# مدل‌سازی بیزی داده‌های فضایی-زمانی چوله با میدان تصادفی منعطف و همبستگی مترن مبتنی بر الگوریتم همیلتونی تطبیقی

**امید کریمی، فاطمه حسینی**

گروه، آمار دانشگاه سمنان

**چکیده:** داده‌های فضایی-زمانی اغلب دارای توزیع‌های چوله هستند که مدل‌سازی آن‌ها با چالش‌هایی همراه است. میدان‌های تصادفی چوله گاوسی یکی از رویکردهای متداول برای تحلیل این داده‌ها هستند، اما برخی از این مدل‌ها با مشکلاتی مانند پیچیدگی محاسباتی و عدم شناسایی‌پذیری مواجه‌اند. در این مقاله، یک چارچوب بیزی برای مدل‌سازی داده‌های فضایی-زمانی چوله بر پایه میدان تصادفی چوله گاوسی بسته و منعطف پیشنهاد شده است که ویژگی‌هایی مانند شناسایی‌پذیری و بسته بودن تحت عملیات حاشیه‌سازی و شرطی‌سازی را داراست. این مدل با بهره‌گیری از تابع همبستگی مترن، انعطاف‌پذیری مناسبی در مدل‌سازی ساختارهای همبستگی فضایی-زمانی فراهم می‌کند. تحلیل بیزی مدل با استفاده از الگوریتم مونت‌کارلویی همیلتونی انجام و در یک مطالعه شبیه‌سازی، عملکرد آن با روش‌های متداول مونت‌کارلویی زنجیر مارکوفی مقایسه شد. در نهایت، کارایی مدل در تحلیل داده‌های آلودگی هوا $PM_{10}$ نیز مورد بررسی قرار گرفت.

**واژه‌های کلیدی:** الگوریتم همیلتونی تطبیقی، تابع همبستگی مترن، بازنمایی دون‌رتبه، مدل سلسله‌مراتبی بیزی، آلودگی ذرات معلق $PM_{10}$.

---

آدرس الکترونیکی نویسنده مسئول مقاله: امید کریمی، omid.karimi@semnan.ac.ir

کد موضوع‌بندی ریاضی (۲۰۲۰): 62F15, 62M10.

# ۱ مقدمه

داده‌های فضایی–زمانی در بسیاری از حوزه‌ها مانند هواشناسی، اقلیم‌شناسی، همه‌گیرشناسی، کشاورزی، اقتصاد منطقه‌ای و علوم محیطی مشاهده می‌شوند. این داده‌ها معمولاً در موقعیت‌های مکانی مشخص در طول زمان گردآوری شده و ساختار وابستگی پیچیده‌ای شامل همبستگی‌های مکانی و زمانی از خود نشان می‌دهند. از این‌رو، تحلیل دقیق این داده‌ها نیازمند مدل‌هایی است که بتوانند همبستگی فضایی و زمانی و ویژگی‌های آماری داده‌ها مانند چولگی یا دم‌های سنگین را به‌درستی لحاظ کنند. مدل‌های گاوسی فضایی زمانی به‌طور گسترده در تحلیل این داده‌ها مورد استفاده قرار گرفته‌اند (کرسی و ویکل، ۲۰۱۵).

میدان‌های تصادفی گاوسی به دلیل انعطاف‌پذیری در مدل‌سازی این همبستگی‌ها، بسیار مورد استقبال محققین قرار گرفته‌اند (ساهو، ۲۰۲۲). در بسیاری از کاربردهای واقعی، داده‌ها از رفتار نرمال تبعیت نمی‌کنند و ممکن است دارای چولگی، کشیدگی یا رفتارهای نامتقارن باشند. این موضوع سبب شده است که در سال‌های اخیر مدل‌های جایگزین و منعطف‌تری معرفی شوند. یکی از این مدل‌ها، مدل میدان تصادفی چوله گاوسی است که ابتدا در زمینه‌های مالی و محیطی معرفی شد (آزالینی و کاپیتانیو، ۲۰۰۵؛ گنتون، ۲۰۰۴) و بعدها به حوزه‌های فضایی و فضایی–زمانی تعمیم یافت (آرالانو–واله و همکاران، ۲۰۲۱). با این حال، بسیاری از این مدل‌ها با مشکلاتی مانند عدم شناسایی‌پذیری و پیچیدگی محاسباتی مواجه‌اند، به‌ویژه زمانی که داده‌ها توزیع چوله دارند (کاسترو–کامپوس و همکاران، ۲۰۲۳؛ فین و همکاران، ۲۰۲۴). ژانگ و همکاران (۲۰۱۸) یک مدل چوله فضایی–زمانی نامانا ارائه کرد که به کمک رهیافت بیزی برآورد شده است. آرالانو–واله و همکاران (۲۰۲۱) با بهره‌گیری از توزیع چوله تی، ساختار همبستگی پیچیده‌ای را در داده‌های همه‌گیرشناسی فضایی زمانی مدل‌سازی کرده است. این مطالعات نشان می‌دهند که استفاده از توزیع‌های چوله، به‌ویژه در محیط‌هایی با عدم‌تقارن و تغییرپذیری بالا، عملکرد بهتری نسبت به مدل‌های گاوسی دارد. از طرفی، در تحلیل داده‌های فضایی زمانی پیچیده، روش‌های مونت‌کارلویی زنجیر مارکوفی[1] (MCMC) معمول مانند الگوریتم‌های گیبز و متروپولیس–هستینگز[2] (MH) معمولاً با مشکل کندی همگرایی یا عدم همگرایی و نیاز به تنظیم‌بندی‌های خاص مواجه‌اند، به‌ویژه زمانی که تعداد پارامترهای مدل

[1] Markov Chain Monte Carlo
[2] Metropolis–Hastings

زیاد و توابع هدف مثل توزیع پسین پارامترها دارای رفتار پیچیده باشند. در چنین شرایطی، روش‌هایی مانند الگوریتم مونت‌کارلوی همیلتونی[۳](HMC) می‌توانند عملکرد بسیار بهتری ارائه دهند. این روش از اطلاعات گرادیانی تابع چگالی پسین استفاده می‌کند تا نمونه‌هایی کارآمدتر و با همگرایی سریع‌تر تولید کند (نیل، ۲۰۱۱؛ بتانکورت، ۲۰۱۷). با وجود پیشرفت‌های اخیر در مدل‌سازی داده‌های فضایی و فضایی–زمانی، توسعه میدان‌های تصادفی چوله نرمال بسته منعطف در چارچوب فضایی–زمانی و استنباط بیزی متناظر آن‌ها همچنان کمتر مورد توجه قرار گرفته است. هدف اصلی این پژوهش ارائه یک مدل رگرسیون فضایی–زمانی مبتنی بر میدان تصادفی FCSN و توسعه یک چارچوب استنباط بیزی مبتنی بر الگوریتم AHMC برای برازش آن است.

برای رفع این چالش‌ها، در این مقاله یک چارچوب بیزی با استفاده از میدان تصادفی چوله گاوسی بسته منعطف[۴](FCSN) و یک مدل رگرسیون فضایی–زمانی جدید با تابع همبستگی مترن تفکیک‌پذیر پیشنهاد شده است تا این ویژگی‌ها را به‌طور مؤثری مدل‌سازی کند. این مدل، که ویژگی‌های شناسایی‌پذیری و بسته بودن تحت عملیات حاشیه‌سازی و شرطی‌سازی را حفظ می‌کند، با بهره‌گیری از تابع همبستگی مترن، امکان مدل‌سازی منعطف‌تر ساختارهای همبستگی فضایی–زمانی را فراهم می‌سازد. تابع مترن، به دلیل انعطاف‌پذیری در تنظیم پارامتر هموارساز، قادر است رفتارهای مختلف میدان تصادفی را به‌طور مؤثری مدل‌سازی کند، که این ویژگی آن را از توابع معمول‌تر مانند همبستگی نمایی متمایز می‌کند (باکشی، ۲۰۲۳). اگرچه مدل‌های همبستگی فضایی–زمانی تفکیک‌ناپذیر نیز در ادبیات برای توصیف وابستگی‌های پیچیده‌تر توسعه یافته‌اند، در این پژوهش به‌منظور تمرکز بر توسعه چارچوب بیزی پیشنهادی و بررسی عملکرد آن، تابع همبستگی مترن تفکیک‌پذیر در نظر گرفته می‌شود.

برای برآورد پارامترهای مدل، از الگوریتم HMC تطبیقی[۵] (AHMC) استفاده شده است، که به دلیل دقت بالا و کارایی محاسباتی، به‌عنوان روش اصلی در این مطالعه انتخاب شده است (هوفمن و گلمن، ۲۰۱۴). الگوریتم AHMC، با استفاده از گرادیان‌های چگالی پسین و تنظیم خودکار طول گام، امکان نمونه‌گیری کارآمد از توزیع‌های پسین پیچیده را فراهم می‌کند. مطالعه شبیه‌سازی انجام‌شده در این مقاله

[3] Hamiltonian Monte Carlo
[4] Flexible Closed Skew Normal
[5] Adaptive Hamiltonian Monte Carlo

نشان داد که الگوریتم AHMC در مقایسه با الگوریتم MH، برآوردهای دقیق‌تری ارائه می‌دهد و در عین حال، به زمان محاسباتی کمتری نیاز دارد. در بخش‌های بعدی، جزئیات مدل، روش‌های برآورد و نتایج شبیه‌سازی ارائه شده‌اند، که توانایی مدل در بازسازی ساختارهای فضایی–زمانی و چولگی داده‌ها را تأیید می‌کنند.

برای ارزیابی عملکرد مدل پیشنهادی، این چارچوب بر روی داده‌های واقعی آلودگی هوا شامل اندازه‌گیری‌های روزانه $PM_{10}$ در ایستگاه‌های پایش آلمان نیز به کار گرفته شد. این مجموعه‌داده، به دلیل برخورداری از وابستگی فضایی–زمانی، ناهمگنی مکانی و چولگی در توزیع مشاهدات، بستری مناسب برای بررسی قابلیت کاربردی مدل پیشنهادی فراهم می‌کند. با این حال، تحلیل مستقیم چنین داده‌هایی با استفاده از مدل فضایی–زمانی کامل، به دلیل ابعاد بزرگ ماتریس‌های همبستگی و هزینه بالای ذخیره‌سازی و محاسبات ماتریسی، با چالش‌های محاسباتی قابل توجهی همراه است. از این‌رو، در بخش کاربردی از یک بازنمایی دون‌رتبه مبتنی بر توابع پایه مکانی و زمانی برای تقریب میدان فضایی–زمانی چوله استفاده شد تا ضمن حفظ ساختار اصلی وابستگی داده‌ها، امکان استنباط بیزی کارآمد با استفاده از الگوریتم AHMC فراهم شود. در مجموع، این مقاله با ترکیب میدان تصادفی FCSN، استنباط بیزی مبتنی بر AHMC و یک بازنمایی دون‌رتبه برای این میدان تصادفی، چارچوبی عملی برای تحلیل داده‌های فضایی–زمانی چوله با ابعاد بالا ارائه می‌کند.

## ۲ میدان تصادفی چوله گاوسی منعطف

فرض کنید بردار $\boldsymbol{U} = (\boldsymbol{U}_1, \boldsymbol{U}_2) \in \mathbb{R}^{p+q}$ دارای توزیع نرمال چندمتغیره $N_{p+q}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ باشد، که در آن $\boldsymbol{\mu} = (\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2)$ و $\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{pmatrix}$، آن‌گاه $\boldsymbol{X} = [\boldsymbol{U}_1 | \boldsymbol{U}_2 \leq 0]$ دارای توزیع چوله نرمال بسته[6] (CSN) با تابع چگالی

$$f_X(\boldsymbol{x}) = k\phi_p(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\Sigma}_{11})\Phi_q\left(0; \boldsymbol{\mu}_2 + \boldsymbol{\Sigma}_{21}\boldsymbol{\Sigma}_{11}^{-1}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu}_1), \boldsymbol{\Sigma}_{2|1}\right), \qquad (1)$$

[6] Closed Skew Normal

است، که در آن $k^{-1} = \Phi_q(0; \boldsymbol{\mu}_2, \boldsymbol{\Sigma}_{22})$ و $\boldsymbol{\Sigma}_{2|1} = \boldsymbol{\Sigma}_{22} - \boldsymbol{\Sigma}_{21}\boldsymbol{\Sigma}_{11}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{12}$. در اینجا، $\phi_p$ و $\Phi_q$ به‌ترتیب توابع چگالی و توزیع تجمعی نرمال چندمتغیره هستند. توزیع CSN با نماد $\mathrm{CSN}_{p,q}(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\Sigma}_{11}, \boldsymbol{\Sigma}_{21}\boldsymbol{\Sigma}_{11}^{-1}, \boldsymbol{\mu}_2, \boldsymbol{\Sigma}_{2|1})$ نمایش داده می‌شود.

**تعریف ۱.** فرض کنید $\lambda \in \mathbb{R}$، $\sigma > 0$، $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^n$ و $\boldsymbol{\Sigma}_n$ یک ماتریس معین مثبت $n \times n$ باشند. با تعریف $b = \sqrt{2/\pi}$، $\delta = \lambda(1+\lambda^2)^{-1/2}$ و $\tau = (1 - b^2\delta^2)^{-1/2}$، اگر بردار $n$-بعدی $\boldsymbol{Z}_n$ توزیع CSN به‌صورت $\mathrm{CSN}_{n,n}(\boldsymbol{\mu} - b\delta\sigma\tau\boldsymbol{\Sigma}_n^{1/2}\mathbf{1}_n, \sigma^2\tau^2\boldsymbol{\Sigma}_n, \frac{\lambda}{\sigma\tau}\boldsymbol{\Sigma}_n^{-1/2}, 0, \mathbf{I}_n)$ داشته باشد، این توزیع یک توزیع چوله نرمال بسته منعطف به شکل $\boldsymbol{Z}_n \sim \mathrm{FSCSN}_n(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}_n, \sigma, \lambda)$ است، که در آن $\mathbf{1}_n$ بردار یکه $n$-بعدی و $\mathbf{I}_n$ ماتریس همانی $n \times n$ است (مارکز-اوربینا و گنزالس-فاریاس، ۲۰۲۲).

امید ریاضی و واریانس بردار تصادفی $\boldsymbol{Z}_n$ به‌صورت $\mathrm{E}(\boldsymbol{Z}_n) = \boldsymbol{\mu},\ \mathrm{Var}(\boldsymbol{Z}_n) = \sigma^2\boldsymbol{\Sigma}_n$ به‌دست می‌آیند. این ویژگی باعث می‌شود میانگین و واریانس مستقل از پارامتر چولگی $\lambda$ باشند، که امکان تعیین ساختار همبستگی فضایی-زمانی داده‌ها را بر اساس تغییرنگار تجربی تسهیل می‌کند (حسینی و کریمی، ۱۴۰۲).

تابع چگالی توزیع FCSN مطابق رابطه (۱) به‌صورت

$$\begin{aligned} f_{Z_n}(\boldsymbol{z}) &= 2^n\phi_n\big(\boldsymbol{z}; \boldsymbol{\mu} - b\delta\sigma\tau\boldsymbol{\Sigma}_n^{1/2}\mathbf{1}_n, \sigma^2\tau^2\boldsymbol{\Sigma}_n\big) \\ &\times \Phi_n\big(\frac{\lambda}{\sigma\tau}\boldsymbol{\Sigma}_n^{-1/2}(\boldsymbol{z} - \boldsymbol{\mu}) + b\delta\lambda\mathbf{1}_n; 0, \mathbf{I}_n\big), \end{aligned} \tag{2}$$

حاصل می‌شود، که در آن پارامتر $\lambda$ میزان چولگی توزیع را کنترل می‌کند. توزیع FCSN نسبت به حاشیه‌سازی بسته است، که این ویژگی سازگاری حاشیه‌ای را در تعریف میدان تصادفی فضایی-زمانی چوله تضمین می‌کند.

**تعریف ۲.** فرض کنید مجموعه $\{Z(\boldsymbol{s}, t); \boldsymbol{s} \in D \subseteq \mathbb{R}^d, t \in T \subseteq \mathbb{R}, d \in \mathbb{N}\}$ یک میدان تصادفی فضایی-زمانی باشد. برای هر تعداد متناهی از موقعیت‌های فضایی-زمانی $(\boldsymbol{s}_i, t_j) \in D \times T$، $i = 1, \ldots, n_s$، $j = 1, \ldots, n_t$، که در آن $n_s$ تعداد مکان‌ها، $n_t$ تعداد نقاط زمانی و $n = n_s \times n_t$

مقاله پذیرفته شده

تعداد کل مشاهدات است، بردار $\boldsymbol{Z}_n = (Z(\boldsymbol{s}_1, t_1), \ldots, Z(\boldsymbol{s}_{n_s}, t_{n_t}))'$ باشد. همچنین، $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^n$ بردار پارامتر مکان، $\lambda$ پارامتر چولگی، $\sigma > 0$ پارامتر مقیاس و $\boldsymbol{C}_n$ ماتریس همبستگی فضایی–زمانی بردار تصادفی $\boldsymbol{Z}_n$ با مؤلفه‌های $c_{ij} = \rho\big(\|\boldsymbol{s}_i - \boldsymbol{s}_{i'}\|, |t_j - t_{j'}|; \phi_s, \phi_t, \nu_s, \nu_t\big)$ است، که $\rho(\cdot, \cdot; \phi_s, \phi_t, \nu_s, \nu_t)$ یک تابع همبستگی فضایی–زمانی معتبر تفکیک‌پذیر به‌صورت

$$\rho(h, t; \phi_s, \phi_t, \nu_s, \nu_t) = \rho_s(h; \phi_s, \nu_s)\, \rho_t(t; \phi_t, \nu_t), \tag{۳}$$

است، که در آن

$$\rho_s(h; \phi_s, \nu_s) = \frac{1}{\Gamma(\nu_s) 2^{\nu_s - 1}} \Big(\frac{h}{\phi_s}\Big)^{\nu_s} K_{\nu_s}\Big(\frac{h}{\phi_s}\Big),$$
$$\rho_t(t; \phi_t, \nu_t) = \frac{1}{\Gamma(\nu_t) 2^{\nu_t - 1}} \Big(\frac{t}{\phi_t}\Big)^{\nu_t} K_{\nu_t}\Big(\frac{t}{\phi_t}\Big),$$

و $h = \|\boldsymbol{s}_i - \boldsymbol{s}_{i'}\|$ فاصله اقلیدسی فضایی، $t = |t_j - t_{j'}|$ فاصله زمانی، $\phi_s > 0$ و $\phi_t > 0$ پارامترهای مقیاس فضایی–زمانی، $\nu_s > 0$ و $\nu_t > 0$ پارامترهای هموارساز فضایی–زمانی، $\Gamma(\cdot)$ تابع گاما و $K_\nu(\cdot)$ تابع بسل اصلاح‌شده از نوع دوم هستند (ساهو، ۲۰۲۲). اگر توزیع توأم $\boldsymbol{Z}_n$ به‌صورت $\boldsymbol{Z}_n \sim \mathrm{FSCSN}_n(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{C}_n, \sigma, \lambda)$ باشد، آن‌گاه $\{Z(\boldsymbol{s}, t); \boldsymbol{s} \in D,\, t \in T\}$ یک میدان تصادفی فضایی–زمانی FCSN است.

در این میدان تصادفی چوله منعطف، بردار $\boldsymbol{\mu}$ مکان توزیع را تعیین می‌کند، پارامتر $\sigma$ میزان پراکندگی مشاهدات را کنترل می‌کند و ماتریس $C_n$ ساختار همبستگی بین مشاهدات فضایی–زمانی را توصیف می‌کند. همچنین، پارامتر $\lambda$ میزان و جهت چولگی توزیع را کنترل می‌کند، به‌طوری‌که $\lambda = 0$ به توزیع نرمال متناظر منجر شده و با افزایش قدرمطلق $\lambda$، میزان عدم تقارن توزیع افزایش می‌یابد. در این چارچوب، تابع همبستگی مترن به دلیل انعطاف‌پذیری در تنظیم پارامترهای هموارساز ($\nu_s$، $\nu_t$)، امکان مدل‌سازی ساختارهای همبستگی متنوع را فراهم می‌کند و نسبت به تابع نمایی، که معادل $\nu_s = \nu_t = 0/5$ است، قابلیت بیشتری در توصیف رفتارهای میدان تصادفی دارد (باکشی، ۲۰۲۳). همچنین، در این

مدل میانگین و واریانس به پارامتر چولگی وابسته نیستند، ازاین‌رو، ساختار همبستگی فضایی–زمانی را می‌توان مستقل از میزان چولگی داده‌ها برآورد کرد. این ویژگی امکان استفاده از واریوگرام‌های تجربی برای برآورد مدل و پارامترهای همبستگی را بدون تأثیرپذیری از پارامتر چولگی فراهم می‌آورد و در نتیجه، به بهبود شناسایی‌پذیری پارامترهای مدل کمک می‌کند (حسینی و کریمی، ۱۴۰۳).

## ۳ مدل رگرسیون فضایی–زمانی چوله

مدل رگرسیون فضایی–زمانی چوله برای بردار پاسخ $\boldsymbol{Y}_n$ به‌صورت

$$\boldsymbol{Y}_n = \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{Z}_n, \tag{۴}$$

در $n = n_s \times n_t$ موقعیت فضایی–زمانی $(\boldsymbol{s}_1, t_1), \ldots, (\boldsymbol{s}_{n_s}, t_{n_t}) \in D \times T$ تعریف می‌شود، که در آن $\boldsymbol{X}$ یک ماتریس $n \times p$ از متغیرهای توضیحی در موقعیت‌های فضایی–زمانی، $\boldsymbol{\beta}$ یک بردار $p$–بعدی از ضرایب رگرسیونی و $\boldsymbol{Z}_n$ یک تحقق از میدان تصادفی فضایی–زمانی FCSN با میانگین صفر به‌صورت $\boldsymbol{Z}_n \sim \mathrm{FSCSN}_n(0, \boldsymbol{C}_n, \sigma, \lambda)$ است. که در آن $\boldsymbol{C}_n$ ماتریس همبستگی با مولفه‌های مطابق رابطه (۳) است. با توجه به خاصیت تبدیلات خطی توزیع CSN، بردار پاسخ‌های فضایی–زمانی $\boldsymbol{Y}_n$ دارای توزیع $\boldsymbol{Y}_n \sim \mathrm{CSN}_{n,n}(\boldsymbol{\mu}_y, \boldsymbol{\Sigma}_y, \boldsymbol{\Gamma}_y, 0, \boldsymbol{I}_n)$ است، که در آن $\boldsymbol{\mu}_y = \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta} - b\delta\sigma\tau\boldsymbol{C}_n^{1/2}\mathbf{1}_n$، $\boldsymbol{\Sigma}_y = \sigma^2\tau^2\boldsymbol{C}_n$، $\boldsymbol{\Gamma}_y = \frac{\lambda}{\sigma\tau}\boldsymbol{C}_n^{-1/2}$ و $b$، $\delta$ ، $\tau$ در تعریف ۱ معرفی شده‌اند. بنابراین تابع چگالی احتمال توزیع $\boldsymbol{Y}_n$ به‌صورت

$$f_{\boldsymbol{\eta}}(\boldsymbol{y}) = 2^n \phi_n\left(\boldsymbol{y}; \boldsymbol{\mu}_y, \boldsymbol{\Sigma}_y\right) \Phi_n\left(\boldsymbol{\Gamma}_y(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{\mu}_y)\right), \tag{۵}$$

می‌توان نوشت. بنابراین، بردار پارامترهای مدل به‌صورت $\boldsymbol{\eta} = (\boldsymbol{\beta}, \sigma, \phi_s, \phi_t, \nu_s, \nu_t, \lambda)'$ تعریف می‌شود. برای برآورد پارامترها، از روش‌های بیزی استفاده می‌شود که توزیع‌های پیشین مناسب برای هر پارامتر تعیین شده و با بهره‌گیری از داده‌های مشاهده‌شده، الگوریتم‌های مونت‌کارلویی، به‌ویژه الگوریتم

همیلتونی، برای نمونه‌برداری از توزیع پسین به‌کار گرفته می‌شوند.

## ۱.۳ برآورد بیزی مدل فضایی–زمانی

برای برآورد پارامترهای مدل رگرسیون فضایی–زمانی چوله تعریف‌شده در معادله (۴)، یک چارچوب بیزی مبتنی بر نمونه‌گیری عددی ارائه می‌شود. هدف، برآورد بردار پارامترها $\boldsymbol{\eta} = (\boldsymbol{\beta}, \sigma, \phi_s, \phi_t, \nu_s, \nu_t, \lambda)'$ با استفاده از توزیع‌های پیشین مناسب و الگوریتم AHMC است که کارایی و پایداری محاسباتی را بهبود می‌بخشد. توزیع‌های پیشین زیر برای پارامترهای مدل در نظر گرفته می‌شوند:

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{\beta} \sim N_p(۰, \mathrm{diag}(\sigma^۲_{\beta_۱}, \ldots, \sigma^۲_{\beta_p})), \quad \sigma \sim \text{Half-Cauchy}(۰, \gamma_\sigma),\\
&\phi_s \sim \Gamma(۲, ۰/۵), \phi_s \in (۰, ۱۰], \qquad \phi_t \sim \Gamma(۳, ۱),\ \phi_t \in (۰, ۵],\\
&\nu_s \sim \Gamma(۱/۵, ۰/۲),\ \nu_s \in (۰/۵, ۳], \qquad \nu_t \sim \Gamma(۱/۵, ۰/۲),\ \nu_t \in (۰/۵, ۳],\\
&\lambda \sim N(۰, \sigma^۲_\lambda), \quad \lambda \in [-۵, ۵].
\end{aligned}
$$

که در آن $N_p$ توزیع نرمال، Half-Cauchy توزیع نیم‌کوشی برای مقادیر مثبت و $\Gamma(\alpha, \beta)$ توزیع گاما با پارامتر شکل $\alpha$ و نرخ $\beta$ است. توزیع نیمه‌کوشی برای $\sigma$ انعطاف‌پذیری بیشتری در مدل‌سازی واریانس فراهم می‌کند و محدودیت‌های پارامترهای تابع همبستگی مترن را کنترل می‌کنند. توزیع بریده‌شده برای $\lambda$ از مقادیر چولگی غیرواقعی جلوگیری می‌کند. این توزیع‌های پیشین به دلیل ناآگاهی‌بخش بودن، سازگاری با ساختار مدل مترن و پشتیبانی از پایداری محاسباتی در الگوریتم‌های مونت‌کارلویی انتخاب شدند. در مطالعه شبیه‌سازی در بخش ۴ نیز توزیع‌های پیشین براساس گومز–روبیو (۲۰۲۰) به‌گونه‌ای انتخاب شدند که ناآگاهی‌بخش باشند و با مقادیر واقعی پارامترها سازگار باشند. برای ضرایب رگرسیونی توزیع به‌صورت $\boldsymbol{\beta} \sim \mathcal{N}_۳(۰, ۱۰\boldsymbol{I}_۳)$، یعنی توزیع نرمال چندمتغیره با میانگین صفر و واریانس بالا برای $\boldsymbol{\beta} = (\beta_۰, \beta_۱, \beta_۲)$ انتخاب شد، که ناآگاهی‌بخش باشد و امکان پوشش مقادیر واقعی $(۱, ۲, -۱)$ را فراهم می‌کند. این توزیع در مدل‌های رگرسیون بیزی فضایی–زمانی رایج است، زیرا انعطاف‌پذیری بالایی برای برآورد ضرایب فراهم می‌کند و تأثیر داده‌ها بر توزیع پسین را افزایش می‌دهد. توزیع نیم‌کوشی با مقیاس

۲ برای $\sigma$ به دلیل مثبت بودن و دم سنگین انتخاب شد، که برای پارامترهای مقیاس در مدل‌های بیزی مناسب است. این پیشین با مقدار واقعی $\sigma = ۱$ سازگار است و از مقادیر غیرواقعی بزرگ جلوگیری می‌کند. توزیع گاما برای پارامترهای دامنه $(\phi_s, \phi_t)$ به دلیل مثبت بودن و انعطاف‌پذیری انتخاب شد. پارامترهای $\alpha = ۲, \beta = ۰/۵$ برای $\phi_s$ و $\alpha = ۳, \beta = ۱$ برای $\phi_t$ به‌گونه‌ای تنظیم شدند که با مقادیر واقعی $(\phi_s = ۴, \phi_t = ۲)$ همخوانی داشته باشند، اما همچنان ناآگاهی‌بخش باقی بمانند. توزیع گاما با $\alpha = ۱/۵, \beta = ۰/۲$ برای پارامترهای هموارساز انتخاب شد، زیرا این پارامترها باید مثبت باشند و پیشین ناآگاهی‌بخش با دم سنگین برای پوشش مقادیر واقعی $(\nu_s = ۱/۵, \nu_t = ۱)$ مناسب است. این انتخاب با مدل‌های مترن در تحلیل‌های فضایی–زمانی سازگار است (گومز–روبیو، ۲۰۲۰). توزیع نرمال با میانگین صفر و واریانس ۴ برای پارامتر چولگی $(\lambda)$ انتخاب شد، زیرا FCSN چولگی را به‌صورت مقید مدل‌سازی می‌کند. محدودیت $\lambda \in [-۵, ۵]$ با مقدار واقعی $(\lambda = ۲)$ سازگار است و پایداری عددی را در الگوریتم تضمین می‌کند. توزیع پسین توام پارامترها به‌صورت

$$\begin{aligned}\pi(\boldsymbol{\eta}|\boldsymbol{y}) &\propto f_{\boldsymbol{\eta}}(\boldsymbol{y}) \prod_{k\in\{\boldsymbol{\beta},\sigma,\phi_s,\phi_t,\nu_s,\nu_t,\lambda\}} \pi(k) \\ &= ۲^n \phi_n\left(\boldsymbol{y}; \boldsymbol{\mu}_y, \boldsymbol{\Sigma}_y\right) \Phi_n\left(\boldsymbol{\Gamma}_y(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{\mu}_y)\right) \pi(\boldsymbol{\beta})\pi(\sigma)\pi(\phi_s)\pi(\phi_t)\pi(\nu_s)\pi(\nu_t)\pi(\lambda),\end{aligned}$$

حاصل می‌شود، که در آن $f_{\boldsymbol{\eta}}(\boldsymbol{y})$ تابع چگالی داده‌ها رابطه (۵) است. به دلیل پیچیدگی تحلیلی $\pi(\boldsymbol{\eta}|\boldsymbol{y})$، از الگوریتم AHMC برای نمونه‌برداری استفاده می‌شود. این الگوریتم یک روش نمونه‌گیری بیزی است که از دینامیک‌های همیلتونی برای بررسی کارآمد فضای پارامترها استفاده می‌کند. برخلاف روش‌های معمول MH، AHMC با بهره‌گیری از گرادیان‌های چگالی توزیع پسین مسیرهای نمونه‌گیری هدفمندی تولید می‌کند که وابستگی‌های قوی بین پارامترها را بهتر مدیریت می‌کند. این ویژگی برای مدل رگرسیون فضایی–زمانی چوله با توزیع FCSN و تابع همبستگی مترن تفکیک‌پذیر، که در آن‌ها وابستگی‌های پیچیده فضایی–زمانی و چولگی وجود دارد، بسیار مناسب است.

## ۲.۳ الگوریتم همیلتونی تطبیقی

الگوریتم AHMC نسخه بهبودیافته‌ای از HMC است که در آن $\epsilon > ۰$ پارامتر طول گام مورد استفاده در انتگرال‌گیر لیپ‌فراگ است. این پارامتر به‌صورت تطبیقی در طول اجرای الگوریتم تنظیم می‌شود تا نرخ پذیرش $\alpha$ به مقدار هدف $\alpha_{\text{هدف}} = ۰/۶۵$ نزدیک شود. این تنظیم خودکار، کارایی نمونه‌گیری را در فضای پارامترهای ابعاد بالا افزایش می‌دهد (هوفمن و گلمن، ۲۰۱۴). در الگوریتم HMC انرژی پتانسیل به‌صورت $U(\boldsymbol{\eta}) = -\log \pi(\boldsymbol{\eta}|\boldsymbol{y})$ و انرژی جنبشی به‌صورت $K(\boldsymbol{r}) = \frac{۱}{۲}\boldsymbol{r}^\top \boldsymbol{r}$ تعریف می‌شوند، که در آن $\boldsymbol{r} \sim \mathcal{N}(۰, \boldsymbol{I})$ متغیر کمکی است. همچنین تابع همیلتونی به‌صورت $H(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\eta}) = U(\boldsymbol{\eta}) + K(\boldsymbol{r})$ تعریف می‌شود. در این مطالعه، از رویکرد تنظیم طول گام مبتنی بر نرخ یادگیری ($\mu$) استفاده شده است که با مقایسه نرخ پذیرش واقعی با نرخ هدف، $\epsilon$ را به‌روزرسانی می‌کند (هیرت و همکاران، ۲۰۲۱). این روش چالش‌های محاسباتی ناشی از وابستگی‌های فضایی–زمانی و چولگی داده‌ها را کاهش می‌دهد و دقت برآورد پارامترها $(\boldsymbol{\beta}, \sigma, \phi_s, \phi_t, \nu_s, \nu_t, \lambda)$ را بهبود می‌بخشد. الگوریتم مسیرهای همیلتونی را با استفاده از معادلات $\frac{d\boldsymbol{\eta}}{dt} = \boldsymbol{r}$ و $\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = -\tilde{\nabla}_{\boldsymbol{\eta}} U(\boldsymbol{\eta})$ تولید می‌کند، که در آن $\tilde{\nabla}_{\boldsymbol{\eta}} U(\boldsymbol{\eta})$ گرادیان تقریبی چگالی پسین است. گرادیان $\nabla_{\boldsymbol{\eta}} U(\boldsymbol{\eta})$ با مشتق‌گیری عددی از $U(\boldsymbol{\eta})$ محاسبه می‌شود و برای پایداری، به صورت $\tilde{\nabla}_{\boldsymbol{\eta}} U(\boldsymbol{\eta}) = \frac{\nabla_{\boldsymbol{\eta}} U(\boldsymbol{\eta})}{\|\nabla_{\boldsymbol{\eta}} U(\boldsymbol{\eta})\|_۲ + \epsilon_۰}$ نرمال‌سازی می‌شود. که در آن $\epsilon_۰ > ۰$ یک ثابت کوچک ($۱۰^{-۶}$) برای جلوگیری از تقسیم بر صفر است. برای گسسته‌سازی این معادلات، از روش لیپ‌فراگ[۷] با طول گام $\epsilon$ و تعداد گام‌ها $L$ استفاده می‌شود. به‌روزرسانی تطبیقی $\epsilon$ با استفاده از نرخ یادگیری $\mu$ و فرمول $\epsilon \leftarrow \epsilon \cdot \exp\left(\mu\left(\alpha - \alpha_{\text{هدف}}\right)/\sqrt{t}\right)$ انجام می‌شود، که در آن $\mu > ۰$ نرخ یادگیری است و $\sqrt{t}$ در مخرج، اثر یادگیری را با افزایش تعداد تکرارها ($t$) کاهش می‌دهد تا از نوسانات بیش از حد در $\epsilon$ جلوگیری کند. مقدار $\alpha_{\text{هدف}} = ۰/۶۵$ بر اساس توصیه‌های استاندارد برای HMC انتخاب شده است، زیرا این نرخ پذیرش تعادل بین کاوش و پذیرش نمونه‌ها را بهینه می‌کند (هیرت و همکاران، ۲۰۲۱). این الگوریتم با تنظیم تطبیقی $\epsilon$، کارایی نمونه‌گیری را در فضای پارامترهای پیچیده بهبود می‌بخشد. این ویژگی برای مدل‌های پیچیده‌ای مثل فضایی–زمانی با ماتریس همبستگی $\boldsymbol{C}_n$ و چولگی مهم است. برای توضیح ساده الگوریتم AHMC ، یک مدل رگرسیون خطی بیزی به‌صورت

[7] Leapfrog Method

$y_i = \beta x_i + \epsilon_i, \quad \epsilon_i \sim \mathcal{N}(۰, ۱),$ برای $i = ۱, \ldots, n$ در نظر بگیرید، که در آن $\beta$ پارامتر رگرسیون با پیشین $\beta \sim \mathcal{N}(۰, ۱۰)$ است. هدف، نمونه‌گیری از توزیع پسین $\beta$ با استفاده از AHMC است. چگالی پسین به‌صورت $p(\beta|\boldsymbol{y}) \propto \exp\left(-\frac{۱}{۲}\sum_{i=۱}^{n}(y_i - \beta x_i)^۲ - \frac{\beta^۲}{۲\cdot ۱۰}\right)$ حاصل می‌شود. HMC از تابع همیلتونی $\mathcal{H}(\beta, r) = U(\beta) + K(r)$ استفاده می‌کند، که در آن

$$U(\beta) = \frac{۱}{۲}\sum_{i=۱}^{n}(y_i - \beta x_i)^۲ + \frac{\beta^۲}{۲\cdot ۱۰}, \; K(r) = \frac{۱}{۲}r^۲,$$

و $\tilde{\nabla}_\beta U(\beta) = -\sum_{i=۱}^{n}(y_i - \beta x_i)x_i + \frac{\beta}{۱۰}$. الگوریتم AHMC با روش لیپ‌فراگ مسیرهای همیلتونی را شبیه‌سازی می‌کند و طول گام را به‌صورت تطبیقی با نرخ یادگیری و نرخ پذیرش هدف ($\alpha_{\text{هدف}} = ۰/۶۵$) تنظیم می‌کند. این الگوریتم برای مدل فضایی–زمانی تعریف شده در این مطالعه به‌صورت الگوریتم ۱ تعمیم داده می‌شود.

**الگوریتم ۱.** الگوریتم همیلتونی تطبیقی برای برآورد بیزی مدل فضایی–زمانی چوله منعطف:

گام ۱- مقداردهی اولیه: $\boldsymbol{\eta}^{(۰)} = (\boldsymbol{\beta}^{(۰)}, \sigma^{(۰)}, \phi_s^{(۰)}, \phi_t^{(۰)}, \nu_s^{(۰)}, \nu_t^{(۰)}, \lambda^{(۰)})$ و $\epsilon = \epsilon_۰$

گام ۲- برای $t = ۱$ تا $T$ تکرار کن:

(آ) یک بردار تکانه $\boldsymbol{r}^{(t)}$ را از توزیع نرمال استاندارد نمونه‌گیری کن.

(ب) گرادیان تابع انرژی $\tilde{\nabla}_{\boldsymbol{\eta}} U(\boldsymbol{\eta}^{(t)})$ را محاسبه کن.

(ج) مقدار اولیه مسیر حرکت را برابر $\boldsymbol{\eta}^* = \boldsymbol{\eta}^{(t)}$ و $\boldsymbol{r}^* = \boldsymbol{r}^{(t)}$ قرار بده.

(د) برای $l = ۱$ تا $L$ تکرار کن:

- به‌روزرسانی نیمی از گام تکانه: $\boldsymbol{r}^* \leftarrow \boldsymbol{r}^* - \frac{\epsilon}{۲}\tilde{\nabla}_{\boldsymbol{\eta}} U(\boldsymbol{\eta}^*)$
- به‌روزرسانی موقعیت: $\boldsymbol{\eta}^* \leftarrow \boldsymbol{\eta}^* + \epsilon \boldsymbol{r}^*$
- تکمیل گام دوم تکانه: $\boldsymbol{r}^* \leftarrow \boldsymbol{r}^* - \frac{\epsilon}{۲}\tilde{\nabla}_{\boldsymbol{\eta}} U(\boldsymbol{\eta}^*)$

مقاله پذیرفته شده

(ه) احتمال پذیرش را محاسبه کن:

$$\alpha = \min\left\{۱, \exp\left[H(\boldsymbol{\eta}^{(t)}, \boldsymbol{r}^{(t)}) - H(\boldsymbol{\eta}^{*}, \boldsymbol{r}^{*})\right]\right\}$$

(و) یک عدد تصادفی $u \sim \text{Uniform}(۰, ۱)$ تولید کن. اگر $u < \alpha$ آنگاه:

- مقدار جدید را بپذیر: $\boldsymbol{\eta}^{(t+۱)} \leftarrow \boldsymbol{\eta}^{*}$

در غیر این صورت:

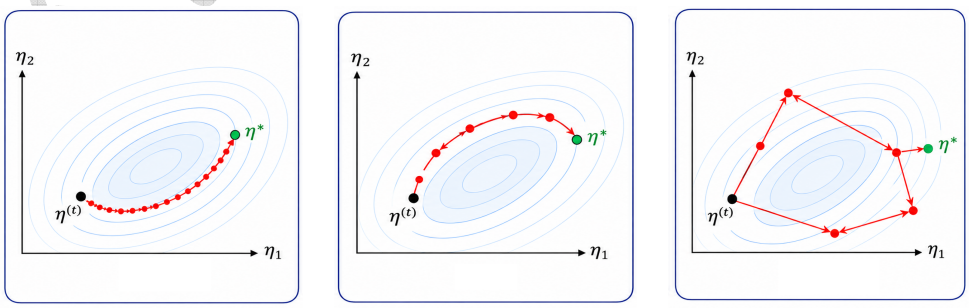
- مقدار قبلی را نگه‌دار: $\boldsymbol{\eta}^{(t+۱)} \leftarrow \boldsymbol{\eta}^{(t)}$

(ز) مقدار گام را به‌صورت تطبیقی به‌روزرسانی کن:

$$\epsilon \leftarrow \epsilon \cdot \exp\left(\frac{\mu(\alpha - \alpha_{\text{هدف}})}{\sqrt{t}}\right)$$

که در آن $\mu > ۰$ نرخ یادگیری و $\alpha_{\text{هدف}} = ۰/۶۵$ نرخ پذیرش مطلوب است.

گام۳- پایان الگوریتم.




(الف) (ب) (ج)

شکل ۱: تأثیر طول گام ($\epsilon$) در مسیر حرکت الگوریتم همیلتونی از مقدار فعلی $\boldsymbol{\eta}^{(t)}$ به مقدار پیشنهادی $\boldsymbol{\eta}^{*}$: الف– طول گام بزرگ (پرش‌های ناپایدار) ب– طول گام بهینه (مسیری هموار و کارآمد) و ج– طول گام کوچک (تعداد زیاد گام و هزینه محاسباتی).

شکل ۱ نقش طول گام را در شبیه‌سازی مسیر همیلتونی نشان می‌دهد. در شکل ۱–الف، انتخاب طول گام بزرگ موجب می‌شود تقریب عددی مسیر همیلتونی دقت کافی نداشته باشد و مسیر پیشنهادی با پرش‌های بزرگ و نامنظم از نواحی دارای چگالی پسین بالا فاصله بگیرد. در چنین شرایطی، خطای حفظ انرژی افزایش یافته و احتمال رد شدن مقدار پیشنهادی بیشتر می‌شود. در شکل۱–ب، طول گام به‌صورت مناسب انتخاب شده است و مسیر حرکت با تعداد متعادلی از گام‌ها، در امتداد هندسه و خطوط تراز توزیع پسین حرکت می‌کند. این وضعیت تعادل مناسبی میان دقت تقریب عددی، نرخ پذیرش و هزینه محاسباتی فراهم می‌سازد. در شکل ۱–ج، طول گام بسیار کوچک است، ازاین‌رو، مسیر با دقت بیشتری تقریب زده می‌شود، اما برای رسیدن به فاصله‌ای مشخص در فضای پارامترها به تعداد زیادی ارزیابی گرادیان نیاز دارد و هزینه محاسباتی افزایش می‌یابد. الگوریتم AHMC با تنظیم خودکار طول گام در مرحله داغیدن، تلاش می‌کند مقداری نزدیک به حالت بهینه شکل ۱–ب را انتخاب کند. انتخاب مقدار نرخ پذیرش هدف ($\alpha_{\text{هدف}}$) ، تعادلی میان سرعت کاوش فضای پارامترها و دقت تقریب عددی مسیرهای همیلتونی برقرار می‌کند. مقادیر کوچک‌تر، به الگوریتم اجازه می‌دهند از طول گام‌های بزرگ‌تر استفاده کند، در نتیجه، مسیرهای همیلتونی با تعداد کمتری گام طی شده و هزینه محاسباتی کاهش می‌یابد، هرچند خطای انتگرال‌گیری و احتمال رد شدن برخی پیشنهادها افزایش پیدا می‌کند. در مقابل، انتخاب مقادیر بزرگ‌تر، باعث می‌شود الگوریتم طول گام‌های کوچک‌تری انتخاب کند تا خطای عددی کاهش یافته و نرخ پذیرش واقعی افزایش یابد. اگرچه این تنظیم معمولاً پایداری بیشتری برای مدل‌های پیچیده یا دارای همبستگی شدید بین پارامترها فراهم می‌کند، اما به دلیل افزایش تعداد ارزیابی‌های گرادیان، هزینه محاسباتی نیز بیشتر خواهد بود. ازاین‌رو، مقدار مناسب نرخ پذیرش هدف به پیچیدگی مدل و هدف تحلیل بستگی دارد. در پیاده‌سازی انجام‌شده، این مقدار توسط پژوهشگران تعیین می‌شود، در حالی که سایر پارامترهای نمونه‌گیری، شامل طول گام ($\epsilon$) و تعداد گام‌های روش لیپ‌فراگ در مرحله داغیدن به‌صورت خودکار توسط الگوریتم همیلتونی تطبیقی تنظیم می‌شوند. این سازوکار تطبیقی نیاز به تنظیم دستی پارامترهای اجرایی را کاهش داده و پایداری و کارایی نمونه‌گیری را افزایش می‌دهد.

در این‌جا، تنظیم خودکار طول گام و طول مسیر را در مرحله داغیدن انجام می‌دهد. در مطالعه شبیه‌سازی، برای هر زنجیر تعداد ۱۰۰۰ نمونه داغیدن و ۱۰۰۰۰ نمونه پسین با نرخ پذیرش هدف ۰٫۶۵

و حداکثر عمق درخت ۱۰ در نظر گرفته شد. در مثال کاربردی، دو زنجیر مستقل اجرا شد که برای هر زنجیر ۷۰۰ نمونه به مرحله داغیدن و ۱۵۰۰ نمونه به نمونه‌گیری از توزیع پسین اختصاص یافت. همچنین، نرخ پذیرش هدف برابر با ۰/۹۵ تنظیم شد تا همگرایی زنجیرها و پایداری نمونه‌گیری بهبود یابد.

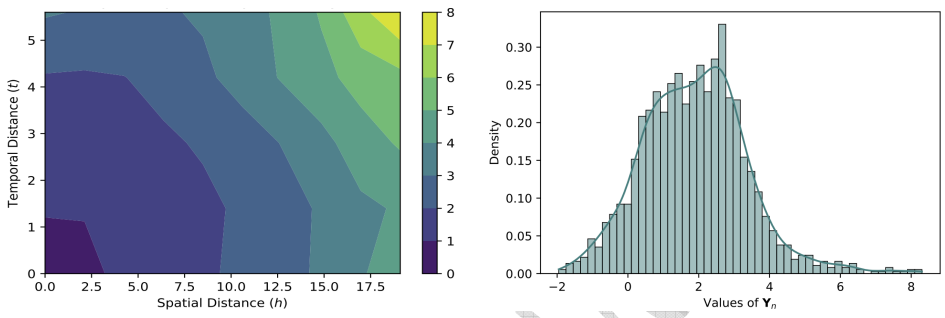
## ۴ مطالعه شبیه‌سازی

در این بخش برای ارزیابی عملکرد مدل رگرسیون فضایی–زمانی چوله پیشنهادی و الگوریتم AHMC در برآورد پارامترهای مدل، یک مطالعه شبیه‌سازی ارائه می‌شود. هدف این مطالعه، بررسی دقت و کارایی روش پیشنهادی در مقایسه با روش MH است. داده‌ها از توزیع FCSN و تابع همبستگی مترن تفکیک‌پذیر تولید شده‌اند. برای این‌منظور داده‌ها در یک شبکه فضایی منظم ۱۵×۱۵ (۲۲۵ موقعیت فضایی) در دامنه $D = [۱, ۱۵] \times [۱, ۱۵]$ و در $T = ۸$ لحظه زمانی در بازه $T = [۱, ۸]$ تولید شده‌اند، که در مجموع $n = ۲۲۵ \times ۸ = ۱۸۰۰$ مشاهده ایجاد می‌شود. ماتریس متغیرهای توضیحی $\boldsymbol{X}$ شامل یک ستون ثابت (برای عرض از مبدا) و دو متغیر طول و عرض جغرافیایی (مختصات استانداردشده $x$ و $y$) به‌صورت $\boldsymbol{X} = [\boldsymbol{1}_n, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}]$ در نظر گرفته شد. داده‌های پاسخ $\boldsymbol{Y}_n$ با استفاده از مدل $\boldsymbol{Y}_n = \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{Z}_n,\ \boldsymbol{Z}_n \sim \mathrm{FSCSN}_n(۰, \boldsymbol{C}_n, \sigma, \lambda)$، تولید شد، که $\boldsymbol{C}_n$ ماتریس همبستگی مترن تفکیک‌پذیر (۳) در نظر گرفته شده است.

سه حالت برای مقادیر واقعی پارامترها در نظر گرفته شده است. حالت اول برای بررسی حساسیت مدل در شرایط بدون چولگی و مقایسه با مدل گاوسی طراحی شد. در این حالت، مقدار $\lambda = ۰$ در نظر گرفته شد، که در آن مدل FCSN به مدل گاوسی متناظر کاهش می‌یابد. دو حالت دیگر به ترتیب برای بررسی عملکرد مدل در حضور چولگی متوسط و چولگی بالا در نظر گرفته شدند:

- **حالت اول (بدون چولگی):** $\boldsymbol{\beta} = (۱, ۲, -۱)'$، $\sigma = ۱$، $\phi_s = ۴$، $\phi_t = ۲$، $\nu_s = ۱/۵$، $\nu_t = ۱$، $\lambda = ۰$.
- **حالت دوم (چولگی متوسط):** $\boldsymbol{\beta} = (۱, ۲, -۱)'$، $\sigma = ۱$، $\phi_s = ۴$، $\phi_t = ۲$، $\nu_s = ۱/۵$، $\nu_t = ۱$، $\lambda = ۲$.

- **حالت سوم (چولگی بالا):** $\boldsymbol{\beta} = (۱, ۲, -۱)'$، $\sigma = ۱/۵$، $\phi_s = ۶$، $\phi_t = ۳$، $\nu_s = ۲$، $\nu_t = ۱/۵$، $\lambda = ۴$.




(ب) (الف)

شکل ۲: الف- بافت‌نگار و ب- تغییرنگار تجربی داده‌های فضایی-زمانی شبیه‌سازی شده حالت دوم

شکل ۲-الف بافت‌نگار داده‌های $\boldsymbol{Y}_n$ را در حالت دوم نشان می‌دهد، در حالی که شکل ۲-ب تغییرنگار تجربی فضایی-زمانی را نمایش می‌دهد. الگوی تغییرنگار تجربی با ساختار وابستگی حاصل از تابع همبستگی مترن سازگار است؛ به‌طوری‌که در فواصل فضایی و زمانی کوچک، یعنی $h \approx ۰$ و $t \approx ۰$، مقادیر تغییرنگار به صفر نزدیک‌اند که بیانگر همبستگی قوی میان مشاهدات نزدیک در فضا و زمان است. این رفتار با مقادیر $\phi_s = ۴$ و $\phi_t = ۲$، به‌ترتیب به‌عنوان پارامترهای دامنه فضایی و زمانی، همخوانی دارد. با افزایش فاصله فضایی، به‌ویژه برای $h > ۴$، یا فاصله زمانی، به‌ویژه برای $t > ۲$، مقدار تغییرنگار افزایش می‌یابد که نشان‌دهنده کاهش همبستگی است. پارامترهای هموارسازی $\nu_s = ۱/۵$ و $\nu_t = ۱$ نیز سرعت و نرمی این کاهش را کنترل می‌کنند، به‌گونه‌ای که به دلیل بزرگ‌تر بودن $\nu_s$، ساختار همبستگی فضایی نسبت به ساختار زمانی هموارتر است. همچنین، نبود الگوهای تعاملی پیچیده میان فواصل فضایی و زمانی با فرض تفکیک‌پذیری تابع همبستگی، یعنی $\rho(h,t) = \rho_s(h)\rho_t(t)$، سازگار است. در مجموع، هماهنگی میان تغییرنگار تجربی و ساختار نظری مترن نشان می‌دهد که مدل پیشنهادی توانسته است وابستگی فضایی-زمانی داده‌ها را به‌خوبی بازسازی کند و از برآورد پارامترهای همبستگی با الگوریتم AHMC پشتیبانی می‌کند. برای برآورد پارامترها، دو روش MH و AHMC استفاده شد. الگوریتم AHMC با تعداد تکرار $T = ۱۰۰۰۰$، تعداد گام‌های پرش $L = ۱۰$ و نرخ پذیرش هدف

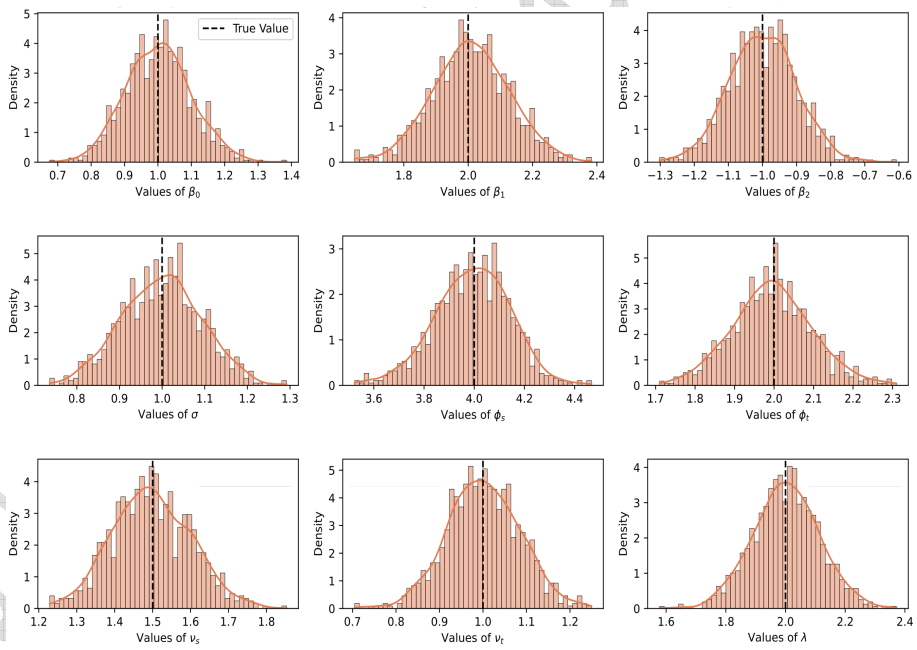
$\alpha_{\text{هدف}} = ۰/۶۵$ و الگوریتم MH با ۱۰۰۰۰ تکرار اجرا و توزیع‌های پیشین مطابق با بخش ۳ در نظر گرفته شد. برای هر حالت، ۱۰۰ مجموعه داده مستقل تولید و برآوردها با هر دو روش محاسبه شده‌اند. برای ارزیابی عملکرد روش‌ها از معیار میانگین توان دوم خطاها، $\text{MSE}(\hat{\theta}) = \frac{۱}{۱۰۰}\sum_{k=۱}^{۱۰۰}(\hat{\theta}_k - \theta)^۲$ استفاده می‌شود.

جدول ۱: نتایج مطالعه شبیه‌سازی برای برآورد پارامترهای مدل در سه حالت با روش‌های مختلف

| پارامتر | روش | حالت اول MSE | حالت اول CP (%) | حالت دوم MSE | حالت دوم CP (%) | حالت سوم MSE | حالت سوم CP (%) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\beta_۰$ | AHMC | ۰/۰۰۳۱ | ۹۷ | ۰/۰۱۲ | ۹۴ | ۰/۰۱۵ | ۹۳ |
| | MH | ۰/۰۰۳۲ | ۹۴ | ۰/۰۱۸ | ۹۲ | ۰/۰۲۲ | ۹۱ |
| $\beta_۱$ | AHMC | ۰/۰۰۵۸ | ۹۵ | ۰/۰۱۴ | ۹۵ | ۰/۰۱۷ | ۹۴ |
| | MH | ۰/۰۰۵۹ | ۹۲ | ۰/۰۲۱ | ۹۳ | ۰/۰۲۵ | ۹۲ |
| $\beta_۲$ | AHMC | ۰/۰۰۵۷ | ۹۵ | ۰/۰۱۳ | ۹۴ | ۰/۰۱۶ | ۹۴ |
| | MH | ۰/۰۰۶۱ | ۹۴ | ۰/۰۱۹ | ۹۲ | ۰/۰۲۳ | ۹۰ |
| $\sigma$ | AHMC | ۰/۰۲۴ | ۹۵ | ۰/۰۰۸ | ۹۶ | ۰/۰۱۱ | ۹۵ |
| | MH | ۰/۰۱۹ | ۹۳ | ۰/۰۱۵ | ۹۳ | ۰/۰۱۹ | ۹۲ |
| $\phi_s$ | AHMC | ۰/۰۳۱ | ۹۱ | ۰/۰۲۵ | ۹۳ | ۰/۰۳۲ | ۹۲ |
| | MH | ۰/۰۴۱ | ۹۲ | ۰/۰۴۱ | ۹۰ | ۰/۰۴۸ | ۸۹ |
| $\phi_t$ | AHMC | ۰/۰۲۶ | ۹۴ | ۰/۰۱۹ | ۹۴ | ۰/۰۲۴ | ۹۳ |
| | MH | ۰/۰۲۹ | ۹۰ | ۰/۰۳۵ | ۹۱ | ۰/۰۴۲ | ۹۰ |
| $\nu_s$ | AHMC | ۰/۰۱۶ | ۹۲ | ۰/۰۲۲ | ۹۲ | ۰/۰۲۸ | ۹۱ |
| | MH | ۰/۰۱۵ | ۹۰ | ۰/۰۳۹ | ۸۹ | ۰/۰۴۵ | ۸۸ |
| $\nu_t$ | AHMC | ۰/۰۲۱ | ۹۴ | ۰/۰۱۸ | ۹۳ | ۰/۰۲۳ | ۹۲ |
| | MH | ۰/۰۳۸ | ۹۳ | ۰/۰۳۴ | ۹۰ | ۰/۰۴۰ | ۸۹ |
| $\lambda$ | AHMC | ۰/۰۱۴ | ۹۵ | ۰/۰۱۶ | ۹۵ | ۰/۰۲۰ | ۹۴ |
| | MH | ۰/۰۱۹ | ۹۲ | ۰/۰۲۸ | ۹۲ | ۰/۰۳۳ | ۹۱ |
| زمان (ثانیه) | AHMC | ۱۱۵ | – | ۱۲۰ | – | ۱۲۵ | – |
| | MH | ۱۵۰ | – | ۱۸۰ | – | ۱۹۰ | – |

نتایج مطالعه شبیه‌سازی در جدول ۱ ارائه شده‌اند. مطابق این جدول، در حالت اول که متناظر با $\lambda = ۰$ است، مدل پیشنهادی به مدل گاوسی متناظر کاهش می‌یابد و بنابراین این حالت برای بررسی حساسیت مدل در شرایط بدون چولگی در نظر گرفته شده است. نتایج نشان می‌دهد که الگوریتم AHMC در این حالت نیز عملکردی مشابه یا بهتر از روش MH دارد و مقادیر MSE و پوشش بازه‌های باورمندی آن در اغلب پارامترها قابل رقابت یا برتر است. این موضوع بیانگر آن است که مدل پیشنهادی در غیاب چولگی نیز عملکرد مناسبی دارد. در دو حالت دارای چولگی ($\lambda = ۲$ و $\lambda = ۴$)، برتری AHMC نسبت به روش MH آشکارتر است، به‌گونه‌ای که در اکثر پارامترها مقادیر MSE کمتری همراه با پوشش مناسب

بازه‌های باورمندی ارائه می‌دهد. همچنین، با افزایش شدت چولگی، کاهش دقت روش MH محسوس‌تر از AHMC است که نشان‌دهنده پایداری بیشتر الگوریتم AHMC در برآورد پارامترهای مدل چوله است. از نظر محاسباتی نیز، AHMC در هر سه حالت زمان اجرای کمتری نسبت به روش MH داشته و این اختلاف با افزایش پیچیدگی مدل بیشتر می‌شود، که نشان‌دهنده کارایی بالاتر آن در مسائل با ابعاد بالا مانند مدل پیشنهادی است. این بهبود به دلیل استفاده از گرادیان‌های لگاریتم چگالی پسین و تنظیم خودکار طول گام ($\epsilon$) در الگوریتم HMC است. چالش‌های محاسباتی، مانند محاسبه ماتریس همبستگی $\boldsymbol{C}_n$ با ابعاد ۱۸۰۰ × ۱۸۰۰، با افزودن مقدار کوچک به قطر ماتریس و استفاده از تقریب‌های طیفی برطرف شد (هوفمن و گلمن، ۲۰۱۴). شکل ۳ بافت‌نگار نمونه‌های پسین پارامترهای $\boldsymbol{\beta}, \sigma, \phi_s, \phi_t, \nu_s, \nu_t, \lambda$



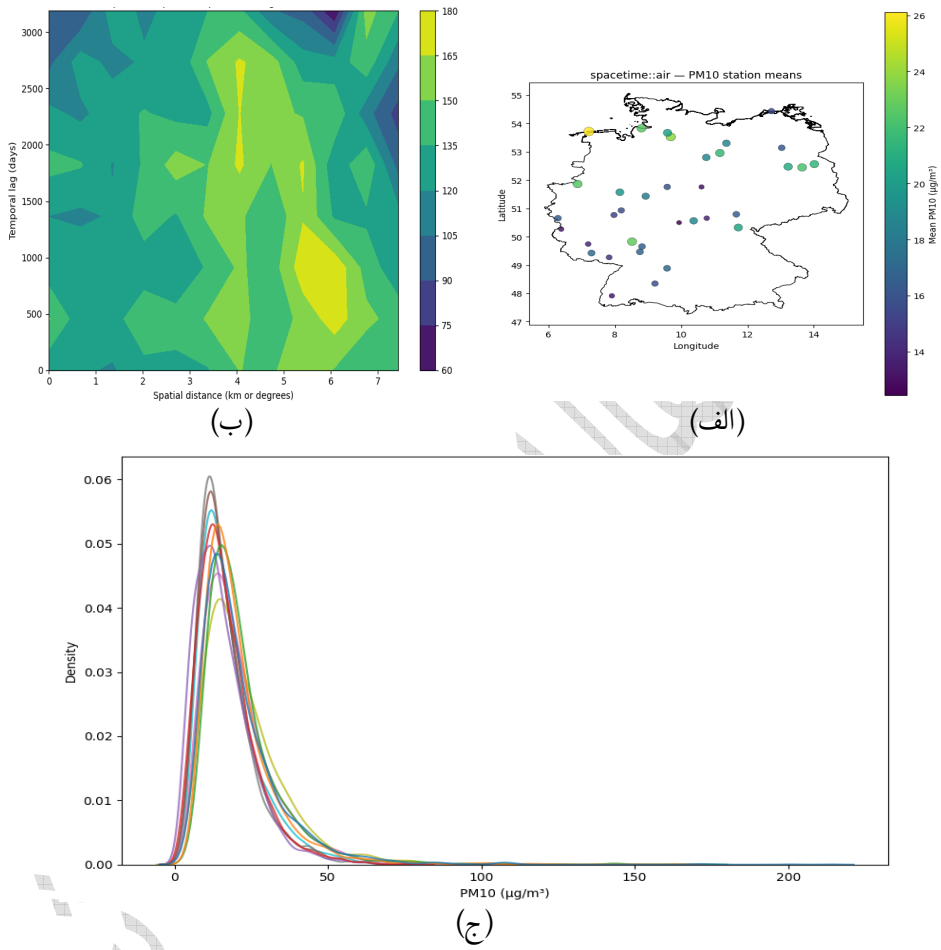

شکل ۳: بافت‌نگار نمونه‌های پسین پارامترهای مدل حاصل از الگوریتم AHMC برای حالت اول.

تولیدشده توسط الگوریتم AHMC را نشان می‌دهد. تمرکز نمونه‌های پسین پیرامون مقادیر واقعی پارامترها بیانگر عملکرد مناسب الگوریتم در برآورد پارامترهای مدل است. برای پارامترهای رگرسیون ($\boldsymbol{\beta}$)، توزیع‌های پسین متقارن و متمرکز هستند. برآورد $\sigma$ به دلیل استفاده از توزیع پیشین نیمه‌کوشی اندکی پراکندگی بیشتری

دارد، اما همچنان حول مقدار واقعی ($\sigma = ۱$) متمرکز بوده و از پوشش مناسبی برخوردار است. همچنین، پارامترهای همبستگی ($\phi_s, \phi_t, \nu_s, \nu_t$) نیز پیرامون مقادیر واقعی خود متمرکز هستند که بیانگر توانایی مناسب الگوریتم AHMC در برآورد پارامترهای تعیین‌کننده ساختار وابستگی فضایی–زمانی است. توزیع پسین پارامتر چولگی $\lambda$ نیز با تمرکز حول مقدار واقعی ($\lambda = ۲$)، نشان می‌دهد که مدل قادر به برآورد مناسب میزان چولگی داده‌ها است. همچنین، پوشش مناسب بازه‌های باورمندی (۹۵٪ – ۹۲٪) و نتایج مطالعه شبیه‌سازی، برتری الگوریتم AHMC را نسبت به روش MH در برآورد پارامترهای مدل تأیید می‌کنند.

## ۵ تحلیل داده‌های آلودگی هوای $\mathrm{PM}_{10}$

برای ارزیابی عملکرد مدل پیشنهادی، از مجموعه‌داده روزانه آلودگی هوای $\mathrm{PM}_{10}$ در آلمان استفاده شد که شامل اندازه‌گیری‌های ثبت‌شده در ۳۵ ایستگاه پایش محیطی طی بازه زمانی ۲۰۰ تا ۲۰۰۹ است. پس از پالایش داده‌ها و حذف مقادیر گمشده، مجموعه نهایی شامل ۱۲۷,۸۵۵ مشاهده معتبر بود که ۳۶۵۳ روز متوالی را پوشش می‌دهد. هر مشاهده شامل شناسه ایستگاه، مختصات جغرافیایی (طول و عرض جغرافیایی)، زمان ثبت و غلظت روزانه $\mathrm{PM}_{10}$ بر حسب $\mu g/m^۳$ است. همان‌گونه که در شکل ۴–الف مشاهده می‌شود، میانگین غلظت در برخی نواحی شمالی و شمال‌شرقی آلمان بالاتر از سایر مناطق است، در حالی که بخش‌هایی از جنوب و جنوب‌غرب کشور مقادیر پایین‌تری را نشان می‌دهند. این ناهمگنی مکانی بیانگر آن است که وابستگی فضایی در داده‌ها قابل توجه بوده و استفاده از مدل‌هایی که ساختار مکانی را نادیده می‌گیرند، ممکن است منجر به برازش نامناسب شود. برای بررسی همزمان وابستگی مکانی و زمانی، واریوگرام تجربی فضایی–زمانی داده‌ها نیز محاسبه شد. شکل ۴–ب نشان می‌دهد که نیم‌واریانس تجربی تابع هر دو مؤلفه فاصله مکانی و وقفه زمانی است. به بیان دیگر، شباهت بین مشاهدات نه تنها با نزدیکی جغرافیایی ایستگاه‌ها، بلکه با فاصله زمانی بین ثبت اندازه‌گیری‌ها نیز تغییر می‌کند. از سوی دیگر، بررسی چگالی تجربی غلظت $\mathrm{PM}_{10}$ در ایستگاه‌های منتخب، مطابق شکل ۴–ج، نشان می‌دهد که توزیع داده‌ها به‌طور محسوسی از تقارن فاصله دارد و در اغلب ایستگاه‌ها دارای چولگی مثبت است. به‌گونه‌ای که




شکل ۴: نمودارهای تحلیل اکتشافی داده‌های $PM_{10}$ در آلمان طی دوره ۲۰۰۰ تا ۲۰۰۹: الف- توزیع مکانی میانگین غلظت روزانه $PM_{10}$ در ۳۵ ایستگاه پایش، ب- واریوگرام تجربی فضایی–زمانی داده‌های روزانه $PM_{10}$ بر اساس فاصله مکانی و تأخیر زمانی، و ج- چگالی تجربی غلظت $PM_{10}$ برای تعدادی از ایستگاه‌های منتخب در کل دوره مطالعه.

بخش عمده مشاهدات در بازه‌های کم تا متوسط متمرکز شده‌اند، در حالی که دنباله‌ای بلند به سمت مقادیر بزرگ‌تر مشاهده می‌شود. وجود این دم‌های سنگین و رفتار نامتقارن نشان می‌دهد، استفاده از توزیع‌های انعطاف‌پذیرتر با قابلیت مدل‌سازی چولگی می‌تواند انتخاب مناسب‌تری باشد. اگرچه مجموعه کامل داده شامل بیش از $۱۰^۵$ مشاهده است، برازش مستقیم مدل فضایی–زمانی بیزی پیشنهادی در این مقیاس

مستلزم ذخیره‌سازی و پردازش ساختارهای ماتریسی بزرگ و انجام محاسبات تکراری پرهزینه در هر گام از استنباط است. از این‌رو، برای اجرای عملی نمونه‌گیری همیلتونی و حفظ مقیاس‌پذیری محاسبات، تحلیل کاربردی بر روی یک زیرمجموعه ساختاریافته شامل ۲۵,۵۵۰ مشاهده از مجموعه‌داده اصلی انجام شد، به‌گونه‌ای که ساختار فضایی–زمانی داده تا حد امکان حفظ شود. جزئیات این زیرمجموعه در ادامه ارائه می‌شود.

## ۱.۵ مدل فضایی–زمانی برای داده‌های PM10

فرض کنید $Y(\boldsymbol{s}_i, t_i)$ غلظت روزانه $\mathrm{PM}_{10}$ در مکان $\boldsymbol{s}_i$ و زمان $t_i$ باشد، که در آن $\boldsymbol{s}_i = (\mathrm{lon}_i, \mathrm{lat}_i)$ مختصات جغرافیایی ایستگاه پایش و $t_i$ اندیس روز مشاهده است. در این مثال، با قرار دادن همه مشاهدات در بردار $\boldsymbol{Y}_n$، مدل رگرسیون فضایی–زمانی پیشنهادی (۴) در نظر گرفته می‌شود. در این مطالعه، طول و عرض جغرافیایی و توان دوم آن‌ها به‌عنوان متغیرهای توضیحی برای مدل‌سازی روند مکانی بزرگ‌مقیاس در بخش میانگین مدل در نظر گرفته شدند و هدف از به‌کارگیری آن‌ها، توصیف تغییرات سیستماتیک میانگین در سطح منطقه مطالعه است. در مقابل، وابستگی فضایی–زمانی باقیمانده از طریق میدان تصادفی و تابع همبستگی مترن مدل‌سازی می‌شود، بنابراین، متغیرهای توضیحی و مؤلفه تصادفی نقش‌های مکمل و متمایزی در مدل پیشنهادی ایفا می‌کنند. ابتدا مختصات جغرافیایی به بازه $[۰, ۱]$ انتقال داده شدند و سپس ستون‌های غیرثابت ماتریس طرح استاندارد شدند. بنابراین برای مشاهده $i$–ام بردار متغیرهای توضیحی به صورت $\boldsymbol{x}_i = (۱, \widetilde{\mathrm{lon}}_i, \widetilde{\mathrm{lat}}_i, \widetilde{\mathrm{lon}}_i^۲, \widetilde{\mathrm{lat}}_i^۲)'$ تعریف شد. در نتیجه، بردار ضرایب رگرسیونی به صورت $\boldsymbol{\beta} = (\beta_۰, \beta_۱, \beta_۲, \beta_۳, \beta_۴)'$ در نظر گرفته می‌شود. در این ساختار، $\beta_۰$ عرض از مبدأ، $\beta_۱$ و $\beta_۲$ اثرات خطی طول و عرض جغرافیایی و $\beta_۳$ و $\beta_۴$ اثرات درجه دوم آن‌ها را نشان می‌دهند. همچنین علامت $\widetilde{\cdot}$ بیانگر متغیرهای استانداردشده است. مطابق چارچوب نظری مدل پیشنهادی، مؤلفه تصادفی فضایی–زمانی مدل از خانواده میدان‌های تصادفی FCSN در نظر گرفته می‌شود که ساختار وابستگی آن از طریق تابع همبستگی فضایی–زمانی تعریف می‌شود. در این جا همان ساختار برای تحلیل داده‌ها به کار گرفته می‌شود. با توجه به اینکه در مجموعه‌داده واقعی $\mathrm{PM}_{10}$ تعداد مشاهدات بسیار زیاد است، پیاده‌سازی مستقیم مدل فضایی–زمانی پیشنهادی با ساختار کامل ماتریس همبستگی $\boldsymbol{C}_n \in \mathbb{R}^{n\times n}$ از

نظر محاسباتی بسیار پرهزینه خواهد بود، زیرا در هر مرحله از استنباط بیزی نیاز به ذخیره‌سازی، تجزیه و وارون‌سازی ماتریس‌هایی با ابعاد بزرگ وجود دارد که هزینه محاسباتی آن‌ها از مرتبه $O(n^{۳})$ است. برای رفع این محدودیت، در این مطالعه از یک بازنمایی دون‌رتبه برای میدان فضایی–زمانی استفاده شد که در آن میدان پنهان به جای تعریف مستقیم روی کل نقاط مشاهده، در فضای توابع پایه مکانی و زمانی بازنویسی می‌شود. در این چارچوب، وابستگی مکانی از طریق $K = ۲۰$ تابع پایه شعاعی تعریف‌شده روی گره‌های منتخب مکانی و وابستگی زمانی از طریق $J = ۹$ تابع پایه فوریه مدل‌سازی شد. در نتیجه، به جای کار با میدان کامل $n$–بعدی، ساختار پنهان تنها از طریق $J \times K = ۱۸۰$ ضریب تصادفی مدل‌سازی می‌شود. افزون بر این، برای اجرای عملی الگوریتم AHMC، از یک زیرمجموعه ساختاریافته شامل ۲۵,۵۵۰ مشاهده متناظر با ۳۵ ایستگاه و ۷۳۰ روز استفاده شد که ضمن حفظ روند کلی داده‌ها، ساختار وابستگی فضایی–زمانی و الگوهای اصلی تغییرات، هزینه محاسباتی را به‌طور قابل ملاحظه‌ای کاهش داده و امکان استنباط بیزی کارآمد را فراهم می‌کند (کرسی و یوهانسون، ۲۰۰۸؛ نیچکا و همکاران، ۲۰۱۵).

از این‌رو، این نمایش دون‌رتبه، میدان $\boldsymbol{Z}_n$ را در فضای پایه‌های مکانی و زمانی بازنویسی می‌کند. به این‌صورت که، برای هر مشاهده $i$، مقدار میدان نهفته به‌صورت $Z(\boldsymbol{s}_i, t_i) = \sum_{j=۱}^{J} g_j(t_i)\, \boldsymbol{b}(\boldsymbol{s}_i)'\boldsymbol{\theta}_j$ تعریف شد، که در آن $\boldsymbol{b}(\boldsymbol{s}_i)$ بردار پایه‌های مکانی به‌صورت $\boldsymbol{b}(\boldsymbol{s}_i) = (b_۱(\boldsymbol{s}_i), \ldots, b_K(\boldsymbol{s}_i))'$ و $g_j(t_i)$ پایه زمانی $j$–ام به‌صورت $\boldsymbol{g}(t_i) = (g_۱(t_i), \ldots, g_J(t_i))'$ تعریف می‌شود که یک تقریب دون‌رتبه از میدان $\boldsymbol{Z}_n$ فراهم می‌کنند. در بعد مکانی، $K$ گره مکانی $\boldsymbol{\kappa}_۱, \ldots, \boldsymbol{\kappa}_K$ با استفاده از الگوریتم خوشه‌بندی k-means بر اساس مختصات جغرافیایی ایستگاه‌های پایش انتخاب شدند. برای تعریف پایه‌های مکانی، از توابع شعاعی گاوسی نرمال‌شده استفاده شد، به‌طوری که برای هر مکان $\boldsymbol{s}$، پایه مکانی $k$–ام به صورت

$$b_k(\boldsymbol{s}) = \frac{\exp(-\frac{\|\boldsymbol{s}-\boldsymbol{\kappa}_k\|^{۲}}{۲\ell_s^{۲}})}{\sum_{m=۱}^{K} \exp(-\frac{\|\boldsymbol{s}-\boldsymbol{\kappa}_m\|^{۲}}{۲\ell_s^{۲}})}, \qquad k = ۱, \ldots, K,$$

تعریف شد، که در آن $\ell_s$ طول‌مقیاس مکانی است. در این مطالعه، مقدار $\ell_s$ به صورت داده‌محور و برابر با میانه فاصله‌های زوجی بین مختصات مکانی مشاهده‌ها در نظر گرفته شد. همچنین تعداد گره‌های مکانی

برابر با $K = ۲۰$ انتخاب شد. برای حفظ ساختار وابستگی در فضای دون‌رتبه، ضرایب مکانی متناظر با هر مؤلفه زمانی دارای توزیع FCSN در نظر گرفته شدند. به‌طور مشخص، برای $j = ۱, \ldots, J$، داریم

$$\boldsymbol{\theta}_j \sim \mathrm{FSCSN}_K(۰, \boldsymbol{C}_K, \sigma_\theta, \lambda),$$

که در آن $\boldsymbol{C}_K = \left(c_{ij}\right)_{K\times K}$ ماتریس همبستگی بین گره‌های مکانی است. مشابه ساختار نظری مدل، درایه‌های این ماتریس از یک تابع همبستگی مکانی گاوسی به‌صورت $c_{ij} = \rho_s(\|\boldsymbol{\kappa}_i - \boldsymbol{\kappa}_j\|; \ell_s)$ تعریف می‌شوند، که در آن $\ell_s$ طول‌مقیاس مکانی است. برای تضمین پایداری عددی نیز مقدار کوچکی به قطر ماتریس $\boldsymbol{C}_K$ افزوده شد.

## ۲.۵ پیشین پارامترها و استنباط بیزی

برای پارامترهای مدل، پیشین‌های کم اطلاع در نظر گرفته شد. به‌طور مشخص، برای عرض از مبدأ از پیشین نرمال $\beta_۰ \sim N(۰, ۱۰^۲)$ و برای سایر ضرایب رگرسیونی از پیشین‌های نرمال $\beta_p \sim N(۰, ۲^۲)$ برای $p = ۱, \ldots, ۴$ استفاده شد. همچنین برای پارامترهای مدل، شامل مقیاس میدان پنهان و پارامتر چولگی، به‌ترتیب پیشین‌های نیمه‌نرمال $\sigma_\theta \sim \mathrm{HalfNormal}(۵)$ و $\lambda \sim \mathrm{N}(۰, ۵^۲)$ در نظر گرفته شد. استنباط پارامترهای مدل در چارچوب بیزی با استفاده از الگوریتم AHMC انجام شد. در این مرحله، دو زنجیر مستقل اجرا شد که برای هر یک ۷۰۰ تکرار اولیه به عنوان مرحله داغیدن حذف و ۱۵۰۰ نمونه پسین ذخیره شد. همچنین مقدار هدف پذیرش برابر با ۰٫۹۵ و حداکثر عمق درخت برابر با ۱۲ تنظیم شد. ارزیابی همگرایی الگوریتم با استفاده از نمودارهای اثر، چگالی‌های پسین، اندازه مؤثر نمونه و آماره $\hat{R}$ انجام شد. علاوه بر این، برای بررسی کفایت مدل، تحلیل پیشگو پسین مبتنی بر نمونه‌های مونت کارلویی تولید شده از توزیع پسین به کار گرفته شد. جدول ۲ خلاصه‌ای از توزیع‌های پسین پارامترهای اصلی مدل پیشنهادی را نشان می‌دهد. نتایج بیانگر آن است که پارامتر چولگی $\lambda$ دارای میانگین پسین مثبت و بازه باورمندی دور از صفر است که بیانگر وجود چولگی در داده‌ها است. این یافته با نتایج تحلیل اکتشافی داده‌ها نیز سازگار است. همچنین مقدار برآوردشده برای $\sigma_\theta$ نشان‌دهنده تغییرپذیری قابل توجه

جدول ۲: خلاصه نتایج پسین برای پارامترهای اصلی مدل فضایی–زمانی پیشنهادی

| پارامتر | میانگین | انحراف معیار | میانه | بازه باورمندی ۹۰٪ | ESS | $\hat{R}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\lambda$ | ۱٫۸۳ | ۰٫۵۷ | ۱٫۷۸ | (۰٫۸۹, ۲٫۸۲) | ۳۹۱٫۵۱ | ۱٫۰۲ |
| $\beta_0$ | ۲٫۵۱ | ۹٫۱۲ | ۲٫۸۲ | (−۱۱٫۷۱, ۱۷٫۱۴) | ۱۶۰٫۱۰ | ۱٫۰۱ |
| $\beta_1$ | ۲٫۰۴ | ۱٫۴۵ | ۲٫۱۱ | (−۰٫۳۲, ۴٫۲۸) | ۲۲۳٫۳۳ | ۱٫۰۱ |
| $\beta_2$ | −۸٫۰۵ | ۱٫۳۵ | −۸٫۱۹ | (−۱۰٫۳۴, −۵٫۷۱) | ۱۸۹٫۱۱ | ۱٫۰۲ |
| $\beta_3$ | ۷٫۱۷ | ۰٫۹۱ | ۷٫۲۴ | (۵٫۹۸, ۸٫۹۵) | ۴۸۲٫۳۲ | ۱٫۰۰ |
| $\beta_4$ | ۶٫۱۹ | ۰٫۶۳ | ۶٫۲۱ | (۵٫۱۹, ۷٫۲۵) | ۴۹۴٫۸۷ | ۱٫۰۰ |
| $\sigma_\theta$ | ۱۰٫۳۴ | ۰٫۰۴ | ۱۰٫۴۱ | (۱۰٫۱۴, ۱۰٫۴۵) | ۱۳۵۷٫۵۲ | ۱٫۰۰ |

مؤلفه پنهان فضایی–زمانی در داده‌ها است. ضرایب رگرسیونی نیز بیانگر آن هستند که مختصات مکانی و اثرات درجه دوم آن‌ها سهم قابل توجهی در توضیح تغییرات میانگین غلظت $\mathrm{PM}_{10}$ دارند. مقادیر آماره $\hat{R}$ نزدیک به یک و اندازه‌های مؤثر نمونه مناسب، نشان‌دهنده همگرایی قابل قبول الگوریتم AHMC برای پارامترهای اصلی مدل هستند. به‌منظور بررسی پایداری استنباط‌های بیزی نسبت به انتخاب توزیع‌های

جدول ۳: تحلیل حساسیت نتایج پسین نسبت به انتخاب توزیع‌های پیشین

| | پیشین پایه | | پیشین جایگزین اول | | پیشین جایگزین دوم | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\lambda \sim N(0, 10^2)$<br>$\sigma_\theta \sim \mathrm{HalfNormal}(5)$ | | $\lambda \sim N(0, 10^2)$<br>$\sigma_\theta \sim \Gamma(2, 0.2)$ | | $\lambda \sim N(0, 10^2)$<br>$\sigma_\theta \sim \Gamma(1.5, 0.15)$ | |
| پارامتر | میانگین | بازه باورمندی ۹۰٪ | میانگین | بازه باورمندی ۹۰٪ | میانگین | بازه باورمندی ۹۰٪ |
| $\beta_0$ | ۲٫۵۱ | (−۱۱٫۷۱, ۱۷٫۱۴) | ۲٫۴۷ | (−۱۱٫۸۹, ۱۷٫۰۶) | ۲٫۵۶ | (−۱۱٫۶۳, ۱۷٫۲۲) |
| $\beta_1$ | ۲٫۰۴ | (−۰٫۳۲, ۴٫۲۸) | ۲٫۰۱ | (−۰٫۳۷, ۴٫۳۱) | ۲٫۰۸ | (−۰٫۲۹, ۴٫۳۵) |
| $\beta_2$ | −۸٫۰۵ | (−۱۰٫۳۴, −۵٫۷۱) | −۸٫۱۱ | (−۱۰٫۴۲, −۵٫۷۶) | −۸٫۰۱ | (−۱۰٫۲۹, −۵٫۶۶) |
| $\beta_3$ | ۷٫۱۷ | (۵٫۹۸, ۸٫۹۵) | ۷٫۱۲ | (۵٫۹۱, ۸٫۹۱) | ۷٫۲۱ | (۶٫۰۱, ۸٫۹۹) |
| $\beta_4$ | ۶٫۱۹ | (۵٫۱۹, ۷٫۲۵) | ۶٫۱۵ | (۵٫۱۴, ۷٫۲۲) | ۶٫۲۳ | (۵٫۲۲, ۷٫۲۹) |
| $\sigma_\theta$ | ۱۰٫۳۴ | (۱۰٫۱۴, ۱۰٫۴۵) | ۱۰٫۲۹ | (۱۰٫۰۸, ۱۰٫۴۳) | ۱۰٫۳۸ | (۱۰٫۱۷, ۱۰٫۵۰) |
| $\lambda$ | ۱٫۸۳ | (۰٫۸۹, ۲٫۸۲) | ۱٫۷۹ | (۰٫۸۱, ۲٫۸۵) | ۱٫۸۷ | (۰٫۸۴, ۲٫۹۶) |

پیشین، تحلیل حساسیت با در نظر گرفتن چند پیشین جایگزین برای پارامترهای چولگی و مقیاس انجام شد که نتایج آن در جدول ۳ ارائه شده است. نتایج جدول ۳ نشان می‌دهد که تغییر توزیع و ابرپارامترهای پیشین پارامترهای چولگی و مقیاس، تأثیر محسوسی بر استنباط پارامترهای اصلی مدل ندارد. برآوردهای پسین ضرایب رگرسیونی در هر سه حالت از نظر علامت، اندازه و دامنه بازه‌های باورمندی تقریباً مشابه هستند. پارامتر مقیاس میدان پنهان نیز در برابر انتخاب پیشین‌های جایگزین پایدار باقی مانده است که

نشان می‌دهد اطلاعات موجود در داده‌ها نقش غالب‌تری نسبت به پیشین در تعیین توزیع پسین این پارامتر دارد. همچنین، با افزایش واریانس پیشین پارامتر چولگی و استفاده از پیشین‌های متفاوت برای پارامتر مقیاس، توزیع پسین ($\lambda$) همچنان در ناحیه مقادیر مثبت متمرکز باقی مانده و بازه باورمندی آن در هیچ‌یک از حالت‌ها شامل صفر نیست. بنابراین، نتیجه‌گیری مربوط به وجود چولگی مثبت در داده‌های $PM_{10}$ ناشی از انتخاب پیشین خاص نبوده و نسبت به تغییرات معقول در پیشین‌ها از پایداری مناسبی برخوردار است. برای ارزیابی مقایسه‌ای مدل پیشنهادی، دو مدل رقیب شامل مدل FCSN با تابع همبستگی

جدول ۴: مقایسه مدل‌های مختلف بر اساس معیارهای برازش بیزی و خطای پیش‌گویی

| MAE | RMSE | $p_D$ | DIC | $p_{\text{WAIC}}$ | WAIC | مدل (همبستگی) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **۷٫۴۸** | ۱۰٫۴۲ | ۵۱٫۱۰ | **۱۹۲۳۹۷** | ۵۸٫۳۶ | **۱۹۲۴۰۵** | FCSN (مترن) |
| ۸٫۴۹ | ۱۱٫۴۲ | ۵۲٫۸۶ | ۱۹۲۴۰۶ | ۵۹٫۳۳ | ۱۹۲۴۱۳ | FCSN (نمایی) |
| ۹٫۳۱ | ۱۲٫۴۳ | ۴۵٫۹۹ | ۱۹۲۶۴۱ | ۵۰٫۷۸ | ۱۹۲۴۴۷ | گاوسی (مترن) |

نمایی و مدل گاوسی فضایی–زمانی با تابع همبستگی مترن در نظر گرفته شدند. عملکرد این سه مدل با استفاده از معیارهای برازش بیزی WAIC و DIC و نیز معیارهای خطای پیش‌گویی RMSE و MAE مقایسه شد. معیار اطلاع وایدلی به‌صورت $\text{WAIC} = -۲\,(\text{lppd} - p_{\text{WAIC}})$ تعریف می‌شود که در آن $\text{lppd} = \sum_{i=۱}^{n} \log\left[\frac{۱}{S}\sum_{s=۱}^{S} p\big(y_i \mid \boldsymbol{\theta}^{(s)}\big)\right]$ چگالی لگاریتمی پیش‌گویی نقطه‌ای و

$$p_{\text{WAIC}} = \sum_{i=۱}^{n} \text{Var}_{s=۱,\ldots,S}\left[\log p\Big(y_i \mid \boldsymbol{\theta}^{(s)}\Big)\right]$$

تعداد مؤثر پارامترهای مدل است. در این روابط، $n$ تعداد مشاهدات، $S$ تعداد نمونه‌های پسین و $\boldsymbol{\theta}^{(s)}$ نمونه $s$–ام از توزیع پسین پارامترهای مدل است. معیار اطلاع انحراف نیز به‌صورت $\text{DIC} = D(\overline{\boldsymbol{\theta}}) + ۲p_D$ تعریف می‌شود که در آن $D(\boldsymbol{\theta}) = -۲\log p(\boldsymbol{y} \mid \boldsymbol{\theta})$ و $p_D = \overline{D(\boldsymbol{\theta})} - D(\overline{\boldsymbol{\theta}})$ هستند، $D(\boldsymbol{\theta})$ انحراف مدل، $\overline{\boldsymbol{\theta}}$ میانگین پسین پارامترها و $p_D$ تعداد مؤثر پارامترها را نشان می‌دهد. همچنین، معیارهای خطای پیش‌گویی به‌صورت $\text{MAE} = \frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n} |y_i - \widehat{y}_i|$ و $\text{RMSE} = \sqrt{\frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n} (y_i - \widehat{y}_i)^۲}$، محاسبه شدند، که در آن $y_i$ مقدار مشاهده‌شده و $\widehat{y}_i$ میانگین پیش‌گویی پسین مشاهده $i$–ام است. مقادیر کوچک‌تر WAIC، DIC، RMSE و MAE نشان‌دهنده عملکرد بهتر مدل هستند. نتایج جدول ۴ نشان

می‌دهد که مدل پیشنهادی FCSN با تابع همبستگی مترن، در میان مدل‌های مورد مقایسه کمترین مقادیر WAIC و DIC را ارائه کرده است. این دو معیار به‌طور همزمان برازش مدل و پیچیدگی مؤثر آن را در نظر می‌گیرند، بنابراین، مقادیر کمتر آن‌ها نشان می‌دهد که بهبود برازش مدل پیشنهادی صرفاً ناشی از افزایش پیچیدگی مدل نیست. هرچند مقادیر $p_{\mathrm{WAIC}}$ و $p_D$ برای مدل‌های چوله اندکی بیشتر از مدل گاوسی هستند، کاهش محسوس WAIC و DIC در مدل پیشنهادی نشان می‌دهد که انعطاف‌پذیری بیشتر آن با بهبود کافی در برازش همراه بوده است. همچنین، مدل پیشنهادی کمترین مقادیر RMSE و MAE را به خود اختصاص داده است که نشان‌دهنده دقت بیشتر آن در بازتولید مقادیر مشاهده‌شده $\mathrm{PM}_{10}$ است. در مجموع، نتایج بیانگر آن است که در نظر گرفتن همزمان چولگی و ساختار وابستگی انعطاف‌پذیر مبتنی بر تابع همبستگی مترن، عملکرد مدل را برای داده‌های آلودگی هوای $\mathrm{PM}_{10}$ بهبود می‌بخشد. به‌منظور ارزیابی

جدول ۵: مقایسه عملکرد پیش‌گویی مدل‌های مختلف بر اساس اعتبارسنجی متقابل فضایی–زمانی

| مدل (همبستگی) | CV-RMSE | CV-MAE | $\mathrm{CP}_{۹۰٪}$ | ELPD |
|---|---|---|---|---|
| FCSN (مترن) | ۱۰٫۲۵۵ | ۷٫۶۲۷ | ۰٫۹۲۴ | −۱۹۱۴۸٫۹ |
| FCSN (نمایی) | ۱۱٫۲۳۵ | ۸٫۱۹۶ | ۰٫۸۹۱ | −۱۹۶۴۹٫۷ |
| گاوسی (مترن) | ۱۲٫۰۱۱ | ۸٫۱۷۱ | ۰٫۹۰۸ | −۲۰۱۱۶٫۹ |

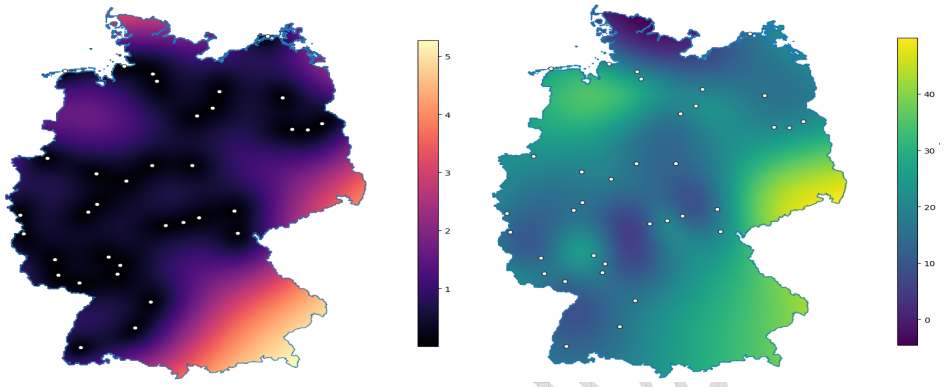
توان پیش‌گویی خارج از نمونه، از اعتبارسنجی متقابل فضایی–زمانی استفاده شد. حدود ٪۸۰ از داده‌ها، شامل $n_{\mathrm{train}} = ۲۰۴۴۰$ مشاهده، به‌عنوان مجموعه آموزش برای برازش مدل و ٪۲۰ باقیمانده، شامل $n_{\mathrm{test}} = ۵۱۱۰$ مشاهده، به‌عنوان مجموعه آزمون برای ارزیابی عملکرد پیش‌گویی در نظر گرفته شدند. همچنین برای ارزیابی دقت پیش‌گویی خارج از نمونه، معیارهای CV-RMSE و CV-MAE بر اساس اختلاف میان مقادیر مشاهده‌شده و میانگین‌های پیش‌گویی پسین در مجموعه آزمون محاسبه شدند و برای ارزیابی کالیبراسیون عدم‌قطعیت پیش‌گویی، پوشش بازه پیش‌گویی ٪۹۰ به‌صورت

$$\mathrm{CP}_{۹۰٪} = \frac{۱}{n_{\mathrm{test}}} \sum_{i=۱}^{n_{\mathrm{test}}} I\Big(L_i^{(۰٫۹۰)} \le y_i \le U_i^{(۰٫۹۰)}\Big)$$

محاسبه شد که در آن $L_i^{(۰٫۹۰)}$ و $U_i^{(۰٫۹۰)}$ به‌ترتیب کران‌های پایین و بالای بازه پیش‌گویی ٪۹۰ برای مشاهده $i$–ام و $I(\cdot)$ تابع نشانگر است، مقدار این معیار هرچه به سطح اسمی ۰٫۹۰ نزدیک‌تر باشد،

نشان‌دهنده کالیبراسیون مناسب‌تر بازه‌های پیش‌گویی است. همچنین، کیفیت کل توزیع پیش‌گویی پسین با معیار چگالی لگاریتمی پیش‌گویی مورد انتظار به‌صورت $\mathrm{ELPD} = \sum_{i=1}^{n_{\text{test}}} \log p(y_i \mid \boldsymbol{y}_{\text{train}})$ ارزیابی شد که در آن $p(y_i \mid \boldsymbol{y}_{\text{train}})$ چگالی پیش‌گویی پسین مشاهده آزمون $i$–ام بر اساس داده‌های آموزشی است. این چگالی با استفاده از $S$ نمونه پسین، به‌صورت $p(y_i \mid \boldsymbol{y}_{\text{train}}) \approx \frac{1}{S}\sum_{s=1}^{S} p\big(y_i \mid \boldsymbol{\theta}^{(s)}\big)$ تقریب زده می‌شود، که در آن $\boldsymbol{\theta}^{(s)}$ نمونه $s$–ام از توزیع پسین پارامترهای مدل است. برخلاف معیارهای خطا، مقادیر بزرگ‌تر برای ELPD بیانگر کیفیت بهتر توزیع پیش‌گویی هستند، زیرا این معیار علاوه بر مرکز پیش‌گویی، عدم‌قطعیت پیش‌گویی را نیز در نظر می‌گیرد. این معیارها برای پنج گروه‌بندی متفاوت داده‌ها محاسبه شدند و میانگین مقادیر حاصل از پنج تکرار در جدول ۵ گزارش شده است. نتایج اعتبارسنجی فضایی–زمانی نشان می‌دهد که مدل پیشنهادی FCSN با تابع همبستگی مترن در مقایسه با دو مدل رقیب، عملکرد پیش‌گویی بهتری دارد؛ به‌طوری‌که کمترین مقادیر CV-RMSE و CV-MAE و بیشترین مقدار ELPD را ارائه کرده و در نتیجه، هم از نظر دقت پیش‌گویی نقطه‌ای و هم از نظر کیفیت توزیع پیش‌گویی پسین برتر بوده است. پوشش بازه‌های پیش‌گویی ۹۰٪ برای این مدل برابر با ۰٫۹۲۴ است که کالیبراسیون مناسب، هرچند اندکی محافظه‌کارانه، را نشان می‌دهد. در مقابل، مدل FCSN با همبستگی نمایی پوششی اندکی کمتر از سطح اسمی دارد و مدل گاوسی، با وجود پوشش قابل قبول، از نظر خطای پیش‌گویی و ELPD ضعیف‌تر عمل می‌کند. در مجموع، این یافته‌ها نشان می‌دهد که مدل‌سازی هم‌زمان چولگی و وابستگی فضایی–زمانی با استفاده از تابع همبستگی مترن، قابلیت تعمیم و کیفیت پیش‌گویی داده‌های آلودگی هوای $PM_{10}$ را بهبود می‌بخشد.

شکل ۵–الف پیش‌گویی غلظت $PM_{10}$ را در سراسر منطقه مطالعه نشان می‌دهد و بیانگر آن است که مقادیر $PM_{10}$ در بخش‌هایی از شرق و جنوب‌شرق آلمان بیشتر و در برخی نواحی مرکزی و شمالی کمتر مشاهده می‌شوند. همچنین، نقشه انحراف معیار پیش‌گویی شکل ۵–ب نشان می‌دهد که عدم‌قطعیت پیش‌گویی در مجاورت ایستگاه‌های اندازه‌گیری کمتر بوده و با افزایش فاصله از آن‌ها، به‌ویژه در نواحی مرزی، افزایش می‌یابد.




(ب) (الف)

شکل ۵: نقشه میانگین پیش‌گو و نقشه عدم‌قطعیت پیش‌گویی غلظت روزانه $PM_{10}$ بر اساس مدل پیشنهادی: الف– نقشه میانگین پیش‌گو، و ب– نقشه انحراف معیار پیش‌گویی.

## ۶ بحث و نتیجه‌گیری

در این مطالعه، یک مدل رگرسیون فضایی–زمانی بیزی مبتنی بر میدان تصادفی FCSN برای تحلیل داده‌های دارای وابستگی فضایی–زمانی و رفتار چوله پیشنهاد شد. در این چارچوب، با تعمیم ساختار کلاسیک مدل‌های فضایی–زمانی گاوسی، امکان مدل‌سازی همزمان وابستگی مکانی و زمانی همراه با انعطاف‌پذیری بیشتر در بازنمایی توزیع‌های چوله فراهم شد. برای توصیف ساختار وابستگی، از تابع همبستگی مترن تفکیک‌پذیر استفاده شد و استنباط پارامترهای مدل در چارچوب بیزی با بهره‌گیری از الگوریتم AHMC به عنوان نسخه‌ای تطبیقی از روش نمونه‌گیری مونت‌کارلوی همیلتونی انجام گرفت.

نتایج مطالعه شبیه‌سازی نشان داد که مدل پیشنهادی توانایی مطلوبی در بازیابی پارامترهای واقعی مدل دارد و برآوردهای پسین برای پارامترهای اصلی، از جمله ضرایب رگرسیونی، پارامترهای مقیاس و پارامتر چولگی، از دقت مناسبی برخوردار هستند. همچنین نتایج نشان داد که استفاده از روش AHMC در مقایسه با روش‌های متداول MH از نظر پایداری محاسباتی، کیفیت نمونه‌گیری و کارایی استنباط عملکرد مناسب‌تری دارد، به‌ویژه در مدل‌هایی که ساختار وابستگی پیچیده و فضای پارامتری نسبتاً بزرگ دارند. این یافته‌ها نشان می‌دهند که رویکرد پیشنهادی نه‌تنها از نظر نظری دارای انعطاف‌پذیری مناسب است،

بلکه از منظر محاسباتی نیز قابلیت استفاده عملی دارد.

در تحلیل داده‌های روزانه $PM_{10}$، وجود ناهمگنی مکانی، وابستگی فضایی–زمانی و چولگی مثبت مشاهدات، که با برآورد پسین پارامتر چولگی نیز تأیید شد، ضرورت استفاده از مدلی منعطف‌تر از ساختار گاوسی را نشان داد. مقایسه مدل‌ها بیانگر آن بود که مدل پیشنهادی FCSN با تابع همبستگی مترن، با وجود پیچیدگی مؤثر اندکی بیشتر، کمترین مقادیر WAIC، DIC، RMSE و MAE را ارائه می‌دهد و در اعتبارسنجی فضایی–زمانی نیز بر اساس معیارهای CV-RMSE، CV-MAE و ELPD از دقت و کیفیت پیش‌گویی خارج از نمونه بهتری برخوردار است؛ همچنین، پوشش بازه‌های پیش‌گویی ۹۰٪ کالیبراسیون قابل قبول عدم‌قطعیت را نشان داد. تحلیل پیش‌گویی پسین و نقشه‌های میانگین و انحراف معیار نیز نشان داد که مدل، الگوهای مکانی غلظت آلاینده و افزایش منطقی عدم‌قطعیت در نواحی دور از ایستگاه‌های پایش را به‌خوبی بازنمایی می‌کند. در مجموع، ترکیب ساختار چوله FCSN با تابع همبستگی مترن، چارچوبی مناسب برای تحلیل داده‌های محیط‌زیستی غیرنرمال با وابستگی فضایی–زمانی فراهم کرد و استفاده از بازنمایی دون‌رتبه نیز اجرای استنباط بیزی را برای مجموعه داده‌ای نسبتاً بزرگ امکان‌پذیر ساخت.

با وجود عملکرد مطلوب مدل پیشنهادی، هزینه محاسباتی استنباط بیزی با افزایش ابعاد داده‌ها همچنان یک محدودیت مهم است و دقت بازنمایی دون‌رتبه نیز به انتخاب تعداد و محل گره‌های مکانی و پایه‌های زمانی وابسته است؛ ازاین‌رو، توسعه روش‌های تطبیقی و الگوریتم‌های مقیاس‌پذیرتر ضروری به نظر می‌رسد. همچنین، ساختار FCSN در حضور دم‌های بسیار سنگین، نقاط حدی یا ناهمگنی شدید واریانس ممکن است انعطاف کافی نداشته باشد و گسترش آن به خانواده‌های چوله–(t) و سایر توزیع‌های نامتقارن با دم سنگین، همراه با بررسی ساختارهای ناایستا، ناهمسانگرد و غیرقابل تفکیک، می‌تواند دامنه کاربرد مدل را افزایش دهد. ارزیابی حساسیت نتایج نسبت به توابع پایه، میزان حفظ وابستگی فضایی–زمانی در تقریب دون‌رتبه و بررسی عملکرد مدل در مجموعه‌داده‌های بزرگ‌تر، دوره‌های زمانی طولانی‌تر و مناطق جغرافیایی متفاوت نیز از مسیرهای مهم پژوهشی آینده است. در مجموع، نتایج نشان داد که مدل فضایی–زمانی مبتنی بر میدان تصادفی FCSN، همراه با بازنمایی دون‌رتبه و استنباط بیزی مبتنی بر الگوریتم AHMC، قادر است چولگی و وابستگی فضایی–زمانی داده‌های غیرنرمال را به‌طور هم‌زمان

بازنمایی کند و از نظر برازش و پیش‌گویی خارج از نمونه، عملکرد بهتری نسبت به مدل‌های رقیب ارائه دهد. داده‌ها و کدهای مورد استفاده در این مقاله در مخزن گیت‌هاب[8] نویسنده مسئول در دسترس قرار گرفته‌اند.

## مراجع


حسینی، ف. و کریمی، ا. (۱۴۰۲)، میدان تصادفی چوله نرمال بسته منعطف برای تحلیل داده‌های فضایی چوله، مجله علوم آماری، **۱۷**(۲)، ۳۷۱–۳۸۸.

حسینی، ف. و کریمی، ا. (۱۴۰۳)، تحلیل بیزی متغیرهای پنهان در مدل‌های آمیخته خطی تعمیم‌یافته فضایی با میدان تصادفی مانای چوله گاوسی، مجله علوم آماری، **۱۸**(۱)، ۵۷–۷۲.

Allard, D. and Naveau, P. (2007), A New Spatial Skew-Normal Random Field Model, *Communications in Statistics—Theory and Methods*, **36**, 1821–1834.

Arellano-Valle, R. B., Genton, M. G. and Ferreira, M. A. R. (2021), Spatio-Temporal Skew-t Process Models for the Analysis of Environmental Data, *Spatial Statistics*, **45**, 100521.

Azzalini, A. and Capitanio, A. (2005), A Class of Multivariate Skew Distributions with Applications to Multivariate Skew-t Distributions, *Scandinavian Journal of Statistics*, **32**(2), 159–188.

Bakshi, A. (2023), Spatio-Temporal Modeling, *Dynamic Time Series Models using R-INLA: An Applied Perspective*, Chapman and Hall/CRC.


[8] https://github.com/omik582004/Bayesian-Modeling-of-Skewed-Spatio-Temporal-JSS1405

مقاله پذیرفته شده

Betancourt, M. (2017), A Conceptual Introduction to Hamiltonian Monte Carlo, *arXiv preprint*, arXiv:1701.02434.

Castro-Campos, B., Gómez-Rubio, V. and Mínguez, R. (2023), Bayesian Modeling and Clustering for Spatio-Temporal Areal Data: An Application to Italian Unemployment, *Spatial Statistics*, **56**, 100754.

Cressie, N. and Johannesson, G. (2008), Fixed Rank Kriging for Very Large Spatial Data Sets, *Journal of the Royal Statistical Society: Series B*, **70**(1), 209–226.

Cressie, N. and Wikle, C. K. (2015), *Statistics for Spatio-Temporal Data*, John Wiley & Sons.

Fin, F., Idris, M. Y., Wang, Y., Banerjee, S. and Rue, H. (2024), Scalable Spatio-Temporal Prediction with Bayesian Neural Fields, *Nature Communications*, **15**, 1234.

Genton, M. G. (2004), Skew-Elliptical Distributions and Their Applications: a Review, *Journal of Multivariate Analysis*, **89**(1), 49–73.

Gómez-Rubio, V. (2020), *Bayesian Inference with INLA (1st ed)*, Chapman and Hall/CRC.

Hirt, M., Titsias, M., and Dellaportas, P. (2021), Entropy-Based Adaptive Hamiltonian Monte Carlo, *Neural Information Processing Systems (NeurIPS)*, **34**, 28482–28495.

Hoffman, M. D. and Gelman, A. (2014), No-U-Turn Sampler: Adaptively Setting

مقاله پذیرفته شده

Path Lengths in Hamiltonian Monte Carlo, *Journal of Machine Learning Research*, **15**(1), 1593–1623.

Márquez-Urbina, O. U. and González-Farías, G. (2022), A Flexible Special Case of the CSN for Spatial Modeling and Prediction, *Spatial Statistics*, **47**, 100556.

Neal, R. M. (2011), MCMC Using Hamiltonian Dynamics, In: *Handbook of Markov Chain Monte Carlo*, Chapman and Hall/CRC.

Nychka, D., Bandyopadhyay, S., Hammerling, D., Lindgren, F. and Sain, S. (2015), A Multiresolution Gaussian Process Model for the Analysis of Large Spatial Data Sets, *Journal of Computational and Graphical Statistics*, **24**(2), 579–599.

Sahu, S. (2022), *Bayesian Modeling of Spatio-Temporal Data with R*, Chapman and Hall/CRC.

Zhang, Y., Banerjee, S. and Finley, A. O. (2018), Nonstationary and non-Gaussian Modeling of Spatial Data Using Flexible Skew-t Processes, *Spatial Statistics*, **28**, 232–250.

مقاله پذیرفته شده

# Bayesian Modeling of Skewed Spatio-Temporal Data Using a Flexible Random Field with Matérn Correlation and Adaptive Hamiltonian Algorithm

**Omid Karimi, Fatemeh Hosseini**

Department of Statistics, Semnan University, Semnan , Iran.

**Abstract:** Spatio-temporal data often exhibit skewed distributions, which pose challenges for accurate modeling. Skew Gaussian random fields are among the common approaches for analyzing such data, although some existing models suffer from computational complexity and identifiability issues. In this paper, a Bayesian framework is proposed for modeling skewed spatio-temporal data based on a flexible closed skew Gaussian random field, which possesses desirable properties such as identifiability and closure under marginalization and conditioning. By employing the Matérn correlation function, the proposed model provides adequate flexibility for capturing spatio-temporal dependence structures. Bayesian inference is performed using the Hamiltonian Monte Carlo algorithm, and a simulation study is conducted to compare its performance with conventional Markov Chain Monte Carlo methods. Finally, the performance of the proposed model was also evaluated using observed $\mathrm{PM}_{10}$ air pollution data.

**Keywords:** Adaptive Hamiltonian Monte Carlo, Matérn Correlation Function, Low-Rank Representation, Bayesian Hierarchical Model, $\mathrm{PM}_{10}$ Air Pollution.

**Mathematics Subject Classification (2020):** 62F15, 62M10.