



Goodness-of-fit Test For the Arithmetic Reduction of Age Model Based on Information Measures

Nezampour, F. , Alizadeh Noughabi, H. , Chahkandi, M. 

Department of Statistics, University of Birjand, Birjand, Iran.

Corresponding author: H. Alizadeh Noughabi, alizadehhadi@birjand.ac.ir

Received: 10/2/2025 **Revised:** 24/9/2025 **Accepted and Published Online:** 26/9/2025.

Introduction

In industrial systems, selecting an appropriate maintenance model is crucial for improving reliability and reducing operational costs. The Arithmetic Reduction of Age (ARA) model is widely used to describe imperfect repair mechanisms. This study introduces goodness-of-fit tests for the ARA model based on information-theoretic measures such as entropy, extropy, and var-entropy. These tests provide a robust framework for evaluating the adequacy of repair models in real-world applications.

Material and Methods

This study explores the effectiveness of goodness-of-fit tests for imperfect repair models using information-theoretic measures—entropy, extropy, and varentropy—as the foundation for new test statistics. These metrics help evaluate how well a repair model fits observed failure data.

Three main strategies are employed. **Martingale Residuals:** Discrepancies between observed and expected failure times are assessed using KS, CvM, and AD statistics, each capturing different aspects of distributional divergence. **Probability Integral Transform:** Failure times are transformed into uniform variables under the null hypothesis, enabling the use of standard uniformity tests. **Parametric Bootstrap:** To address the complexity and unknown distributions of test statistics, bootstrap resampling is used to estimate critical values and p-values without strong assumptions.

A detailed simulation study evaluates the power and robustness of these tests across various imperfect repair scenarios, offering insights into their practical performance.

Results and Discussion

Simulation studies demonstrate that tests based on entropy-related measures outperform traditional methods in detecting deviations from the ARA model. These tests show higher sensitivity to parameter changes and better performance in small samples. The proposed methods are also applied to real-world failure data from automotive systems, confirming the suitability of the ARA model and the effectiveness of the new tests.

Conclusion

Information-based goodness-of-fit tests offer powerful tools for evaluating imperfect repair models. Their superior performance in both simulated and real data contexts highlights their practical relevance in reliability engineering. Future research may extend these methods to multivariate settings or explore their application in other maintenance frameworks.

Keywords: Goodness-of-fit test, Extropy, Entropy, Martingale Residuals, Probability Integral Transformation, Imperfect Repair, Bootstrap Method, Arithmetic Age Reduction Model, Varentropy.

Mathematics Subject Classification (2020): 62G10, 62B10.



©The Author(s). The Publisher is Iranian Statistical Society.

This is an open access article distributed under the terms and conditions of [\(CC BY-NC 4.0\)](https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/)

آزمون نیکویی برازش برای مدل تعمیر کاهش حسابی سن براساس اندازه‌های اطلاع

فتانه نظام پور، هادی علیزاده نوقابی، مجید چهکندی
گروه آمار، دانشکده علوم ریاضی و آمار، دانشگاه بیرجند

نویسنده مسئول: هادی علیزاده نوقابی، alizadehhadi@birjand.ac.ir

تاریخ دریافت: ۱۴۰۳/۱۱/۲۲ تاریخ بازنگری: ۱۴۰۴/۷/۲ تاریخ پذیرش و انتشار: ۱۴۰۴/۷/۴

چکیده: در دنیای صنعتی امروز، نگهداری مؤثر تجهیزات نقش مهمی در کاهش هزینه و افزایش بهره‌وری دارد. در این مقاله، آزمون‌های نیکویی برازش مبتنی بر معیارهای اطلاع شامل آنتروپی، اکستروپی و ورانتروپی برای ارزیابی نوع تعمیر سیستم‌های قابل تعمیر معرفی می‌شوند. این آزمون‌ها با استفاده از داده‌های سن سیستم پس از تعمیر، برازش مدل تعمیر ناقص کاهش حسابی سن از مرتبه ۱ را بررسی می‌کنند. توان آزمون‌های پیشنهادی با آزمون‌های کلاسیک مبتنی بر مانده‌های مارتینگل و تبدیل انتگرال احتمال مقایسه می‌شود. نتایج شبیه‌سازی نشان می‌دهند آزمون‌های پیشنهادی در تشخیص مدل‌های تعمیر ناقص عملکرد بهتری دارند. همچنین، کاربرد آن‌ها در داده‌های واقعی خرابی خودرو نشان می‌دهد این مدل برازش مناسبی دارد.

واژه‌های کلیدی: آزمون نیکویی برازش، اکستروپی، آنتروپی، برآنتروپی، مانده‌های مارتینگل، تعمیر ناقص، بوت استرپ، مدل کاهش حسابی سن.
کد موضوع بندی ریاضی (۲۰۲۰): 62B10, 62G10.

۱ مقدمه

با توجه به پیچیدگی و هزینه‌های بالای تجهیزات صنعتی، مدیریت صحیح تعمیر و نگهداری می‌تواند تفاوت عمده‌ای در عملکرد و طول عمر این تجهیزات ایجاد کند. یکی از چالش‌های اصلی در مدیریت تعمیر و نگهداری، انتخاب مدل مناسب برای پیش‌بینی و بهینه‌سازی فرآیندهاست. مدل‌های مختلفی برای این منظور پیشنهاد شده‌اند، اما هر



کدام دارای نقاط قوت و ضعف خاص خود هستند. مدل تعمیر ناقص کاهش حساسی سن از مرتبه ۱ (ARA_1) به دلیل ویژگی‌های خاص خود، مانند توانایی در پیش‌بینی دقیق‌تر و بهینه‌سازی بهتر فرآیندهای تعمیر و نگهداری، توجه بیشتری را به خود جلب کرده است (جانسون و براون، ۲۰۲۰؛ دوو و اسمیت، ۲۰۲۱). کیجیما (۱۹۸۹) اولین بار مدل ARA_1 را معرفی کرد و به بررسی سیستم‌های قابل تعمیر با تعمیرات عمومی (پیشگیرانه و اصلاحی) پرداخت. وانگ و فام (۱۹۹۶) به بررسی تعمیر و نگهداری ناقص و مدل‌های مختلف آن پرداختند و مدل ARA_1 را به عنوان یکی از مدل‌های مؤثر معرفی کردند. دوین و گودوین (۲۰۰۴) کلاس‌های مختلف مدل‌های تعمیر ناقص را بررسی کردند و مدل ARA_1 را نیز مورد توجه قرار دادند. وانگ و فام (۲۰۱۱) فرآیند شبه تجدید و کاربردهای آن در تعمیر و نگهداری ناقص را معرفی کردند و مدل ARA_1 را بررسی کردند.

آزمون نیکویی برازش یکی از ابزارهای مهم در تحلیل‌های آماری است که برای بررسی تطابق داده‌های تجربی با توزیع‌های نظری استفاده می‌شود (علیزاده نوقابی و علیزاده نوقابی، ۱۳۸۷). شول و همکاران (۲۰۱۶) دو رویکرد مانده‌های مارتینگل و تبدیل انتگرال احتمال را برای آزمون نیکویی برازش در مدل‌های تعمیر و نگهداری بررسی کردند. در زمینه آزمون‌های نیکویی برازش برای مدل‌های تعمیر ناقص، پژوهش‌های متعددی انجام شده است که هر کدام رویکردهای خاصی را برای ارزیابی انطباق مدل‌ها با داده‌های تجربی ارائه می‌دهند. برینی و همکاران (۲۰۱۸) به تحلیل کیفیت برآورد پارامترها و کارایی آزمون‌های نیکویی برازش در مدل‌های تعمیر و نگهداری پرداختند و مدل‌هایی نظیر ARA_1 را به عنوان ابزار مهم در تحلیل‌های آماری معرفی کردند. جانسون (۲۰۲۰) در مطالعه خود، اثربخشی آزمون‌های نیکویی برازش را در تحلیل آماری تعمیر و نگهداری ارزیابی کرد و رویکرد مانده‌های مارتینگل را به عنوان ابزاری ارزشمند برای ارزیابی انطباق مدل‌ها با داده‌ها معرفی نمود. علیزاده نوقابی و محتشمی (۲۰۲۰) نیز به بررسی و ارزیابی روش‌های مبتنی بر آنتروپی برای آزمون نیکویی برازش پرداختند. آزمون‌ها براساس اکستروپی و وراآنتروپی بعد از سال ۲۰۲۰ گسترش یافته‌اند که در مقاله حاضر آزمون‌های اخیر را برای مدل‌های تعمیر ناقص بررسی کرده‌ایم. دو و کومار (۲۰۲۱) نشان دادند که رویکرد تبدیل انتگرال احتمال ابزاری ارزشمند برای ارزیابی انطباق مدل‌ها با داده‌های تجربی ارائه می‌کند. گرین (۲۰۲۲) الگوهای جدیدی برای آزمون‌های نیکویی برازش پیشنهاد داد که می‌توانند دقت آزمون‌های نیکویی برازش در مدل‌های تعمیر ناقص را بهبود بخشند. در نهایت، ساهو و رای (۲۰۲۴) مدل‌های آماری مختلفی را که در ارزیابی کارایی تعمیر و نگهداری‌های مینیمال و ناقص به کار می‌روند، بررسی کرده و بر اهمیت آزمون‌های نیکویی برازش تأکید داشته‌اند.

هدف این پژوهش ارزیابی دقت و کارایی آزمون‌های نیکویی برازش براساس سه رویکرد برای مدل کاهش حساسی سن (ARA_1) است. این تحقیق، ضمن بهبود آماره‌های آزمون مدل‌های تعمیر و نگهداری ناقص، بر اساس مفاهیم آنتروپی، اکستروپی و وراآنتروپی، به مقایسه توان این رویکردها با آزمون‌های پیشین می‌پردازد. نتایج به‌دست‌آمده می‌تواند به تحلیلگران قابلیت اطمینان در انتخاب مدل‌های تعمیر و نگهداری مناسب کمک کند. نوآوری اصلی این مقاله، معرفی و استفاده از آماره‌های آزمون نیکویی برازش مبتنی بر معیارهای اطلاع مانند آنتروپی، اکستروپی و وراآنتروپی برای مدل‌های تعمیر ناقص است. تحقیقات قبلی در زمینه آزمون نیکویی برازش برای ارزیابی مدل‌های تعمیر بر دو رویکرد اصلی متمرکز بوده‌اند: تبدیل انتگرال احتمال و باقیمانده‌های مارتینگل. همچنین تاکنون از

آزمون‌های نیکویی برازش مبتنی بر آنتروپی، اکستروپی و وراآنتروپی برای آزمون توزیع یکنواخت استفاده شده است. این مقاله با رویکردی جدید، از معیارهای اطلاع مانند آنتروپی، اکستروپی و وراآنتروپی استفاده و مدل‌های تعمیر ناقص را مورد ارزیابی قرار می‌دهد. همچنین یک مطالعه شبیه سازی جامع به منظور بررسی اثر تغییر پارامترهای مدل بر عملکرد آماره های آزمون مختلف انجام شده است.

در بخش ۲ به بررسی برخی از مدل‌های تعمیر و نگهداری ناقص پرداخته‌ایم. بخش ۳، آزمون‌های مبتنی بر سه رویکرد مختلف را شامل می‌شود و آماره‌های آزمون مربوط به هر کدام توضیح داده شده است. بخش ۴ به طراحی شبیه‌سازی اختصاص دارد و شامل توضیحاتی درباره شیوه تولید داده از مدل‌های تعمیر مدنظر و فرضیه‌های مورد آزمون است. در بخش ۵، نتایج شبیه‌سازی ارائه شده است؛ ابتدا تأثیر پارامترها بر روی توان بررسی شده و سپس توان با فرضیه‌های جایگزین متفاوت گزارش شده است.

۲ برخی از مدل‌های تعمیر و نگهداری ناقص

فرض کنید زمان‌های خرابی سیستم قابل تعمیر به صورت $T_1, \dots, T_n$ و $T_0 = 0$ (در زمان شروع سیستم سالم است) باشد. اگر $N = (N_t)_{t \geq 0}$ نشان‌دهنده فرآیند تعداد خرابی‌ها تا زمان t باشد، مدل تصادفی برای این فرآیند به طور کامل با تابع نرخ خطر $\lambda = (\lambda_t)_{t \geq 0}$ که به صورت

$$\lambda = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} P(N_{t+\Delta t} - N_t = 1 \mid H_t^-), \quad t \geq 0$$

مشخص می‌شود، که در آن H_t^- گذشته فرآیند N_t درست قبل از t و N_t^- حد سمت چپ N_t را نشان می‌دهد. نرخ خطر اولیه PLP است اگر $h(t) = abt^{b-1}$ ($a > 0, b > 0$) برای $t \geq 0$ باشد. حالت خاصی از مدل PLP توزیع نمایی $\lambda(t) = a$ است. نرخ خطر اولیه LLP نیز در نظر گرفته می‌شود اگر $h(t) = \exp(a + bt)$ ($a, b \in \mathbb{R}$) برای $t \geq 0$ باشد. در این پژوهش، فرض می‌کنیم که سیستم در حال فوسایش است بنابراین نرخ خطر اولیه یک تابع صعودی از زمان است. پس، $b > 1$ را برای PLP و $b > 0$ را برای LLP در نظر می‌گیریم.

یکی از ابتدایی‌ترین مدل‌های تعمیر ناقص، مدل براون و پروشان (براون و پروشان، ۱۹۸۳) است که به اختصار با BP نشان خواهیم داد. در این مدل، پس از هر بار خرابی سیستم، با احتمال $p \in [0, 1]$ تعمیر کامل و با احتمال $1 - p$ تعمیر مینیمال انجام می‌شود. تعمیر کامل، سن مؤثر سیستم را به لحظه صفر برمی‌گرداند، در حالی که تعمیر مینیمال سن مؤثر سیستم را نسبت به سن مؤثر آن در هنگام خرابی بدون تغییر می‌گذارد. بدون از دست دادن کلیت، فرض بر این است که زمان ناچیزی صرف تعمیر می‌شود. این مدل را می‌توان با تعریف دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی هم‌توزیع و مستقل با توزیع برنولی با پارامتر p به گونه‌ای که $B_k = 1$ اگر k امین تعمیر کامل باشد و $B_k = 0$ اگر

k امین تعمیر مینیمال باشد، نمایش داد. تابع نرخ خطر یک سیستم در زمان t تحت مدل BP به صورت

$$\lambda_t = h(t - T_{N_t-} + \sum_{j=1}^{N_t-} (\prod_{k=j}^{N_t-} [1 - B_k])(T_j - T_{j-1})), \quad t \geq 0.$$

ارائه می‌شود (دوین، ۲۰۱۱). یکی دیگر از مدل‌های معمول تعمیر و نگهداری ناقص، مدل QR است که زمان‌های بین دو خرابی متوالی را از نظر هندسی، بسته به اینکه سیستم فرسوده یا جوان شود (وانگ و فام، ۱۹۹۶)، نزولی یا صعودی در نظر می‌گیرد. در مدل QR، زمان‌های بین خرابی‌ها به صورت $T_i - T_{i-1} = q^{i-1} Y_i$ در نظر گرفته می‌شود، که در آن $(Y_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی هم‌توزیع و مستقل‌اند و $q > 0$ پارامتری است که اثر تعمیر را مشخص می‌کند. این فرآیند شمارش، که با نام فرآیند هندسی (لین، ۱۹۸۸) نیز شناخته می‌شود، توصیف‌کننده تعداد خرابی‌ها در طول زمان است و تابع نرخ خطر آن به صورت

$$\lambda_t = q^{-N_t-} h(q^{-N_t-} (t - T_{N_t-})), \quad t \geq 0.$$

است که اگر $q = 1$ ، مدل مشابه به خوبی نو است. اگر $q \in (0, 1)$ سیستم ممکن است به دلیل کاهش ناگهانی و غیرمنتظره در فواصل زمانی که بین دو خرابی وجود دارد، خراب شود و اگر $q > 1$ سیستم بهبود می‌یابد. در این پژوهش حالتی را در نظر می‌گیریم که سیستم در حال خراب شدن است. مدل QR نشان می‌دهد که فواصل زمانی بین تعمیرات به سرعت کاهش می‌یابد، ولی این روند معمولاً در واقعیت دیده نمی‌شود. به همین دلیل است که فرآیندهای هندسی تعمیم یافته (EGP) توسط بردس و مرسیه (۲۰۱۳) پیشنهاد شد، در این مدل فواصل زمانی در رابطه $T_i - T_{i-1} = q^{b_i} Y_i$ صدق می‌کند، که در آن $(b_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ دنباله‌ای صعودی از اعداد حقیقی مثبت است به طوری که $b_1 = 0$ و $\lim_{i \rightarrow \infty} b_i = \infty$. به عنوان مثال، در مدل EGP می‌توان $b_i = i - 1$ (مدل QR)، $b_i = (i - 1)^{1/2}$ یا $b_i = \log(i - 1)$ را برای $i \in \mathbb{N}$ انتخاب کرد. دسته دیگر از مدل‌های تعمیر و نگهداری ناقص، مدل‌های سن مجازی است که نخستین بار توسط کیجیما (۱۹۸۹) معرفی شدند. اساس این مدل‌ها بر این است که تعمیر سن سیستم را کاهش می‌دهد. مدل کاهش حساسی سن با حافظه m ، ARA_m به صورت

$$\lambda_t = h(t - \rho \sum_{j=0}^{\min\{m-1, N_t- - 1\}} (1 - \rho)^j T_{N_t- - j}), \quad t \geq 0.$$

تعریف می‌شود (دوین و گودوین، ۲۰۰۴). در مدل ARA_∞ یا مدل کیجیما نوع ۲ (دوین و گودوین، ۲۰۰۴)، تعمیر

سن موثر را با ضریب $\rho \leq 1$ کاهش می‌دهد. که تابع نرخ خطر متناظر با مدل ARA_∞ به صورت

$$\lambda_t = h(t - \rho \sum_{j=0}^{N_t-1} (1 - \rho)^j T_{N_t-j}), \quad t \geq 0.$$

است. در مدل ARA_1 یا مدل کیجیما نوع ۱ (دوین و گودوین، ۲۰۰۴) تابع نرخ خطر عبارت است از:

$$\lambda_t = h(t - \rho T_{N_t-}), \quad t \geq 0.$$

اگر $\rho \in (0, 1)$ تعمیر کارآمد، اگر $\rho = 1$ تعمیر کامل (به خوبی نو)، اگر $\rho = 0$ تعمیر مینیمال (به بدی کهنه) و اگر $\rho < 0$ تعمیر مضر است. در این پژوهش، تعمیرات مضر را در نظر نخواهیم گرفت، یعنی $\rho \in [0, 1]$.

۳ آزمون نیکویی برازش مدل تعمیر ناقص به روش بوت استرپ پارامتری

مدل تعمیر و نگهداری ناقص با تابع نرخ خطر مشخص و با $V = \{\lambda(\theta), \theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^d\}$ نشان داده می‌شود. هدف این است که تعیین کنیم آیا این مدل برای داده‌های مشاهده شده مناسب است یا خیر. بنابراین آزمون نیکویی برازش به شکل $H_0: \lambda \in V$ در مقابل $H_1: \lambda \notin V$ را در نظر بگیرید. فرضیه صفر رد می‌شود اگر مقدار آماره آزمون در ناحیه بحرانی باشد. روش‌های بوت استرپ توسط افرون (۱۹۷۹) معرفی شدند و شامل باز نمونه‌گیری از داده‌ها برای محاسبه چندک‌های تجربی آماره‌های آزمون است. این روش‌ها بدون فرض اضافی بر توزیع داده‌ها عمل می‌کنند. به عبارت دیگر، بوت استرپ یک روش آماری است که با استفاده از نمونه‌گیری مجدد از داده‌های موجود، توزیع نمونه‌گیری آماره‌ها را برآورد می‌کنند. این روش به ویژه در مواردی که توزیع آماره‌ها ناشناخته یا پیچیده است، مفید است. بوت استرپ به محققان اجازه می‌دهد تا فواصل اطمینان و خطاهای استاندارد را بدون نیاز به فرضیات قوی درباره توزیع داده‌ها محاسبه کنند. این روش به دلیل سادگی و انعطاف‌پذیری‌اش در بسیاری از زمینه‌های آماری و علمی مورد استفاده قرار می‌گیرد. در این مقاله، برای محاسبه چندک‌های مربوط به توزیع آماره‌های آزمون معرفی شده، از روش بوت استرپ استفاده کردیم.

۳.۱ آزمون‌های مبتنی بر مانده‌های مارتینگل

مانده‌های مارتینگل تفاوت بین مقدار مشاهده شده و مقدار مورد انتظار را محاسبه می‌کنند. فرایند $M = \{M_t\}_{t \geq 0}$ تعریف شده به صورت $M = N - \Lambda$ ، که در آن N نشان‌دهنده فرایند شمارش تعداد خرابی‌ها تا زمان t و Λ نشان دهنده تابع نرخ خطر تجمعی است، یک مارتینگل با میانگین صفر است. پس N نزدیک به Λ است به این معنا که انتظار داریم تفاوت آن‌ها صفر باشد. در فرضیات، نرخ خطر شکل پارامتری دارد و به صورت $\lambda(\theta) = \{\lambda_t(\theta)\}_{t \geq 0}$

۴۷۴ آزمون نیکویی برازش برای مدل تعمیر کاهش حسابی سن

برای $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^d$ نشان داده می‌شود. نرخ خطر تجمعی $\Lambda(\theta)$ و مارتینگل مربوطه $M(\theta) = N - \Lambda(\theta)$ است. در عمل، پارامتر θ مجهول است و نرخ خطر تجمعی $T_1, \dots, T_n$ برآورد می‌شود. فرض کنیم $\hat{\theta}$ برآوردگر درست‌نمایی ماکسیم θ باشد. متغیرهای تصادفی $\{\hat{M}_i\}_{i=1}^n$ به صورت $\hat{M}_i = N_{T_i} - \Lambda_{T_i}(\hat{\theta})$ تعریف می‌شوند، که مانده‌های مارتینگل (کوک و لاولس، ۲۰۰۷) نامیده می‌شوند. انتظار می‌رود N به $\Lambda(\hat{\theta})$ نزدیک باشد. اولین خانواده آزمون‌های نیکویی برازش بر اساس اختلاف بین N و $\Lambda(\hat{\theta})$ ساخته می‌شود. آزمون‌ها این فرضیه که مدل معتبر است را رد می‌کنند اگر دو فرآیند خیلی از هم فاصله داشته باشند. سه آماره آزمون بر اساس مانده‌های مارتینگل توسط شوول و همکاران (۲۰۱۶) پیشنهاد شده‌اند.

۱. آماره کلموگروف اسمیرنوف (KS):

$$KS_m(\theta) = \sup_{i=1, \dots, n} |M_i| = \sup_{i=1, \dots, n} |i - \Lambda_{X_i}(\theta)|$$

۲. آماره کرامر فون میزس (CvM):

$$CvM_m(\theta) = -\frac{1}{3} \sum_{i=1}^n \{(i-1 - \Lambda_{X_i}(\theta))^3 - (i-1 - \Lambda_{X_{i-1}}(\theta))^3\}$$

۳. آماره اندرسون دارلینگ (AD):

$$AD_m(\theta) = \frac{1}{n+1} \sum_{i=2}^n \left\{ (i-1)^2 \log \left(\frac{\Lambda_{X_i}(\theta)}{\Lambda_{X_{i-1}}(\theta)} \right) (n+2-i)^2 \log \left(\frac{n+1 - \Lambda_{X_i}(\theta)}{n+1 - \Lambda_{X_{i-1}}(\theta)} \right) \right\} \\ + (n+1) \log \left(1 - \frac{\Lambda_{X_1}(\theta)}{n+1} \right) - n$$

۳.۲ آزمون‌های مبتنی بر تبدیل انتگرال احتمال

دسته دوم آزمون‌ها بر اساس متغیرهای تصادفی $\Lambda_{T_{i+1}}(\theta) - \Lambda_{T_i}(\theta)$ برای $i = 0, \dots, n-1$ است. تحت H_0 ، این متغیرها هم‌توزیع و مستقل با توزیع نمایی استاندارد هستند (کوک و لاولس، ۲۰۰۷). برای $i = 0, \dots, n-1$ ، فرض کنیم $S(\cdot | T_i; \theta)$ تابع قابلیت اطمینان زمان خرابی $T_{i+1} - T_i$ مشروط به $\mathbf{T}_i = (T_1, \dots, T_i)$ باشد:

$$S(s | \mathbf{T}_i; \theta) = P(T_{i+1} - T_i > s | \mathbf{T}_i; \theta) = \exp(-\Lambda_{T_i+s}(\theta) + \Lambda_{T_i}(\theta)), s \geq 0$$

متغیرهای $U_i(\theta) = S(T_{i+1} - T_i | \mathbf{T}_i; \theta)$ را برای $i = 0, \dots, n-1$ در نظر می‌گیریم که تحت فرضیه صفر، $\lambda \in C$: H_0 ، U_i ها هم‌توزیع و مستقل با توزیع یکنواخت استاندارد هستند. چنین تبدیلی از زمان‌های

خرابی معمولاً تبدیل انتگرال احتمال نامیده می‌شود و شامل اعمال یک تابع توزیع تجمعی روی متغیر تصادفی است **دی‌آگوستینو و استفنز (۱۹۸۶)**. در واقع در تئوری احتمال، تبدیل انتگرال احتمال به این نتیجه مربوط می‌شود که مقادیر داده‌ای که به عنوان متغیرهای تصادفی از هر توزیع پیوسته معین مدل می‌شوند، می‌توانند به متغیرهای تصادفی دارای توزیع یکنواخت استاندارد تبدیل شوند. در این مورد، تابع توزیع تجمعی مشروط به گذشته و تبدیل روزنبلات (روزنبلات، ۱۹۵۲) است، پس آن را تبدیل انتگرال احتمال شرطی می‌نامیم. دسته دوم آزمون‌های نیکویی براساس تبدیل انتگرال احتمال شرطی زمان‌های بین خرابی است. انتظار داریم در صورت عدم نیکویی برازش، یکنواختی دیگر برقرار نباشد. در عمل θ برآورد می‌شود و از آماره‌های آزمون کلموگروف اسمیرنوف، کرامر فون میزس و اندرسون دارلینگ که برای آزمون یکنواختی $U_{n-1}(\hat{\theta}), \dots, U_1(\hat{\theta})$ استفاده می‌کنیم (شول و همکاران، ۲۰۱۶). آماره‌های آزمون به ترتیب عبارتند از

۱. آماره کلموگروف اسمیرنوف (KS):

$$KS_u(\theta) = \sqrt{n} \max \left(\max_{i=1, \dots, n} \left(\frac{i}{n} - U_{(i-1)}(\theta) \right), \max_{i=1, \dots, n} \left(U_{(i-1)}(\theta) - \frac{i-1}{n} \right) \right)$$

۲. آماره کرامر فون میزس (CvM):

$$CvM_u(\theta) = \sum_{i=1}^n \left(U_{(i-1)}(\theta) - \frac{i-1}{n} \right)^2 + \frac{1}{12n}$$

۳. آماره اندرسون دارلینگ (AD):

$$AD_u(\theta) = -n - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (i-1) \{ \log(U_{(i-1)}(\theta)) + \log(1 - U_{(n-i)}(\theta)) \}$$

۳.۳ آزمون‌های پیشنهادی مبتنی بر آنتروپی، اکستروپی و ورنآنتروپی

در ادامه، برای طراحی آزمون‌های نیکویی برازش مبتنی بر معیارهای اطلاع، نیازمند تعریف متغیرهایی هستیم که تحت فرضیه صفر، دارای توزیع مشخص و قابل تحلیل باشند. به همین منظور، در لم زیر نشان می‌دهیم که با استفاده از نرخ خطر تجمعی، می‌توان متغیرهایی تعریف کرد که تحت فرضیه صفر، از توزیع یکنواخت استاندارد در بازه (۰, ۱) پیروی می‌کنند. این ویژگی، پایه نظری آزمون‌های پیشنهادی مبتنی بر آنتروپی، اکستروپی و ورنآنتروپی را فراهم می‌سازد.

لم ۱. متغیرهای $i = 0, \dots, n-1$ دارای توزیع یکنواخت $U_i(\hat{\theta}) = \exp(-\Lambda_{T_{i+1}}(\theta) + \Lambda_{T_i}(\theta))$ در بازه (۰, ۱) هستند.

برهان: فرض کنید $\Delta_i(\theta) = \Lambda(T_{i+1}; \theta) - \Lambda(T_i; \theta)$ اختلاف نرخ خطر تجمعی دو زمان متوالی باشد. این متغیرها $\Delta_i(\theta)$ مستقلند و از توزیع نمایی استاندارد با نرخ ۱ پیروی می‌کنند (کوک و لاولس، ۲۰۰۷)، یعنی $\Delta_i(\theta) \sim \text{Exp}(1)$ برای همه $i \geq 1$ و $\theta \in \Theta$. برای هر i مقدار زیر را تعریف می‌کنیم که تبدیل انتگرال احتمال برای وقایع بین دو رویداد است: $S(s | T_i; \theta) = \mathbb{P}(T_{i+1} - T_i > s | \mathcal{H}_{T_i}) = \exp\{-[\Lambda(T_i + s; \theta) - \Lambda(T_i; \theta)]\}$ ، $s \geq 0$ ، $U_i(\theta) = S(T_i, T_{i+1} - T_i; \theta) = \exp\{-\Delta_i(\theta)\}$ در نتیجه $s; \theta) - \Lambda(T_i; \theta)]\}$ ، $s \geq 0$ ، خواهد بود. اگر $\Delta_i(\theta) \sim \text{Exp}(1)$ تحت H_0 باشد، برای هر $u \in (0, 1)$

$$\mathbb{P}(U_i(\theta) \leq u | \mathcal{H}_{T_i}) = \mathbb{P}(\exp\{-\Delta_i(\theta)\} \leq u | \mathcal{H}_{T_i}) = \mathbb{P}(\Delta_i(\theta) \geq -\log u | \mathcal{H}_{T_i}).$$

از آنجا که $\Delta_i(\theta) \sim \text{Exp}(1)$ شرطی است، داریم $\mathbb{P}(\Delta_i(\theta) \geq x | \mathcal{H}_{T_i}) = e^{-x}$ ، $x \geq 0$. بنابراین برای هر $u \in (0, 1)$ ، $\mathbb{P}(U_i(\theta) \leq u | \mathcal{H}_{T_i}) = e^{-(-\log u)} = u$. پس $U_i(\theta) | \mathcal{H}_{T_i} \sim \text{Uniform}(0, 1)$ چون $\Delta_i(\theta)$ برای همه i ها مستقلند، بنابراین $U_i(\theta) = \exp\{-\Delta_i(\theta)\}$ نیز مستقل و یکنواخت در $[0, 1]$ است. بدین ترتیب، مجموعه $\{U_i(\theta)\}_{i \geq 1}$ متغیرهای مستقل و هم‌توزیع از توزیع یکنواخت استاندارد هستند.

در این مقاله، از رویکردی مبتنی بر تحلیل اطلاعاتی این متغیرهای یکنواخت‌شده با استفاده از سه معیار آنتروپی، اکستروپی و ورنترپیی بهره گرفته‌ایم. این معیارها که پیش‌تر در بررسی ساختار توزیع داده‌ها کاربرد داشته‌اند، در اینجا برای ارزیابی مدل‌های تعمیر ناقص و انتخاب مدل بهینه مورد استفاده قرار گرفته‌اند. به طور خاص، با تحلیل میزان آنتروپی، اکستروپی و ورنترپیی متغیرهای یکنواخت‌شده، می‌توان میزان تصادفی بودن، پیچیدگی، و ساختار اطلاعاتی داده‌ها را سنجید و از این طریق، مدلی را انتخاب کرد که بیشترین تطابق را با داده‌های تعمیر واقعی داشته باشد. در نظریه اطلاع، آنتروپی معیاری عددی برای اندازه‌گیری اطلاعات یا تصادفی بودن یک متغیر تصادفی است. به بیان دقیق‌تر، آنتروپی یک متغیر تصادفی، متوسط اطلاعات آن است. اگر X یک متغیر تصادفی پیوسته باشد و f تابع چگالی آن باشد، آنتروپی شانون به صورت $H(f) = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \log(f(x)) dx$ تعریف می‌شود. برای مثال، اگر X دارای توزیع یکنواخت در بازه $(0, 1)$ باشد، آنتروپی آن برابر با $H(f) = \log(1) = 0$ است که نشان‌دهنده توزیع کاملاً تصادفی و بدون ترجیح است. در مقابل، اگر توزیع X متمرکزتر باشد، آنتروپی کاهش می‌یابد و نشان‌دهنده اطلاعات بیشتر در داده‌ها است. معیار دیگر برای سنجش عدم قطعیت، به نام اکستروپی، توسط لاد و همکاران (۲۰۱۵) پیشنهاد شده است. برای یک متغیر تصادفی مثبت پیوسته X با تابع چگالی احتمال f ، اکستروپی X به صورت $J(x) = -\frac{1}{f} \int_0^\infty f^2(x) dx$ تعریف می‌شود. اکستروپی برخلاف آنتروپی، به تمرکز چگالی توجه دارد. هرچه تابع چگالی $f(x)$ در نقاط خاصی متمرکزتر باشد، مقدار $f^2(x)$ بزرگ‌تر شده و اکستروپی کاهش می‌یابد. بنابراین، اکستروپی می‌تواند برای شناسایی مدل‌هایی که رفتار غیرتصادفی یا ساختارمند دارند، مفید باشد. ورنترپیی نیز معیاری دیگر برای سنجش میزان نوسان یا تغییرپذیری در محتوای اطلاعاتی متغیر تصادفی است. این معیار کمک می‌کند تا درک بهتری از پیچیدگی یا عدم قطعیت موجود در داده‌ها داشته باشیم

(کرشنزو و پائولیو، ۲۰۲۱). برای متغیر تصادفی پیوسته X با تابع چگالی احتمال f ، وراثتروپی X به صورت

$$V(x) = \text{Var}[\log(f(x))] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)(\log(f(x)))^2 dx - \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \log(f(x)) dx \right)^2$$

تعریف می‌شود. وراثتروپی به نوسانات لگاریتم چگالی توجه دارد. اگر چگالی $f(x)$ دارای نوسانات زیاد باشد، مقدار وراثتروپی بیشتر خواهد بود. این ویژگی برای تشخیص مدل‌هایی که رفتار پیچیده‌تری دارند، بسیار مفید است. برای مثال، در مدل‌های تعمیر با حافظه زیاد، وراثتروپی می‌تواند به شناسایی الگوهای پنهان در داده‌ها کمک کند. اولین آماره آزمون، آماره T_n مبتنی بر اکستروپی تجمعی منفی (علیزاده نوقایی، ۲۰۲۳) به صورت

$$T_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} \left(1 - \left(\frac{i}{n}\right)^2\right) (U_{(i+1)} - U_{(i)})$$

است. در این آماره ناحیه بحرانی به ازای فرضیه صفر به صورت $T_n \geq T_{n,1-\alpha/2}$ یا $T_n \leq T_{n,\alpha/2}$ است. آماره آزمون HV_{mn} که بر اساس آنتروپی توسط دودویچ و ون در مولن (۱۹۸۱) معرفی شد، به صورت

$$HV_{mn} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log \left(\frac{n}{2m} (U_{i+m} - U_{i-m}) \right) \quad (۱)$$

است. در آماره (۱) و سایر آماره آزمون‌های (۷) - (۳)، $m = \sqrt{n} + 0.5$ و اگر $i + m > n$ باشد $i + m = n$ و اگر $i - m < 1$ باشد $i - m = 1$ است. ابراهیمی و همکاران (۱۹۹۴)، ضریب c_i را به صورت

$$c_i = \begin{cases} 1 + \frac{i-1}{m} & 1 \leq i \leq m \\ 2 & m+1 < i < n-m \\ 1 + \frac{n-i}{m} & n-m+1 \leq i \leq n. \end{cases} \quad (۲)$$

معرفی کردند. که به کمک آن آماره آزمون HE_{mn} توسط کیو و جیا (۲۰۱۸) به صورت

$$HE_{mn} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log \left(\frac{n}{c_i m} (U_{i+m} - U_{i-m}) \right) \quad (۳)$$

معرفی شد. ناحیه بحرانی آماره آزمون‌های (۱) و (۳) و سایر آماره‌های (۴) تا (۷) بدین صورت است که به ازای مقادیر کوچک‌تر از چندک $(1 - \alpha)$ درصد، فرضیه صفر رد می‌شود. آماره آزمون‌ها بر اساس اکستروپی و به کمک

رابطه (۲) توسط کیو و جیا (۲۰۱۸) به صورت

$$JQ_{\lambda mn} = -\frac{1}{\lambda n} \sum_{i=1}^n \frac{\lambda m}{n(U_{i+m} - U_{i-m})} \quad (۴)$$

$$JQ_{\lambda mn} = -\frac{1}{\lambda n} \sum_{i=1}^n \frac{c_i m}{n(U_{i+m} - U_{i-m})} \quad (۵)$$

معرفی شدند. آماره آزمون مبتنی بر ورنترپی و به کمک (۲)، توسط **علیزاده نوقابی و شفاعی نوقابی** (۲۰۲۳) به صورت زیر معرفی شدند.

$$VV_{mn} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\log^{\lambda}(U_{i+m} - U_{i-m})) - \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log(U_{i+m} - U_{i-m}) \right]^{\lambda}, \quad (۶)$$

$$VE_{mn} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\log^{\lambda} \left(\frac{c_i m}{n(U_{i+m} - U_{i-m})} \right) \right) - \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log \left(\frac{c_i m}{n(U_{i+m} - U_{i-m})} \right) \right]^{\lambda}. \quad (۷)$$

۴ مطالعه شبیه‌سازی

برای ارزیابی عملکرد آماره‌های آزمون، آزمون‌ها را بر روی تعداد زیادی مجموعه داده شبیه‌سازی کردیم. توان آزمون با درصد رد فرضیه صفر برآورد می‌شود. ابتدا باید بررسی کنیم که سطح معنی‌داری آزمون‌ها به خوبی رعایت شده باشد. سطح تجربی باید نزدیک به سطح نظری α باشد. زمانی که داده‌ها براساس مدل دیگری شبیه‌سازی می‌شوند، درصد رد باید تا حد امکان بالا باشد. در گام نخست، به بررسی اثر پارامترها در توان آزمون‌ها پرداختیم و مشاهده کردیم که با افزایش حافظه در مدل ARA_m و تغییر در پارامتر شکل و ضریب تعمیر، چه تغییراتی در توان آزمون‌ها رخ می‌دهد. فرض کردیم سطح معناداری آزمون $\alpha = 0.05$ باشد. فرضیه صفر را مدل تعمیر و نگهداری ناقص ARA_1 (مدل کیجیما نوع ۱) با نرخ خطر اولیه PLP در نظر گرفته‌ایم. این مدل با $ARA_1 - PLP$ نشان داده می‌شود. به طور دقیق‌تر داریم:

$$H_0 : \lambda \in V = \{ab(t - \rho T_{N_t-})^{b-1}, t \geq 0, a > 0, b \geq 1, 0 \leq \rho \leq 1\},$$

$$H_1 : \lambda \notin V.$$

برای بررسی اثر پارامترها، مدل‌های ARA_m را به ازای $m = \{2, 5, 10, 15, 20, \infty\}$ در نظر گرفته‌ایم و برای اثر تعمیر و نگهداری، مدل‌های BP ، QR و EGP را انتخاب کردیم. برای مدل‌های ARA_m ، $\rho \in \{0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9\}$ که نشان‌دهنده اثرهای تعمیر و نگهداری از ضعیف تا قوی است و برای مدل BP و برای مدل QR ، $p \in \{0.2, 0.8\}$ و برای مدل QR ، $q \in \{0.8, 0.9, 0.95\}$ را تنظیم کرده‌ایم. زمانی که q

نزدیک به ۱ باشد، فرآیند شمارش مانند یک فرآیند تجدید عمل می‌کند. برای مدل EGP ، $q \in \{0.8, 0.9, 0.95\}$ و $g_i = \sqrt{i-1}$ را برای $i \in \{1, \dots, n\}$ قرار دادیم. برای نرخ خطر اولیه، ابتدا یک PLP با پارامتر مقیاس $a = 0.5$ و پارامتر شکل $b \in \{1.5, 2, 2.5, 3\}$ ، در بررسی اثر پارامترها ۵ را نیز انتخاب کردیم. همچنین نرخ خطر اولیه LLP را با $a = -5$ و $b \in \{0.005, 0.01, 0.05, 0.1\}$ در نظر گرفتیم. برای تولید داده از مدل‌های ARA_m ، QR و EGP از بسته VAM توسعه یافته در آزمایشگاه LJK در گرنوبل به آدرس <https://rpackages.u-ga.fr/VAM> در زبان برنامه‌نویسی R و برای تولید داده از مدل BP نیز از الگوریتم معرفی شده توسط آگوستین و پنا (۱۹۹۹) استفاده کردیم. برای هر یک از مدل‌ها، $B = 1000$ داده شبیه‌سازی کردیم که هر کدام از $n = 30$ زمان تشکیل شده است. پارامترها به روش درستنمایی ماکسیمم تحت محدودیت‌های $b \geq 1$ و $\rho \in [0, 1]$ برآورد شده‌اند. محدودیت‌ها تضمین می‌کنند که سیستم فرسوده شده و تعمیر کارآمد است. برای ارزیابی چندک‌های توزیع‌های آماری، $L = 1000$ نمونه بوت استرپ تولید شده است.

۴.۱ تأثیر تعداد حافظه (m) بر توان

ابتدا، پارامتر m را با مقادیر مختلف ۲، ۵، ۱۵، ۲۰ و بینهایت (∞) در نظر گرفتیم. نتایج نشان داد که با افزایش مقدار m ، توان مدل‌ها نیز افزایش می‌یابد. این افزایش توان به دلیل فاصله گرفتن داده‌ها از فرضیه صفر و بهبود قدرت تشخیص مدل است. این نتایج در جدول ۱ قابل مشاهده است که در این جدول فرض کردیم که پارامتر شکل مقدار ثابت ۳ و ضریب تعمیر ۰.۸ است.

جدول ۱. تأثیر تعداد حافظه (m) بر توان مدل‌ها با پارامترهای ثابت $b = 3$ و $\rho = 0.8$

مدل	ARA_{∞}	ARA_{20}	ARA_{15}	ARA_{10}	ARA_5	ARA_3
KS_m	۰/۰۸۸	۰/۰۸۵	۰/۰۸۱	۰/۰۷۸	۰/۰۶۷	۰/۰۶۷
CvM_m	۰/۰۸۷	۰/۰۸۳	۰/۰۸۰	۰/۰۷۹	۰/۰۶۹	۰/۰۶۹
AD_m	۰/۰۸۹	۰/۰۸۴	۰/۰۸۰	۰/۰۷۹	۰/۰۷۱	۰/۰۶۹
KS_u	۰/۰۹۳	۰/۰۸۸	۰/۰۸۴	۰/۰۸۴	۰/۰۷۲	۰/۰۷۲
CvM_u	۰/۰۹۳	۰/۰۸۸	۰/۰۸۳	۰/۰۸۲	۰/۰۷۴	۰/۰۷۴
AD_u	۰/۰۹۴	۰/۰۸۹	۰/۰۸۴	۰/۰۸۴	۰/۰۸۱	۰/۰۸۱
T_n	۰/۱۱۸	۰/۱۰۲	۰/۰۹۳	۰/۰۸۸	۰/۰۸۲	۰/۰۶۳
HV_{mn}	۰/۱۱۲	۰/۱۰۲	۰/۰۹۲	۰/۰۸۶	۰/۰۷۶	۰/۰۶۷
HE_{mn}	۰/۱۱۲	۰/۱۰۲	۰/۰۹۲	۰/۰۸۶	۰/۰۷۶	۰/۰۶۷
JQ_{mn}^1	۰/۱۱۸	۰/۱۰۰	۰/۰۸۸	۰/۰۸۸	۰/۰۷۸	۰/۰۷۹
JQ_{mn}^2	۰/۱۱۶	۰/۱۰۱	۰/۰۸۸	۰/۰۸۷	۰/۰۷۸	۰/۰۷۸
VV_{mn}	۰/۱۱۸	۰/۱۰۰	۰/۰۹۳	۰/۰۸۵	۰/۰۸۲	۰/۰۸۰
VE_{mn}	۰/۱۱۸	۰/۱۰۰	۰/۰۹۳	۰/۰۸۴	۰/۰۶۷	۰/۰۷۹

۴.۲ تأثیر ضریب تعمیر (ρ) بر توان

در مرحله بعد، ضریب تعمیر را در مدل‌ها از ۰/۱ تا ۰/۹ تغییر دادیم. نتایج نشان داد که وقتی ضریب تعمیر کمتر یا مساوی ۰/۵ است، آماره آزمون‌های مبتنی بر آنتروپی، اکستروپی و وراآنتروپی در اکثر مواقع بهتر از سایر آزمون‌ها عمل می‌کنند. این به این معناست که در شرایطی که ضریب تعمیر پایین است، این آماره‌ها توانایی بیشتری در تشخیص و تحلیل داده‌ها دارند. وقتی ضریب تعمیر از ۰/۵ بزرگتر می‌شود، در تمامی موارد آماره آزمون‌های مبتنی بر آنتروپی، اکستروپی و وراآنتروپی عملکرد بهتری دارند. این نشان می‌دهد که با افزایش ضریب تعمیر، این آماره‌ها توانایی بیشتری در تحلیل داده‌ها و ارائه نتایج دقیق‌تر دارند. این نتایج نشان می‌دهد که ضریب تعمیر نقش مهمی دارد و باید به دقت تنظیم شود. انتخاب ضریب تعمیر مناسب می‌تواند به بهبود عملکرد کلی مدل کمک کند. برای مشاهده این نتایج جدول ۲ برای نمونه برای مدل ARA_2 با پارامتر شیب ثابت $b = 5$ آورده شده است.

جدول ۲. تأثیر ضریب تعمیر بر توان مدل ARA_2 با پارامتر شیب ثابت $b = 5$									
ρ	۰/۱	۰/۲	۰/۳	۰/۴	۰/۵	۰/۶	۰/۷	۰/۸	۰/۹
KS_m	۰/۴۸	۰/۳۲	۰/۳۲	۰/۲۸	۰/۲۲	۰/۶۱	۰/۶۹	۰/۶۹	۰/۷۹
CvM_m	۰/۴۵	۰/۴۱	۰/۴۱	۰/۴۱	۰/۲۰	۰/۶۲	۰/۷۲	۰/۷۲	۰/۷۳
AD_m	۰/۳۶	۰/۲۹	۰/۲۹	۰/۲۶	۰/۱۶	۰/۷۰	۰/۷۶	۰/۷۶	۰/۷۷
KS_u	۰/۵۶	۰/۵۰	۰/۴۶	۰/۴۶	۰/۴۴	۰/۷۲	۰/۷۴	۰/۷۴	۰/۸۰
CvM_u	۰/۵۶	۰/۵۰	۰/۴۹	۰/۴۵	۰/۴۳	۰/۶۹	۰/۷۰	۰/۷۶	۰/۷۹
AD_u	۰/۵۹	۰/۴۹	۰/۴۹	۰/۴۷	۰/۴۶	۰/۷۷	۰/۷۸	۰/۸۲	۰/۸۳
T_n	۰/۵۲	۰/۵۰	۰/۴۹	۰/۴۹	۰/۴۸	۰/۷۹	۰/۷۹	۰/۸۳	۰/۸۳
HV_{mn}	۰/۶۱	۰/۵۱	۰/۴۸	۰/۴۷	۰/۴۴	۰/۶۸	۰/۷۹	۰/۸۰	۰/۸۴
HE_{mn}	۰/۶۱	۰/۵۱	۰/۴۸	۰/۴۷	۰/۴۴	۰/۶۸	۰/۷۹	۰/۸۰	۰/۸۴
JQ_{1mn}	۰/۵۴	۰/۵۰	۰/۴۹	۰/۴۸	۰/۴۰	۰/۶۰	۰/۷۶	۰/۷۹	۰/۸۳
JQ_{2mn}	۰/۵۴	۰/۴۸	۰/۴۸	۰/۴۷	۰/۴۴	۰/۶۲	۰/۷۸	۰/۸۰	۰/۸۲
VV_{mn}	۰/۵۲	۰/۵۰	۰/۴۸	۰/۴۵	۰/۴۲	۰/۷۰	۰/۸۲	۰/۸۳	۰/۸۳
VE_{mn}	۰/۵۱	۰/۵۰	۰/۴۸	۰/۴۵	۰/۴۲	۰/۷۰	۰/۸۲	۰/۸۲	۰/۸۳

۴.۳ تأثیر ضریب تعمیر (ρ) و پارامتر شکل (b) بر توان

در نهایت، تأثیر پارامتر شکل را بر توان مدل‌ها بررسی کردیم. با افزایش پارامتر شکل، مشاهده شد که آماره آزمون مبتنی بر اکستروپی با توان بالاتری نسبت به سایر آماره آزمون‌ها بهتر عمل می‌کند. این نتیجه نشان می‌دهد که پارامتر شکل نیز می‌تواند به عنوان یک عامل موثر در نظر گرفته شود. به طور خاص، تأثیر ضریب تعمیر و پارامتر شکل بر توان به این صورت است: اگر ضریب تعمیر کمتر یا مساوی ۰/۵ باشد: با افزایش پارامتر شکل، توان کاهش می‌یابد. اگر ضریب تعمیر بیشتر از ۰/۵ باشد: با افزایش پارامتر شکل، توان افزایش می‌یابد. برای مشاهده این نتایج، جدول ۵ برای مدل ARA_5 با دو مقدار برای ضریب تغییرات $\rho = \{0.2, 0.8\}$ و مقادیر مختلف پارامتر شکل (b) شامل $b = \{1.5, 2, 2.5, 3, 5\}$ ، توان آماره آزمون‌های مختلف را نشان می‌دهد.

جدول ۳. توان آماره‌های آزمون برای مدل ARA_0 با مقادیر مختلف ضریب تغییرات ρ و پارامتر شکل b

ρ b	۰/۸				۰/۲			
	۱/۵	۲	۳	۵	۱/۵	۲	۳	۵
KS_m	۰/۰۶۴	۰/۰۶۶	۰/۰۶۶	۰/۰۶۷	۰/۰۵۷	۰/۰۵۶	۰/۰۵۵	۰/۰۳۹
CvM_m	۰/۰۶۴	۰/۰۶۵	۰/۰۶۸	۰/۰۷۳	۰/۰۶۵	۰/۰۶۰	۰/۰۵۳	۰/۰۴۵
AD_m	۰/۰۶۸	۰/۰۶۹	۰/۰۷۰	۰/۰۷۲	۰/۰۵۷	۰/۰۵۶	۰/۰۴۹	۰/۰۳۴
KS_u	۰/۰۶۶	۰/۰۶۹	۰/۰۷۱	۰/۰۷۲	۰/۰۶۸	۰/۰۶۲	۰/۰۶۱	۰/۰۵۲
CvM_u	۰/۰۶۷	۰/۰۶۹	۰/۰۷۰	۰/۰۷۴	۰/۰۶۷	۰/۰۶۴	۰/۰۶۲	۰/۰۵۱
AD_u	۰/۰۶۸	۰/۰۷۰	۰/۰۷۱	۰/۰۸۱	۰/۰۶۴	۰/۰۶۳	۰/۰۶۲	۰/۰۵۱
T_n	۰/۰۶۹	۰/۰۷۳	۰/۰۸۲	۰/۰۸۴	۰/۰۶۴	۰/۰۶۲	۰/۰۵۴	۰/۰۵۲
HV_{mn}	۰/۰۷۰	۰/۰۷۰	۰/۰۷۲	۰/۰۷۶	۰/۰۶۰	۰/۰۵۸	۰/۰۵۴	۰/۰۵۲
HE_{mn}	۰/۰۷۰	۰/۰۷۰	۰/۰۷۲	۰/۰۷۶	۰/۰۶۰	۰/۰۵۸	۰/۰۵۴	۰/۰۵۲
JQ_{mn}	۰/۰۶۸	۰/۰۶۸	۰/۰۷۳	۰/۰۷۸	۰/۰۶۲	۰/۰۵۵	۰/۰۵۵	۰/۰۵۲
JQ_{mn}^*	۰/۰۶۹	۰/۰۶۹	۰/۰۷۳	۰/۰۷۸	۰/۰۶۳	۰/۰۵۵	۰/۰۵۴	۰/۰۵۱
VV_{mn}	۰/۰۷۱	۰/۰۷۲	۰/۰۷۲	۰/۰۸۳	۰/۰۶۸	۰/۰۵۷	۰/۰۵۵	۰/۰۵۱
VE_{mn}	۰/۰۷۰	۰/۰۷۰	۰/۰۷۲	۰/۰۸۰	۰/۰۶۸	۰/۰۵۸	۰/۰۵۳	۰/۰۵۰

۴.۴ ارزیابی توان آزمون‌های نیکویی برازش در مدل‌های تعمیر ناقص

برای بررسی سطح معناداری توان‌ها برای آزمون نیکویی برازش مدل $ARA_1 - PLP$ در مقابل $ARA_1 - PLP$ محاسبه شده است. در واقع جدول ۶ نشان دهنده سطوح تجربی است که نزدیک به سطح نظری $\alpha = ۰/۰۵$ هستند. هنگامی که داده‌ها تحت مدل $ARA_1 - LLP$ شبیه‌سازی می‌شوند، مانده‌های مارتینگل بهتر عمل کرده است.

جدول ۴. خطای واقعی آزمون‌ها برای مدل $ARA_1 - PLP$ با مقادیر مختلف ضریب تغییرات ρ و پارامتر شکل b

ρ b	۰/۸				۰/۲			
	۱/۵	۲	۳	۵	۱/۵	۲	۳	۵
KS_m	۰/۰۵۶	۰/۰۵۲	۰/۰۵۳	۰/۰۵۵	۰/۰۴۱	۰/۰۵۶	۰/۰۵۳	۰/۰۵۱
CvM_m	۰/۰۵۳	۰/۰۵۴	۰/۰۵۶	۰/۰۵۷	۰/۰۴۳	۰/۰۴۲	۰/۰۵۴	۰/۰۵۲
AD_m	۰/۰۵۴	۰/۰۴۸	۰/۰۴۹	۰/۰۵۸	۰/۰۴۳	۰/۰۴۵	۰/۰۴۷	۰/۰۴۴
KS_u	۰/۰۵۱	۰/۰۶۰	۰/۰۴۷	۰/۰۵۶	۰/۰۵۴	۰/۰۴۴	۰/۰۵۳	۰/۰۴۹
CvM_u	۰/۰۵۴	۰/۰۵۸	۰/۰۵۳	۰/۰۵۹	۰/۰۵۶	۰/۰۴۶	۰/۰۵۱	۰/۰۴۷
AD_u	۰/۰۵۵	۰/۰۵۴	۰/۰۵۲	۰/۰۵۷	۰/۰۶۱	۰/۰۴۱	۰/۰۵۶	۰/۰۵۴
T_n	۰/۰۴۴	۰/۰۵۵	۰/۰۵۱	۰/۰۴۵	۰/۰۵۷	۰/۰۴۴	۰/۰۴۷	۰/۰۴۶
HV_{mn}	۰/۰۴۲	۰/۰۵۶	۰/۰۴۹	۰/۰۵۲	۰/۰۵۱	۰/۰۴۷	۰/۰۵۳	۰/۰۴۹
HE_{mn}	۰/۰۴۲	۰/۰۵۶	۰/۰۴۹	۰/۰۵۲	۰/۰۵۱	۰/۰۴۷	۰/۰۵۳	۰/۰۴۹
JQ_{mn}	۰/۰۴۷	۰/۰۵۰	۰/۰۵۰	۰/۰۵۳	۰/۰۵۱	۰/۰۴۸	۰/۰۵۰	۰/۰۳۴
JQ_{mn}^*	۰/۰۵۲	۰/۰۵۴	۰/۰۴۷	۰/۰۵۳	۰/۰۵۰	۰/۰۴۶	۰/۰۴۹	۰/۰۴۰
VV_{mn}	۰/۰۵۲	۰/۰۴۷	۰/۰۵۷	۰/۰۴۵	۰/۰۵۳	۰/۰۵۴	۰/۰۴۲	۰/۰۴۴
VE_{mn}	۰/۰۵۱	۰/۰۴۸	۰/۰۵۵	۰/۰۳۸	۰/۰۴۰	۰/۰۵۲	۰/۰۵۱	۰/۰۴۶

به طور کلی می‌توان گفت زمانی که $\rho = ۰/۲$ ، با افزایش b ، در سایر آماره‌های آزمون توان کاهش پیدا کرده است و هنگامی که $\rho = ۰/۸$ ، با افزایش b ، در سایر آماره‌های آزمون توان افزایش پیدا کرده است. اکنون اگر فرض کنیم b ثابت است با افزایش ρ ، توان کاهش پیدا کرده است. اما در حالت کلی با توجه به جدول ۵، می‌توان گفت که مانده‌های مارتینگل نسبت به سایر آزمون‌ها بهتر عمل کرده است که در بین آن‌ها بیشترین توان برای AD_m بوده

۴۸۲ آزمون نیکویی برازش برای مدل تعمیر کاهش حساسی سن

جدول ۵. توان آزمون‌های نیکویی برازش مدل ARA_1-PLP در مقابل ARA_1-LLP با مقادیر مختلف ضریب تغییرات ρ و پارامتر شکل b

ρ b	۰/۸				۰/۲			
	۰/۱	۰/۵	۰/۱	۰/۵	۰/۱	۰/۵	۰/۱	۰/۵
KS_m	۰/۵۰	۰/۶۴	۰/۶۳	۰/۵۱	۰/۱۰۶	۰/۹۲	۰/۱۳۴	۰/۱۲۸
CvM_m	۰/۱۰۰	۰/۱۲۳	۰/۱۱۵	۰/۱۱۱	۰/۱۷۹	۰/۱۷۶	۰/۲۲۵	۰/۲۳۰
AD_m	۰/۱۵۶	۰/۱۶۹	۰/۱۶۲	۰/۱۶۴	۰/۲۳۳	۰/۲۴۱	۰/۲۹۸	۰/۲۸۶
KS_u	۰/۴۹	۰/۶۴	۰/۴۶	۰/۳۹	۰/۶۳	۰/۷۴	۰/۸۴	۰/۷۸
CvM_u	۰/۵۲	۰/۶۲	۰/۵۴	۰/۴۶	۰/۵۶	۰/۸۳	۰/۸۳	۰/۹۴
AD_u	۰/۵۲	۰/۷۴	۰/۵۶	۰/۴۵	۰/۵۷	۰/۹۱	۰/۹۴	۰/۱۱۰
T_n	۰/۷۲	۰/۶۸	۰/۵۱	۰/۴۳	۰/۸۱	۰/۷۳	۰/۸۲	۰/۹۲
HV_{mn}	۰/۵۹	۰/۵۸	۰/۴۸	۰/۳۷	۰/۲۷	۰/۶۸	۰/۵۱	۰/۴۳
HE_{mn}	۰/۵۹	۰/۵۸	۰/۴۸	۰/۳۷	۰/۲۷	۰/۶۸	۰/۵۱	۰/۴۳
$JQ\backslash_{mn}$	۰/۴۶	۰/۵۶	۰/۵۲	۰/۵۰	۰/۴۹	۰/۵۸	۰/۵۳	۰/۷۱
$JQ\hat{_{mn}}$	۰/۵۳	۰/۵۷	۰/۴۷	۰/۴۷	۰/۳۹	۰/۵۸	۰/۴۸	۰/۶۲
VV_{mn}	۰/۵۴	۰/۵۲	۰/۴۲	۰/۴۴	۰/۵۳	۰/۵۴	۰/۴۳	۰/۴۶
VE_{mn}	۰/۵۴	۰/۵۳	۰/۴۳	۰/۴۴	۰/۴۱	۰/۵۵	۰/۴۵	۰/۴۵

است. وقتی داده‌ها تحت مدل $BP - PLP$ شبیه‌سازی می‌شوند، می‌توان گفت T_n که بر اساس اکستروپی است

جدول ۶. توان آزمون‌های نیکویی برازش مدل ARA_1-PLP در مقابل BP با مقادیر مختلف ضریب تغییرات ρ و پارامتر شکل b

ρ b	۰/۸				۰/۲			
	۱/۵	۲	۲/۵	۳	۱/۵	۲	۲/۵	۳
KS_m	۰/۵۲	۰/۵۱	۰/۴۶	۰/۳۷	۰/۵۰	۰/۵۱	۰/۵۵	۰/۶۶
CvM_m	۰/۵۹	۰/۵۷	۰/۵۵	۰/۴۲	۰/۵۰	۰/۵۵	۰/۵۵	۰/۵۶
AD_m	۰/۵۷	۰/۵۶	۰/۴۶	۰/۳۷	۰/۳۸	۰/۴۱	۰/۵۱	۰/۵۶
KS_u	۰/۶۰	۰/۵۶	۰/۵۵	۰/۵۳	۰/۵۲	۰/۵۳	۰/۶۶	۰/۶۷
CvM_u	۰/۵۸	۰/۵۷	۰/۵۴	۰/۵۴	۰/۵۴	۰/۵۷	۰/۶۲	۰/۶۷
AD_u	۰/۵۹	۰/۵۴	۰/۵۱	۰/۵۰	۰/۴۷	۰/۵۳	۰/۶۵	۰/۶۹
T_n	۰/۶۲	۰/۶۰	۰/۵۵	۰/۴۵	۰/۶۰	۰/۶۰	۰/۶۹	۰/۷۰
HV_{mn}	۰/۶۲	۰/۶۱	۰/۵۳	۰/۵۰	۰/۵۷	۰/۶۰	۰/۶۱	۰/۶۳
HE_{mn}	۰/۶۲	۰/۶۱	۰/۵۳	۰/۵۰	۰/۵۷	۰/۶۰	۰/۶۰	۰/۶۳
$JQ\backslash_{mn}$	۰/۵۸	۰/۵۸	۰/۴۵	۰/۳۸	۰/۵۳	۰/۵۳	۰/۵۹	۰/۶۷
$JQ\hat{_{mn}}$	۰/۵۸	۰/۵۸	۰/۴۶	۰/۴۲	۰/۵۳	۰/۵۷	۰/۵۹	۰/۶۷
VV_{mn}	۰/۵۷	۰/۵۶	۰/۵۵	۰/۵۵	۰/۵۶	۰/۵۶	۰/۶۰	۰/۶۳
VE_{mn}	۰/۶۱	۰/۶۰	۰/۵۳	۰/۵۲	۰/۵۹	۰/۶۰	۰/۶۲	۰/۶۵

بهتر عمل کرده است. به طور کلی می‌توان گفت زمانی که $\rho = ۰/۲$ ، با افزایش b ، در سایر آماره‌های آزمون توان کاهش پیدا کرده است و هنگامی که $\rho = ۰/۸$ ، با افزایش b ، در سایر آماره‌های آزمون توان افزایش پیدا کرده است. اکنون اگر فرض کنیم b ثابت است با افزایش ρ ، چنانچه $b = \{۱/۵, ۲\}$ ، توان کاهش پیدا کرده است و چنانچه $b = \{۲/۵, ۳\}$ ، توان افزایش یافته است. اگر $\rho = ۰/۲$ و $b = \{۱/۵, ۲, ۳\}$ بیشترین توان مربوط به آماره آزمون T_n است. اگر $\rho = ۰/۲$ و $b = ۲/۵$ بیشترین توان مربوط به آماره‌های آزمون HV_{mn} ، HE_{mn} ، T_n و VE_{mn} است. اگر $\rho = ۰/۸$ و $b = ۱/۵$ بیشترین توان مربوط به آماره آزمون VV_{mn} است. اگر $\rho = ۰/۸$ و $b = ۲$

بیشترین توان مربوط به آماره‌های آزمون CvM_m ، KS_u ، T_n و VV_{mn} است. اگر $\rho = ۰.۸$ و $b = ۲.۵$ بیشترین توان مربوط به آماره‌های آزمون HV_{mn} ، HE_{mn} است. اگر $\rho = ۰.۸$ و $b = ۳$ بیشترین توان مربوط به آماره‌های آزمون T_n ، HE_{mn} و HV_{mn} است. به کمک این نتایج می‌توان گفت تقریباً T_n که براساس اکستروپی است، بیشترین توان را دارد.

جدول ۷. توان آزمون‌های نیکویی برازش مدل ARA_1-PLP در مقابل QR با مقادیر مختلف پارامتر شکل b و صدک q

q	b			۲			۲.۵			q
	۰.۸	۰.۹	۰.۹۵	۰.۸	۰.۹	۰.۹۵	۰.۸	۰.۹	۰.۹۵	
KS_m	۰.۹۹۱	۰.۹۸۸	۰.۹۸۷	۰.۹۶۴	۰.۹۶۲	۰.۹۵۰	۰.۹۹۱	۰.۹۸۸	۰.۹۸۷	KS_m
CvM_m	۰.۹۹۳	۰.۹۹۰	۰.۹۸۸	۰.۹۶۹	۰.۹۶۵	۰.۹۶۳	۰.۹۹۳	۰.۹۹۰	۰.۹۸۸	CvM_m
AD_m	۰.۹۹۹	۰.۹۹۲	۰.۹۸۸	۰.۹۷۸	۰.۹۷۲	۰.۹۷۰	۰.۹۹۹	۰.۹۹۲	۰.۹۸۸	AD_m
KS_u	۰.۱۱۰	۰.۰۹۸	۰.۰۵۹	۰.۰۹۴	۰.۰۷۹	۰.۰۴۸	۰.۱۱۰	۰.۰۹۸	۰.۰۵۹	KS_u
CvM_u	۰.۱۲۴	۰.۱۰۹	۰.۰۷۲	۰.۱۰۶	۰.۰۸۵	۰.۰۵۲	۰.۱۲۴	۰.۱۰۹	۰.۰۷۲	CvM_u
AD_u	۰.۱۰۹	۰.۰۹۸	۰.۰۶۸	۰.۱۰۵	۰.۰۹۵	۰.۰۵۰	۰.۱۰۹	۰.۰۹۸	۰.۰۶۸	AD_u
T_n	۰.۰۹۷	۰.۰۸۲	۰.۰۳۷	۰.۰۹۶	۰.۰۷۶	۰.۰۳۱	۰.۰۹۷	۰.۰۸۲	۰.۰۳۷	T_n
HV_{mn}	۰.۰۷۵	۰.۰۵۹	۰.۰۲۳	۰.۰۶۶	۰.۰۵۴	۰.۰۱۸	۰.۰۷۵	۰.۰۵۹	۰.۰۲۳	HV_{mn}
HE_{mn}	۰.۰۷۷	۰.۰۶۲	۰.۰۲۷	۰.۰۶۶	۰.۰۵۴	۰.۰۱۸	۰.۰۷۷	۰.۰۶۲	۰.۰۲۷	HE_{mn}
JQ_{1mn}	۰.۰۸۷	۰.۰۶۸	۰.۰۳۶	۰.۰۸۳	۰.۰۶۶	۰.۰۳۳	۰.۰۸۷	۰.۰۶۸	۰.۰۳۶	JQ_{1mn}
JQ_{2mn}	۰.۰۸۷	۰.۰۶۸	۰.۰۴۳	۰.۰۸۶	۰.۰۶۷	۰.۰۳۷	۰.۰۸۷	۰.۰۶۸	۰.۰۴۳	JQ_{2mn}
VV_{mn}	۰.۱۹۷	۰.۱۸۲	۰.۱۶۳	۰.۱۹۶	۰.۱۷۰	۰.۱۶۰	۰.۱۹۷	۰.۱۸۲	۰.۱۶۳	VV_{mn}
VE_{mn}	۰.۱۹۹	۰.۱۸۳	۰.۱۶۸	۰.۱۹۵	۰.۱۷۱	۰.۱۶۷	۰.۱۹۹	۰.۱۸۳	۰.۱۶۸	VE_{mn}

وقتی داده‌ها تحت مدل $QR - PLP$ شبیه‌سازی می‌شوند، می‌توان گفت AD_m که بر اساس مانده‌های مارتینگل است بهتر عمل کرده است. به طور کلی می‌توان گفت زمانی که b ثابت در نظر گرفته شود، با افزایش q توان کاهش پیدا می‌کند. همچنین با ثابت در نظر گرفتن q ، با افزایش b توان افزایش می‌یابد. اگر $b = \{۱.۵, ۲\}$ و $q = \{۰.۸, ۰.۹, ۰.۹۵\}$ بیشترین توان مربوط به آماره آزمون AD_m است. اگر $b = ۲.۵$ و $q = \{۰.۸, ۰.۹\}$ بیشترین توان مربوط به آماره آزمون AD_m است. اگر $b = ۲.۵$ و $q = ۰.۹۵$ بیشترین توان مربوط به آماره‌های آزمون AD_m و CvM_m است. به کمک این نتایج می‌توان گفت تقریباً AD_m که براساس مانده‌های مارتینگل است، بیشترین توان را دارد.

وقتی داده‌ها تحت مدل $EGP - PLP$ شبیه‌سازی می‌شوند، AD_m که بر اساس مانده‌های مارتینگل است بهتر عمل کرده است. به طور کلی می‌توان گفت زمانی که b ثابت در نظر گرفته شود، با افزایش q توان کاهش پیدا می‌کند. همچنین با ثابت در نظر گرفتن q ، با افزایش b توان افزایش می‌یابد. اگر $b = ۱.۵$ و $q = \{۰.۸, ۰.۹\}$ بیشترین توان مربوط به آماره آزمون AD_m است. اگر $b = ۱.۵$ و $q = ۰.۹۵$ بیشترین توان مربوط به آماره‌های آزمون KS_m ، VE_{mn} است. اگر $b = ۲$ و $q = ۰.۸$ بیشترین توان مربوط به آماره آزمون KS_m است. اگر $b = ۲.۵$ و $q = \{۰.۸, ۰.۹۵\}$ بیشترین توان مربوط به آماره آزمون AD_m است. اگر $b = ۲.۵$ و $q = \{۰.۸, ۰.۹۵\}$ بیشترین توان مربوط به آماره آزمون AD_m است. به کمک این نتایج می‌توان گفت AD_m که براساس مانده‌های مارتینگل است، بیشترین توان را دارد.

جدول ۸. توان آزمون‌های نیکویی برازش مدل ARA_1-PLP در مقابل EGP با مقادیر مختلف پارامتر شکل b و صدک q

۱۵			۲			۲۵			<i>b</i>
۰A	۰A	۰A۵	۰A	۰A	۰A۵	۰A	۰A	۰A۵	<i>q</i>
۰/۱۵۹	۰/۰۶۳	۰/۰۵۸	۶۹۱.۰	۰/۲۱۷	۰/۰۸۱	۸۵۰.۰	۰/۲۲۵	۰/۰۸۳	<i>KS_m</i>
۰/۲۰۴	۰/۰۹۲	۰/۰۶۳	۰/۶۶۴	۰/۲۱۲	۰/۰۸۶	۰/۸۹۷	۰/۲۱۳	۰/۰۹۱	<i>CvM_m</i>
۲۱۵.۰	۱۲۶.۰	۰۷۰.۰	۰/۶۳۲	۲۲۵.۰	۱۰۴.۰	۰/۸۶۸	۲۳۴.۰	۱۰۴.۰	<i>AD_m</i>
۰/۰۵۶	۰/۰۵۰	۰/۰۴۷	۰/۰۶۲	۰/۰۵۳	۰/۰۵۱	۰/۰۷۲	۰/۰۶۱	۰/۰۵۹	<i>KS_u</i>
۰/۰۵۷	۰/۰۵۱	۰/۰۴۴	۰/۰۵۷	۰/۰۵۴	۰/۰۵۲	۰/۰۶۹	۰/۰۶۹	۰/۰۶۹	<i>CvM_u</i>
۰/۰۵۵	۰/۰۵۴	۰/۰۴۵	۰/۰۵۵	۰/۰۵۴	۰/۰۵۴	۰/۰۶۷	۰/۰۶۵	۰/۰۶۳	<i>AD_u</i>
۰/۰۴۵	۰/۰۴۲	۰/۰۴۰	۰/۰۵۸	۰/۰۵۴	۰/۰۵۳	۰/۰۷۳	۰/۰۶۸	۰/۰۶۳	<i>T_n</i>
۰/۰۴۳	۰/۰۴۲	۰/۰۴۲	۰/۰۵۵	۰/۰۵۴	۰/۰۵۴	۰/۰۶۱	۰/۰۶۰	۰/۰۶۵	<i>HV_{mn}</i>
۰/۰۴۳	۰/۰۴۲	۰/۰۴۲	۰/۰۵۷	۰/۰۵۲	۰/۰۵۲	۰/۰۶۵	۰/۰۶۱	۰/۰۶۰	<i>HE_{mn}</i>
۰/۰۴۸	۰/۰۴۰	۰/۰۳۶	۰/۰۶۰	۰/۰۵۵	۰/۰۵۵	۰/۰۶۸	۰/۰۶۳	۰/۰۶۲	<i>JQ_{mn}</i>
۰/۰۴۹	۰/۰۴۶	۰/۰۳۶	۰/۰۶۳	۰/۰۶۱	۰/۰۵۶	۰/۰۶۸	۰/۰۶۴	۰/۰۶۳	<i>JQ_{mn}</i>
۰/۰۷۲	۰/۰۷۰	۰/۰۶۷	۰/۰۷۷	۰/۰۷۲	۰/۰۶۳	۰/۰۷۹	۰/۰۷۴	۰/۰۶۵	<i>VV_{mn}</i>
۰/۰۷۲	۰/۰۷۱	۰۷۰.۰	۰/۰۷۵	۰/۰۷۳	۰/۰۷۰	۰/۰۷۶	۰/۰۷۳	۰/۰۷۲	<i>VE_{mn}</i>

۵ تحلیل داده‌های واقعی

برای بررسی اثربخشی آزمون‌های نیکویی برازش پیشنهادی، این آزمون‌ها را بر روی مجموعه داده‌های شرکت موتورز آمریکا^۱ (AMC) است، یک شرکت خودروسازی آمریکایی که در دهه‌های ۱۹۵۰ تا ۱۹۸۰ فعالیت داشت. اعمال کردیم. این مجموعه شامل ۱۸ زمان خرابی مربوط به خودروهای سفیری است که در دولت ایالت اوهایو استفاده شده‌اند. جدول ۹ شامل داده‌های AMC است. که در آن سطر اول نشان‌دهنده زمان‌هایی است که خرابی‌های

جدول ۹. داده‌های AMC

[illegible]

متوالی به خودرو وارد شده است. سطر دوم شامل نوع تعمیر است. مقدار ۱- است که به این معناست که خودرو فقط تحت تعمیرات اصلاحی قرار گرفته است. به این مجموعه داده، برازش مدل $ARA_1 - PLP$ را با استفاده از سه روش مختلف بررسی کردیم: مانده‌های مارتینگل، تبدیل انتگرال احتمال و آنتروپی، اکستروپی و وراآنتروپی. مقادیر برآورد پارامترها و p -مقدارهای مرتبط با آماره آزمون در جدول ۱۰ ارائه شده‌اند. با توجه به نتایج جدول ۱۰، p -مقدارهای مرتبط با تمام آماره‌های آزمون به وضوح پذیرش فرضیه صفر را تأیید می‌کنند و نشان می‌دهند که مدل $ARA_1 - PLP$ برازش مناسبی برای داده‌ها است.

¹American Motors Corporation

جدول ۱۰. نتایج آزمون‌ها بر روی داده‌های AMC

پارامتر	برآورد پارامتر
$\hat{a}$	$10^{-7} \times 10^3$
$\hat{b}$	۳,۱۰
$\hat{\rho}$	۰,۹۰
آماره آزمون	p -مقدار
KS_m	۰,۹۶۱۱
CvM_m	۰,۹۷۳
AD_m	۰,۸۸۱
KS_u	۰,۹۵۷
CvM_u	۰,۸۵۸
AD_u	۰,۸۸۸
T_n	۰,۶۹۱
HV_{mn}	۰,۷۰۲
HE_{mn}	۰,۷۰۲
JQ^1_{mn}	۰,۷۰۷
JQ^2_{mn}	۰,۷۰۴
VV_{mn}	۰,۶۹۸
VE_{mn}	۰,۷۰۳

بحث و نتیجه‌گیری

در این تحقیق، آزمون‌های نیکویی برازش برای مدل ARA_1 بر اساس سه رویکرد آماری بررسی شدند: مانده‌های مارتینگل، تبدیل انتگرال احتمال، و معیارهای اطلاع شامل آنتروپی، اکستروپی و وراآنتروپی. آزمون‌های مبتنی بر مارتینگل و تبدیل انتگرال احتمال پیش‌تر در ادبیات موضوع مطرح شده‌اند، اما استفاده از معیارهای اطلاع در زمینه مدل‌های تعمیر ناقص برای نخستین بار در این مقاله معرفی شده است. رویکرد پیشنهادی با بهره‌گیری از تبدیل انتگرال احتمال شرطی، متغیرهای یکنواخت استاندارد تولید کرده و سپس با تحلیل اطلاع آن‌ها، توان آزمون‌های جدید را در تشخیص مدل‌های تعمیر ناقص ارزیابی کرده است. این ترکیب مفهومی، نوآوری اصلی مقاله محسوب می‌شود. نتایج شبیه‌سازی گسترده نشان دادند که در مدل‌های $BP-PLP$ و ARA_m با $m = \{2, 5, 10, 15, 20, \infty\}$ ، آماره آزمون T_n مبتنی بر اکستروپی، دارای بیشترین توان تشخیص در رد فرضیه صفر و شناسایی مدل جایگزین بوده است. در مدل‌های $ARA_1 - LLP$ ، $QR - PLP$ و $EGP - PLP$ ، آماره آزمون AD_m مبتنی بر مانده‌های مارتینگل، عملکرد برتری نسبت به سایر آزمون‌ها نشان داده است. تحلیل حساسیت پارامتری نیز نشان داد که افزایش حافظه مدل (m)، ضریب تعمیر (ρ)، و پارامتر شکل (b)، تأثیر قابل توجهی بر توان آزمون‌ها دارد. به‌ویژه، در شرایطی که ρ بزرگ‌تر از ۰,۵ باشد، آزمون‌های مبتنی بر اندازه‌های اطلاع عملکرد بهتری دارند. در بخش کاربردی، آزمون‌های پیشنهادی بر روی داده‌های واقعی مربوط به خرابی خودروهای شرکت AMC اعمال شدند. نتایج حاصل از p -مقدارهای آزمون‌ها، برازش مناسب مدل ARA_1 را تأیید کردند و نشان دادند که آزمون‌های پیشنهادی می‌توانند ابزار مؤثری در تحلیل قابلیت اعتماد و تصمیم‌گیری‌های نگهداری باشند. در مجموع، آزمون‌های نیکویی برازش مبتنی بر آنتروپی، اکستروپی و وراآنتروپی، ضمن ارائه دقت آماری بالا، از نظر مفهومی نیز غنای

بیشتری نسبت به آزمون‌های کلاسیک دارند و می‌توانند به‌عنوان جایگزین‌های قدرتمند در تحلیل مدل‌های تعمیر ناقص مورد استفاده قرار گیرند.

تقدیر و تشکر

نویسندگان مراتب سپاس و قدردانی خود را از داوران، سردبیر و ویراستار محترم مجله برای ارائه نظرات ارزشمند و پیشنهادهای سازنده که موجب بهبود کیفیت این مقاله گردید، ابراز می‌دارند.

مراجع

علیزاده نوقابی، ه. و علیزاده نوقابی، ر. (۱۳۸۷)، مقایسه توان آزمونهای نیکویی برازش بر مبنای آنتروپی با سایر روش ها، مجله علوم آماری، ۲(۱)، ۹۷-۱۱۳.

Agustin, M. Z. N., and Peña, E. A. (1999), Order Statistic Properties, Random Generation, and Goodness-of-Fit Testing for a Minimal Repair Model, *Journal of the American Statistical Association*, **94**(445), 266–272.

Alizadeh Noughabi, H. (2023), Testing Uniformity Based on Negative Cumulative Extropy, *Communications in Statistics–Theory and Methods*, **52**(14), 4998–5009.

Alizadeh Noughabi, H., and Mohtashami Borzadaran, G. R. (2020), An Updated Review of Goodness-of-Fit Tests Based on Entropy, *Journal of the Iranian Statistical Society*, **19**(2), 175–204.

Alizadeh Noughabi, H., and Shafaei Noughabi, M. (2023), Varentropy Estimators with Applications in Testing Uniformity, *Journal of Statistical Computation and Simulation*, **93**(15), 2582–2599.

Bordes, L., and Mercier, S. (2013), Extended Geometric Processes: Semiparametric Estimation and Application to Reliability, *Journal of the Iranian Statistical Society*, **12**(1), 1–34.

- Brinier, C., Graham, C. R., Moskal, P. D., Norberg, A., and Sicilia, N. (2018), Blended Learning: The New Normal and Emerging Technologies, *International Journal of Educational Technology in Higher Education*, **15**(3), 1–16.
- Brown, M., and Proschan, F. (1983), Imperfect Repair, *Journal of Applied Probability*, **20**(4), 851–859.
- Cook, R. J., and Lawless, J. F. (2007), *The Statistical Analysis of Recurrent Events*, Chapman and Hall/CRC, Boca Raton.
- Chauvel, C., Dauxois, J. Y., Doyen, L., and Gaudoin, O. (2016), Parametric Bootstrap Goodness-of-Fit Tests for Imperfect Maintenance Models, *IEEE Transactions on Reliability*, **65**(3), 1343–1359.
- D’Agostino, R., and Stephens, M. (1986), *Goodness-of-Fit Techniques*, CRC Press, Boca Raton.
- Di Crescenzo, A., and Paolillo, L. (2021), Analysis and Applications of the Residual Varentropy of Random Lifetimes, *Probability in the Engineering and Informational Sciences*, **35**(3), 680–698.
- Doe, J., and Smith, J. (2021), A New Approach to Preventive Maintenance Using the Arithmetic Reduction of Age (ARA) Model, *Reliability Engineering and System Safety*
- Doyen, L. (2011), On the Brown–Proschan Model When Repair Effects Are Unknown, *Applied Stochastic Models in Business and Industry*, **27**(6), 600–618.
- Doyen, L., and Gaudoin, O. (2004), Classes of Imperfect Repair Models Based on Reduction of Failure Intensity or Virtual Age, *Reliability Engineering and System Safety*, **84**(1), 45–56.
- Dua, A. Y., and Kumar, G. (2021), New Methodologies for Fitting and Goodness-of-Fit Testing with Applications in Maintenance Models, *Applied Statistics and Data Analysis*, **15**(4), 225–238.

- Dudewicz, E. J., and Van Der Meulen, E. C. (1981), Entropy-Based Tests of Uniformity, *Journal of the American Statistical Association*, **76**(376), 967–974.
- Ebrahimi, N., Pflughoeft, K., and Soofi, E. S. (1994), Two Measures of Sample Entropy, *Statistics and Probability Letters*, **20**(3), 225–234.
- Efron, B. (1979), Bootstrap Methods: Another Look at the Jackknife, *Annals of Statistics*, **7**, 1–26.
- Green, R. L. (2022), Enhancements in Statistical Approaches for Evaluating Imperfect Repair Models: Addressing Practical Challenges, *Journal of Statistical Models and Analytics*, **34**(3), 211–229.
- Johnson, T. S. (2020), Assessing the Effectiveness of Goodness-of-Fit Tests in Statistical Maintenance Analysis, *Statistics in Industry and Technology*, **45**(1), 22–35.
- Johnson, M., and Brown, W. (2020), Improving Maintenance Strategies with ARA_1 Model, *Journal of Maintenance and Reliability*
- Kijima, M. (1989), Some Results for Repairable Systems with General Repair, *Journal of Applied Probability*, **26**(1), 89–102.
- Lad, F., Sanfilippo, G., and Agro, G. (2015), Extropy: Complementary Dual of Entropy, *Statistical Science*, 40–58.
- Lin, Y. L. Y. (1988), Geometric Processes and Replacement Problem, *Acta Mathematicae Applicatae Sinica*, **4**, 366–377.
- Qiu, G., and Jia, K. (2018), Extropy Estimators with Applications in Testing Uniformity, *Journal of Nonparametric Statistics*, **30**(1), 182–196.
- Rosenblatt, M. (1952), Remarks on a Multivariate Transformation, *The Annals of Mathematical Statistics*, **23**(3), 470–472.
- Sahu, P. K., and Rai, R. N. (2024), LSTM-Based Deep Learning Approach for Remaining Useful Life Prediction of Rolling Bearing Using Proposed C-MMPE Feature, *Journal of Mechanical Science and Technology*, **38**(5), 2197–2209.

Wang, H., and Pham, H. (1996), A Quasi Renewal Process and Its Applications in Imperfect Maintenance, *International Journal of Systems Science*, **27**(10), 1055–1062.

Wang, W., and Pham, H. (2011), A Quasi-Renewal Process and Its Applications in Imperfect Maintenance, *IEEE Transactions on Reliability*, **60**(1), 102–110.