برآورد مینیمم متوسط مدت زمان انتظار در صف دو مدل صف‌بندی $M/M/1$ در حالت پایا

شهرام یعقوب زاده شهرستانی

گروه آمار، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران.

چکیده: در سیستم‌های نوبت‌دهی کلاسیک، مشتریان برای دریافت خدمات باید در یک صف منتظر بمانند، اما برخی از مشتریان تمایل دارند به طور همزمان در چند سیستم البته برای دریافت خدمت یکسان، در صف انتظار بمانند به عبارت دیگر در چند صف منتظر می‌شوند، چون هدف‌شان دریافت سرویس زودتر است و وقتی که مشتری (متقاضی) از یک صف سرویس بگیرد، صف‌های دیگر را ترک می‌کند. به عبارت دیگر مشتری دوست دارد تا جایی که ممکن است زمان انتظارش در صف مینیمم شود. بر همین اساس در این مقاله دو مدل صف‌بندی $M/M/1$ با نرخ‌های ورود و سرویس به ترتیب λ_1 و μ_1 برای مدل اول و λ_2 و μ_2 برای مدل دوم در نظر گرفته شده و مینیمم متوسط زمان انتظار در صف این دو مدل به روش‌های بیز، E-بیز و بیز سلسله‌مراتبی تحت تابع زیان آنتروپی عمومی برآورد می‌شود. همچنین به کمک روش شبیه‌سازی مونت‌کارلو و یک مجموعه داده‌های واقعی برآوردگر مناسب تعیین می‌شود.

واژه‌های کلیدی: مینیمم متوسط زمان انتظار در صف، مدل صف‌بندی $M/M/1$، برآورد E-بیز، برآورد بیز سلسله‌مراتبی، تابع زیان آنتروپی عمومی.

°آدرس الکترونیک مسئول مقاله: شهرام یعقوب زاده شهرستانی، yagoubzade@pnu.ac.ir

°کد موضوع‌بندی ریاضی (۲۰۱۰): 62C12، 62K05.

۱ مقدمه

یکی از مهم‌ترین مباحث نظریه احتمالات کاربردی، نظریه صف یا مطالعه پدیده‌های مربوط به خط انتظار است. انتظار کشیدن در صف برای دریافت خدمت، یکی از رایج‌ترین تجربه‌های زندگی روزمره هر فرد است. در برخی از فرآیندهای صف، ممکن است یک مشتری بالقوه از دست برود؛ به‌طوری که مشتری هنگام ورود با مشاهده طول صف از پیوستن به آن منصرف شود، یا این که پس از مدتی انتظار، به دلیل عدم دریافت خدمت، سیستم را ترک کند. در هر دو حالت، مشتری برای سیستم ازدست‌رفته محسوب می‌شود. از این رو، جذب مشتری، حفظ آن و افزایش رضایتمندی مشتریان از اصلی‌ترین دغدغه‌های مدیران سیستم‌های صف‌بندی است.

مدیران همواره تلاش می‌کنند طول صف‌ها را به‌گونه‌ای کنترل کنند که از خستگی، نارضایتی و انصراف مشتریان جلوگیری شود؛ زیرا منتظر ماندن مشتریان در صف، هزینه‌های هنگفتی را در سطوح خرد و کلان بر سیستم تحمیل می‌کند. از این رو، ایجاد تعادل بین هزینه‌های ارائه خدمت مطلوب و هزینه‌های انتظار مشتریان، اهمیتی حیاتی دارد. یکی از معیارهای کلیدی در جلب رضایت مشتریان، کاهش متوسط مدت‌زمان انتظار در صف است. این معیار، مهم‌ترین پارامتر تأثیرگذار بر رضایت مشتریان است و تغییرات آن می‌تواند منجر به تداوم یا تعطیلی فعالیت یک سیستم صف‌بندی شود؛ به‌طوری که طراحان سیستم برای کاهش آن، هزینه‌های قابل‌توجهی را متحمل می‌شوند.

در این مقاله، حالت خاصی از متوسط مدت‌زمان انتظار در صف بررسی می‌شود که در آن برخی از مشتریان تمایل دارند به‌طور هم‌زمان برای دریافت خدمتی یکسان، در چند سیستم صف انتظار بمانند و به محض دریافت خدمت از یکی از سیستم‌ها، سایر صف‌ها را ترک کنند. برای نمونه، متقاضی کاری را در نظر بگیرید که به‌طور هم‌زمان برای کارگزینی چند شرکت درخواست می‌فرستد، یا مشتری بانک که به چند باجه فعال مراجعه می‌کند. در این حالت، هر باجه را می‌توان یک سیستم صف‌بندی تک‌باجه‌ای در نظر گرفت. هدف اصلی این مقاله، برآورد مینیمم متوسط مدت‌زمان انتظار در صف برای چنین سیستم‌هایی است.

بدین منظور، دو مدل صف‌بندی $M/M/1$ در نظر گرفته شده است. مینیمم متوسط مدت‌زمان انتظار در صف در این دو مدل، با استفاده از روش‌های بیز، E–بیز و بیز سلسله‌مراتبی تحت تابع زیان آنتروپی عمومی برآورد می‌شود. سپس، با بهره‌گیری از روش شبیه‌سازی مونت‌کارلو و یک مجموعه داده واقعی، برآوردگر مناسب (برآوردگری که مینیمم متوسط مدت‌زمان انتظار را کمینه کند) تعیین می‌گردد.

روش بیز یکی از روش‌های اصلی در برآورد پارامترهای توزیع‌های آماری است که در آن، انتخاب معقول

توزیع‌های پیشین روی فضای پارامتر، نقش به‌سزایی در کاهش خطای برآوردگر دارد. تعریف توزیع پیشین مناسب و اعمال شرایط خاص بر ابرپارامترها، اساس روش‌های برآورد E-بیز و بیز سلسله‌مراتبی را تشکیل می‌دهد. توزیع پیشین بیز سلسله‌مراتبی نخستین‌بار توسط لیندلی و اسمیت (۱۹۷۲) معرفی شد و سپس توسط هان (۱۹۷۷) توسعه یافت، که منجر به معرفی روش‌های برآورد E-بیز[1] و بیز سلسله‌مراتبی[2] گردید.

در سال‌های اخیر، این روش‌ها کاربرد گسترده‌ای در نظریه برآورد داشته‌اند؛ از جمله: برآورد پارامتر توزیع نمایی و نسبت توزیع دوجمله‌ای ؟، برآورد پارامتر و تابع قابلیت اعتماد توزیع بور نوع ۱۲ بر اساس نمونه‌های سانسور افزایشی نوع دوم جاهین و اکاشا (۲۰۱۱)، برآورد پارامتر توزیع پاسکال وانگ و همکاران (۲۰۱۲)، برآورد پارامترهای مدل پاسکال یوسف‌زاده (۲۰۱۷)، برآورد پارامتر مقیاس توزیع گومپرتز بر اساس طرح سانسور افزایشی نوع دوم و داده‌های فازی یعقوب‌زاده شهرستانی (۲۰۱۸)، و برآورد پارامتر تنش-مقاومت در توزیع رایلی تحت تابع زیان لاینکس شادرخ و یعقوب‌زاده شهرستانی (۱۳۹۸). همچنین، کاربرد روش بیز سلسله‌مراتبی در تحلیل داده‌ها توسط پژوهشگرانی همچون میچیز و ویکل (۲۰۰۹)؛ کرسیس و تینگلی (۲۰۱۰)؛ آندو و زلنر (۲۰۱۰)؛ اوسی و دوکر (۲۰۱۱)؛ ریچارد (۲۰۱۱) بررسی شده است.

از سوی دیگر، برآورد پارامترها به روش‌های ماکسیمم درست‌نمایی و بیز در نظریه صف، توجه زیادی را به خود جلب کرده است. از نمونه‌های برجسته در این زمینه می‌توان به تحلیل بیزی پارامترهای مدل‌های $E_r/M/1$ و $E_r/M/c$ ویپر (۱۹۹۸)، تحلیل بیزی مدل‌های $M/E_r/1$ و $M/H_k/1$ اینسوا و همکاران (۱۹۹۸)، برآورد پارامتر شدت ترافیک بر اساس طول صف در مدل $M/M/1$ چادهوری و موخرجی (۲۰۱۳)، برآورد بیزی پارامترها در مدل‌های مختلف صف جوس و مانوهاران (۲۰۱۴)، برآورد ناپارامتری توزیع زمان سرویس در مدل‌های زمان-گسسته سچویر و ویچهل‌هوس (۲۰۲۰)، برآوردهای ماکسیمم درست‌نمایی و بیز پارامتر شدت ترافیک در مدل $M/D/1$ چاندراساخار و همکاران (۲۰۲۰)، برآورد پارامترهای مدل $M/E_r/1$ وایدیاناتان و چاندراساخار (۲۰۱۸)، برآورد بیزی پارامترها در مدل $M/E_k/1$ با توزیع پیشین دومتغیره دیپتچی و جوس (۲۰۲۱)، تحلیل تاخیر در مدل‌های $GI/G/1$ با ترافیک سنگین‌دم فیورینی و همکاران (۲۰۲۵)، برآورد پارامتر شدت ترافیک و احتمال پایایی مدل $M/M/c$ تحت یک زمان توقف یعقوب‌زاده شهرستانی (۱۴۰۲)، و معرفی مدل $E_r/M/c$ و برآورد پارامتر شدت ترافیک آن به روشی جدید یعقوب‌زاده شهرستانی (۱۴۰۴) اشاره کرد.

[1] E-Bayesian

[2] Hierarchical Bayesian

ساختار این مقاله به شرح زیر است: در بخش ۲، مفاهیم و تعاریف اولیه ارائه می‌شود. در بخش ۳، برآوردهای بیز، E–بیز و بیز سلسله‌مراتبی برای W_M و نیز روابط حدی میان برآوردگرها محاسبه می‌گردد. در بخش ۴، برآوردگرها با استفاده از روش شبیه‌سازی مونت‌کارلو و یک مثال عددی واقعی با یکدیگر مقایسه می‌شوند (شامل مقایسه در حالت حدی). در نهایت، بخش ۵ به ارائه نتایج و جمع‌بندی اختصاص یافته است.

۲ تعاریف و مفاهیم پایه‌ای

در این مقاله مدل صف‌بندی $M/M/1$ با پارامترهای λ_1 (نرخ ورود)، μ_1 (نرخ سرویس)، $\rho_1 = \frac{\lambda_1}{\mu_1}$ (پارامتر شدت ترافیک) و T_i^q (مدت زمان انتظار در صف مشتری i ام) و مدل صف‌بندی $M/M/1$ دیگری و مستقل از مدل اول با پارامترهای λ_2 (نرخ ورود)، μ_2 (نرخ سرویس)، $\rho_2 = \frac{\lambda_2}{\mu_2}$ (پارامتر شدت ترافیک) و S_i^q (زمان انتظار مشتری i ام) و در حالت پایا یعنی به ازای $i = 1, 2$، $\rho_i < 1$ (آلن، ۱۹۹۰) در نظر گرفته می‌شوند. هدف محاسبه برآوردهای بیز، E–بیز، بیز سلسله‌مراتبی $W_M = E(T_M^q)$ تحت تابع زیان آنتروپی عمومی و تعیین بهترین برآورد از بین آن‌ها است که در آن $T_M^q = min(T_i^q, S_i^q)$. همچنین روابط بین برآوردها در حالت حدی تعیین می‌شود. تعیین بهترین برآورد W_M از بین برآوردهای آن در حالت‌های حدی و غیر حدی با استفاده از روش شبیه‌سازی مونت‌کارلو و یک مجموعه داده‌های واقعی انجام می‌شود. بهترین برآورد، برآوردی است که به ازای آن W_M مینیمم شود. اکنون در ادامه تابع زیان آنتروپی عمومی معرفی می‌شود. تابع زیانی به نام تابع زیان آنتروپی عمومی به صورت

$$L(\hat{\theta}, \theta) \propto (\frac{\hat{\theta}}{\theta})^p - p\ln(\frac{\hat{\theta}}{\theta}) - 1, \quad p \neq 0 \tag{1}$$

توسط کالابریا و پولسینی (۱۹۹۶) معرفی و برآورد بیز پارامتر θ تحت این تابع زیان به صورت $\hat{\theta}_{GB} = [E(\theta^{-p}|data)]^{-\frac{1}{p}}$ ارائه شد. چون پارامتر W_M در این مقاله تحت روش‌های E–بیز و بیز سلسله‌مراتبی برآورد می‌شود، در ادامه این روش‌های برآورد تعریف می‌شوند.

تعریف ۱. (هان، ۱۹۷۷) فرض کنید b_1 و b_2 ابرپارامترهایی در توزیع پیشین θ و $\pi(b_1, b_2)$ توزیع پیشین توام (b_1, b_2) و $\hat{\theta}_B(b_1, b_2)$ برآورد بیز θ باشند، آن‌گاه برآورد E–بیز θ که با نماد $\hat{\theta}_{EB}$ نشان داده می‌شود،

به صورت

$$\begin{aligned}\hat{\theta}_{EB} &= E_{\pi(b_1,b_2)}(\hat{\theta}_B(b_1,b_2)) \\ &= \int_{\Lambda_1}\int_{\Lambda_2}\hat{\theta}_B(b_1,b_2)\pi(b_1,b_2)db_1db_2, \quad b_1\in\Lambda_1, b_2\in\Lambda_2\end{aligned}$$

به دست می‌آید و در حقیقت امید ریاضی برآورد بیز θ است.

تعریف ۲. (هان، ۱۹۷۷) اگر $\pi(\theta|\lambda)$ و $\pi^{'}(\lambda)$ به ترتیب توزیع‌های پیشین متناظر پارامتر θ و ابرپارامتر λ باشند، آن‌گاه توزیع پیشین سلسله مراتبی θ به صورت $\pi^{''}(\theta)=\int_\Lambda \pi(\theta|\lambda)\pi^{'}(\lambda)d\lambda, \quad \lambda\in\Lambda$ محاسبه می‌شود.

به طور کلی حاصل نسبت انتگرال‌های به فرم $E(u(\Lambda)|\mathbf{X}) = \frac{\int u(\Lambda)e^{Q(\Lambda)}d\Lambda}{\int e^{Q(\Lambda)}d\Lambda}$ که در آن $\Lambda=(\lambda_1,\cdots,\lambda_m)$، $Q(\Lambda)=l(\Lambda)+\rho(\Lambda)$، $l(\Lambda)$ لگاریتم تابع درستنمایی مشاهدات و $\rho(\Lambda)$ لگاریتم توزیع پیشین Λ هستند به روش تقریب لیندلی (۱۹۸۰) به صورت

$$\begin{aligned}E(u(\Lambda)|\mathbf{X}) = \{u &+ \frac{1}{2}\sum_i\sum_j(u_{ij}+2u_i\rho_j)\sigma_{ij} \\ &+ \frac{1}{2}\sum_i\sum_j\sum_k\sum_l L_{ijk}\sigma_{ij}\sigma_{kl}u_l\}_{\hat{\Lambda}}\end{aligned} \tag{۲}$$

ارائه می‌شود که در آن $i,j,k,l=1,\cdots,m$، $\hat{\Lambda}=(\hat{\lambda}_1,\cdots,\hat{\lambda}_m)$ برآورد ماکسیمم درستنمایی Λ ، $u=u(\Lambda), u_i=\frac{\partial u}{\partial\lambda_i}, u_{ij}=\frac{\partial^2 u}{\partial\lambda_i\partial\lambda_j}, L_{ijk}=\frac{\partial^3 l(\Lambda)}{\partial\lambda_i\partial\lambda_j\partial\lambda_k}, v_j=\frac{\partial\rho(\Lambda)}{\partial\lambda_j}$ و σ_{ij} درایه (i,j) ام معکوس ماتریس $\{-L_{ij}\}$ هستند (L_{ij} مانند L_{ijk} تعریف می‌شود). بنابر این با فرض $\Lambda=(\lambda_1,\lambda_2)$ رابطه (۲) به صورت

$$E(u(\Lambda)|\mathbf{X}) = [(u+Au_1+Bu_2+C)_{\hat{\Lambda}}]^{-\frac{1}{p}}, \quad \hat{\Lambda}=(\hat{\lambda}_1,\hat{\lambda}_2) \tag{۳}$$

به دست می‌آید که در آن $A=v_1\sigma_{11}+v_2\sigma_{12}+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}L_{ij}\sigma_{ij}$، $B=v_1\sigma_{21}+v_2\sigma_{22}+$ $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}L_{ij}\sigma_{ij}$ و $C=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}u_{ij}\sigma_{ij}$ هستند. برای محاسبه برآوردهای بیز، E-بیز و بیز سلسله‌مراتبی W_M به لمی نیاز است که در ادامه ارائه می‌شود.

لم ۱. اگر $|x|<1$ باشد، آن‌گاه به ازای هر $\alpha\in R$

$$(1+x)^\alpha=\sum_{r=0}^{\infty}\binom{\alpha}{r}x^r, \quad \alpha(1+x)^{\alpha-1}=\sum_{r=1}^{\infty}r\binom{\alpha}{r}x^{r-1}.$$

مقاله پذیرفته شده

۳ برآوردهای W_M

این بخش، بخش نظری مقاله بوده و بسیار با اهمیت است و بدنه اصلی مقاله را تشکیل می‌دهد. طوری که اساس کار بخش چهارم مقاله بر این بخش استوار است و نقش بسیار مهمی در تحلیل‌های عددی و نموداری بخش چهارم دارد. در این بخش برای تعیین W_M، ابتدا تابع چگالی T_M^q محاسبه شده و سپس برآوردهای بیز، E–بیز و بیز سلسله‌مراتبی W_M به دست می‌آید. همچنین رفتار حدی برآوردها مورد بررسی قرار می‌گیرد.

قضیه ۱. اگر $T_M^q = min(T_i^q, S_i^q)$، آن‌گاه تابع توزیع T_M^q عبارت است از

$$F_{T_M^q}(u) = \begin{cases} ۱ - \rho_۱\rho_۲ & u = ۰ \\ ۱ - \rho_۱\rho_۲ e^{-[\mu_۱(۱-\rho_۱)+\mu_۲(۱-\rho_۲)]u} & u > ۰. \end{cases}$$

برهان. با توجه به آلن (۱۹۹۰) تابع چگالی احتمال T_i^q و S_i^q به ترتیب به صورت

$$f_{T_i^q}(t) = \begin{cases} ۱ - \rho_۱ & t = ۰ \\ \rho_۱\mu_۱(۱-\rho_۱)e^{-\mu_۱(۱-\rho_۱)t} & t > ۰ \end{cases}$$

$$f_{S_i^q}(s) = \begin{cases} ۱ - \rho_۲ & s = ۰ \\ \rho_۲\mu_۲(۱-\rho_۲)e^{-\mu_۲(۱-\rho_۲)s} & s > ۰ \end{cases}$$

به دست می‌آید. بنابراین اگر $T_M^q = ۰$، آن‌گاه

$$\begin{aligned} F_{T_M^q}(۰) = P(T_M^q = ۰) =& P(T_i^q = ۰, S_i^q > ۰) + P(T_i^q > ۰, S_i^q = ۰) \\ &+ P(T_i^q = ۰, S_i^q = ۰) = (۱-\rho_۱)\rho_۲ + (۱-\rho_۲)\rho_۱ \\ &+ (۱-\rho_۱)(۱-\rho_۲) = ۱ - \rho_۱\rho_۲ \end{aligned}$$

و اگر $T_M^q > ۰$ آن‌گاه

$$\begin{aligned} F_{T_M^q}(u) =& ۱ - P(T_M^q > u) = ۱ - P(T_i^q > u)P(S_i^q > u) \\ =& ۱ - \int_u^\infty \int_u^\infty f_{T_i^q}(t) f_{S_i^q}(s) dt ds \\ =& ۱ - \rho_۱\rho_۲ e^{-[\mu_۱(۱-\rho_۱)+\mu_۲(۱-\rho_۲)]u}. \end{aligned}$$

مقاله پذیرفته شده

فرع ۱. اگر $T_M^q = min(T_i^q, S_i^q)$، آن‌گاه تابع چگالی احتمال T_M^q به صورت زیر به دست می‌آید.

$$f_{T_M^q}(u) = \begin{cases} 1 - \rho_1\rho_2 & u = 0 \\ \rho_1\rho_2\mu_1\mu_2(1-\rho_1)(1-\rho_2)e^{-[\mu_1(1-\rho_1)+\mu_2(1-\rho_2)]u} & u > 0 \end{cases}$$

با استفاده از فرع ۱، $W_M = E(T_M^q) = \frac{\rho_1\rho_2}{\mu_1(1-\rho_1)+\mu_2(1-\rho_2)}$ است. در این بخش برای محاسبه برآوردهای بیز، E–بیز و بیز سلسله‌مراتبی W_M، فرض می‌شود μ_1، μ_2، ρ_1 و ρ_2 پارامترهای مستقل ازهم هستند و توزیع پیشین ρ_i $(i = 1, 2)$ توزیع

$$\pi(\rho_i|a_i, b_i) = \frac{\Gamma(a_i + b_i)}{\Gamma(a_i)\Gamma(b_i)}\rho_i^{a_i-1}(1-\rho_i)^{b_i-1}, 0 < \rho_i < 1, a_i > 0, b_i > 0 \qquad (4)$$

و توزیع پیشین μ_i $(i = 1, 2)$ توزیع پیشین ناآگاهی‌بخش $\pi(\mu_i) \propto \frac{1}{\mu_i}, \mu_i > 0$ در نظر گرفته می‌شوند.

قضیه ۲. اگر $\mu_2(1-\rho_2) < \mu_1(1-\rho_1)$، آن‌گاه برآورد بیز W_M به صورت

$$\hat{W}_M^B(b_1, b_2) = \frac{(CC^*)^{-\frac{1}{p}}}{T_1}\{\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r C_r\binom{p+r-1}{r}(\frac{T_1}{T_2})^r\}^{-\frac{1}{p}}$$

است که در آن $C = \frac{\Gamma(3n+a_1+b_1)\Gamma(3n+a_2+b_2)}{(\Gamma(n))^3\Gamma(n+a_1)\Gamma(2n+b_1)\Gamma(n+a_2)\Gamma(2n+b_2)}$، $C_r = \Gamma(n-p-r)\Gamma(n+r)$ و

$$C^* = \frac{\Gamma(n+a_1+p)\Gamma(b_1)\Gamma(n+a_2+p)\Gamma(b_2)}{\Gamma(n+a_1+b_1+p)\Gamma(n+a_2+b_2+p)}.$$

برهان. بر اساس نمونه‌های تصادفی مستقل از هم $T_1^q, \cdots, T_n^q$ و $S_1^q, \cdots, S_n^q$ تابع درستنمایی به صورت

$$l(\mu_1, \mu_2, \rho_1, \rho_2) = \rho_1^n\rho_2^n(1-\rho_1)^n(1-\rho_2)^n\mu_1^n\mu_2^n e^{-[\mu_1(1-\rho_1)T_1+\mu_2(1-\rho_2)T_2]} \qquad (5)$$

است که در آن $T_1 = \sum_{i=1}^n T_i^q$ و $T_2 = \sum_{i=1}^n S_i^q$ هستند. با توجه به روابط (۴) و (۵) و با فرض $data = \{T_1^q, \cdots, T_n^q, S_1^q, \cdots, S_n^q\}$ توزیع پسین

$$\pi(\mu_1, \mu_2, \rho_1, \rho_2|data) = C(T_1T_2)^n\phi(\mu_1, \mu_2, \rho_1, \rho_2) \qquad (6)$$

به دست می‌آید که در آن $C = \frac{\Gamma(3n+a_1+b_1)\Gamma(3n+a_2+b_2)}{\Gamma(n))^3\Gamma(n+a_1)\Gamma(2n+b_1)\Gamma(n+a_2)\Gamma(2n+b_2)}$ و

$$\phi(\mu_1, \mu_2, \rho_1, \rho_2) = (\mu_1\mu_2)^{n-1}\rho_1^{n+a_1-1}(1-\rho_1)^{n+b_1-1}\rho_2^{n+a_2-1} \times (1-\rho_2)^{n+b_2-1}e^{-[\mu_1(1-\rho_1)+\mu_2(1-\rho_2)]}$$

مقاله پذیرفته شده

هستند. با فرض $\mu_۲(۱-\rho_۲) < \mu_۱(۱-\rho_۱)$، W_M به صورت $W_M = \frac{\rho_۱\rho_۲}{\mu_۱(۱-\rho_۱)}\cdot\frac{۱}{۱+\frac{\mu_۲(۱-\rho_۲)}{\mu_۱(۱-\rho_۱)}}$ بازنویسی می‌شود. اکنون به کمک بسط

$$[۱+\frac{\mu_۲(۱-\rho_۲)}{\mu_۱(۱-\rho_۱)}]^{-p} = \sum_{r=۰}^{\infty}(-۱)^r\binom{p+r-۱}{r}\{\frac{\mu_۲(۱-\rho_۲)}{\mu_۱(۱-\rho_۱)}\}^r$$

و به کمک رابطه (۶) برآورد بیز W_M تحت تابع زیان رابطه (۱) به صورت

$$\hat{W}_M^B(b_۱,b_۲) = \frac{(CC^*)^{-\frac{۱}{p}}}{T_۱}\{\sum_{r=۰}^{\infty}(-۱)^r C_r\binom{p+r-۱}{r}(\frac{T_۱}{T_۲})^r\}^{-\frac{۱}{p}}$$

محاسبه می‌شود.

قضیه ۳. برآورد E-بیز W_M به صورت

$$\begin{aligned}\hat{W}_M^{EB} =& \frac{۱}{T_۱}(\frac{\Gamma(n+p+۱)}{\Gamma(n)\Gamma(n+۱)})^{-\frac{۲}{p}}\frac{۱}{(c_۱-۱)(c_۲-۱)}\\ &\times\int_۱^{c_۱}\int_۱^{c_۲}\{\sum_{r=۰}^{\infty}(-۱)^r C_r C_{b_۱,b_۲}\binom{p+r-۱}{r}(\frac{T_۱}{T_۲})^r\}^{-\frac{۱}{p}}db_۱db_۲\end{aligned}$$

است که در آن

$$C_{b_۱,b_۲} = \frac{\Gamma(۳n+b_۱+۱)\Gamma(۳n+b_۲+۱)\Gamma(b_۱)\Gamma(b_۲)}{\Gamma(۲n+b_۱)\Gamma(۲n+b_۲)\Gamma(n+b_۱+p+۱)\Gamma(n+b_۲+p+۱)}.$$

برهان. با توجه به هان (۱۹۷۷)، a_i و b_i در رابطه (۴) طوری در نظر گرفته می‌شوند که $\pi(\rho_i|a_i,b_i)$ نسبت به ρ_i کاهشی باشد. پس با توجه به رابطه

$$\frac{d\pi(\rho_i|a_i,b_i)}{d\rho_i} = \rho_i^{a_i-۲}(۱-\rho_i)^{b_i-۲}[(a_i-۱)(۱-\rho_i)-(b_i-۱)\rho_i]$$

باید $b_i > ۱$ و $۰ < a_i \leq ۱$ باشد. برگر (۱۹۸۵) نشان داد که بزرگ بودن b_i باعث کاهش کارایی برآورد بیز ρ_i می‌شود. بنابراین ابرپارامتر b_i باید از بالا کراندار شده و به صورت $۱ < b_i < c_i$ در نظر گرفته می‌شود، که در آن c_i عددی ثابت است. توسط هان (۲۰۱۱) نشان داده شد که مناسب‌ترین توزیع b توزیع یکنواخت است. بنابراین در این مقاله توزیع پیشین b_i یعنی $\pi(b_i)$، توزیع یکنواخت پیوسته در بازه $(۱,c_i)$ در نظر گرفته می‌شود. همچنین با توجه به شرط $۰ < a_i \leq ۱$ و با در نظر گرفتن $a_i = ۱$، رابطه (۴) برای $i = ۱,۲$ به صورت $\pi(\rho_i|b_i) = b_i(۱-\rho_i)^{b_i-۱}, ۰ < \rho_i < ۱, b_i > ۱$ تبدیل و از طرفی با توجه به

$a_1 = a_2 = 1$، $\hat{W}_M^B(b_1, b_2)$ در قضیه ۲ به

$$\hat{W}_M^B(b_1, b_2) = \frac{1}{T_1}\left(\frac{\Gamma(n+p+1)}{\Gamma(n)\Gamma(n+1)}\right)^{-\frac{2}{p}}\left\{\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r C_r C_{b_1,b_2}\binom{p+r-1}{r}\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^r\right\}^{-\frac{1}{p}} \tag{7}$$

تبدیل می‌شود که با استفاده از تعریف ۱ و رابطه (۷) قضیه ثابت می‌شود. انتگرال موجود در $\hat{W}_M^{EB}$ به صورت تحلیلی قابل مقایسه نیست و لذا از روش‌های شبیه‌سازی مونت‌کارلو برای تقریب آن استفاده می‌شود.

قضیه ۴. برآورد بیز سلسله‌مراتبی W_M به صورت

$$\hat{W}_M^{HB} = \frac{K^{-\frac{1}{p}}}{T_1^2}\left\{\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\binom{p+r-1}{r}\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{r+1}\eta(\hat{\rho}_1, \hat{\rho}_2, r)\right\}^{-\frac{1}{p}}$$

به دست می‌آید که در آن $K = \frac{\Gamma(n+r+1)\Gamma(n-r-1)}{(\Gamma(n))^2}$، $\hat{\rho}_i = \frac{n}{T_i}$ $(i = 1, 2)$ و

$$\begin{aligned}\eta(\hat{\rho}_1, \hat{\rho}_2, r) =& \frac{\hat{\rho}_1\hat{\rho}_2(1-\hat{\rho}_2)^r}{(1-\hat{\rho}_1)^{r+1}} + \frac{[\hat{v}_1\hat{\rho}_1^2(1-\hat{\rho}_1)^2 - n(1+2\hat{\rho}_1^2 - 2\hat{\rho}_1)]\hat{\rho}_2(1-\hat{\rho}_2)^r(1+r\hat{\rho}_1)}{n(1-\hat{\rho}_1)^{r+2}(1+2\hat{\rho}_1^2-2\hat{\rho}_1)} \\ &+ \frac{\hat{v}_2\hat{\rho}_1\hat{\rho}_2^2(1-\hat{\rho}_2)^r[1-(1+r)\hat{\rho}_2][(1-\hat{\rho}_2)^2 - n(1+2\hat{\rho}_2^2-2\hat{\rho}_2)]}{n(1-\hat{\rho}_1)^{r+1}(1+2\hat{\rho}_1^2-2\hat{\rho}_1)} \\ &+ \frac{\hat{\rho}_1\hat{\rho}_2(1-\hat{\rho}_2)^r\{(r+1)(2\hat{\rho}_1 + r\hat{\rho}_1\hat{\rho}_2) - \hat{\rho}_2(1-\hat{\rho}_2)[(1+r)^2\hat{\rho}_2 - 2r - 1]\}}{2n(1-\hat{\rho}_1)^{r+1}(1+2\hat{\rho}_1^2-2\hat{\rho}_1)}\end{aligned}$$

هستند.

برهان. به کمک توزیع $\pi(\rho_i|b_i)$ و تعریف ۲ توزیع پیشین سلسله‌مراتبی ρ_i $(i = 1, 2)$ به صورت

$$\widetilde{\pi}(b_i) = \frac{(1-\rho_i)^{c_i-1}(c_i\ln(1-\rho_i) - 1)}{(c_i-1)[\ln(1-\rho_i)]^2} + \frac{1-\ln(1-\rho_i)}{(c_i-1)[\ln(1-\rho_i)]^2}, 0 < \rho_i < 1 \tag{8}$$

به دست می‌آید. به کمک روابط (۴) و (۸) توزیع پسین μ_1، μ_2، ρ_1 و ρ_2 به شرط داده‌ها به صورت

$$\pi^*(\mu_1, \mu_2, \rho_1, \rho_2|data) = \frac{\Phi(\rho_1, \rho_2)S(\rho_1, \rho_2)\psi(\mu_1, \mu_2, \rho_1, \rho_2)(T_1T_2)^n}{(\Gamma(n))^2\int_0^1\int_0^1\Phi(\rho_1, \rho_2)S(\rho_1, \rho_2)d\rho_1 d\rho_2} \tag{9}$$

است که در آن $\Phi(\rho_1, \rho_2) = \rho_1^n\rho_2^n(1-\rho_1)^n(1-\rho_2)^n$ و

$$\psi(\mu_1, \mu_2, \rho_1, \rho_2) = (\mu_1\mu_2)^{n-1}e^{-[\mu_1(1-\rho_1)T_1 + \mu_2(1-\rho_2)T_2]},$$

$$S(\rho_1, \rho_2) = \frac{[(c_1\ln(1-\rho_1)-1)(c_1-1)+(1-\ln(1-\rho_1))][(c_2\ln(1-\rho_2)-1)(c_2-1)+(1-\ln(1-\rho_2))]}{[\ln(1-\rho_1)\ln(1-\rho_2)]^2}$$

مقاله پذیرفته شده

هستند. با استفاده از رابطه (۹) برآورد بیز سلسله‌مراتبی W_M به صورت

$$\hat{W}_M^{HB} = \frac{K^{-\frac{1}{p}}}{T_1^2}\{\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\binom{p+r-1}{r}(\frac{T_1}{T_2})^{r+1}\frac{\int_0^1\int_0^1\Psi(\rho_1,\rho_2,r)S(\rho_1,\rho_2)d\rho_1 d\rho_2}{\int_0^1\int_0^1\Phi(\rho_1,\rho_2)S(\rho_1,\rho_2)d\rho_1 d\rho_2}\}^{-\frac{1}{p}}$$

هست که در آن $\Psi(\rho_1,\rho_2,r) = (\rho_1\rho_2)^{n+1}(1-\rho_1)^{n-r-1}(1-\rho_2)^{n+r}$. با فرض $h(\rho_1,\rho_2) = \frac{\rho_1\rho_2(1-\rho_2)^r}{(1-\rho_1)^{r+1}}$، حاصل $I = \frac{\int_0^1\int_0^1\Psi(\rho_1,\rho_2,r)S(\rho_1,\rho_2)d\rho_1 d\rho_2}{\int_0^1\int_0^1\Phi(\rho_1,\rho_2)S(\rho_1,\rho_2)d\rho_1 d\rho_2}$ در $\hat{w}_M^{HB}$، با بازنویسی به صورت

$$I = \frac{\int_0^1\int_0^1 h(\rho_1,\rho_2)e^{\ln\Phi(\rho_1,\rho_2)+\ln S(\rho_1,\rho_2)}d\rho_1 d\rho_2}{\int_0^1\int_0^1 e^{\ln\Phi(\rho_1,\rho_2)+\ln S(\rho_1,\rho_2)}d\rho_1 d\rho_2}$$

به روش تقریب لیندلی (۱۹۸۰) تعیین می‌شود. در رابطه (۳) با در نظر گرفتن $u(\Lambda) = h(\rho_1,\rho_2)$، $u(\Lambda) = h(\rho_1,\rho_2)$، $l(\Lambda) = l(\rho_1,\rho_2) = n\ln\rho_1 + n\ln\rho_2 + n\ln(1-\rho_1) + n\ln(1-\rho_2)$ و $\rho(\Lambda) = \rho(\rho_1,\rho_2) = \ln S(\rho_1,\rho_2)$ روابط

$$u_1 = \frac{\rho_2(1-\rho_2)^r(1+r\rho_1)}{(1-\rho_1)^{r+2}}, \quad u_2 = \frac{\rho_1(1-\rho_2)^r[1-(1+r)\rho_2]}{(1-\rho_1)^{r+1}}$$

$$u_{12} = -\frac{\rho_2(1-\rho_2)^{r-1}(1+r\rho_1)}{(1-\rho_1)^{r+1}}, \quad u_{11} = \frac{(r+1)(2+r\rho_2)\rho_2(1-\rho_2)^r}{(1-\rho_1)^{r+3}}$$

$$u_{22} = \frac{\rho_1(1-\rho_2)^{r-1}[(1+r)^2\rho_2 - 2r - 1]}{(1-\rho_1)^{r+1}}, \quad \sigma_{ii} = \frac{\rho_i^2(1-\rho_i)^2}{n(1+2\rho_i^2-2\rho_i)}, i = 1,2$$

$$\sigma_{12} = \sigma_{21} = 0, \quad L_{ii} = -\frac{n(1+2\rho_i^2-2\rho_i)}{\rho_i^2(1-\rho_i)^2}, i = 1,2$$

$$v_i = \frac{1+c_i-c_i^2}{(c_i\ln(1-\rho_i)-1)(c_i-1)+(1-\ln(1-\rho_i))} + \frac{1}{(1-\rho_i)\ln(1-\rho_i)}, i = 1,2$$

حاصل می‌شوند که به کمک این روابط، مقادیر A، B و C به صورت

$$A = \frac{v_1\rho_1^2(1-\rho_1)^2 - n(1+2\rho_1^2-2\rho_1)}{n(1+2\rho_1^2-2\rho_1)}, \quad B = \frac{v_2\rho_2^2(1-\rho_2)^2 - n(1+2\rho_2^2-2\rho_2)}{n(1+2\rho_2^2-2\rho_2)}$$

$$C = \frac{\rho_1\rho_2(1-\rho_2)^r\{(r+1)(2\rho_1+r\rho_1\rho_2) - \rho_2(1-\rho_2)[(1+r)^2\rho_2 - 2r - 1]\}}{2n(1-\rho_1)^{r+1}(1+2\rho_2^2-2\rho_2)}$$

به دست می‌آیند. بنابراین به کمک رابطه (۳)، $I = \eta(\hat{\rho}_1,\hat{\rho}_2,r)$ و در نهایت برآورد بیز سلسله‌مراتبی W_M به صورت

$$\hat{W}_M^{HB} = \frac{K^{-\frac{1}{p}}}{T_1^2}\{\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\binom{p+r-1}{r}(\frac{T_1}{T_2})^{r+1}\eta(\hat{\rho}_1,\hat{\rho}_2,r)\}^{-\frac{1}{p}} \qquad (10)$$

به دست می‌آید.

۱.۳ روابط حدی بین برآوردگرها

در این بخش $\lim_{n\to\infty}\hat{W}_M^B$، $\lim_{n\to\infty}\hat{W}_M^{EB}$ و $\lim_{n\to\infty}\hat{W}_M^{HB}$ به ترتیب با نمادهای $\hat{\hat{W}}_M^B$، $\hat{\hat{W}}_M^{EB}$ و $\hat{\hat{W}}_M^{HB}$ نشان داده شده و سپس تحت شرایطی روابط حدی بین برآوردگرها تعیین می‌شود.

قضیه ۵. اگر $\rho_1=\rho_2$، $T_1<(1-\hat{\rho}_1)T_2$ و $\mu_2<\mu_1$ آن‌گاه وقتی که $n\to\infty$، روابط زیر برقرارند.

$$\hat{\hat{W}}_M^B=\hat{\hat{W}}_M^{EB}$$

$$\hat{\hat{W}}_M^{HB}=\frac{\hat{\rho}_1^2\hat{\hat{W}}_M^B}{1-\hat{\rho}_1}-\frac{1}{T_1}\Big(1+\frac{\hat{\hat{W}}_M^B-1}{(1-\hat{\rho}_1)}\Big)-\frac{p\hat{\rho}_1^5(\hat{\hat{W}}_M^B)^{-\frac{p+1}{p}}}{T_1}$$
$$+p\hat{\rho}_1(1-\hat{\rho}_1)^2T_2^2\Big(1+\frac{\hat{\hat{W}}_M^B-1}{(1-\hat{\rho}_1)}\Big)^{-\frac{p+1}{p}}.$$

برهان. با فرض $\rho_1=\rho_2$ روابط (۵) و (۶) به ترتیب به روابط

$$\ell(\mu_1,\mu_2,\rho_1)=(\mu_1\mu_2)^n(\rho_1(1-\rho_1))^{2n}e^{(1-\rho_1)(\mu_1T_1+\mu_2T_2)}$$

و $\pi(\mu_1,\mu_2,\rho_1)=\frac{\Gamma(2n+a_1+b_1)}{(\Gamma(n))^2\Gamma(2n+a_1)\Gamma(b_1)}(T_1T_2)^n\phi(\mu_1,\mu_2,\rho_1)$ تبدیل می‌شوند طوری که

$$\phi(\mu_1,\mu_2,\rho_1)=(\mu_1\mu_2)^n\rho_1^{2n+a_1-1}(1-\rho_1)^{2n+b_1-1}e^{(1-\rho_1)(\mu_1T_1+\mu_2T_2)}.$$

مشابه روش اثبات قضیه ۲، تحت شرط $\mu_2<\mu_1$ برآورد بیز W_M به صورت

$$\hat{W}_M^B(b_1)=\Big\{\frac{1}{(\Gamma(n))^2}\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\binom{p+r-1}{r}\Gamma(n+r)\Gamma(n-r)\Big(\frac{T_1}{T_2}\Big)^r\Big\}^{-\frac{1}{p}} \quad (11)$$

به دست می‌آید. با توجه به رابطه $\lim_{n\to\infty}\frac{\Gamma(n+r)\Gamma(n-r)}{(\Gamma(n))^2}=\lim_{n\to\infty}\prod_{i=1}^r\frac{n+r-i}{n-r-i}=1$، $\hat{\hat{W}}_M^B=\frac{T_1+T_2}{T_2}$ حاصل می‌شود. با توجه به تعریف ۱ و رابطه (۱۱) رابطه

$$\hat{\hat{W}}_M^{EB}=\frac{1}{c_1-1}\int_1^{c_1}\hat{\hat{W}}_M^Bdb_1=\frac{T_1+T_2}{T_2}=\hat{\hat{W}}_M^B$$

برقرار می‌شود. با توجه به رابطه $T_1<(1-\hat{\rho}_1)T_2$ ($T_1<T_2$) و به کمک لم ؟؟ داریم:

$$\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\binom{p+r-1}{r}\Big(\frac{T_1}{T_2}\Big)^r=\Big(1+\frac{T_1}{T_2}\Big)^{-p}$$

$$\sum_{r=1}^{\infty}r(-1)^r\binom{p+r-1}{r}\Big(\frac{T_1}{T_2}\Big)^r=-p\Big(1+\frac{T_1}{T_2}\Big)^{-(p+1)}.$$

مقاله پذیرفته شده

همچنین با توجه به روابط

$$\lim_{n\to\infty} K = \lim_{n\to\infty} \frac{\Gamma(n+(r+۱))\Gamma(n-(r+۱))}{(\Gamma(n))^۲} = \lim_{n\to\infty} \prod_{i=۱}^{r+۱} \frac{n+۱+r-i}{n-۱-r-i} = ۱$$

$$\lim_{n\to\infty} \eta(\hat{\rho}_۱, \hat{\rho}_۲, r) = \frac{\hat{\rho}_۱^۲(۱+r\hat{\rho}_۱^۳)}{۱-\hat{\rho}_۱|} - \frac{۱+r\hat{\rho}_۱}{(۱-\hat{\rho}_۱)^{r+۱}}$$

$\hat{\hat{W}}_M^{HB}$ به صورت

$$\hat{\hat{W}}_M^{HB} = \frac{\hat{\rho}_۱^۲}{۱-\hat{\rho}} . \frac{T_۱+T_۲}{T_۱.T_۲} - \frac{۱}{T_۱}\left(۱+\frac{T_۱}{(۱-\hat{\rho}_۱)T_۲}\right) - \frac{p\hat{\rho}_۱^۵T_۲^۲}{۱-\hat{\rho}_۱}\left(۱+\frac{T_۱}{T_۲}\right)^{-\frac{p+۱}{p}}$$
$$+ p\hat{\rho}_۱\hat{\rho}_۱(۱-\hat{\rho}_۱)^۲T_۲^۲\left(۱+\frac{T_۱}{(۱-\hat{\rho}_۱)T_۲}\right)^{-\frac{p+۱}{p}} \qquad (۱۲)$$

به دست می‌آید. با توجه به رابطه $\hat{\hat{W}}_M^{EB} = \hat{\hat{W}}_M^{B} = \frac{T_۱+T_۲}{T_۱.T_۲}$ و رابطه (۱۱)، قضیه اثبات می‌شود.

۴ تحلیل عددی

در این بخش با استفاده از روش شبیه‌سازی مونت‌کارلو و به کمک یک مجموعه داده‌های واقعی، برآورد مناسب W_M تعیین می‌شود. برآوردی مناسب شناخته می‌شود که به ازای آن W_M مینیمم شود.

۱.۴ مطالعه شبیه‌سازی

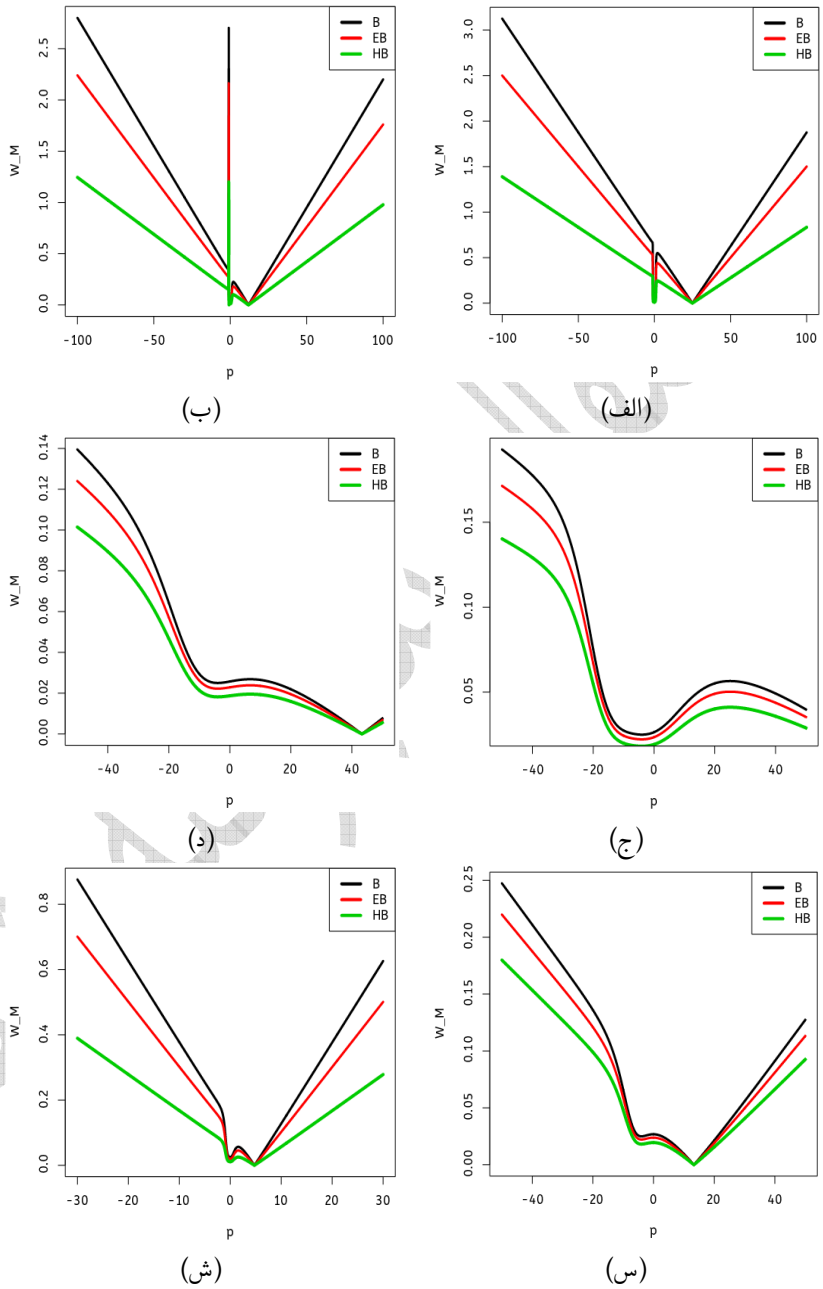
در این زیربخش مراحل شبیه‌سازی برای تعیین برآورد مناسب W_M ارائه می‌شود.

۱. از توزیع $f(x) = e^{-(x-۱)}, x > ۱$ به تصادف دو عدد تولید شده و به ترتیب $c_۱$ و $c_۲$ در نظر گرفته می‌شوند.

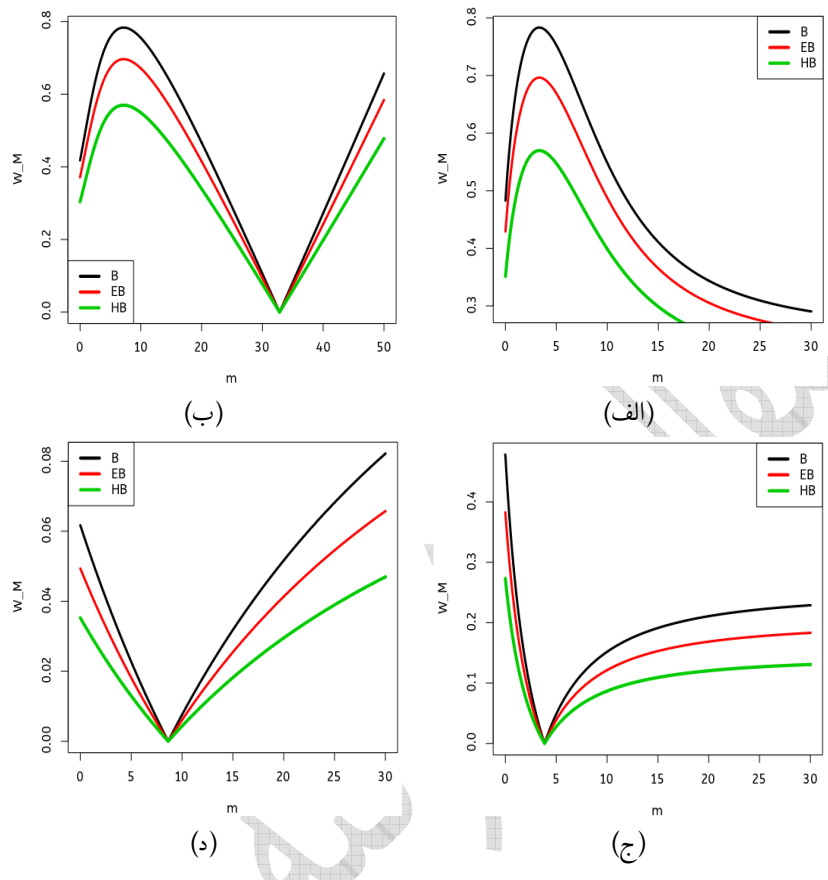
۲. از توزیع‌های $U(۱, c_۱)$ و $U(۱, c_۲)$ عددی به تصادف انتخاب شده و به ترتیب $b_۱$ و $b_۲$ در نظر گرفته می‌شوند.

۳. از توزیع $f(x) = e^{-x}, x > ۰$ دو عدد به تصادف تولید شده و به ترتیب به عنوان $a_۱$ و $a_۲$ در نظر گرفته می‌شوند.

مقاله پذیرفته شده



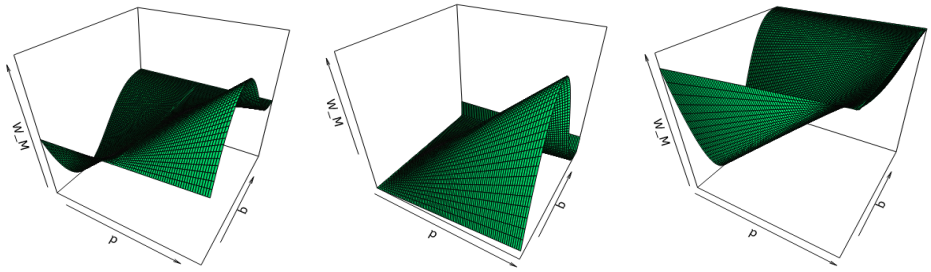
شکل ۱: نمودار W_M برحسب p به ازای الف- $m = ۰/۵$، ب- $m = ۰/۷۵$، ج- $m = ۲/۵$، د- $m = ۳/۷$، س-$m = ۴/۵$ و ش-$m = ۵/۲$



شکل ۲: نمودار W_M برحسب m به ازای الف- $p = -۲/۵$، ب- $p = -۱/۵$، ج- $p = ۳/۵$ و د- $p = ۵/۵$

۴. از توزیع‌های $Beta(a_۱, b_۱)$ و $Beta(a_۲, b_۲)$ یک نمونه ۳۰ تایی به تصادف تولید شده و نسبت $\frac{T_۱}{T_۲}$ به دست آورده می‌شود به طوری که $T_۱$ و $T_۲$ مجموع مشاهدات تصادفی تولید شده از توزیع‌های اشاره شده است.

مراحل اول تا چهارم $M = ۱۰۰۰۰$ مرتبه تکرار و میانگین ابر پارامترهای $a_۱$، $a_۲$، $b_۱$،$b_۲$، $c_۱$ و $c_۲$ محاسبه شده و به عنوان مقادیر خود آن‌ها در نظر گرفته می‌شود. همچنین میانگین نسبت‌های $\frac{T_۱}{T_۲}$ یعنی $m = \frac{۱}{M}\sum_{i=۱}^{M}\frac{T_۱^i}{T_۲^i}$ محاسبه می‌شود که $T_۱^i$ و $T_۲^i$ به ترتیب مقادیر $T_۱$ و $T_۲$ در تکرار i ام شبیه‌سازی است. سپس به ازای p های مختلف، برآوردهای بیز، E-بیز و بیز سلسله‌مراتبی W_M به ترتیب با استفاده از



(الف) (ب) (ج)

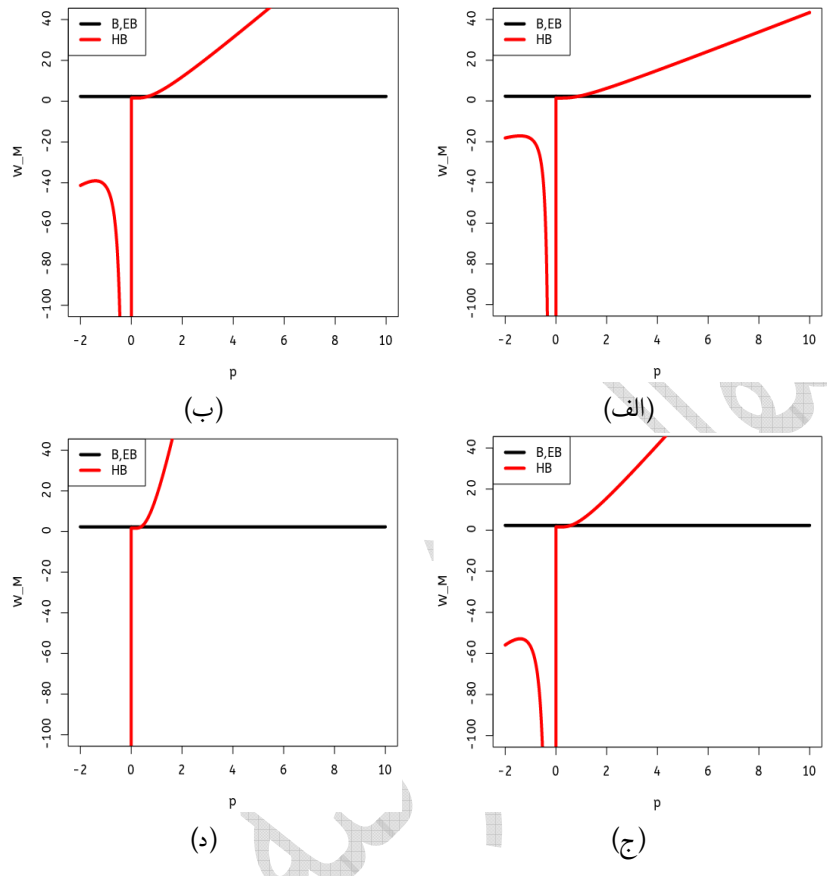
شکل ۳: نمودار W_M برحسب $0 < b = \rho < 1$ و به ازای الف- $-50 < p < 0$، ب- $0 < p < 50$ ، ج- $-50 < p < 50$

قضیه‌های ۲، ۳ و ۴ به دست آورده می‌شوند. البته نحوه شبیه‌سازی طوری است که دو مقدار کوچک‌تر از ۱ و دو مقدار بزرگتر از ۱ برای m به دست آید. نتایج شبیه‌سازی در جدول ۱ گزارش شده است. بر اساس نتایج این جدول‌ها، به ازای هر (p, m) در نظر گرفته شده، مقدار W_M مربوط به برآورد بیز سلسله‌مراتبی W_M از سایر برآوردگرها کمتر است که دلالت بر بهتر بودن این برآوردگر دارد. همچنین شکل ۱ نمودار W_M را بر حسب p به ازای مقادیر متفاوت $m = \frac{T_1}{T_2}$ و شکل ۲ نمودار W_M را بر حسب m به ازای مقادیر متفاوت p نشان می‌دهد. همان‌طوری که مشاهده می‌شود، نمودار مربوط به برآورد بیز سلسله‌مراتبی W_M پایین‌تر از نمودارهای مربوط به برآوردهای بیز و E-بیز در هر دو شکل است که دلالت بر بهتر بودن برآورد بیز سلسله‌مراتبی دارد.

۲.۴ مقایسه برآوردگرهای W_M در حالت حدی

در قضیه ۵ روابط بین برآوردهای بیز، E-بیز و بیز سلسله‌مراتبی W_M در حالت حدی به دست آورده شد و برابری برآوردهای بیز و E-بیز ثابت شد. در این بخش برآورردهای E-بیز و بیز سلسله‌مراتبی، به روش نموداری و تحلیل عددی با هم مقایسه می‌شوند. همچنین در این بخش $\rho_1 = \rho_2 = \rho$ در نظر گرفته می‌شود. برای مقایسه این برآوردگرها، دو نمونه ۲۰۰ تایی از توزیع‌های بتا در گام چهارم بخش شبیه‌سازی تولید و به کمک قضیه ۵ مقدار $\hat{\hat{W}}_M^{EB} = 2.333$ به دست آورده می‌شود. مقادیری از (p, ρ) که به ازای آن‌ها $\hat{\hat{W}}_M^{EB} \leq 2.333$ یا $\hat{\hat{W}}_M^{EB} > 2.333$ شوند، برآوردگر مطلوب، برآوردگر E-بیز یا بیز سلسله‌مراتبی تعیین می‌شود. نمودارهای شکل ۳ نشان می‌دهد W_M به مقادیر (p, ρ) بستگی دارد. اما نمی‌توان کوچکتر یا بزرگ‌تر بودن آن از ۲٫۳۳۳ را تشخیص داد. بنابر این برای تحلیل بهتر، نمودارهای W_M بر حسب ρ به ازای p های

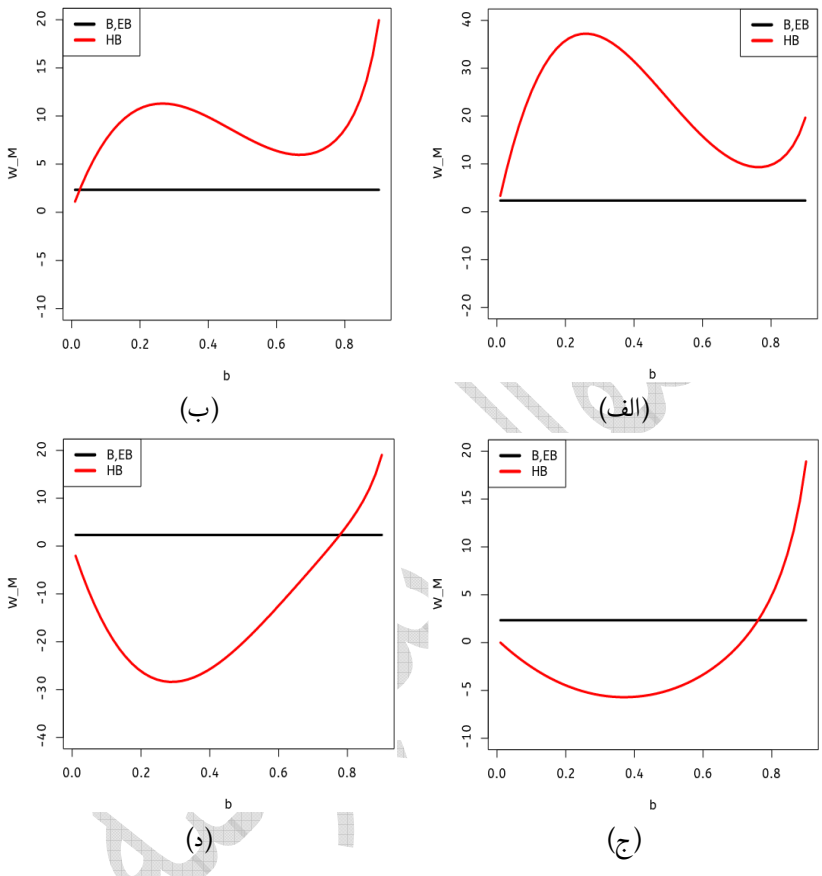
مقاله پذیرفته شده



شکل ۴: نمودار W_M برحسب p به ازای الف- $\rho = ۰/۲۵$، ب- $\rho = ۰/۳۵$، ج- $\rho = ۰/۴۵$ و د- $\rho = ۰/۶۵$

مختلف و بر حسب p به ازای ρ های مختلف رسم می‌شود.

نمودار W_M بر حسب p و به ازای مقادیر مختلف ρ در شکل ۴ نشان داده شده است. به نظر می‌رسد که در بازه $(۰/۵, ۲)$ نقطه‌ای مانند ϵ وجود دارد که به ازای $p < \epsilon$ برآوردگر بیز سلسله‌مراتبی و به ازای $p \geq \epsilon$ برآوردگر E-بیز، برآورد مطلوب W_M است. البته مقدار ϵ به مقدار ρ بستگی دارد. برای تحلیل بهتر، به کمک قضیه ۵ مقدار W_M به ازای مقادیر متفاوت (p, ρ) محاسبه و در جدول ۲ ثبت شده است. به کمک این جدول نتیجه گرفته می‌شود به ازای $\rho = ۰/۱۵, ۰/۳۰, ۰/۴۰$ تحت شرط $p \geq ۱$ و به ازای $\rho = ۰/۵۵, ۰/۷۵$ تحت شرط $p \geq ۰/۷$، برآورد گر E-بیز بهتر است.در شکل ۵ نمودار W_M بر حسب ρ به ازای p های مختلف رسم شده است. مشاهده می‌شود در حالت $p < ۰$ برآوردگر E-بیز بهتر است. اما در حالت $p > ۰$، نقطه‌ای



شکل ۵: نمودار W_M برحسب $b = \rho$ به ازای الف- $p = ۰/۶۵$، ب- $p = ۳/۵$، ج- $p = -۲/۵$ و د- $p = -۰/۵$

مانند ϵ در بازه $(۰/۶, ۰/۸)$ وجود دارد که به ازای $\rho < \epsilon$ برآوردگر بیز سلسله‌مراتبی و به ازای $\rho \geq \epsilon$ برآوردگر E-بیز بهتر است. برای تحلیل بهتر، به کمک قضیه ۵ مقدار W_M به ازای مقادی متفاوت (p, ρ) محاسبه و در جدول ۳ ثبت شده است. به کمک این جدول نتیجه گرفته می‌شود که به ازای $p < ۰$، برآوردگر E-بیز بهتر و به ازای $p = ۰/۱۵, ۰/۲۵$ تحت شرط $\rho \geq ۰/۷$ و به ازای $p = ۰/۵۵$ تحت شرط $\rho \geq ۰/۶$، برآوردگر بیز سلسله‌مراتبی بهتر است.

جدول ۱: برآوردهای W_M برای داده‌های شبیه‌سازی شده

$\hat{W}_M^{HB}$	$\hat{W}_M^{EB}$	$\hat{W}_M^{B}$	p	m
۰٫۲۶۲۲۸	۰٫۲۶۷۷۶	۰٫۲۷۱۲۱	−۲	
۰٫۲۲۷۰۵	۰٫۲۳۲۷۴	۰٫۲۳۶۳۷	−۱٫۵	
۰٫۲۳۲۱۵	۰٫۲۳۳۴۶	۰٫۲۳۶۷۸	−۰٫۵	۰٫۲۵
۰٫۲۲۳۳۳	۰٫۲۲۴۰۶	۰٫۲۲۶۴۷	۰٫۵	
۰٫۲۰۷۶۹	۰٫۲۰۷۸۹	۰٫۲۱۰۸۸	۱٫۵	
۰٫۱۹۵۶۹	۰٫۱۹۸۴۸	۰٫۲۰۱۵۳	۲	
۰٫۲۳۹۴۳	۰٫۲۴۴۱۸	۰٫۲۴۸۲۳	−۲	
۰٫۲۴۲۱۲	۰٫۲۴۵۶۳	۰٫۲۴۶۶۹	−۱٫۵	
۰٫۲۳۰۳۴	۰٫۲۳۳۷۵	۰٫۲۳۸۰۹	−۰٫۵	۰٫۶۵
۰٫۲۱۲۶۰	۰٫۲۱۵۳۷	۰٫۲۱۸۶۸	۰٫۵	
۰٫۲۱۳۷۳	۰٫۲۱۶۷۴	۰٫۲۱۷۷۱	۱٫۵	
۰٫۲۰۵۸۹	۰٫۲۰۹۸۲	۰٫۲۱۳۰۶	۲	
۰٫۲۳۶۳۸	۰٫۲۴۱۵۷	۰٫۲۴۷۵۶	−۲	
۰٫۲۳۰۰۳	۰٫۲۳۵۱۴	۰٫۲۴۵۶۵	−۱٫۵	
۰٫۲۲۱۷۵	۰٫۲۲۶۶۶	۰٫۲۳۵۱۱	−۰٫۵	۱٫۵
۰٫۲۰۵۹۵	۰٫۲۱۰۷۱	۰٫۲۱۷۱۶	۰٫۵	
۰٫۲۰۲۸۹	۰٫۲۰۷۳۵	۰٫۲۱۷۶۱	۱٫۵	
۰٫۲۰۱۱۹	۰٫۲۰۵۶۱	۰٫۲۱۳۵۶	۲	
۰٫۲۳۵۰۴	۰٫۲۴۰۸۹	۰٫۲۵۴۲۸	−۲	
۰٫۲۲۵۱۹	۰٫۲۴۳۴۹	۰٫۲۴۸۳۲	−۱٫۵	
۰٫۲۱۹۱۹	۰٫۲۳۳۳۸	۰٫۲۴۱۲۴	−۰٫۵	۳٫۵
۰٫۲۱۴۶۱	۰٫۲۱۹۹۵	۰٫۲۳۲۱۷	۰٫۵	
۰٫۱۹۷۲۰	۰٫۲۰۲۳۹	۰٫۲۱۸۸۴	۱٫۵	
۰٫۲۰۳۹۲	۰٫۲۱۳۹۱	۰٫۲۲۱۱۸	۲	

جدول ۲: مقادیر $\hat{W}_M^{HB}$ به ازای ρ ها و p های مختلف و $\hat{W}_M^{EB} = ۲٫۳۳$

$p = ۲$	$p = ۱٫۵$	$p = ۱$	$p = ۰٫۷$	$p = ۰٫۵$	$p = -۰٫۵$	$p = -۱٫۵$	$p = -۲$	ρ
۶٫۰۱	۳٫۰۷	۲٫۹۱	۰٫۷۶	۰٫۵۱	−۱۷٫۴۷	−۲۲٫۸۱	−۳۵٫۶۵	۰٫۱۵
۱۰٫۵۷	۵٫۰۲	۲٫۵۹	۰٫۷۲	۰٫۵۱	−۴٫۴۵	−۱۵٫۶۲	−۴٫۰۱	۰٫۳۰
۴٫۰۶	۳٫۰۴	۲٫۶۶	۱٫۶۰	۰٫۶۲	−۶٫۵۹	−۲۲٫۲۸	−۱۱٫۸۲	۰٫۴۰
۱۵٫۲۶	۱۳٫۳۸	۵٫۴۳	۲٫۴۶	۱٫۳۸	−۲۰٫۹۸	−۳۲٫۳۴	−۸٫۴۴	۰٫۵۵
۲۲٫۴۲	۱۴٫۱۲	۶٫۸۶	۵٫۷۸	۲٫۱۳	−۲۵٫۸۱	−۴۴٫۹۸	−۱۲٫۴۷	۰٫۷۵

مقاله پذیرفته شده

جدول ۳: مقادیر $\hat{W}_M^{HB}$ به ازای ρ ها و p های مختلف و $\hat{W}_M^{EB} = ۲٫۳۳$

p	$\rho = ۰٫۱$	$\rho = ۰٫۲$	$\rho = ۰٫۳$	$\rho = ۰٫۴$	$\rho = ۰٫۵$	$\rho = ۰٫۶$	$\rho = ۰٫۷$	$\rho = ۰٫۸$
−۲	−۱۴٫۴۶	−۳۷٫۸۸	−۳۶٫۵۹	−۵۲٫۱۶	−۶۱٫۵۹	−۵۹٫۱۲	−۸۰٫۳۷	−۷۹٫۳۹
−۱٫۵	−۱۴٫۵۳	−۴۲٫۴۴	−۳۸٫۰۲	−۷۶٫۰۴	−۶۷٫۴۱	−۱۲۵٫۳۰	−۱۱۰٫۷۰	−۴۸٫۱۷
−۰٫۵	−۱۵٫۶۸	−۳۷٫۱۳	−۵۹٫۳۲	−۷۵٫۶۲	−۱۱۱٫۲۰	−۱۵۵٫۱۰	−۲۹۱٫۴۰	−۴۹۶٫۳۰
۰٫۱۵	−۰٫۱۱	−۰٫۰۲	۰٫۱۷	۰٫۵۰	۱٫۰۶	۲٫۰۱	۳٫۷۱	۷٫۳۸
۰٫۲۵	−۰٫۰۸	۰٫۰۴	۰٫۲۳	۰٫۵۷	۱٫۱۰	۲٫۰۲	۳٫۷۳	۷٫۳۷
۰٫۵۶	۰٫۲۵	۰٫۹۶	۲٫۱۰	۱٫۶۷	۲٫۱۵	۲٫۸۰	۴٫۲۲	۷٫۴۶

۳.۴ مثال عددی

در مکانی از یک شهر، دو بانک مختلف که مجاور هم و هر کدام دارای یک دستگاه خودپرداز در بیرون بانک هستند، در نظر گرفته می‌شود. از مراجعه‌کنندگان به این خودپردازها، یک نمونه تصادفی ۳۰ تایی از مدت زمان انتظار در صف بر حسب دقیقه، تهیه و در جدول ۴ ثبت شده است. بر اساس داده‌های مربوط به خودپرداز شماره ۱، برآورد درستنمایی ماکسیمم $\mu_۱$ و $\rho_۱$ به ترتیب ۵٫۱۴ و ۰٫۷۹۹۴ به دست آورده می‌شود. از طرفی با توجه به مقدار عددی آماره آزمون کولموگوروف–اسمیرنوف (۰٫۰۵۶۷) و $p-value$ مربوطه (۰٫۷۸۹۲)، نتیجه گرفته می‌شود این داده‌ها از توزیع

$$F_{T_q}(t) = \begin{cases} ۱ - \rho & t = ۰ \\ ۱ - \rho e^{-\mu(۱-\rho)t} & t > ۰ \end{cases} \qquad (۱۳)$$

پیروی می‌کنند. همچنین بر اساس داده‌های مربوط به خودپرداز شماره ۲، برآورد درستنمایی ماکسیمم $\mu_۲$ و $\rho_۲$ به ترتیب ۴٫۵۵ و ۰٫۸۹۸۵ به دست می‌آید. از طرفی با توجه به مقدار عددی آماره آزمون کولموگوروف–اسمیرنوف (۰٫۰۲۳۶) و $p-value$ مربوطه (۰٫۸۹۷۶)، نتیجه گرفته می‌شود این داده‌ها از توزیع رابطه (۱۳) پیروی می‌کنند. تابع توزیع مدت زمان انتظار در صف متقاضی (T_q) در مدل صف‌بندی $M/M/۱$ توسط آلن (۱۹۹۰) به صورت رابطه (۱۳) محاسبه شد.

با اجرای مراحل اول تا چهارم شبیه‌سازی برای در نظر گرفتن مقادیری برای $a_۱$، $a_۲$، $b_۱$، $b_۲$، $c_۱$، $c_۲$، $T_۱$ و $T_۲$ و بر اساس داده‌های جدول ۴، برآوردهای بیز، E–بیز و بیز سلسله‌مراتبی W_M به ازای مقادیر مختلف p محاسبه و در جدول ۵ گزارش شده است. نتایج این جدول بیانگر برتر بودن برآورد بیز سلسله‌مراتبی است.

مقاله پذیرفته شده

جدول ۴: داده‌های مربوط به مثال خودپردازهای دو بانک

خود	۱٫۶۵	۲٫۱۸	۱٫۹۸	۲٫۵۷	۱٫۹۰	۱٫۴۰	۲٫۱۴	۲٫۳۹
پرداز	۲٫۴۵	۲٫۲۵	۱٫۶۰	۱٫۵۸	۱٫۹۸	۱٫۴۱	۱٫۱۷	۲٫۵۸
شماره	۱٫۵۲	۱٫۳۹	۱٫۳۵	۲٫۷۳	۱٫۲۰	۳٫۳۶	۱٫۶۴	۲٫۱۴
۱	۲٫۳۰	۲٫۵۸	۲٫۱۹	۳٫۱۶	۲٫۴۱	۲٫۴۸		
خود	۱٫۴۲	۱٫۵۰	۲٫۲۷	۳٫۲۱	۱٫۵۰	۱٫۴۰	۳٫۱۴	۲٫۳۴
پرداز	۲٫۴۲	۱٫۶۳	۱٫۰۰	۳٫۱۴	۱٫۸۰	۲٫۷۶	۳٫۲۶	۲٫۴۱
شماره	۱٫۲۰	۱٫۶۲	۱٫۹۲	۱٫۲۱	۳٫۱۵	۲٫۴۴	۱٫۱۰	۲٫۳۶
۲	۲٫۴۱	۱٫۵۰	۲٫۲۹	۱٫۲۹	۲٫۷۷	۲٫۱۳		

جدول ۵: براوردهای W_M برای داده‌های مثال بانک

p	$\hat{W}_M B$	$\hat{W}_M^{EB}$	$\hat{W}_M^{HB}$
−۲٫۵	۰٫۴۶۴۷	۰٫۴۷۳۰	۰٫۴۶۷۵
−۲٫۰	۰٫۴۶۴۳	۰٫۴۶۰۶	۰٫۴۵۵۵
−۱٫۵	۰٫۴۴۸۶	۰٫۴۴۳۴۴	۰٫۴۴۱۲
−۱٫۰	۰٫۴۴۰۵	۰٫۴۳۷۱	۰٫۴۲۵۱
−۰٫۵	۰٫۴۲۷۲	۰٫۴۲۵۸	۰٫۴۲۰۱
۰٫۵	۰٫۴۰۷۴	۰٫۴۰۴۳	۰٫۴۲۰۸
۱٫۵	۰٫۴۰۷۵	۰٫۴۰۲۸	۰٫۴۴۱۵
۲٫۰	۰٫۳۷۷۲	۰٫۳۷۴۳	۰٫۳۷۰۱
۲٫۵	۰٫۳۶۷۵	۰٫۳۶۶۵	۰٫۳۶۰۷

بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله دو مدل صف‌بندی $M/M/1$ در حالت پایا و با پارامترهای λ_1، μ_1 و ρ_1 و λ_2، μ_2 و ρ_2 در نظر گرفته شدند. بر اساس نمونه تصادفی n تایی از مدت زمان‌های انتظار در صف متقاضیان در هر مدل، برآورد مینیمم متوسط مدت زمان انتظار در صف این دو مدل به روش‌های بیز، E−بیز و بیز سلسله‌مراتبی به دست آورده شد. با استفاده از روش شبیه‌سازی مونت‌کارلو و به کمک یک مثال عددی، مقدار W_M به ازای مقادیر مختلف p و $m = \frac{T_1}{T_2}$ برای همه روش‌های برآورد محاسبه شد و مشخص گردید که W_M مربوط به برآوردگر بیز سلسله‌مراتبی از W_M سایر برآوردگرها کوچک‌تر است که دلالت بر بهتر بودن آن دارد. یادآوری می‌گردد که T_1 و T_2 مجموع مشاهدات نمونه‌های تصادفی هستند.

همچنین برای تحلیل بهتر، نمودار W_M بر حسب p و به ازای چند مقدار m و نمودار W_M بر حسب m

مقاله پذیرفته شده

و به ازای چند مقدار p رسم شد و مشخص گردید که برآورد بیز سلسله‌مراتبی نسبت به سایر برآوردها بهتر است.

در حالت حدی نیز یعنی $n \to \infty$، تحت شرط $\rho_1 = \rho_2$ مقایسه برآوردکننده‌های W_M صورت گرفته است. در این حالت ثابت شد که برآوردهای بیز و E–بیز مساویند و تحت شرطی بر حسب p و m گاهاً برآورد بیز سلسله‌مراتبی و گاهاً برآورد E–بیز (بیز) بهتر است.

تقدیر و تشکر

نویسنده مقاله از سردبیر، داوران و ویراستار محترم مجله در ارزیابی این مقاله و پیشنهادهای ارزنده‌اشان قدردانی و تشکر می‌کند.

مراجع

شادرخ، ع. و یعقوب‌زاده شهرستانی، ش. (۱۳۹۸)، برآوردهای E–بیز و بیز سلسله‌مراتبی پارامتر تنش–مقاومت در توزیع رایلی تحت تابع زیان لاینکس، مجله علوم آماری، **۱۲**(۲)، ۴۸۳-۴۹۶.

یعقوب‌زاده شهرستانی، ش. (۱۴۰۲)، برآورد پارامتر شدت ترافیک و احتمال پایایی مدل صف‌بندی $M/M/c$ تحت یک زمان توقف در سیستم، مجله علوم آماری، **۱۷**(۱)، ۲۱۹-۲۳۳.

یعقوب‌زاده شهرستانی، ش. (۱۴۰۴)، معرفی مدل صف‌بندی $E_r/M/c$ و برآورد پارامتر شدت ترافیک آن، مجله علوم آماری، **۱۹**(۲)، ۴۸۹-۵۱۲.

Allen, A. (1990), *Probability, Statistics and Queueing Theory with Computer Science Applications*, 2nd ed., Academic Press, Boston.

Ando, T. and Zellner, A. (2010), Hierarchical Bayesian Analysis of the Seemingly Unrelated Regression and Simultaneous Equations Models Using a Combination of Direct Monte Carlo and Importance Sampling Techniques, *Bayesian Analysis*, **5**, 65-96.

Berger, J. O. (1985), *Statistical Decision Theory and Bayesian Analysis*, 2nd ed., Springer-Verlag, New York.

مقاله پذیرفته شده

Calabria, R. and Pulcini, G. (1996), Point Estimation under Asymmetric Loss Functions for Left-Truncated Exponential Samples, *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **25**(3), 585-600.

Chandrasekhar, P., Vaidyanathan, V. S., Durairajan, T. M. and Yadavalli, V. S. S. (2020), Classical and Bayes Estimation in the $M/D/1$ Queueing System, *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **22**, 5411-5421.

Chowdhury, S. and Mukherjee, S. P. (2013), Estimation of Traffic Intensity Based on Queue Length in a Single $M/M/1$ Queue, *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **42**, 2376-2390.

Cressie, M. and Tingley, M. P. (2010), Comment: Hierarchical Statistical Modeling for Paleoclimate Reconstruction, *Journal of the American Statistical Association*, **105**, 895-900.

Deepthi, V. and Jose, J. K. (2021), Bayesian Estimation of $M/E_k/1$ Queueing Model Using Bivariate Prior, *American Journal of Mathematical and Management Sciences*, **40**, 88-105.

Fiorini, F., Cococcioni, M. and Pagano, M. (2025), Quantitative Delay Analysis of $GI/G/1$ Queues with Heavy-Failed Traffic by Means of Alpha Theory, *Computer Networks*, **209**, 1-13.

Han, M. (1977), The Structure of Hierarchical Prior Distribution and its Applications, *Chinese Operations Research and Management Science*, **6**, 31-40.

Han, M. (2009), E-Bayesian Estimation and Hierarchical Bayesian Estimation of Failure Rate, *Applied Mathematical Modelling*, **33**, 1915-1922.

مقاله پذیرفته شده

Han, M. (2011), E-Bayesian Estimation of the Reliability Derived from Binomial Distribution, *Applied Mathematical Modelling*, **35**, 2419-2424.

Insua, D. R., Wiper, M. and Ruggeri, F. (1998), Bayesian Analysis of $M/E_r/1$ and $M/H_k/1$ Queues, *Queueing Systems*, **30**, 289-308.

Jaheen, Z. F. and Okasha, H. M. (2011), E-Bayesian Estimation for the Burr Type XII Model Based on Type-2 Censoring, *Applied Mathematical Modelling*, **35**, 4730-4737.

Jose, J. K. and Manoharan, M. (2014), Bayesian Estimation of Rate Parameters of Queueing Models, *Journal of Probability and Statistical Science*, **12**, 69-76.

Lindley, D. V. (1980), Approximate Bayesian Methods, *Trabajos de Estadística y de Investigación Operativa*, **31**, 223-245.

Lindley, D. V. and Smith, A. F. M. (1972), Bayes Estimation for the Linear Model, *Journal of the Royal Statistical Society: Series B*, **34**, 1-41.

Micheas, A. C. and Wikle, C. K. (2009), A Bayesian Hierarchical Nonoverlapping Random Disc Growth Model, *Journal of the American Statistical Association*, **104**, 274-283.

Osei, F. B. and Duker, A. A. (2011), Hierarchical Bayesian Modeling of the Space-Time Diffusion Patterns of Cholera Epidemic in Kumasi, Ghana, *Statistica Neerlandica*, **65**, 84-100.

Richard, D. M. (2011), A Bayesian Hierarchical Model for the Measurement of Working Memory Capacity, *Journal of Mathematical Psychology*, **55**, 8-24.

Schweer, S. and Wichelhaus, C. (2020), Nonparametric Estimation of the Service Time

مقاله پذیرفته شده

Distribution in Discrete-Time Queueing Networks, *Stochastic Processes and their Applications*, **130**, 4643-4666.

Vaidyanathan, V. S. and Chandrasekhar, P. (2018), Parametric Estimation of an $M/E_r/1$ Queue, *Opsearch*, doi: 10.1007/s12597-018-0342-0.

Wang, J., Li, D. and Chen, D. (2012), E-Bayesian Estimation and Hierarchical Bayesian Estimation of the System Reliability Parameter, *Systems Engineering Procedia*, **3**, 282-289.

Wiper, M. (1998), Bayesian Analysis of $E_r/M/1$ and $E_r/M/c$ Queues, *Journal of Statistical Planning and Inference*, **69**, 65-79.

Yaghoobzadeh Shahrastani, S. (2018), Estimating E-Bayesian and Hierarchical Bayesian of Scalar Parameter of Gompertz Distribution under Type II Censoring Schemes Based on Fuzzy Data, *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **48**(4), 831-840.

Yousefzadeh, F. (2017), E-Bayesian and Hierarchical Bayesian Estimations for the System Reliability Parameter Based on Asymmetric Loss Function, *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **46**(1), 1-8.

مقاله پذیرفته شده

An Estimation of the Minimum Average Waiting Time for Two Queueing Models under Steady-State Conditions in an $M/M/1$ System.

Yaghoobzadeh Shahrastani, S.

Department of Statistics, Payame Noor University, Tehran, Iran.

Abstract: In classical queueing systems, customers wait in line to receive service. However, some customers prefer to join multiple queues simultaneously for the same service to obtain it as quickly as possible. Once a customer receives service from one of the queues, they immediately leave the others, thereby minimizing their waiting time. Based on this concept, this paper considers two $M/M/1$ queueing models with arrival and service rates (λ_1, μ_1) for the first model and (λ_2, μ_2) for the second. The minimum average waiting time in these two models is estimated using Bayesian, E-Bayesian, and Hierarchical Bayesian approaches under the General Entropy Loss Function. Furthermore, Monte Carlo simulations and a real dataset are employed to evaluate and identify the most appropriate estimator.

Keywords: Minimum average waiting time in queue, $M/M/1$ queueing model, E-Bayesian estimation, Hierarchical Bayesian estimation, General entropy loss function.

Mathematics Subject Classification (2010): 62C12، 62K05.

مقاله پذیرفته شده