدب بودن z_i نسبت به α_i روابط $-\frac{\partial C_{z_i}}{\partial z_i} \geqslant -\frac{\partial C_{z_j}}{\partial z_j} \geqslant 0$ و $B_i \frac{\partial z_i}{\partial \alpha_i} \geqslant B_j \frac{\partial z_j}{\partial \alpha_j}$ برقرار هستند. بنابراین، از ترکیب روابط فوق، نابرابری دوم نتیجه خواهد شد. همچنین طبق ویژگی صعودی و محدب بودن B_{α_i} و نزولی بودن C_{z_j} نسبت به z_i و α_i و نامثبت بودن آن، نابرابری سوم برقرار است. بنابراین طبق لم ۲، $r_{x^p_{n:n}}(x)$ تابعی صعودی و شور–مقعر در $\boldsymbol{\alpha}$ است و نتیجه لازم، بدست می‌آید.

۴ نتایجی در مورد کوچک‌ترین آماره ترتیبی

قضیه ۵. فرض کنید $\boldsymbol{X}^p = (I_{p_1}X_1, \ldots, I_{p_n}X_n)$ و $\boldsymbol{Y}^p = (I_{p_1}Y_1, \ldots, I_{p_n}Y_n)$ بردارهای تصادفی وابسته و غیرهم‌توزیع با $X_i \sim \mathrm{SAH}(\alpha_i, \theta_i)$ و $Y_i \sim \mathrm{SAH}(\alpha_i, \eta_i)$ و مفصل ارشمیدسی با تابع مولد مشترک ϕ باشند. همچنین فرض کنید $I_{p_1}, \ldots, I_{p_n}$ متغیرهای تصادفی برنولی مستقل با پارامترهای $p_1, \ldots, p_n$ باشند. اگر $\bar{F}^{\alpha}\big(\frac{x}{\alpha}\big)$ نسبت به $\boldsymbol{\alpha}$ صعودی، $(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{p}) \in B_n$، $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\theta}) \in B_n$ و $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{p}) \in A_n$ باشد آنگاه:

الف) اگر ϕ لگ–محدب باشد $\boldsymbol{\theta} \overset{w}{\preceq} \boldsymbol{\eta} \Rightarrow X^p_{1:n} \leqslant_{st} Y^p_{1:n}$.

ب) اگر ϕ لگ–مقعر باشد $\boldsymbol{\theta} \underset{w}{\preceq} \boldsymbol{\eta} \Rightarrow Y^p_{1:n} \leqslant_{st} X^p_{1:n}$.

برهان:

الف) تابع بقای $X^p_{1:n}$ به صورت $\bar{F}_{X^p_{1:n}}(x) = \phi\big(\sum_{i=1}^{n} \psi\big(p_i \bar{F}^{\alpha_i}\big(\frac{x}{\alpha_i}\big)e^{-\theta_i x}\big)\big)$ است. برای رسیدن به نتیجه لازم، براساس لم‌های ۲ و ۳ کافی است نشان داده شود $\overline{F}_{X^p_{1:n}}(x)$ تابعی نزولی و شور–محدب در

θ_i است. مشتق تابع $\bar{F}_{X^p_{1:n}}(x)$ نسبت به θ_i به‌صورت

$$\frac{\partial \bar{F}_{X_{1:n}}(x)}{\partial \theta_i} = p_i \cdot \bar{F}^{\alpha_i}\big(\frac{x}{\alpha_i}\big)(-xe^{-\theta_i x}) \cdot \psi'\big(p_i \bar{F}^{\alpha_i}\big(\frac{x}{\alpha_i}\big)e^{-\theta_i x}\big) \times \phi'\Big(\sum_{k=1}^{n} \psi\Big(p_k \bar{F}^{\alpha_k}\big(\frac{x}{\alpha_k}\big)e^{-\theta_k x}\Big)\Big),$$

است. چون ϕ و ψ توابعی نزولی هستند واضح است که $\frac{\partial \bar{F}_{X_{1:n}}(x)}{\partial \theta_i} \leqslant 0$ است که نزولی بودن تابع $\bar{F}_{X^p_{1:n}}(x)$ نتیجه می‌شود و به ازای $i \neq j$ داریم:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{F}_{X^p_{1:n}}(x)}{\partial \theta_i} - \frac{\partial \bar{F}_{X^p_{1:n}}(x)}{\partial \theta_j} &= (-x)\phi'\big(\sum_{k=1}^{n} \psi\big(p_k \bar{F}^{\alpha_k}\big(\frac{x}{\alpha_k}\big)e^{-\theta_k x}\big)\big) \\ &\times \Big[\big(p_i \bar{F}^{\alpha_i}\big(\frac{x}{\alpha_i}\big)e^{-\theta_i x}\big)\psi'\big(p_i \bar{F}^{\alpha_i}\big(\frac{x}{\alpha_i}\big)e^{-\theta_i x}\big) \\ &- \big(p_j \bar{F}^{\alpha_j}\big(\frac{x}{\alpha_j}\big)e^{-\theta j_x}\big)\psi'\big(p_j \bar{F}^{\alpha_j}\big(\frac{x}{\alpha_j}\big)e^{-\theta_j x}\big)\Big],\end{aligned}$$

همچنین به‌ازای $\theta_i \geqslant \theta_j$ $(\theta_i \leqslant \theta_j)$ و $p_i \leqslant p_j$ $(p_i \geqslant p_j)$ و $\alpha_i \leqslant \alpha_j$ $(\alpha_i \geqslant \alpha_j)$ و با توجه به صعودی بودن $\bar{F}^{\alpha_i}\big(\frac{x}{\alpha_i}\big)$ نسبت به α_i و نزولی بودن تابع ψ نابرابری‌های

$$\begin{aligned}&p_i \bar{F}^{\alpha_i}\big(\frac{x}{\alpha_i}\big)e^{-\theta_i x} \leqslant (\geqslant) p_j \bar{F}^{\alpha_j}\big(\frac{x}{\alpha_j}\big)e^{-\theta_j x}, \\ &p_i \bar{F}^{\alpha_i}\big(\frac{x}{\alpha_i}\big)e^{-\theta_i x} \cdot \psi'\big(p_i \bar{F}^{\alpha_i}\big(\frac{x}{\alpha_i}\big)e^{-\theta_i x}\big) \geqslant (\leqslant) \\ &p_j \bar{F}^{\alpha_j}\big(\frac{x}{\alpha_j}\big)e^{-\theta_j x} \cdot \psi'\big(p_j \bar{F}^{\alpha_j}\big(\frac{x}{\alpha_j}\big)e^{-\theta_j x}\big),\end{aligned}$$

برقرار هستند. با توجه به شرط لگ–محدب بودن ϕ (معادل با نزولی بودن $\frac{\phi(u)}{\phi'(u)}$ و $u\psi'(u)$)، می‌توان نتیجه گرفت برای $i \neq j$ عبارت

$$(\theta_i - \theta_j)\big(\frac{\partial \bar{F}_{X^p_{1:n}}(x)}{\partial \theta_i} - \frac{\partial \bar{F}_{X^p_{1:n}}(x)}{\partial \theta_j}\big), \tag{۸}$$

نامنفی است. بنابر لم‌های ۲ و ۳ $\bar{F}_{X^p_{1:n}(x)}$ تابعی شور–محدب در θ_i است و این تأییدی بر اثبات بند (الف) قضیه است.

ب) برای اثبات این قسمت، اگر ϕ لگ–مقعر باشد عبارت (۸) نامثبت است و بنابر لم‌های ۲ و ۳، $\bar{F}_{X^p_{1:n}(x)}$

تابعی نزولی و شور–مقعر در θ_i است و اثبات مشابه بند (الف) است.

قضیه ۶. تحت مفروضات قضیه ۵، فرض کنید $\bar{F}^{\alpha}(\frac{x}{\alpha})$ در $\boldsymbol{\alpha}$ نزولی، $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\theta}) \in A_n$، $(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\theta}) \in B_n$ و $(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\alpha}) \in B_n$ باشد. در این صورت:

الف) اگر ϕ لگ–محدب باشد آنگاه $\boldsymbol{\theta} \overset{w}{\preceq} \boldsymbol{\eta} \Rightarrow X^p_{1:n} \leqslant_{st} Y^p_{1:n}$.

ب) اگر ϕ لگ–مقعر باشد آنگاه $\boldsymbol{\theta} \underset{w}{\preceq} \boldsymbol{\eta} \Rightarrow Y^p_{1:n} \leqslant_{st} X^p_{1:n}$.

برهان: اثبات این قضیه، مشابه اثبات قضیه ۵ است. بنابراین از اثبات آن، صرف‌نظر شده است.

قضیه ۷. فرض کنید $\boldsymbol{X^p} = (I_{p_1}X_1,\ldots,I_{p_n}X_n)$ و $\boldsymbol{X^q} = (I_{q_1}X_1,\ldots,I_{q_n}X_n)$ بردارهای تصادفی وابسته و غیرهم‌توزیع با $X_i \sim \mathrm{SAH}(\alpha,\theta_i)$، تحت مفصل ارشمیدسی با تابع مولد ϕ باشند. همچنین $I_{p_1},\ldots,I_{p_n}$ و $I_{q_1},\ldots,I_{q_n}$ متغیرهای برنولی مستقل با پارامترهای $\boldsymbol{p} = (p_1,\ldots,p_n)$ و $\boldsymbol{q} = (q_1,\ldots,q_n)$ باشند که از X_iها مستقل هستند. تحت شرایط:

الف) تابع $u\psi'(u)$ روی بازه $(0,1)$ صعودی باشد.

ب) توابع $h(u)$ و $uh'(u)$ روی بازه $(0,1)$ نزولی باشند.

به ازای $h(\boldsymbol{u}) \in D_+$ و $\boldsymbol{\theta} \in D_+$، داریم: $h(\boldsymbol{p}) \preceq_w h(\boldsymbol{q}) \Rightarrow X^q_{1:n} \leqslant_{st} X^p_{1:n}$.

برهان: تابع توزیع $X^p_{1:n}$ به‌صورت $F_{X^p_{1:n}}(x) = 1 - \phi\big(\sum_{i=1}^n \psi\big(p_i\bar{F}^{\alpha}(\frac{x}{\alpha})e^{-\theta_i x}\big)\big)$ بیان می‌شود. با قرار دادن $u_i = h(p_i)$ برای $i = 1,\ldots,n$، مطابق لم‌های ۲ و ۳ برای اثبات نتیجه لازم، کافی است نشان داده شود تابع $F_{X^p_{1:n}}(x)$ صعودی و شور–محدب نسبت به u_i است. با مشتق‌گیری داریم:

$$\frac{\partial F_{X^p_{1:n}}(x;\alpha_i)}{\partial u_i} = -\bar{F}^{\alpha}\big(\frac{x}{\alpha}\big)e^{-\theta_i x}\frac{\partial h^{-1}(u_i)}{\partial u_i}\cdot\psi'\big(h^{-1}(u_i)\bar{F}^{\alpha}\big(\frac{x}{\alpha}\big)e^{-\theta_i x}\big)$$
$$\times\,\phi'\big(\sum_{i=1}^n\psi\big(h^{-1}(u_i)\bar{F}^{\alpha}\big(\frac{x}{\alpha}\big)e^{-\theta_i x}\big)\big).$$

با توجه به نزولی بودن $e^{-\theta x}$ نسبت به θ و $\psi' \leqslant 0$ و $\phi' \leqslant 0$ نتیجه می‌شود که عبارت فوق، نامنفی است بنابراین $F_{X^p_{1:n}}(x)$ نسبت به u_i صعودی است. اکنون، به ازای $i \neq j$ و $h(\boldsymbol{u}),\boldsymbol{\theta} \in D_+$ داریم:

$$\frac{\partial F_{X^p_{1:n}}(x;\alpha_i)}{\partial u_i} - \frac{\partial F_{X^p_{1:n}}(x;\alpha_j)}{\partial u_j} = \phi'\big(\sum_{j=1}^n\psi\big(h^{-1}(u_j)\bar{F}^{\alpha}\big(\frac{x}{\alpha}\big)e^{-\theta_j x}\big)\big)\Delta_{ij}(x),$$

که در آن:

$$\Delta_{ij}(x) = \frac{1}{h^{-1}(u_j)h'(h^{-1}(u_j))}h^{-1}(u_j)\bar{F}^{\alpha}\big(\frac{x}{\alpha}\big)e^{-\theta_j x} \times \psi'\big(h^{-1}(u_j)\bar{F}^{\alpha}\big(\frac{x}{\alpha}\big)e^{-\theta j x}\big)$$
$$- \frac{1}{h^{-1}(u_i)h'(h^{-1}(u_i))}h^{-1}(u_i)\bar{F}^{\alpha}\big(\frac{x}{\alpha}\big)e^{-\theta_i x} \times \psi'\big(h^{-1}(u_i)\bar{F}^{\alpha}\big(\frac{x}{\alpha}\big)e^{-\theta_i x}\big),$$

است. از آنجا که $\phi' \leqslant 0$ است کافی است نشان داده شود که $\Delta_{i,j}(x)$ تابعی نامثبت است. با توجه به فرضیات (الف) و (ب)، به ازای $1 \leqslant i < j \leqslant n$ و $h(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{\theta} \in D_+$، داریم:

$$h^{-1}(u_i)\bar{F}^{\alpha}\big(\frac{x}{\alpha}\big)e^{-\theta_i x}\psi'\big(h^{-1}(u_i)\bar{F}^{\alpha}\big(\frac{x}{\alpha}\big)e^{-\theta_i x}\big) \leqslant$$

$$h^{-1}(u_j)\bar{F}^{\alpha}\big(\frac{x}{\alpha}\big)e^{-\theta_j x}\psi'\big(h^{-1}(u_j)\bar{F}^{\alpha}\big(\frac{x}{\alpha}\big)e^{-\theta_i x}\big) \leqslant 0,$$

و

$$\frac{1}{h^{-1}(u_i)h'(h^{-1}(u_i))} \leqslant \frac{1}{h^{-1}(u_j)h'(h^{-1}(u_j))} \leqslant 0.$$

با ترکیب دو نتیجه فوق، مشاهده می‌شود که $\Delta_{i,j}(x)$ نامثبت است. بنابراین تابع توزیع $F_{X^p_{1:n}}(x)$ در $h(\boldsymbol{p})$ شور-محدب است و اثبات کامل است

قضیه ۸. فرض کنید $\boldsymbol{X^p} = (I_{p_1}X_1, \ldots, I_{p_n}X_n)$ و $\boldsymbol{Y^p} = (I_{p_1}Y_1, \ldots, I_{p_n}Y_n)$ بردارهای تصادفی وابسته و غیرهم‌توزیع با $X_i \sim \mathrm{SAH}(\alpha_i, \theta_i)$ و $Y_i \sim \mathrm{SAH}(\lambda_i, \theta_i)$ تحت مفصل ارشمیدسی مشترک با تابع مولد ϕ باشند. همچنین فرض کنید $I_{p_1}, \ldots, I_{p_n}$ متغیرهای تصادفی برنولی مستقل با پارامترهای $\boldsymbol{p} = (p_1, \ldots, p_n)$ باشند. تحت شرایط:

الف) ϕ یک تابع لگ-مقعر باشد.

ب) $\bar{F}^{\alpha}\big(\frac{x}{\alpha}\big)$ نسبت به α صعودی و یک تابع لگ-مقعر نسبت به α باشد.

به ازای $\boldsymbol{p} \in D_+$، $\boldsymbol{\alpha} \in D_+$، $\boldsymbol{\lambda} \in D_+$ و $\boldsymbol{\theta} \in \epsilon_+$ داریم: $\boldsymbol{\alpha} \underset{w}{\preceq} \boldsymbol{\lambda} \Rightarrow X^p_{1:n} \leqslant_{st} Y^p_{1:n}$.

برهان: تابع توزیع $X^p_{1:n}$ به‌صورت $F_{X^p_{1:n}}(x) = 1 - \phi\big(\sum_{i=1}^n \psi\big(p_i\bar{F}^{\alpha_i}\big(\frac{x}{\alpha_i}\big)e^{-\theta_i x}\big)\big)$ است و

$$\frac{\partial F_{X^p_{1:n}}(x)}{\partial \alpha_i} = -p_i\frac{\partial \bar{F}^{\alpha_i}\big(\frac{x}{\alpha_i}\big)}{\partial \alpha_i}e^{-\theta_i x} \cdot \psi'\big(p_i\bar{F}^{\alpha_i}\big(\frac{x}{\alpha_i}\big)e^{-\theta_i x}\big)$$
$$\times \phi'\big(\sum_{j=1}^n \psi\big(p_j\bar{F}^{\alpha_j}\big(\frac{x}{\alpha_j}\big)e^{-\theta_i x}\big)\big),$$

است. از آنجا که $\phi'(u)$ و $\psi'(u)$ توابعی نامثبت هستند، با توجه به صعودی بودن $\bar{F}^{\alpha_i}\big(\frac{x}{\alpha_i}\big)$ نسبت به α، نتیجه گرفته می‌شود $\frac{\partial F_{X^p_{1:n}}(x)}{\partial \alpha_i} \leqslant 0$ است. بنابراین $F_{X^p_{1:n}}(x)$ یک تابع نزولی نسبت به α است. اکنون برای به‌دست آوردن نتیجه مطلوب، طبق لم‌های ۲ و ۳، کافی است نشان داده شود که $F_{X^p_{1:n}}(x)$ یک تابع شور–مقعر است. برای این منظور، رابطه فوق را می‌توان به صورت

$$\frac{\partial F_{X^p_{1:n}}(x)}{\partial \alpha_i} = -\frac{\frac{\partial \bar{F}^{\alpha_i}\left(\frac{x}{\alpha_i}\right)}{\partial \alpha_i}}{\bar{F}^{\alpha_i}\left(\frac{x}{\alpha_i}\right)} \frac{\phi\big(\psi\big(p_i \bar{F}^{\alpha_i}\big(\frac{x}{\alpha_i}\big)e^{-\theta_i x}\big)\big)}{\phi'\big(\psi\big(p_i \bar{F}^{\alpha_i}\big(\frac{x}{\alpha_i}\big)e^{-\theta_i x}\big)\big)} \phi'\big(\sum_{j=1}^{n} \psi\big(p_j \bar{F}^{\alpha_j}\big(\frac{x}{\alpha_j}\big)e^{-\theta_i x}\big)\big),$$

بازنویسی کرد. بنابراین، به ازای $1 \leqslant i < j \leqslant n$ و $\boldsymbol{p} \in D_+$ و $\boldsymbol{\alpha} \in D+$، داریم:

$$\frac{\partial \bar{F}_{X^p_{1:n}}(x)}{\partial \alpha_i} - \frac{\partial \bar{F}_{X^p_{1:n}}(x)}{\partial \alpha_j} = \phi'\big(\sum_{j=1}^{n} \psi\big(p_j \bar{F}^{\alpha_j}\big(\frac{x}{\alpha_j}\big)e^{-\theta_i x}\big)\big) \cdot \xi_{ij}(x),$$

که در آن

$$\xi_{ij}(x) = \frac{\frac{\partial \bar{F}^{\alpha_j}\left(\frac{x}{\alpha_j}\right)}{\partial \alpha_j}}{\bar{F}^{\alpha_j}\left(\frac{x}{\alpha_j}\right)} \cdot \frac{\phi\big(\psi\big(p_j \bar{F}^{\alpha_j}\big(\frac{x}{\alpha_j}\big)\big)\big)}{\phi'\big(\psi\big(p_j \bar{F}^{\alpha_j}\big(\frac{x}{\alpha_j}\big)\big)\big)} - \frac{\frac{\partial \bar{F}^{\alpha_i}\left(\frac{x}{\alpha_i}\right)}{\partial \alpha_i}}{\bar{F}^{\alpha_i}\left(\frac{x}{\alpha_i}\right)} \cdot \frac{\phi\big(\psi\big(p_i \bar{F}^{\alpha_i}\big(\frac{x}{\alpha_i}\big)e^{-\theta_i x}\big)\big)}{\phi'\big(\psi\big(p_i \bar{F}^{\alpha_i}\big(\frac{x}{\alpha_i}\big)e^{-\theta_i x}\big)\big)}.$$

از آنجا که ϕ' نامثبت است، برای شور–مقعر بودن به ازای $\alpha_i > \alpha_j$ کافی است نشان داده شود که $\xi_{ij}(x)$ نامنفی است. بسادگی می‌توان نشان داد:

$$\xi_{ij}(x) \geqslant \Big[\frac{\frac{\partial \bar{F}^{\alpha_j}\left(\frac{x}{\alpha_j}\right)}{\partial \alpha_j}}{\bar{F}^{\alpha_j}\left(\frac{x}{\alpha_j}\right)} - \frac{\frac{\partial \bar{F}^{\alpha_i}\left(\frac{x}{\alpha_i}\right)}{\partial \alpha_i}}{\bar{F}^{\alpha_i}\left(\frac{x}{\alpha_i}\right)}\Big] \cdot \frac{\phi\big(\psi\big(p_i \bar{F}^{\alpha_i}\big(\frac{x}{\alpha_i}\big)e^{-\theta_i x}\big)\big)}{\phi'\big(\psi\big(p_i \bar{F}^{\alpha_i}\big(\frac{x}{\alpha_i}\big)e^{-\theta_i x}\big)\big)} \geqslant 0,$$

به‌طوری‌که نابرابری اول از فرض (الف) نتیجه می‌شود که بیانگر خاصیت صعودی بودن $\frac{\phi(x)}{\phi'(x)}$ است و نابرابری دوم از فرض (ب) نتیجه می‌شود. این نتیجه، اثبات قضیه را کامل می‌کند.

قضیه ۹. فرض کنید $\boldsymbol{X}^p = (I_{p_1}X_1, \ldots, I_{p_n}X_n)$ و $\boldsymbol{Y}^p = (I_{p_1}Y_1, \ldots, I_{p_n}Y_n)$ بردارهای تصادفی وابسته و غیرهم‌توزیع با $X_i \sim \mathrm{SAH}(\alpha_i, \theta_i)$ و $Y_i \sim \mathrm{SAH}(\lambda_i, \theta_i)$ تحت مفصل ارشمیدسی با توابع مولد به‌ترتیب ϕ_1 و ϕ_2 باشند. اگر ϕ_1 تابعی لگ–مقعر و $\bar{F}^{\alpha_i}\big(\frac{x}{\alpha_i}\big)$ تابعی صعودی در α و $\psi_2 \circ \phi_1$ تابعی زبرجمعی باشد آنگاه به ازای $\boldsymbol{\lambda} \in D_+$ ، $\boldsymbol{p} \in D_+$ ، $\boldsymbol{\alpha} \in D_+$ و $\boldsymbol{\theta} \in \epsilon_+$ داریم: $\boldsymbol{\alpha} \underset{w}{\preceq} \boldsymbol{\lambda} \Rightarrow X^p_{1:n} \leqslant_{st} Y^p_{1:n}$.

برهان: اثبات این قضیه، مشابه اثبات قضیه ۳ است. بنابراین از ارائه آن، صرف‌نظر می‌شود.

تذکر ۲. فرض زبرجمعی بودن $\psi_2 \circ \phi_1$ توسط بسیاری از خانواده‌های مفصل بقای ارشمیدسی برقرار است. برای مثال، مفصل‌های بقای ارشمیدسی با مولدهای زیر، دارای این خاصیت هستند:

۱. $\phi_1(u) = e^{1-(1+u)^{\frac{1}{\delta}}}$ و $\phi_2(u) = \frac{\delta}{\log(e^\delta+u)}$، که در آن $0 < \delta \leqslant 1$، $u \in (0,1)$.
۲. $\phi_1(u) = \frac{\delta}{\log(e^\delta+u)}$ و $\phi_2(u) = \log(e+u)^{-1/\delta}$، که در آن $\delta > 1$، $u \in (0,1)$.
۳. $\phi_1(u) = e^{1-(1+u)^{\frac{1}{\delta_1}}}$ و $\phi_2(u) = e^{1-(1+u)^{\frac{1}{\delta_2}}}$، کـه در آن $\delta_2 \geqslant \delta_1 \geqslant 1$، $u \in (0,1)$.

تذکر ۳. مفصل‌های ارشمیدسی با توابع مولد $\phi(u) = 2/(1+e^u)$ و $\phi(u) = (-1+\delta)/(-e^u+\delta)$ به ازای $-1 \leqslant \delta \leqslant 0$ نمونه‌هایی از مفصل‌های بقا هستند که دارای خاصیت لگ‌ـ مقعر هستند. همچنین فرض کنید ϕ_1 و ϕ_2 دو تابع مولد مفصل باشند که به صورت $\phi_i(u) = \frac{1-\delta_i}{e^u-\delta_i}$ با $\psi_i(u) = \frac{1-\delta_i+\delta_i u}{u}$ باشند. در این صورت

$$u\psi_i'(1-u) = \frac{u(\delta_i-1)}{(1-u)}, \qquad \delta_i \in (-1,1).$$

که تابعی صعودی نسبت به $u \in (0,1)$ به ازای $\delta \in (0,1)$ هستند و همچنین $\psi_2 \circ \phi_1$ تابعی محدب و در نتیجه زبرجمعی به ازای $0 \leqslant \delta_1 < \delta_2 < 1$ است.

تذکر ۴. فرض کنید $\phi_i(u) = (1+\delta_i u)^{\frac{-1}{\delta_i}}$ با $\psi_i(u) = \frac{1}{\delta_i}(u^{-\delta_i}-1)$ به ازای $i = 1,2$، دو تابع مولد مفصل با پارامترهای δ_1 و δ_2 باشند. در این صورت:

$$(\psi_2 \circ \phi_1)'(u) = \frac{1}{\delta_2}\big((1+\delta_1 u)^{\frac{\delta_2}{\delta_1}-1}\big),$$

$$(\psi_2 \circ \phi_1)''(u) = (\delta_2-\delta_1)(1+\delta_1 u)^{\frac{\delta_2}{\delta_1}-2},$$

که به ازای $\delta_2 \geqslant \delta_1 > 0$، $\psi_2 \circ \phi_1$ تابعی محدب است، بنابراین، دارای خاصیت زبرجمعی است. همچنین $u\psi_i'(1-u) = \frac{-u}{(1-u)^{\delta_i+1}}$، به ازای $\delta_i > 0$ تابعی نزولی از $u \in (0,1)$ است.

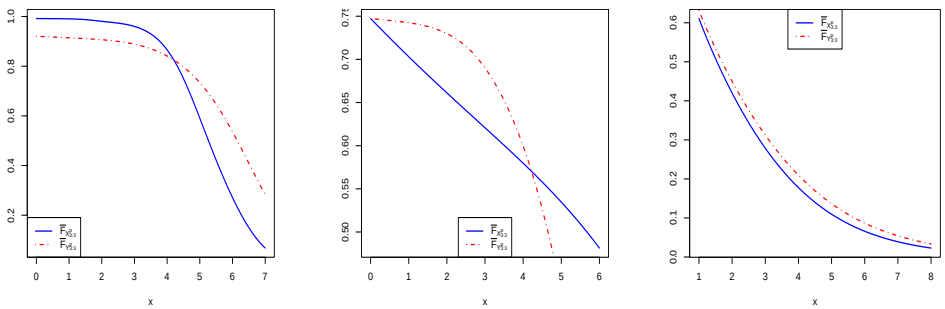
۵ چند مثال از مصداق‌های قضایا

مثال ۱. فرض کنید تابع بقای پایه به‌صورت $\bar{F}(x) = \frac{1}{x},\ x \geqslant 1$ باشد. به سادگی می‌توان نشان داد $\bar{F}^\alpha(\frac{x}{\alpha})$ به‌ازای $\alpha \geqslant x \geqslant 1$ تابعی صعودی و لگ‌ـ محدب نسبت به α است. همچنین تابع مولد مفصل علی‌ـ میخائیل‌ـ حق با $\phi(u) = \dfrac{1-\delta}{e^u-\delta},\ u \in (0,1),\ \delta \in [-1,1]$ را در نظر بگیرید. به ازای $\delta \in (0,1]$ و $\psi(u) =$

$\log(\frac{1-\delta+u\delta}{u})$ داریم:

$$u\psi'(1-u) = \frac{u(\delta-1)}{(1-u)(1-\delta+\delta(1-u))} = \frac{u(\delta-1)}{(1-u)(1-\delta u)},$$

که به راحتی می‌توان نشان داد به ازای $\delta \in (0,1)$، $(\delta = 0.8)$ تابعی نزولی برحسب u است. به ازای $\boldsymbol{p} = (0.02, 0.18, 0.72)$، $\boldsymbol{\alpha} = (37, 24, 5)$ و $\boldsymbol{\lambda} = (7, 4, 2)$ داریم $\boldsymbol{\alpha} \underset{w}{\preceq} \boldsymbol{\lambda}$. توابع بقای $X^p_{3:3}$ و $Y^p_{3:3}$ در شکل ؟؟ *(الف)* نمایش داده شده است که نابرابری تصادفی $X^p_{3:3} \leqslant_{st} Y^p_{3:3}$ را نتیجه می‌دهد.



(ج) (ب) (الف)

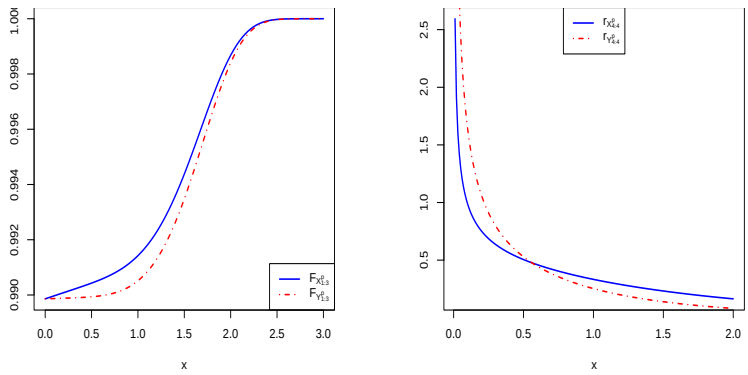
شکل ۱. توابع بقا $X^p_{3:3}$ و $Y^p_{3:3}$، در الف- متال ۱، ب- مثال ۲ و ج- مثال ۳.

مثال ۲. طبق مفروضات مثال ۱، تابع مفصل مفروض به ازای $\delta \in (-1, 0)$، $(\delta = -0.66)$، تابع $u\psi'(1-u)$ تابعی صعودی برحسب u است. شکل ۲ *(ب)* نشان می‌دهد که توابع توزیع $X^p_{3:3}$ و $Y^p_{3:3}$ یکدیگر را قطع می‌کنند. بنابراین نتایج قضیه ۲ با فرض صعودی بودن $u\psi'(1-u)$ برقرار نیست.

مثال ۳. دو سیستم موازی از مولفه‌های وابسته و ناهمگن با تابع بقای پایه $\bar{F}(x) = \frac{1}{x},\ x \geqslant 1$ را در نظر بگیرید. به سادگی می‌توان نشان داد که برای تابع $\bar{F}^{\alpha}(\frac{x}{\alpha})$ ویژگی‌های صعودی و لگ- محدب نبودن نسبت به α برقرار است. همچنین فرض کنید $\boldsymbol{\lambda} = (9, 6, 2) \in D_+$، $\boldsymbol{\alpha} = (11, 8, 4) \in D_+$ و $\boldsymbol{p} = (0.92, 0.68, 0.32) \in D_+$ است که در آن $\boldsymbol{\alpha} \underset{w}{\preceq} \boldsymbol{\lambda}$ است. توابع مولد مفصل علی- میکائیل- حق با $\phi_1(u) = \frac{0.5}{e^u - 0.5}$ و $\phi_2(u) = \frac{1.6}{e^u + 0.6}$ را در نظر بگیرید به‌طوری‌که $\psi_2 \circ \phi_1$ تابعی زیرجمعی است *(چون $\psi_2 \circ \phi_1$ تابعی محدب است)*، از طرفی $u\psi_2'(1-u)$ تابعی صعودی است. *(طبق استدلال مثال ۱)* در شکل ۲ *(ج)* توابع بقای $X^p_{3:3}$ و $Y^p_{3:3}$ رسم شده است و نشان می‌دهد که $X^p_{3:3} \not\leqslant_{st} Y^p_{3:3}$ و $Y^p_{3:3} \not\leqslant_{st} X^p_{3:3}$ است. بنابراین نتیجه قضیه ۳ برقرار نیست.

مثال ۴. فرض کنید تابع بقای پایه به صورت $\bar{F}(x) = e^{-x^k},\ x > 0$ باشد. تابع $\bar{F}^{\alpha}(\frac{x}{\alpha})$ به‌ازای $k = 3 > 1$ تابعی صعودی و محدب نسبت به α است. همچنین تابع مولد $\phi(u) = \left(\frac{1}{1+\delta u}\right)^{\frac{1}{\delta}}$ را به ازای $\delta = 0.2$ در نظر

بگیرید که تابعی محدب است (معادل با لگ‌ـ مقعر بودن $1-\phi$ است) ولی $\frac{\phi(1-\phi)}{\phi'}$ نیز تابعی نزولی و محدب است. به ازای $\boldsymbol{\alpha}=(3,4,5,6)$ و $\boldsymbol{\lambda}=(2,4,5,7)$ و $\boldsymbol{p}=(0.2,0.25,0.45,0.8)$ واضح است $\boldsymbol{\alpha}\overset{m}{\preceq}\boldsymbol{\lambda}$ است. بنابراین فرض مقعر بودن $\dfrac{\phi(1-\phi)}{\phi'}$ برقرار نیست. شکل ۳ (الف) عدم برقراری قضیه ۴ را نشان می‌دهد.



(ب) (الف)

شکل ۲. توابع نرخ خطر الف‌ـ برای $X^p_{4:4}$ و $Y^p_{4:4}$ در مثال ۴، ب‌ـ برای $X^p_{1:3}$ در مثال ۵.

مثال ۵. دو سیستم سری متشکل از مولفه‌های وابسته با تابع بقای پایه $\bar{F}(x)=e^{-x^5},\ x\geqslant 0$ را در نظر بگیرید. واضح است $\log\bar{F}^{\alpha}\left(\frac{x}{\alpha}\right)=-\alpha^{-4}x^5$ است. در نتیجه به راحتی می‌توان نشان داد که مشتق دوم این تابع نامثبت و مشتق اول آن، نامنفی است. بنابراین شرط صعودی و لگ‌ـ مقعر بودن تابع $\bar{F}^{\alpha}(\frac{x}{\alpha})$ نسبت به α برقرار است. همچنین فرض کنید $\boldsymbol{\alpha}=(11,8,4)\in D_+$، $\boldsymbol{\lambda}=(9,6,2)\in D_+$ و $\boldsymbol{p}=(0.92,0.18,0.02)\in D_+$ باشد به‌طوری‌که $\boldsymbol{\alpha}\underset{w}{\preceq}\boldsymbol{\lambda}$ است. تابع مولد ارشمیدسی $\phi(u)=\dfrac{2}{1+e^u}$ تابعی لگ‌ـ مقعر است زیرا $\log\phi(u)=\log 2-\log(1+e^u)$ و در نتیجه $\frac{\partial^2\log\phi(u)}{\partial u^2}=-e^{-u}(1+e^{-u})^{-2}$ است. بنابراین مشتق دوم تابع $\log\phi(u)$ نسبت به u، نامثبت است و $\phi(u)$ تابعی لگ‌ـ مقعر است. در شکل ۳ (ب)، نمودارهای توابع توزیع متغیرهای تصادفی $X^p_{1:3}$ و $Y^p_{1:3}$ رسم شده است که نشان می‌دهد نمودار تابع توزیع $X^p_{1:3}$، بالای نمودار تابع توزیع $Y^p_{1:3}$ قرار دارد. بنابراین درستی قضیه ۸ مورد تایید قرار می‌گیرد.

۶ شبیه‌سازی و کاربرد

در این بخش، مجموعه‌ای جامع از تحلیل‌ها با دو هدف اصلی طراحی شده‌اند: ۱) بررسی رفتار مدل در حالات مرزی و حدی پارامترها، و ۲) نشان دادن کاربرد عملی و کمی نتایج نظری در یک مسئله از حوزه بیمه. بدین منظور، ابتدا تأثیر تغییرات پارامترهای کلیدی مدل مانند پارامتر وابستگی (δ)، پارامتر جمع‌پذیر (θ)، احتمال وقوع شوک (p)

و پارامتر مقیاس (α) بر توابع قابلیت اعتماد سیستم‌های موازی، در قالب سناریوهای مختلف شبیه‌سازی شده و تحلیل می‌شوند. سپس، در قالب یک مطالعه موردی، کارایی مدل ترکیبی خطر جمع‌پذیر مقیاسی، مفصل ارشمیدسی و شوک تصادفی برای مقایسه ریسک دو سبد بیمه‌ای ناهمگن مورد ارزیابی قرار گرفته می‌شود. کلیه شبیه‌سازی‌ها با استفاده از نرم افزار R انجام شده است.

۶.۱ تحلیل حدی پارامترها (سناریوهای مرزی پارامتری)

در این بخش، به بررسی رفتار حدی و حساسیت مدل SAH با مفصل ارشمیدسی تحت شوک تصادفی، نسبت به چهار پارامتر کلیدی مدل پرداخته می‌شود. بدین منظور، یک سیستم موازی سه مولفه‌ای به عنوان سیستم پایه در نظر گرفته شد. انتخاب سیستم موازی به دلیل اهمیت کاربردی آن در طراحی سیستم‌های با قابلیت اعتماد بالا انجام پذیرفت. توزیع بقای پایه، توزیع نمایی با نرخ خطر ۱ انتخاب شد. این انتخاب به دلیل سادگی و همچنین رفتار شناخته شده آن در تحلیل‌های حدی صورت پذیرفت. وابستگی بین مولفه‌ها با استفاده از مفصل کلایتون مدل‌سازی شد. انتخاب این مفصل به دلیل محبوبیت در مدل‌سازی وابستگی مثبت و داشتن رفتار حدی شناخته شده (استقلال وقتی $\delta \to 0$ و وابستگی کامل وقتی $\delta \to 0$) بود.

برای هر پارامتر مدل از جمله پارامتر مقیاس $\alpha > 0$ (مقیاس زمانی)، پارامتر جمع‌پذیر $\theta \geq 0$ (نرخ خطر افزوده ثابت)، پارامتر وابستگی (δ) و پارامتر شوک $0 \leq p \leq 1$ (احتمال عملکرد مولفه) یک تحلیل دوگانه انجام شد:

- تحلیل تک متغیره حدی: تغییر یک پارامتر در دامنه وسیع، وقتی سایر پارامترها ثابت هستند.
- نقاط مرجع ثابت: برای تحلیل δ و α با $x = 1.5$ و برای تحلیل p و θ با $x = 1$.

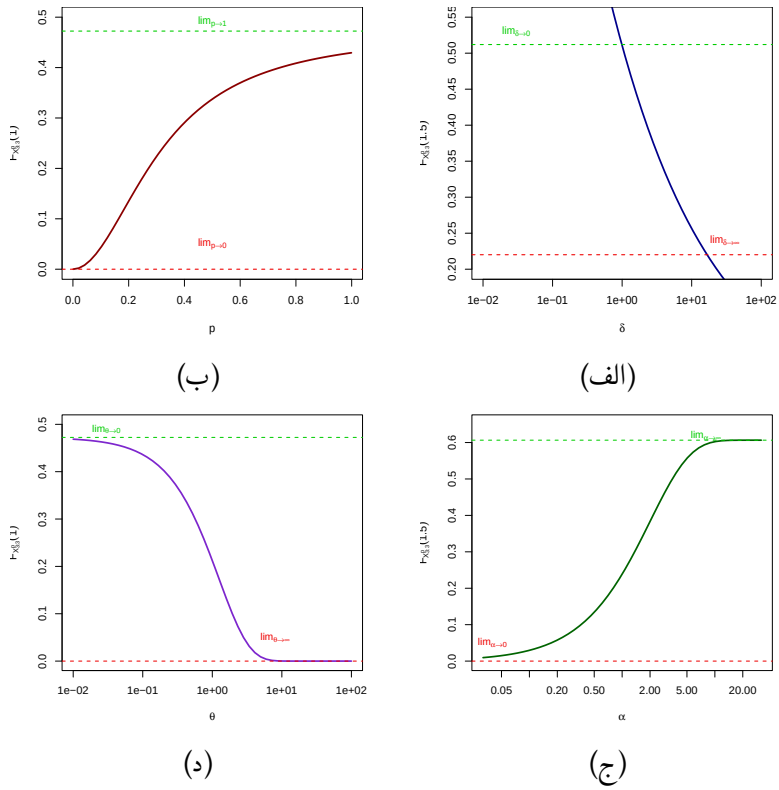
(این مقادیر به گونه‌ای انتخاب شدند که در منطقه میانی منحنی بقا قرار گیرند نه نزدیک به صفر و نه خیلی نزدیک به یک). تابع بقای سیستم موازی $\bar{F}_{X^p_{3:3}}(x)$ برای هر ترکیب پارامتری با استفاده از شبیه‌سازی، محاسبه شد.

شکل ۴ رفتار مجانبی هر پارامتر را در مقیاس لگاریتمی نشان می‌دهد و نتایج زیر بدست می‌آید:

۱. پارامتر مقیاس (α) قوی‌ترین اهرم کنترل است: بیشترین دامنه تغییرات برای پارامتر α است که نشان می‌دهد بهبود مقاومت ذاتی مولفه‌ها می‌تواند اثرات منفی سایر پارامترها را جبران کند.

۲. احتمال شوک (p) در مناطق بحرانی بسیار حساس است: کاهش p از ۰/۵ به ۰/۱ تأثیر فاجعه بارتری دارد تا کاهش ۰/۹ به ۰/۵. این نتیجه اهمیت طراحی سیستم‌های تاب‌آور در برابر شوک را نشان می‌دهد.

۳. وابستگی مثبت (δ) برای سیستم موازی نامطلوب است: کاهش ۵۷٪ در قابلیت اعتماد هنگام حرکت از استقلال به وابستگی کامل، اهمیت طراحی مولفه‌های مستقل در سیستم‌های موازی را تأیید می‌کند. زیرا وابستگی، احتمال خرابی همزمان مولفه‌ها را افزایش می‌دهد.



شکل ۳. الف– اثر پارامتر وابستگی ب) اثر پارامترشوک ج–اثر پارامتر مقیاس د– اثر پارامتر جمع‌پذیر

۴. پارامتر جمع‌پذیر (θ) اثر تخریبی یکنواخت دارد. این پارامتر فاقد اثر آستانه‌ای است و افزایش آن همواره قابلیت اعتماد را کاهش می‌دهد.

۶.۲ مطالعه موردی: اعتبارسنجی قضیه ۶ در یک سیستم پایش محیطی سری

یک سیستم پایش آلاینده‌های هوا متشکل از سه حسگر سری (آشکار سازگار، ذره شماره، طیف سنج) در نظر گرفته می‌شود. این حسگرها در معرض تنش‌های خورندگی تصادفی ناشی از غلظت بالای آلاینده‌ها قرار دارند. مهندسی قابلیت اعتماد باید بین دو استراتژی انتخاب کند:

الف) افزایش یکنواخت مقاومت همه حسگرها،

ب) ایجاد یک حسگر فوق مقاوم به بهای کاهش نسبی مقاومت دو حسگر دیگر.

فرض کنید طول عمر پایه هر حسگر از توزیع وایبول با تابع بقای $\bar{F}(x) = e^{-(\lambda x)^{\beta}}$ تبعیت نماید. برای اطمینان

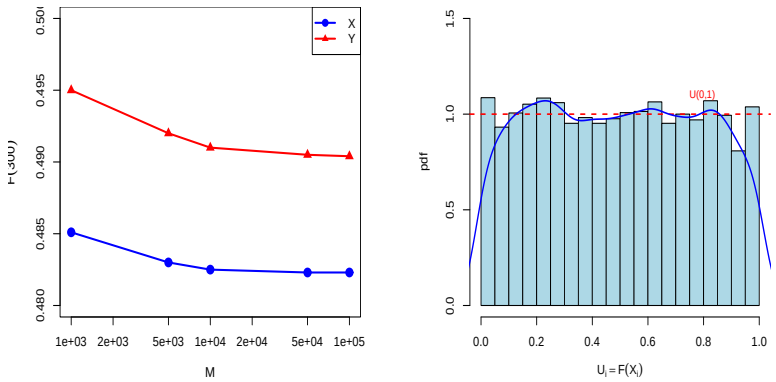
از نزولی بودن $\bar{F}^{\alpha}(\frac{x}{\alpha})$ نسبت به α، باید پارامتر شکل به صورت $\beta < ۱$ باشد. در این شبیه‌سازی $\lambda = ۰/۰۰۱$ و $\beta = ۰/۷$ انتخاب شد. برای سادگی و تمرکز بر اثر θ، $\alpha = (۱, ۱, ۱)$ در نظر گرفته شد و پارامتر نرخ خطر جمع‌پذیر θ، شدت اثر مخرب محیط خورنده را نشان می‌دهد. بنابراین دو طرح با پراکندگی کم (X) و دیگری با پراکندگی زیاد (Y) برای θ به‌ترتیب به‌صورت $\theta = (۰/۰۰۰۸, ۰/۰۰۱۰, ۰/۰۰۱۲)$ و $\eta = (۰/۰۰۰۵, ۰/۰۰۱۰, ۰/۰۰۱۵)$ در نظر گرفته شد به‌طوری‌که شرط $\theta \overset{w}{\leq} \eta$ برقرار است. خرابی حسگرها به دلیل قرارگیری در یک محیط آلوده، همبسته است. این وابستگی با یک مفصل علی-میخائیل-حق (AMH) با تابع مولد $\phi(u) = \frac{۱-\delta}{e^{u}-\delta}$ و پارامتر $\delta = ۰/۸$ مدل می‌شود (به‌طوری‌که ϕ یک تابع لگ-محدب است). و احتمال مقاومت در برابر شوک برابر با $\boldsymbol{p} = (۰/۹۲, ۰/۹۲, ۰/۹۲)$ است. تولید نمونه‌های وابسته از مفصل AMH با استفاده از الگوریتم مارشال و الکین (۱۹۸۸) انجام شد. به دلیل ماهیت غیرخطی تابع توزیع در مدل SAH معکوس‌سازی تحلیلی میسر نبود. لذا برای حل عددی معادله و تولید هر نمونه، از الگوریتم تقسیم دو نیمه (بوردن و فایرز، ۲۰۱۱) استفاده گردید. صحت پیاده‌سازی و کد شبیه‌سازی با مقایسه توزیع تجربی حاصل با مقادیر نظری در نقاط کنترل ارزیابی نشد، و همچنین بررسی همگرایی نتایج با افزایش تعداد نمونه‌ها تایید شد. (رابرت و کسلا، ۱۳۸۳) و از هیستوگرام IIT نیز برای بررسی برازش توزیع استفاده شد.

جدول ۱. تابع توزیع تجربی دو طرح X و Y در سیستم پایش سری.

زمان (ساعت)	طرح X $(\hat{F}_X(t))$	طرح Y $(\hat{F}_Y(t))$	نتیجه
۱۰۰	۰/۱۲۵۱	۰/۱۱۸۳	
۳۰۰	۰/۴۸۲۳	۰/۴۶۷۹	$\hat{F}_X(t) > \hat{F}_Y(t)$
۵۰۰	۰/۷۴۰۵	۰/۷۲۵۸	$(X \leq_{st} Y)$
۷۰۰	۰/۸۹۱۲	۰/۸۸۰۱	

جدول ۱ نشان می‌دهد که طرح Y (با یک حسگر فوق مقاوم دو حسگر آسیب‌پذیر و در نتیجه با پراکندگی زیاد) در تمامی مقاطع زمانی، احتمال خرابی کمتری نسبت به طرح X (با توزیع متعادل مقاومت و در نتیجه با پراکندگی کم) دارد. از نظر تئوری ترتیب‌های تصادفی، این به معنای $F_X(t) \geq F_Y(t)$ برای تمام t، یا معادل آن $X \leq_{st} Y$ است. این نتیجه پیش‌بینی قضیه ۶-الف را بطور کامل تأیید می‌کند. به عبارت دیگر سیستم با بردار نرخ خطر دارای پراکندگی بیشتر، از نظر ترتیب تصادفی معمولی قابل اعتمادتر است.

نمودار همگرایی مونت کارلو برای برآورد $\hat{F}_X(۳۰۰)$ در شکل ۴ (ب)، رسم شده است که نشان می‌دهد با افزایش تعداد تکرارهای شبیه‌سازی، مقدار $\hat{F}_X(۳۰۰)$ به صورت یکنواخت به مقدار پایدار (تقریباً ۰/۴۸۲۳) همگرا می‌شود. پهنای باند اطمینان ۹۵٪ به تدریج کاهش می‌یابد که نشان‌دهنده کاهش خطای مونت کارلو است. در شکل ۴ (الف) هیستوگرام PIT تقریبا یکنواخت است که نشان دهنده این است که مدل آماری از نظر توزیع حاشیه‌ای به درستی مشخص شده است.



(ب) (الف)

شکل ۴. الف– نمودار هیستوگرام تبدیل انتگرال احتمال ب– نمودار همگرایی

۷ بحث و نتیجه‌گیری

آماره‌های مرتب غایی متشکل از متغیرهای تصادفی غیر هم‌توزیع و وابسته که تحت شوک‌های تصادفی قرار می‌گیرند، مقایسه تصادفی شدند. برای مدل‌سازی وابستگی بین متغیرها، از مفصل ارشمیدسی استفاده شد. سپس شرایط کافی بر روی توزیع‌های بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین آماره‌های مرتب، مولد مفصل ارشمیدسی و شوک‌های تصادفی ارائه شد تا بتوان نتایج تصادفی را با توجه به ترتیب‌های معمولی و نرخ خطر مقایسه کرد. یافته‌های این مقاله، می‌توانند مبنای تصمیم گیری‌های بهینه در زمینه‌های مختلفی قرار گیرد. به عنوان مثال، در مدیریت ریسک و بیمه، با درک چگونگی تأثیر ناهمگنی و وابستگی بین خسارت‌ها بر روی مقادیر حدی پرتفوی، می‌توان ساختار پرتفوی را به گونه‌ای طراحی کرد که ریسک بیشینه خسارت کاهش یابد. نتایج این مقاله در مهندسی قابلیت اعتماد، هنگام طراحی سیستم‌های سری یا موازی متشکل از مولفه‌های با طول عمر وابسته که در معرض خرابی‌های تصادفی (شوک) هستند، می‌تواند یک راهنما برای تخصیص بهینه منابع فراهم آورد. به عنوان مسیرهای پژوهشی آینده، می‌توان الف) بررسی مدل‌های وابستگی غیر ارشمیدسی با مفصل‌های واین ب) تعمیم نتایج به مدل‌های نرخ خطر جمع‌پذیر با پارامترهای تصادفی یا وابسته به زمان و پ) بکارگیری روش های ارائه شده در مسائل بهینه سازی واقعی، مانند تعیین حق بیمه بهینه با در نظر گرفتن وابستگی با بهینه سازی هزینه و قابلیت اعتماد در طراحی سیستم‌های پیچیده را پیشنهاد کرد.

تقدیر و تشکر

نویسندگان از پیشنهادات ارزنده سردبیر ارجمند و داوران گرامی که باعث اصلاحات سازنده و ارتقای مقاله شده است کمال تشکر و قدردانی را دارند.

مراجع

امینی سرشت، ا. و برمال‌زن، ق. (۱۳۹۹)، ترتیب نسبت درست‌نمایی میان سیستم‌های k از n متشکل از مولفه‌های مقیاس با چندین دورافتاده، مجله علوم آماری، **۱۴**، ۳۳۵-۳۵۰.

امینی سرشت، ا. و برمال‌زن، ق. (۱۴۰۰)، مقایسه‌های تصادفی سیستم‌های موازی و سری متشکل از مولفه‌های مقیاس با چندین دورافتاده، مجله علوم آماری ، **۱۵**، ۳۴۱-۳۶۲.

برمال‌زن، ق.، حسین‌زاده، ع. و امینی سرشت، ا. (۱۴۰۰)، چندین ترتیب تصادفی میان سیستم‌های $(n-1)$ از n متشکل از مولفه‌های مقیاس، مجله علوم آماری، **۱۵**، ۴۲۷-۴۴۲.

حیدری، ع.، ستاری، م. و برمال‌زن، ق. (۱۴۰۱)، ترتیب نسبت درستنمایی میان سیستم های موازی متشکل از دو مولفه نمایی تعمیم یافته، مجله علوم آماری، **۱۶**، ۱۰۹-۱۲۶.

قنبری، ف.، هاشمی، ر. و برمال‌زن، ق. (۱۳۹۹)، مقایسه‌های تصادفی سیستم‌های سری و موازی با مولفه‌های مستقل و ناهمگن لگ‌لجستیک، مجله علوم آماری، ۱۰، ۳۱۸-۳۳۸

Aalen, O. (1989), A Linear Regression Model for the Analysis of Lifetimes, *Statistics in Medicine*, **8**, 907-925.

Altman, D., De Stavola, B., Love, S. and Stepniewska, K. (1995), Review of Survival Analyses, *British Journal of Cancer*, **72**, 511-518.

Amini Seresht, E., Nasiroleslami, E. and Balakrishnan, N. (2024), Comparison of Extreme Order Statistics from Two Sets of Heterogeneous Dependent Random Variables under Random Shocks, *Metrika: International Journal for Theoretical and Applied Statistics*, **87**(2), 133-153.

Balakrishnan, N., Zhang, Y. and Zhao, P. (2018), Ordering the Largest Claim Amounts and Ranges from Two Sets of Heterogeneous Portfolios, *Scandinavian Actuarial Journal*, **2018**, 23-41.

Barmalzan, G., Akrami, A. and Balakrishnan, N. (2020), Stochastic Comparisons of the Smallest and Largest Claim Amounts with Location-Scale Claim Severities, *Insurance: Mathematics and Economics*, **93**, 341-352.

Barmalzan, G., Payandeh Najafabadi, A.T. and Balakrishnan, N. (2016), Likelihood Ratio and Dispersive Orders for Smallest Order Statistics and smallest claim amounts from heterogeneous Weibull sample, *Statistics & Probability Letters*, **110**, 1-7.

Barmalzan, G., Payandeh Najafabadi, A.T. and Balakrishnan, N. (2017), Ordering Properties of the Smallest and Largest Claim Amounts in a General Scale Model, *Scandinavian Actuarial Journal*, **2017**, 105-124.

Burden, R.L. and Faires, J.D. (2011), *Numerical Analysis* (9th ed.), Cengage Learning.

Cox, D. (1972), Regression Models and Life-tables, *Journal of the Royal Statistical society: Series B (Methodological)*, **34**, 187-202.

Das, S., Kayal, S. and Balakrishnan, N. (2022), Ordering Results for Smallest Claim Amounts from Two Portfolios of Risks with Dependent Heterogeneous Exponentiated Location-Scale Claims, *Probability in the Engineering and Informational Sciences*, **36**, 1116-1137.

Esna-Ashari, M. and Asadi, M. (2016), On Additive-Multiplicative Hazards Model, *Statistics*, **50**, 1421-1433.

Fang, L. and Balakrishnan, N. (2018), Ordering Properties of the Smallest Order Statistics from Generalized Birnbaum-Saunders Models with Associated Random Shocks, *Metrika*, **81**, 1-35.

Islam, S. and Gupta, N. (2024), Stochastic Comparison of Series and Parallel Systems Lifetime in Archimedean Copula Under Random Shock, *arXiv preprint arXiv:2406.05834*.

Li, P. and Ling, X. (2012), The Additive Hazard Mixing Models, *Acta Mathematicae Applicatae Sinica- English Series*, **28**, 139–148.

Marshall, A.W. and Olkin, I. (1988), Families of Multivariate Distributions, *Journal of the American Statistical Association*, **83**(403), 834-841.

Marshall, A.W., Olkin, I. and Arnold, B.C. (2011), *Inequalities: Theory of Mjorization and Its Applications*, (2nd ed.), Springer.

Nadeb, H., Torabi, H. and Dolati, A. (2020), Stochastic Comparisons of the Largest Claim Amounts from Two Sets of Interdependent Heterogeneous Portfolios, *Mathematical Inequalities and Applications*, **23**, 35-56.

Nair, N. and Sankaran, P. (2012), Some Results on an Additive Hazards Model, *Metrika*, **75**, 389-402.

Nelsen, R. (2006), *An Introduction to Copulas*, New York: Springer.

Panja, P., Kundu, A. and Pradhan, B. (2021), Stochastic Comparisons of Lifetimes of Series and Parallel Systems with Dependent and Heterogeneous Components, *Operations Research Letters*, **49**, 176-183.

Raeisi, M. and Yari, G. (2018), Some Dependencies, Stochastic Orders and Aging Properties in an Extended Additive Hazards Model, *Iranian Journal of Science and Technology Transaction A-Science*, **42**, 745-752.

Robert, C.P., Casella, G. and Casella, G. (2004), *Monte Carlo Statistical Methods*, **2**, Springer.

Shaked, M. and Shanthikumar, J. (2007), *Stochastic Orders*, New York: Springer.

Torrado, N. and Navarro, J. (2021), Ranking the Extreme Claim Amounts in Dependent Individual Risk Models, *Scandinavian Actuarial Journal*, **2021**, 218-247.

Zhang, Y., Cai, X. and Zhao, P. (2019), Ordering Properties of Extreme Claim Amounts from Heterogeneous Portfolios, *ASTIN Bulletin: The Journal of the IAA*, **49**, 525–554.

Zhang, Z. and Zhang, L. (2014), Further Results on Dynamic Additive Hazard rate Model, *Mathematical Problems in Engineering*, **2014**.