



Estimation of Traffic Intensity Parameter and Stationarity Probability of $M/M/c$ Queuing System Under a Stop Time in the System

Yaghoobzadeh Shahrastani, S. 

Department of Statistics, Pyame Noor University, Tehran, Iran.

Corresponding author: S. Yaghoobzadeh, yagoubzade@pnu.ac.ir

Received: 8/7/2022 Revised: 8/12/2022 Accepted and Published Online: 20/12/2022.

Introduction

Queuing theory is one of the important topics of analysis of systems that have a function based on the entry, exit and service. This theory is also important in engineering systems. One of its important applications is the performance analysis and evaluation of computer systems that place service tasks to be performed in the queue system with different inputs and outputs. It has special importance in analyzing real-world problems and simulation systems in engineering and computer sciences. In queuing theory, the queuing model estimates the system's actual queuing state; therefore, the queuing behaviour can have a mathematical analysis. Queuing models have a fixed state in the structure and representation of the queuing system. In this way, stochastic models estimate the probability that the queuing system can find a particular configuration state. Queuing theory is the mathematical study of waiting queues. Operational studies on queuing theory help businesses decide which resources are needed to provide services. Queuing theory is generally considered a branch of operations research because the results are usually used when deciding the resources needed to provide services. In this article, it is assumed that the arrival rate of customers to the queuing system $M/M/c$ has an exponential distribution with parameter λ and the service rate of customers has an exponential distribution with parameter μ and is independent of the arrive rate. It is also assumed that the system is active until time T . Under this stopping time, maximum likelihood estimation and bayesian estimation under general entropy loss functions and weighted error square, as well as under-informed and uninformed prior distributions, the system traffic intensity parameter $M/M/c$ and system stationarity probab-

ity are obtained. Using the system stationarity probability estimation under maximum likelihood and Bayes estimation methods, we decide which traffic intensity parameter estimation is more suitable. The appropriate estimator is the estimator that has a larger stationarity probability estimate. Using Monte Carlo simulation and a numerical example, it was concluded that the maximum likelihood estimation of the traffic intensity parameter is better than the Bayes estimation under certain conditions. Under the same conditions, the Bayes estimation is better.

Material and Methods

The statistical methods used in this article are the maximum likelihood estimation method and the Bayes estimation method. The estimated parameters are the traffic intensity and stationarity probability of model $M/M/c$.

Results and Discussion

Using the system stationarity probability estimation under maximum likelihood and Bayes estimation methods, we decide which traffic intensity parameter estimation is more suitable. The appropriate estimator is the estimator that has a larger stationarity probability estimate.

Conclusion Using Monte Carlo simulation and a numerical example, it was concluded that the maximum likelihood estimation of the traffic intensity parameter is better than the Bayes estimation under certain conditions. Under the same conditions, the Bayes estimation is better.

Keywords: Traffic intensity parameter, System stationarity probability, The $M/M/c$ queuing system, Stop time, General entropy loss function, Weighted error square loss function.

Mathematics Subject Classification (2010): 62F10 60K25.



©The Author(s). The Publisher is Iranian Statistical Society.

This is an open access article distributed under the terms and conditions of [\(CC BY-NC 4.0\)](https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/)

برآورد پارامتر شدت ترافیک و احتمال پایایی مدل صف‌بندی $M/M/c$ تحت یک زمان توقف در سیستم

شهرام یعقوب‌زاده شهرستانی

گروه آمار، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران

نویسنده مسئول: شهرام یعقوب‌زاده شهرستانی، yagoubzade@pnu.ac.ir

تاریخ دریافت: ۱۴۰۱/۴/۱۷ تاریخ بازنگری: ۱۴۰۱/۹/۱۷ تاریخ پذیرش و انتشار: ۱۴۰۱/۹/۲۹

چکیده: در این مقاله فرض می‌شود نرخ ورود متقاضیان به سیستم صف‌بندی $M/M/c$ دارای توزیع نمایی با پارامتر λ و نرخ سرویس متقاضیان دارای توزیع نمایی با پارامتر μ و مستقل از نرخ ورود است. همچنین فرض می‌شود سیستم تا زمان T (زمان توقف) فعال است. تحت این زمان توقف، برآورد ماکسیمم درست‌نمایی و برآورد بیزی تحت تابع‌های زیان آنتروپی عمومی و توان دوم خطای موزون و همچنین تحت توزیع پیشین آگاهی‌بخش و ناآگاهی‌بخش، پارامتر شدت ترافیک و احتمال پایایی سیستم $M/M/c$ به دست آورده می‌شوند. سپس برآوردگرهای به دست آورده شده، به کمک روش شبیه‌سازی مونت‌کارلو و یک مثال عددی با هم مقایسه می‌شوند، تا برآوردگر مناسب‌تر تعیین شود. **واژه‌های کلیدی:** پارامتر شدت ترافیک، احتمال پایایی سیستم، سیستم صف‌بندی $M/M/c$ ، زمان توقف، تابع زیان آنتروپی عمومی، تابع زیان توان دوم خطای موزون. **کد موضوع‌بندی ریاضی (۲۰۱۰):** 60K25, 62F10.

۱ مقدمه

روش‌های برآورد ماکسیمم درست‌نمایی و بیزی در نظریه صف‌بندی مورد توجه بسیاری از پژوهشگران قرار گرفته است. برآورد ماکسیمم درست‌نمایی پارامترهای مدل صف‌بندی $M/M/1$ در حالت پایا^۱، توسط کلارک (۱۹۵۷)، برآورد



©نویسندگان). ناشر انجمن آمار ایران است.

این مقاله با دسترسی آزاد تحت شرایط و ضوابط (CC BY-NC 4.0) توزیع شده است.

¹Stationary (Steady state)

بیزی نرخ‌های ورود و سرویس در مدل‌های صف‌بندی $M/M/1$ و $M/M/\infty$ توسط [موداپور \(۱۹۷۲\)](#)، برآورد بیزی تجربی^۱ پارامترهای مدل‌های صف‌بندی $M/M/1$ و $M/M/\infty$ و خواص مجانبی آن‌ها توسط [تیروویارو و باسوا \(۱۹۹۲\)](#)، برآورد زمان انتظار در مدل صف‌بندی $M/M/1$ در حالت چوله به راست بودن توزیع آن توسط [چاودوری و موخرجی \(۲۰۱۱\)](#)، برآوردهای ماکسیمم درست‌نمایی و بیزی پارامتر شدت ترافیک^۲ مدل صف‌بندی $M/M/1$ توسط [چاودوری و موخرجی \(۲۰۱۳\)](#)، هم‌ارزی نتایج برآورد پارامترهای مدل صف‌بندی $M/M/1$ به روش‌های بیزی و ماکسیمم درست‌نمایی توسط [سینگ و آچاریا \(۲۰۱۹\)](#)، برآورد ناپارامتری زمان سرویس در مدل‌های صف‌بندی با سرویس دهندگان نامتناهی و با ورودی پواسن توسط [گولدن شروگر و کوپس \(۲۰۱۹\)](#)، برآورد ناپارامتری توزیع زمان سرویس در مدل‌های صف‌بندی زمان-گسسته توسط [سچویر و ویچل هوس \(۲۰۲۰\)](#)، برآوردهای ماکسیمم درست‌نمایی و بیزی پارامتر شدت ترافیک مدل صف‌بندی $M/D/1$ توسط [چاندراسخار و همکاران \(۲۰۲۱\)](#) ارائه شده‌اند.

در این مقاله برآورد ماکسیمم درست‌نمایی و بیزی پارامتر شدت ترافیک در مدل صف‌بندی $M/M/c$ تحت یک زمان توقف به دست آورده می‌شود. ایده اصلی آن است که احتمال پایایی سیستم، بر اساس نمونه معرفی و برآورد ماکسیمم درست‌نمایی و بیزی آن محاسبه شده و با استفاده از آن، برآوردهای پارامتر شدت ترافیک با هم مقایسه شوند. در بخش ۲ مفاهیم اولیه و برآورد ماکسیمم درست‌نمایی پارامتر شدت ترافیک و احتمال پایایی سیستم صف‌بندی $M/M/c$ ارائه می‌شود. در بخش ۳ برآورد بیزی پارامتر شدت ترافیک و احتمال پایایی سیستم $M/M/c$ تحت تابع‌های زیان آنتروپی عمومی و توان دوم خطای موزون و تحت توزیع پیشین آگاهی‌بخش، مطرح می‌شود. در بخش ۴ برآورد بیزی پارامتر شدت ترافیک و احتمال پایایی سیستم $M/M/c$ تحت تابع‌های زیان آنتروپی عمومی و توان دوم خطای موزون و تحت توزیع پیشین ناآگاهی‌بخش به دست آورده می‌شود. در بخش ۵ با مطالعه شبیه‌سازی مونت‌کارلو و یک مثال عددی، برآوردهای پارامتر شدت ترافیک و احتمال پایایی سیستم تحت تابع‌های زیان آنتروپی عمومی و توان دوم خطای موزون و تحت توزیع‌های پیشین آگاهی‌بخش و ناآگاهی‌بخش ارزیابی و با هم مقایسه می‌شوند.

۲ مفاهیم اولیه

زمان‌های بین ورودها $\{U_k, k \geq 1\}$ به عنوان دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع با چگالی $f(u, \lambda)$ و زمان‌های سرویس $\{V_k, k \geq 1\}$ به عنوان دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع با چگالی $g(v, \mu)$ در مدل صف‌بندی $M/M/c$ در نظر گرفته می‌شوند، به طوریکه λ و μ به ترتیب پارامترهای نرخ ورود و نرخ

^۱Empirical Bayesian

^۲Traffic intensity

$$f(u, \lambda) = \lambda e^{-\lambda u}, u > 0, \quad g(v, \mu) = \mu e^{-\mu v}, v > 0$$

هستند. فرض می‌شود اولین متقاضی در زمان صفر وارد سیستم شده و سرویس نیز بعد از اولین ورود شروع می‌شود. همچنین زمان توقف سیستم نیز T در نظر گرفته می‌شود یعنی سیستم تا زمان T فعال است. با در نظر گرفتن $A(T)$ به عنوان تعداد متقاضیان وارد شده به سیستم تا زمان T و $B(T)$ به عنوان تعداد متقاضیان سرویس شده تا زمان T ، واضح است که در فاصله زمانی $(\sum_{i=1}^{A(T)} U_i, T)$ هیچ متقاضی وارد نشده و در فاصله زمانی $(\gamma(T) + \sum_{i=1}^{B(T)} V_i, T)$ که در آن $\gamma(T)$ کل اوقات بیکاری سرویس دهنده‌ها در نظر گرفته می‌شود، هیچ متقاضی سرویس نشده است. بر اساس **سینگ و آجاریا (۲۰۱۹)** چهار حالت برای T در نظر گرفته شده است.

- ۱- اگر سیستم تا زمان t فعال باشد، واضح است که $T = t$ و $A(T)$ و $B(T)$ متغیرهای تصادفی هستند.
- ۲- اگر سیستم تا موقعی کار کند که d متقاضی سرویس شود یعنی $B(T) = d$ ، در این حالت $T = \gamma(T) + \sum_{i=1}^d V_i$ متغیرهای تصادفی هستند.
- ۳- اگر سیستم تا موقعی کار کند که m متقاضی به سیستم وارد شده باشند یعنی $A(T) = m$ ، در این حالت $T = \gamma(T) + \sum_{i=1}^m U_i$ متغیرهای تصادفی هستند.
- ۴- اگر سیستم تا موقعی کار کند که n متقاضی در سیستم باشد یعنی $A(T) + B(T) = n$ ، در این حالت T و $A(T)$ و $B(T)$ متغیرهای تصادفی هستند.

بنابراین تحت قانون ۴، اگر زمان توقف سیستم در زمان یک ورودی رخ دهد، آنگاه $T = \sum_{i=1}^{A(T)} U_i$ شده و در فاصله زمانی $(\gamma(T) + \sum_{i=1}^{B(T)} V_i, T)$ سرویسی انجام نمی‌شود. اگر زمان توقف سیستم در زمان یک سرویس رخ دهد، آنگاه $T = \gamma(T) + \sum_{i=1}^{B(T)} V_i$ شده و در فاصله زمانی $(\sum_{i=1}^{A(T)} U_i, T)$ هیچ متقاضی وارد نمی‌شود. همچنین با در نظر گرفتن نمونه

$$\mathbf{X} = \{A(T), B(T), U_1, \dots, U_{A(T)}, V_1, \dots, V_{B(T)}\} \quad (۱)$$

تحت هر یک از چهار حالت زمان توقف T معین، تابع درستنمایی به صورت

$$L_T(\lambda, \mu) = \prod_{i=1}^{A(T)} f(u_i, \lambda) \prod_{i=1}^{B(T)} g(v_i, \mu) = \lambda^{A(T)} \mu^{B(T)} e^{-(\lambda \sum_{i=1}^{A(T)} u_i + \mu \sum_{i=1}^{B(T)} v_i)} \quad (۲)$$

است (**سینگ و آجاریا ، ۲۰۱۹**). پایایی هر سیستم صف‌بندی یکی از ویژگی‌های مهم و حالت مطلوب آن است. بنابراین بر اساس نمونه (۱)، احتمال پایایی سیستم در مدل صف‌بندی $M/M/c$ یعنی $R_T = P(\hat{\rho}_T < 1)$ به روش‌های ماکسیمم درستنمایی و بیزی برآورد می‌شود.

۲.۱ برآورد ماکسیمم درست‌نمایی

در مدل صف‌بندی $M/M/c$ ، $\rho = \frac{\lambda}{c\mu}$ ، پارامتر شدت ترافیک نامیده می‌شود، که در آن c تعداد باجه‌های سرویس است. با توجه به رابطه (۲)، برآوردهای ماکسیمم درست‌نمایی λ ، μ و ρ به ترتیب به صورت

$$\hat{\lambda}_T^M = A(T) \left(\sum_{i=1}^{A(T)} U_i \right)^{-1}, \quad \hat{\mu}_T^M = B(T) \left(\sum_{i=1}^{B(T)} V_i \right)^{-1}, \quad \hat{\rho}_T^M = \frac{A(T) \sum_{i=1}^{B(T)} V_i}{cB(T) \sum_{i=1}^{A(T)} U_i} \quad (۳)$$

است. اکنون R_T به روش ماکسیمم درست‌نمایی برآورد می‌شود. چون $U_i \sim \chi_{(\nu A(T))}^2$ و $V_i \sim \chi_{(\nu B(T))}^2$ بنابراین

$$F_T = \frac{\lambda \sum_{i=1}^{A(T)} U_i}{\mu \sum_{i=1}^{B(T)} V_i} \cdot \frac{B(T)}{A(T)} \sim F_{(\nu A(T), \nu B(T))}.$$

با توجه به $\hat{\rho}_T^M = \frac{\lambda}{c\mu F_T}$ ، تابع چگالی احتمال $\hat{\rho}_T^M$ به صورت

$$\begin{aligned} f_T(\hat{\rho}_T^M, \rho) &= \frac{\Gamma(A(T) + B(T))}{\Gamma(A(T))\Gamma(B(T))} \left(\frac{A(T)}{B(T)} \rho \right)^{A(T)} (\hat{\rho}_T^M)^{-(1+A(T))} \\ &\times \left(1 + \frac{A(T)}{B(T)} \rho (\hat{\rho}_T^M)^{-1} \right)^{-(A(T)+B(T))}, \quad \hat{\rho}_T^M > 0, \end{aligned}$$

است. احتمال پایایی سیستم به صورت

$$R_T = P(\hat{\rho}_T^M < 1) = \frac{\Gamma(A(T) + B(T))}{\Gamma(A(T))\Gamma(B(T))} \left(\frac{A(T)}{B(T)} \right)^{A(T)} \psi_T(\rho), \quad (۴)$$

محاسبه شده، که در آن

$$\psi_T(\rho) = \int_0^1 w^{-(1+A(T))} \left(1 + \frac{A(T)}{B(T)} \rho w^{-1} \right)^{-(A(T)+B(T))} dw,$$

است. مقدار این انتگرال با روش شبیه‌سازی مونت‌کارلو به دست آورده می‌شود. اکنون با توجه به (۳)، برآورد ماکسیمم درست‌نمایی R_T عبارت است از

$$\hat{R}_T^M = \frac{\Gamma(A(T) + B(T))}{\Gamma(A(T))\Gamma(B(T))} \left(\frac{A(T)}{B(T)} \hat{\rho}_T^M \right)^{A(T)} \psi_T(\hat{\rho}_T^M).$$

۳ برآورد بیزی ρ و R_T تحت توزیع پیشین آگاهی بخش

در این بخش تابع زیان آنتروپی عمومی^۱ (دی و همکاران، ۱۹۸۷؛ دی و لیو، ۱۹۹۲) به صورت

$$L(\hat{\theta}, \theta) \propto \left(\frac{\hat{\theta}}{\theta}\right)^p - p \ln\left(\frac{\hat{\theta}}{\theta}\right) - 1, \quad p \neq 0,$$

و تابع زیان توان دوم خطای موزون^۲ (نورستروم، ۱۹۹۶) به صورت $L(\hat{\theta}, \theta) = (\frac{\hat{\theta}}{\theta} - 1)^2$ ، و برای پارامترهای λ و μ بترتیب توزیع‌های پیشین $Gamma(a, b)$ و $Gamma(c, d)$ در نظر گرفته می‌شوند. برآورد بیزی پارامتر θ تحت تابع زیان آنتروپی عمومی به صورت

$$\hat{\theta}^{BG} = [E(\theta^{-p} | \mathbf{X})]^{-\frac{1}{p}} \quad (5)$$

است و با توجه به (۳) رابطه

$$\pi(\lambda, \mu | \mathbf{X}) = \frac{(b + \sum_{i=1}^{A(T)} u_i)^{a+A(T)} (d + \sum_{i=1}^{B(T)} v_i)^{e+B(T)}}{\Gamma(a+A(T)) \Gamma(e+B(T))} \lambda^{a+A(T)-1} \mu^{e+B(T)-1} \\ \times e^{-\lambda(b + \sum_{i=1}^{A(T)} u_i) - \mu(d + \sum_{i=1}^{B(T)} v_i)} \quad (6)$$

به دست آورده می‌شود. بنابراین با فرض $\phi(T) = \frac{\Gamma(a+A(T)-p) \Gamma(e+B(T)+p)}{\Gamma(a+A(T)) \Gamma(e+B(T))}$ ، برآورد بیزی ρ تحت تابع زیان آنتروپی عمومی، با توجه به روابط (۵) و (۶) به صورت

$$\hat{\rho}_T^{BG} = \{E(\rho^{-p} | \mathbf{X})\}^{-\frac{1}{p}} = \left(\frac{1}{c}\right) (\phi(T))^{-\frac{1}{p}} \cdot \frac{d + \sum_{i=1}^{B(T)} V_i}{b + \sum_{i=1}^{A(T)} U_i}$$

است. با توجه به توابع چگالی $Z_T = d + \sum_{i=1}^{B(T)} V_i$ و $W_T = b + \sum_{i=1}^{A(T)} U_i$ که به صورت‌های

$$f(Z_T, \mu) = \frac{\mu^{B(T)-1}}{\Gamma(B(T))} (Z_T - d)^{B(T)-1} e^{-\mu(Z_T-d)}, \quad Z_T > d,$$

$$f(W_T, \lambda) = \frac{\lambda^{A(T)-1}}{\Gamma(A(T))} (W_T - b)^{A(T)-1} e^{-\lambda(W_T-b)}, \quad W_T > b,$$

¹General Entropy

²weighted squared-error

هستند، احتمال پایایی سیستم به صورت

$$R_T = P(\hat{\rho}_T^{BG} < 1) = P\left(\frac{Z_T}{W_T} < (\phi(T))^{\frac{1}{p}}\right) = \frac{\lambda^{A(T)-1} \mu^{B(T)-1}}{\Gamma(A(T))\Gamma(B(T))} e^{\lambda b + \mu d} \varphi_T(\lambda, \mu)$$

محاسبه می‌شود، که در آن تحت شرط $\phi(T) < (\frac{d}{b})^p$

$$\varphi_T(\lambda, \mu) = \int_{d(\phi(T))^{-\frac{1}{p}}}^{\infty} \int_d^{(\phi(T))^{\frac{1}{p}} W_T} [(u-d)^{B(T)-1} (v-b)^{A(T)-1} e^{-\mu u - \lambda v}] du dv$$

و تحت شرط $\phi(T) > (\frac{d}{b})^p$

$$\varphi_T(\lambda, \mu) = \int_b^{\infty} \int_d^{(\phi(T))^{\frac{1}{p}} W_T} [(u-d)^{B(T)-1} (v-b)^{A(T)-1} e^{-\mu u - \lambda v}] du dv$$

بنابراین برآورد بیزی R_T به صورت

$$\hat{R}_T^{BG} = \frac{(b + \sum_{i=1}^{A(T)} U_i)^{a+A(T)} (d + \sum_{i=1}^{B(T)} V_i)^{e+B(T)}}{\Gamma(a+A(T))\Gamma(e+B(T))[\Gamma(A(T))\Gamma(B(T))]^{-p}} \Phi(T),$$

ارائه می‌شود، که در آن

$$\begin{aligned} \Phi(T) = & \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \{ \lambda^{a+(A(T)-1)(1-p)} \mu^{e+(B(T)-1)(1-p)} e^{-\lambda[b(1-p) + \sum_{i=1}^{A(T)} u_i]} \\ & \times e^{-\mu[d(1-p) + \sum_{i=1}^{B(T)} v_i]} [\varphi_T(\lambda, \mu)]^{-p} \} d\lambda d\mu. \end{aligned}$$

برآورد بیزی پارامتر θ تحت تابع زیان توان دوم خطای موزون به صورت $\hat{\theta}^{BS} = \frac{E(\theta^{-1}|\mathbf{X})}{E(\theta^{-1})}$ است. بنابراین برآورد بیزی ρ تحت این تابع زیان به صورت

$$\hat{\rho}_T^{BS} = \left(\frac{1}{c}\right) \frac{a + A(T) - 1}{e + B(T) + 1} \cdot \frac{d + \sum_{i=1}^{B(T)} V_i}{b + \sum_{i=1}^{A(T)} U_i},$$

حاصل می‌شود. با فرض $\eta(T) = \frac{a+A(T)-1}{e+B(T)+1}$ ، احتمال پایایی سیستم به صورت

$$R_T = P\left(\frac{Z_T}{W_T} < \eta(T)\right) = \frac{\lambda^{A(T)-1} \mu^{B(T)-1}}{\Gamma(A(T))\Gamma(B(T))} e^{\lambda b + \mu d} \zeta_T(\lambda, \mu)$$

به دست آورده می‌شود، که در آن تحت شرط $\eta(T) < \frac{d}{b}$

$$\zeta_T(\lambda, \mu) = \int_{d(\eta(T))^{-1}}^{\infty} \int_d^{(\eta(T))W_T} [(u-d)^{B(T)-1}(v-b)^{A(T)-1}e^{-\mu u-\lambda v}]dudv$$

و تحت شرط $\eta(T) > \frac{d}{b}$

$$\zeta_T(\lambda, \mu) = \int_b^{\infty} \int_d^{(\eta(T))W_T} [(u-d)^{B(T)-1}(v-b)^{A(T)-1}e^{-\mu u-\lambda v}]dudv.$$

بنابراین برآورد بیزی R_T تحت تابع زیان توان دوم خطای موزون به صورت $\hat{R}_T^{BS} = \frac{\xi(T)}{\Gamma(A(T))\Gamma(B(T))}$ است،
که در آن با فرض $\delta_j(T, \lambda, \mu) = e^{-\lambda(jb+\sum_{i=1}^{A(T)} U_i)-\mu(jd+\sum_{i=1}^{B(T)} V_i)}$

$$\xi(T) = \frac{\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \lambda^a \mu^e \delta_T(T, \lambda, \mu) (\zeta_T(\lambda, \mu))^{-1} d\lambda d\mu}{\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \lambda^{a-A(T)+1} \mu^{e-B(T)+1} \delta_T(T, \lambda, \mu) (\zeta_T(\lambda, \mu))^{-1} d\lambda d\mu}.$$

۴ برآورد بیزی ρ و R_T تحت توزیع پیشین ناآگاهی بخش

برآورد بیزی ρ و R_T تحت توزیع ناآگاهی بخش و با استفاده از تابع‌های زیان آنتروپی عمومی و توان دوم خطای موزون به دست آورده می‌شوند. با در نظر گرفتن $a = b = e = d = 0$ در برآوردهای بخش ۳، تحت تابع زیان آنتروپی عمومی، برآورد بیزی ρ و R_T به ترتیب

$$\hat{\rho}_T^{BG} = \left(\frac{\Gamma(A(T)-p)\Gamma(B(T)+p)}{\Gamma(A(T))\Gamma(B(T))} \right)^{-\frac{1}{p}} \frac{B(T)\hat{\rho}_T^M}{A(T)},$$

$$\hat{R}_T^{BG} = \frac{(\sum_{i=1}^{A(T)} U_i)^{A(T)} (\sum_{i=1}^{B(T)} V_i)^{B(T)}}{[\Gamma(A(T))\Gamma(B(T))]]^{-p+1}} \Phi^*(T),$$

هستند، که در آن

$$\begin{aligned} \Phi^*(T) &= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \{ \lambda^{(A(T)-1)(1-p)} \mu^{(B(T)-1)(1-p)} e^{-\lambda \sum_{i=1}^{A(T)} u_i} \\ &\times e^{-\mu \sum_{i=1}^{B(T)} v_i} [\varphi_T^*(\lambda, \mu)]^{-p} \} d\lambda d\mu, \end{aligned}$$

$$\phi^*(T) = \frac{\Gamma(A(T)-p)\Gamma(B(T)+p)}{\Gamma(A(T))\Gamma(B(T))} \text{ و با فرض}$$

$$\varphi_T^*(\lambda, \mu) = \int_0^\infty \int_0^{(\phi^*(T))^{\frac{1}{p}} W_T} u^{B(T)-1} v^{A(T)-1} e^{-\mu u - \lambda v} du dv.$$

همچنین تحت زیان توان دوم خطای موزون، برآورد بیزی ρ و R_T بترتیب به صورت

$$\hat{\rho}_T^{BS} = \frac{A(T)-1}{B(T)+1} \cdot \frac{B(T)\hat{\rho}_T^M}{A(T)} \quad \hat{R}_T^{BS} = \frac{\xi^*(T)}{\Gamma(A(T))\Gamma(B(T))}$$

محاسبه می‌شوند، که در آن

$$\xi^*(T) = \frac{\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\lambda \sum_{i=1}^{A(T)} u_i - \mu \sum_{i=1}^{B(T)} v_i} (\zeta_T^*(\lambda, \mu))^{-1} d\lambda d\mu}{\int_0^\infty \int_0^\infty \lambda^{1-A(T)} \mu^{1-B(T)} e^{-\lambda \sum_{i=1}^{A(T)} u_i - \mu \sum_{i=1}^{B(T)} v_i} (\zeta_T^*(\lambda, \mu))^{-2} d\lambda d\mu}$$

$$\eta^*(T) = \frac{A(T)-1}{B(T)+1} \text{ و با فرض}$$

$$\zeta_T^*(\lambda, \mu) = \int_0^\infty \int_0^{(\eta^*(T))W_T} u^{B(T)-1} v^{A(T)-1} e^{-\mu u - \lambda v} du dv.$$

واضح است که وقتی $T \rightarrow \infty$ ، تحت توزیع پیشین آگاهی بخش و ناآگاهی بخش $\hat{\rho}_T^M = \hat{\rho}_T^{BG} = \hat{\rho}_T^{BS}$.

۵ مطالعه شبیه‌سازی

برای ارزیابی و مقایسه برآوردهای ماکسیمم درستنمایی و بیزی ρ و R_T تحت تابع‌های زیان آنتروپی عمومی و توان دوم خطای موزون مطالعه شبیه‌سازی مونت‌کارلو طی دو گام انجام می‌شود.

گام ۱: با فرض $A(T) = m$ یک نمونه تصادفی m تایی از توزیع نمایی با پارامتر $\lambda = 0.25$ و با فرض $B(T) = n$ یک نمونه تصادفی n تایی از توزیع نمایی با پارامتر $\mu = 0.5$ تولید می‌شود.

گام ۲: به ازای $p = -0.5, -0.1, 0.1, 0.5, 0.9$ و $a = b = 2$ و $e = d = 3$ بنابر بخش‌های ۳ و ۴، برآوردهای ماکسیمم درستنمایی و بیزی ρ و R_T به دست آورده می‌شوند.

گام‌های ۱، ۲، ۵۰۰۰ بار تکرار شده و میانگین برآوردها به همراه قدرمطلق اربیی آن‌ها و همچنین مجموع مربعات خطای برآوردها محاسبه می‌شود. در جدول‌های ۱ و ۲، B_1 ، B_2 و B_3 اربیی برآوردهای ماکسیمم درستنمایی، بیزی تحت تابع زیان آنتروپی عمومی و بیزی تحت تابع زیان توان دوم خطای موزون و $M(\cdot)$ میانگین مربع خطا را نشان می‌دهد. همان‌طور که ملاحظه می‌شود تحت توزیع پیشین آگاهی‌بخش:

جدول ۰۱. میانگین برآوردهای ρ با (قدر مطلق اریبی) و میانگین مربع خطای برآوردها برای داده‌های شبیه‌سازی شده، به ازای $n = ۳۰$ و $m = ۳۵$ تحت توزیع پیشین آگاهی‌بخش ($\rho_{real} = ۰.۳۳۳۳$)

$M(\hat{\rho}_T^{BS})$	$M(\hat{\rho}_T^{BG})$	$M(\hat{\rho}_T^M)$	$\hat{\rho}_T^{BS}(B_T)$	$\hat{\rho}_T^{BG}(B_T)$	$\hat{\rho}_T^M(B_T)$	p
۰/۰۰۷۹	۰/۰۰۴۶	۰/۰۰۳۹	۰/۲۸۹۴(۰/۰۴۳۸)	۰/۳۱۴۸(۰/۰۱۸۴)	۰/۳۳۸۳(۰/۰۰۴۹)	۰/۱
۰/۰۰۷۲	۰/۰۰۴۱	۰/۰۰۳۵	۰/۲۹۰۱(۰/۰۴۳۲)	۰/۳۱۱۸(۰/۰۲۱۴)	۰/۳۳۹۱(۰/۰۰۵۸)	۰/۵
۰/۰۰۷۶	۰/۰۰۴۱	۰/۰۰۳۶	۰/۲۹۲۶(۰/۰۴۰۷)	۰/۳۱۰۱(۰/۰۲۳۲)	۰/۳۴۲۹(۰/۰۰۹۶)	۱
۰/۰۰۶۷	۰/۰۰۳۵	۰/۰۰۳۲	۰/۲۹۱۴(۰/۰۴۱۹)	۰/۳۰۴۳(۰/۰۲۸۹)	۰/۳۴۱۱(۰/۰۰۷۶)	۱.۵
۰/۰۰۷۴	۰/۰۰۳۸	۰/۰۰۳۶	۰/۲۹۱۶(۰/۰۴۱۷)	۰/۳۰۰۲(۰/۰۳۱۱)	۰/۳۴۱۴(۰/۰۰۸۱)	۲
۰/۰۰۷۲	۰/۰۰۳۶	۰/۰۰۳۵	۰/۲۹۲۹(۰/۰۴۰۴)	۰/۲۹۷۲(۰/۰۳۶۱)	۰/۳۴۳۱(۰/۰۰۹۸)	۲.۵
۰/۰۰۷۷	۰/۰۰۳۷	۰/۰۰۳۶	۰/۲۹۵۲(۰/۰۳۸۳)	۰/۲۹۵۰(۰/۰۳۸۲)	۰/۳۴۶۲(۰/۰۱۲۹)	۳
۰/۰۰۳۷	۰/۰۰۷۶	۰/۰۰۳۵	۰/۲۹۳۳(۰/۰۴۰۱)	۰/۲۸۹۱(۰/۰۴۴۳)	۰/۳۴۳۹(۰/۰۱۰۶)	۳.۵
۰/۰۰۳۵	۰/۰۰۷۳	۰/۰۰۳۳	۰/۲۹۱۸(۰/۰۴۱۴)	۰/۲۸۳۴(۰/۰۴۹۸)	۰/۳۴۱۷(۰/۰۰۸۳)	۴
۰/۰۰۳۶	۰/۰۰۷۶	۰/۰۰۳۲	۰/۲۹۱۹(۰/۰۴۱۵)	۰/۲۷۹۵(۰/۰۵۳۸)	۰/۳۴۲۰(۰/۰۰۸۶)	۴.۵
۰/۰۰۸۲	۰/۰۰۳۹	۰/۰۰۴۷	۰/۲۹۶۳(۰/۰۳۶۹)	۰/۳۲۴۲(۰/۰۰۹۰)	۰/۳۴۸۴(۰/۰۱۵۱)	-۰/۱
۰/۰۰۵۱	۰/۰۰۲۷	۰/۰۰۳۳	۰/۲۹۶۴(۰/۰۳۶۸)	۰/۳۲۸۲(۰/۰۰۵۱)	۰/۳۴۷۷(۰/۰۱۴۴)	-۰/۵
۰/۰۰۹۱	۰/۰۰۴۳	۰/۰۰۵۴	۰/۲۹۳۸(۰/۰۳۹۵)	۰/۳۳۰۱(۰/۰۰۳۳)	۰/۳۴۴۷(۰/۰۱۱۴)	-۱
۰/۰۰۷۰	۰/۰۰۳۴	۰/۰۰۴۴	۰/۲۹۵۴(۰/۰۳۷۹)	۰/۳۳۶۷(۰/۰۰۳۴)	۰/۳۴۶۸(۰/۰۱۳۵)	-۱.۵
۰/۰۰۶۹	۰/۰۰۳۳	۰/۰۰۴۶	۰/۲۹۶۵(۰/۰۳۶۷)	۰/۳۴۲۹(۰/۰۰۹۶)	۰/۳۴۸۰(۰/۰۱۴۶)	-۲
۰/۰۰۸۸	۰/۰۰۵۹	۰/۰۰۴۲	۰/۲۸۷۹(۰/۰۴۵۳)	۰/۳۳۷۹(۰/۰۰۴۶)	۰/۳۳۶۴(۰/۰۰۳۱)	-۲.۵
۰/۰۰۹۵	۰/۰۰۶۶	۰/۰۰۴۶	۰/۲۹۲۵(۰/۰۴۰۸)	۰/۳۴۸۳(۰/۰۱۵۰)	۰/۳۴۲۹(۰/۰۰۹۶)	-۳
۰/۰۰۸۵	۰/۰۰۶۱	۰/۰۰۴۲	۰/۲۸۶۸(۰/۰۴۶۵)	۰/۳۴۶۶(۰/۰۱۳۳)	۰/۳۳۵۱(۰/۰۰۱۷)	-۳.۵
۰/۰۰۶۶	۰/۰۰۵۰	۰/۰۰۳۳	۰/۲۹۰۹(۰/۰۴۲۳)	۰/۳۵۶۹(۰/۰۲۳۵)	۰/۳۴۰۰(۰/۰۰۶۶)	-۴
۰/۰۰۶۹	۰/۰۰۵۳	۰/۰۰۳۴	۰/۲۸۷۹(۰/۰۴۵۳)	۰/۳۵۸۴(۰/۰۲۵۱)	۰/۳۳۵۷(۰/۰۰۲۴)	-۴.۵

جدول ۰۲. میانگین برآوردهای ρ با (قدر مطلق اریبی) و میانگین مربع خطای برآوردها برای داده‌های شبیه‌سازی شده به ازای $n = ۳۰$ و $m = ۳۵$ تحت توزیع پیشین ناآگاهی‌بخش ($\rho_{real} = ۰.۳۳۳۳$)

$M(\hat{\rho}_T^{BS})$	$M(\hat{\rho}_T^{BG})$	$M(\hat{\rho}_T^M)$	$\hat{\rho}_T^{BS}(B_T)$	$\hat{\rho}_T^{BG}(B_T)$	$\hat{\rho}_T^M(B_T)$	p
۰/۰۰۸۰	۰/۰۰۶۴	۰/۰۰۷۰	۰/۳۰۵۳(۰/۰۲۸۰)	۰/۳۳۴۳(۰/۰۰۱۰)	۰/۳۳۴۶(۰/۰۰۱۲)	۰/۱
۰/۰۰۹۰	۰/۰۰۷۴	۰/۰۰۸۷	۰/۳۰۷۶(۰/۰۲۵۶)	۰/۳۳۲۷(۰/۰۰۰۶)	۰/۳۳۷۱(۰/۰۰۳۸)	۰/۵
۰/۰۰۸۷	۰/۰۰۷۳	۰/۰۰۸۲	۰/۳۱۵۴(۰/۰۱۷۸)	۰/۳۳۵۸(۰/۰۰۲۵)	۰/۳۴۵۷(۰/۰۱۲۴)	۱
۰/۰۰۶۲	۰/۰۰۵۱	۰/۰۰۵۶	۰/۳۰۲۴(۰/۰۳۰۹)	۰/۳۱۶۹(۰/۰۱۶۳)	۰/۳۳۱۴(۰/۰۱۹۰)	۱.۵
۰/۰۰۷۰	۰/۰۰۵۶	۰/۰۰۶۷	۰/۳۲۴۶(۰/۰۳۸۶)	۰/۳۳۵۰(۰/۰۰۱۶)	۰/۳۵۵۸(۰/۰۲۲۵)	۲
۰/۰۰۵۲	۰/۰۰۴۴	۰/۰۰۴۳	۰/۲۹۵۰(۰/۰۳۸۲)	۰/۲۹۹۷(۰/۰۳۳۶)	۰/۳۲۳۳(۰/۰۰۹۲)	۲.۵
۰/۰۰۹۹	۰/۰۰۸۳	۰/۰۰۸۲	۰/۳۱۲۸(۰/۰۲۰۴)	۰/۳۱۲۹(۰/۰۲۰۳)	۰/۳۴۲۹(۰/۰۰۹۰)	۳
۰/۰۰۵۴	۰/۰۰۶۵	۰/۰۰۵۲	۰/۳۰۹۶(۰/۰۲۳۷)	۰/۳۰۴۸(۰/۰۲۸۴)	۰/۳۳۹۳(۰/۰۰۶۰)	۳.۵
۰/۰۰۵۲	۰/۰۰۶۳	۰/۰۰۴۹	۰/۳۰۸۵(۰/۰۲۴۸)	۰/۲۹۹۰(۰/۰۳۴۲)	۰/۳۳۸۱(۰/۰۰۴۸)	۴
۰/۰۰۶۷	۰/۰۰۸۱	۰/۰۰۶۱	۰/۳۴۹۰(۰/۰۱۵۷)	۰/۳۰۳۹(۰/۰۲۹۳)	۰/۳۱۸۵(۰/۰۱۴۷)	۴.۵
۰/۰۰۷۱	۰/۰۰۹۲	۰/۰۰۵۲	۰/۳۱۹۹(۰/۰۱۳۴)	۰/۳۵۲۵(۰/۰۱۹۲)	۰/۳۴۲۱(۰/۰۰۸۸)	-۰/۱
۰/۰۰۶۷	۰/۰۰۸۹	۰/۰۰۴۵	۰/۳۵۳۸(۰/۰۲۰۵)	۰/۳۹۴۹(۰/۰۰۶۱۶)	۰/۳۳۷۶(۰/۰۰۴۲)	-۰/۵
۰/۰۰۶۱	۰/۰۰۷۲	۰/۰۰۳۹	۰/۳۱۴۳(۰/۰۱۹۰)	۰/۳۵۶۳(۰/۰۲۳۰)	۰/۳۴۳۳(۰/۰۰۹۹)	-۱
۰/۰۰۷۷	۰/۰۰۶۴	۰/۰۰۵۵	۰/۲۲۱۵(۰/۱۱۱۷)	۰/۲۵۵۱(۰/۰۷۸۱)	۰/۳۴۲۷(۰/۰۰۹۳)	-۱.۵
۰/۰۰۶۸	۰/۰۰۵۹	۰/۰۰۴۸	۰/۲۳۶۹(۰/۰۹۶۳)	۰/۲۷۷۳(۰/۰۵۶۰)	۰/۳۲۹۹(۰/۰۰۳۴)	-۲
۰/۰۰۵۱	۰/۰۰۷۰	۰/۰۰۴۱	۰/۳۲۲۵(۰/۱۰۷)	۰/۳۸۳۵(۰/۰۵۰۱)	۰/۳۴۱۰(۰/۰۰۷۷)	-۲.۵
۰/۰۰۶۶	۰/۰۰۸۵	۰/۰۰۳۹	۰/۳۹۳۳(۰/۰۶۰۰)	۰/۴۷۵۱(۰/۱۴۱۸)	۰/۳۶۰۷(۰/۰۲۷۳)	-۳
۰/۰۰۷۲	۰/۰۰۹۸	۰/۰۰۶۷	۰/۳۰۲۴(۰/۰۳۰۸)	۰/۲۴۴۶(۰/۰۰۸۶۹)	۰/۳۵۸۴(۰/۰۲۵۱)	-۳.۵
۰/۰۰۶۴	۰/۰۰۸۴	۰/۰۰۵۸	۰/۲۸۰۹(۰/۰۵۲۳)	۰/۲۵۲۵(۰/۱۰۸۰)	۰/۳۳۷۲(۰/۰۰۳۹)	-۴
۰/۰۰۵۶	۰/۰۰۷۵	۰/۰۰۴۷	۰/۳۲۴۸(۰/۰۰۸۵)	۰/۲۶۲۴(۰/۰۷۰۸)	۰/۳۳۲۶(۰/۰۰۰۶)	-۴.۵

۲۳۰ برآورد پارامتر شدت ترافیک و احتمال پایایی مدل صف‌بندی M/M/c

جدول ۳. میانگین برآوردهای R_T برای داده‌های شبیه‌سازی شده به ازای $m = ۳۵$ و $n = ۳۰$ تحت توزیع‌های پیشین آگاهی‌بخش و ناآگاهی‌بخش

پیشین ناآگاهی‌بخش			پیشین آگاهی‌بخش			p
$\hat{R}_T^{BS}$	$\hat{R}_T^{BG}$	$\hat{R}_T^M$	$\hat{R}_T^{BS}$	$\hat{R}_T^{BG}$	$\hat{R}_T^M$	
۰/۲۲۶۵	۰/۹۷۶۸	۰/۵۶۵۰	۰/۲۲۶۵	۰/۵۶۵۰	۰/۹۷۶۸	۰/۱
۰/۲۵۴۳	۰/۹۸۷۶	۰/۵۸۲۳	۰/۲۵۵۸	۰/۵۴۸۴	۰/۹۹۶۲	۰/۵
۰/۲۸۴۵	۰/۹۶۲۳	۰/۵۹۳۲	۰/۲۷۳۵	۰/۵۳۸۶	۰/۹۹۹۱	۱
۰/۳۴۲۲	۰/۹۶۸۷	۰/۵۸۹۳	۰/۲۸۵۴	۰/۵۳۲۱	۰/۹۹۴۵	۱/۵
۰/۳۷۶۵	۰/۹۷۵۴	۰/۶۳۲۷	۰/۲۹۳۹	۰/۵۲۷۵	۰/۹۶۱۱	۲
۰/۳۸۷۶	۰/۵۳۲۴	۰/۹۵۶۴	۰/۳۰۰۳	۰/۵۲۴۱	۰/۹۶۹۴	۲/۵
۰/۳۹۸۷	۰/۵۵۶۷	۰/۹۶۸۵	۰/۵۶۵۰	۰/۲۲۶۵	۰/۹۹۵۱	۳
۰/۵۷۸۹	۰/۴۳۲۲	۰/۹۷۵۳	۰/۲۵۵۳	۰/۵۴۸۴	۰/۹۷۹۸	۳/۵
۰/۵۸۴۴	۰/۴۶۵۵	۰/۹۸۷۶	۰/۲۶۴۵	۰/۵۴۸۶	۰/۹۹۸۲	۴
۰/۵۹۶۷	۰/۴۸۳۲	۰/۹۹۸۷	۰/۲۹۵۴	۰/۵۴۴۱	۰/۹۷۶۰	۴/۵
۰/۵۳۲۲	۰/۴۳۲۱	۰/۹۵۴۷	۰/۲۳۶۵	۰/۹۷۸۶	۰/۵۷۴۰	-۰/۱
۰/۵۵۶۹	۰/۴۵۶۷	۰/۹۶۲۲	۰/۲۶۵۸	۰/۹۸۲۳	۰/۵۳۸۴	-۰/۵
۰/۵۹۸۷	۰/۴۷۶۵	۰/۹۷۶۵	۰/۳۴۲۳	۰/۹۹۷۴	۰/۵۵۴۱	-۱
۰/۴۵۳۲	۰/۵۶۷۸	۰/۹۸۳۳	۰/۳۷۶۸	۰/۹۹۲۳	۰/۵۹۵۶	-۱/۵
۰/۴۸۷۶	۰/۵۸۷۶	۰/۹۹۷۶	۰/۳۹۸۲	۰/۹۸۹۱	۰/۶۳۲۴	-۲
۰/۵۲۷۸	۰/۳۳۲۴	۰/۹۸۲۳	۰/۴۲۱۳	۰/۶۵۵۷	۰/۹۷۶۵	-۲/۵
۰/۵۶۴۳	۰/۳۵۶۷	۰/۹۷۶۸	۰/۴۵۷۸	۰/۶۷۲۶	۰/۹۸۴۳	-۳
۰/۵۸۹۷	۰/۳۷۸۶	۰/۹۸۹۹	۰/۴۷۸۶	۰/۶۸۹۷	۰/۹۸۷۷	-۳/۵
۰/۶۳۲۲	۰/۳۹۸۶	۰/۹۹۲۳	۰/۴۸۷۶	۰/۶۹۸۷	۰/۹۹۱۲	-۴
۰/۶۷۶۵	۰/۴۴۵۷	۰/۹۸۷۶	۰/۵۲۱۱	۰/۷۲۱۱	۰/۹۹۵۶	-۴/۵

الف- اگر $p > ۰$ آن‌گاه برآورد ماکسیمم درست‌نمایی از برآوردهای بیزی تحت تابع‌های زیان آنتروپی عمومی و توان دوم خطای موزون بهتر است. در همین حالت، اگر $p < ۳/۵$ آن‌گاه برآورد بیزی تحت تابع زیان آنتروپی عمومی بهتر از برآورد بیزی تحت تابع زیان توان دوم خطای موزون و به ازای $p \geq ۳/۵$ برآورد بیزی تحت تابع زیان توان دوم خطای موزون بهتر از برآورد بیزی تحت تابع زیان آنتروپی عمومی است.

ب- اگر $۰ < p < ۲/۵$ آن‌گاه برآورد بیزی تحت تابع زیان آنتروپی عمومی از بقیه برآوردها بهتر و برآورد ماکسیمم درست‌نمایی از برآورد بیزی تحت تابع زیان توان دوم خطای موزون بهتر است.

ج- اگر $p \leq -۲/۵$ آن‌گاه برآورد ماکسیمم درست‌نمایی از بقیه برآوردها بهتر و برآورد بیزی تحت تابع زیان آنتروپی عمومی از برآورد بیزی تحت تابع زیان توان دوم خطای موزون بهتر است.

و تحت توزیع پیشین ناآگاهی‌بخش:

الف- اگر $p < ۲.۵$ آن‌گاه برآورد بیزی تحت تابع زیان آنتروپی عمومی از بقیه برآوردها بهتر و برآورد ماکسیمم درستنمایی از برآورد بیزی تحت تابع زیان توان دوم خطای موزون بهتر است.

ب- اگر $p \geq ۲.۵$ آن‌گاه برآورد ماکسیمم درستنمایی از بقیه برآوردها بهتر است. در همین حالت اگر $۲.۵ \leq p < ۳.۵$ آن‌گاه برآورد بیزی تحت تابع زیان آنتروپی عمومی بهتر از برآورد بیزی تحت تابع زیان توان دوم خطای موزون و اگر $p \geq ۳.۵$ آن‌گاه برآورد بیزی تحت تابع زیان توان دوم خطای موزون بهتر از برآورد بیزی تحت تابع زیان آنتروپی عمومی است.

ج- اگر $p < ۱.۵$ آن‌گاه برآورد ماکسیمم درستنمایی از بقیه برآوردها بهتر است. در همین حالت اگر $-۲.۵ < p \leq ۱.۵$ آن‌گاه برآورد بیزی تحت تابع زیان آنتروپی عمومی بهتر از برآورد بیزی تحت تابع زیان توان دوم خطای موزون و اگر $-۱.۵ < p < -۲.۵$ و $p \leq -۲.۵$ آن‌گاه برآورد بیزی تحت تابع زیان توان دوم خطای موزون بهتر از برآورد بیزی تحت تابع زیان آنتروپی عمومی است.

چون احتمال پایایی سیستم برآوردگر مناسب پارامتر شدت ترافیک نیز باید بزرگ‌تر از احتمال پایایی بقیه برآوردها باشد، بنابراین بر اساس جدول ۳، احتمال پایایی سیستم مربوط به برآورد مناسب ارائه شده در جدول‌های ۱ و ۲ بزرگ‌تر است. به عبارت دیگر احتمال پایایی سیستم تاییدکننده برآوردگر مناسب نتیجه گرفته شده در جدول‌های ۱ و ۲ است.

۶ مثال عددی

بانکی دارای سه دستگاه خودپرداز است که فاصله زمانی بین مراجعین و فاصله زمانی بین سرویس شده‌ها از ساعت ۸ تا ۱۰ صبح ($T = ۱۰$) در نظر گرفته شده و داده‌ها در جدول ۴ گزارش شده است. به ازای $a = b = ۲$ و $e = d = ۳$ و $p = -۰.۵, ۰.۵$ برآوردهای پارامتر شدت ترافیک و احتمال پایایی سیستم به روش‌های ماکسیمم درستنمایی و بیز تحت توزیع پیشین آگاهی‌بخش و ناآگاهی‌بخش به دست آورده شده و در جدول ۵ ثبت شده است. بر اساس این جدول‌ها نتیجه گرفته می‌شود، اگر $p = -۰.۵$ آن‌گاه برآورد بیزی تحت تابع زیان آنتروپی عمومی و اگر $p = ۰.۵$ آن‌گاه برآورد ماکسیمم درستنمایی، برآورد مناسب پارامتر شدت ترافیک هستند که منطبق با نتایج شبیه‌سازی است.

بحث و نتیجه‌گیری

برآورد ماکسیمم درستنمایی پارامترهای شدت ترافیک و احتمال پایایی مدل صف‌بندی $M/M/c$ و برآوردهای بیزی آن‌ها تحت تابع‌های زیان آنتروپی عمومی و توان دوم خطای موزون و با استفاده از توزیع پیشین آگاهی‌بخش و ناآگاهی‌بخش به دست آورده شد و با شبیه‌سازی مونت‌کارلو و یک مثال عددی، به ازای p ‌های مختلف برآوردها مناسب پارامتر شدت ترافیک مشخص شد.

جدول ۴. داده‌های مربوط به مثال بانک

۴/۸	۳/۲	۵/۲	۱/۵	۲/۳	۲/۵	۴	۱/۷	فاصله زمانی بین ورودی‌ها
۶/۲	۳/۲	۱/۵	۷	۳/۲	۲/۶	۳/۸	۵/۸	
۶/۵	۷/۳	۷/۸	۲/۲	۳/۲	۵/۲	۵/۶	۴/۵	
		۸/۱	۲/۵	۷/۱	۸/۵	۴/۳	۱۳	
۶/۳	۷	۱۷/۳	۶	۶/۵	۷/۲	۱۷/۶	۵/۲	فاصله زمانی بین سرویس‌ها
۶/۵	۸	۵/۵	۹/۵	۷/۷	۲۱	۳/۵	۱۱/۱	
۶	۱۷	۱۲	۵/۸	۹	۶	۱۲	۶/۵	
						۶	۸	

جدول ۵. برآورد پارامتر شدت ترافیک و احتمال پایایی سیستم

$\hat{\rho}_T^{BS}$	$\hat{\rho}_T^{BG}$	$\hat{\rho}_T^M$	p	پیشین	پارامتر
۰/۵۴۰۴	۰/۶۳۰۳	۰/۶۲۴۲	۰/۵	آگاهی‌بخش	شدت ترافیک
۰/۵۴۰۴	۰/۵۸۷۴	۰/۶۲۴۲	۰/۵		
۰/۵۶۱۰	۰/۶۳۷۴	۰/۶۲۴۲	۰/۵	ناآگاهی‌بخش	
۰/۵۶۱۰	۰/۶۱۴۵	۰/۶۲۴۲	۰/۵		
۰/۷۸۶۵	۰/۹۹۰۵	۰/۹۸۶۳	۰/۵	آگاهی‌بخش	احتمال پایایی سیستم
۰/۷۸۶۵	۰/۹۴۶۴	۰/۹۸۶۳	۰/۵		
۰/۸۹۲۷	۰/۹۹۶۳	۰/۹۸۶۳	۰/۵	ناآگاهی‌بخش	
۰/۸۹۲۷	۰/۹۷۵۲	۰/۹۸۶۳	۰/۵		

تقدیر و تشکر

نویسنده از نظرات و پیشنهادهای داوران، سردبیر، هیئت تحریریه و ویراستار محترم مجله در ارتقای علمی و ارائه بهتر مقاله قدردانی و تشکر می‌کند.

مراجع

- Clarke, A. B. (1957), Maximum likelihood Estimates in a Simple Queue, *Annals of Mathematical Statistics*, **28**, 1036-1040.
- Chowdhury, S., Mukherjee. S. P. (2011), Estimation of Waiting Time Distribution

- in an $M/M/1$ Queue, *OPSEARCH*, **48**(4), 306-317.
- Chowdhury, S., Mukherjee, S. P. (2013), Estimation of Trafic Intensity based on Queue Length in a Single $M/M/1$ Queue, *Communication in Statistics-Theory and Methods*, **42**, 2376-2390.
- Chandrasekhar, P., Vaidyanathan, V. S., Durairajan, T. M., Yadavalli, V.S.S. (2020), Classical and Bayes Estimation in the $M/D/1$ Queueing System, *Communications in Statistics - Theory and Methods*, **22**, 5411-5421.
- Dey, D. K., Ghosh, M., Srinivasan, C. (1987), Simultaneous Estimation of Parameters under Entropy Loss, *Journal of Statistical Planning and Inference*, **15**, 347-363.
- Dey, D. K., Liu, P. L. (1992), On Comparison of Estimators in a Generalized Life Model, *Microelectronics Reliability*, **32**, 207-221.
- Goldenshluger, A., Koops, D. T. (2019), Nonparametric Estimation of Service Time Characteristics in Infinite-Server Queues with Nonstationary Poisson Input, *Stochastic Systems*, **9**(3), 183-207.
- Muddapur, M.V. (1972), Bayesian Estimates of Parameters in some Queueing Models, *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, **24**, 327-331.
- Norstrom, J. G. (1996), The Use of Precautionary Loss Function in Risk Analysis, *IEEE Transactions on Reliability*, **45**, 400-403.
- Sing, S. K., Acharya, S. K. (2019), Equivalence between Bayes and the Maximum likelihood Estimator in $M/M/1$ Queue, *Communication in Statistics-Theory and Methods*, **48**(19), 4780-4793.
- Schweer, S., Wichelhaus, C. (2020), Nonparametric Estimation of the Service Time Distribution in Discrete-Time Queueing Networks, *Stochastic Processes and their Applications*, **130**(8), 4643-4666.
- Thiruvaiyaru, D., Basawa. I. V. (1992), Empirical Bayes Estimation for Queueing Systems and Networks, *Queueing System*, **11**, 179-202.