



Introducing the $E_r/M/3$ Queuing Model and a New (E^2 -Bayesian) Estimate for its Traffic Intensity Parameter

Yaghoobzadeh Shahrastani, S. , Department of Statistics, Payame Noor University, Tehran, Iran.

Corresponding author: S. Yaghoobzadeh Shahrastani, yagoubzade@pnu.ac.ir

Received: 14/3/2025 Revised: 2/11/2025 Accepted and Published Online: 4/11/2025.

Introduction

One manifestation of modern societies in all aspects of social life is queues. In supermarkets, doctors' offices, public transportation stations, telecommunications companies, banks, ports, and airports, Queue formation is clearly observed in computer systems and production lines. Queue theory is considered an essential component of intelligent tools, and the study of queue models in manufacturing and service sectors is necessary to increase system efficiency, achieve competitive advantages, and meet quality standards. In management science, traditional mathematical models have been proposed for queue analysis, which are very useful for understanding and making appropriate decisions for queuing systems. Still, they are not sufficient because the assumptions on which these models are based assume stability and a lack of change in the queue structure. Therefore, studying various models in queueing theory is necessary to improve the efficiency of queuing systems. In this paper, from the family of $\{E_r/M/c; r, c \in N\}$ models, the $E_r/M/3$ model is introduced, and quantities such as the distribution of the number of requests (customers) in the system, the average number of requests in the queue and the system, and the average waiting time in the queue and the system for a request are derived, which these quantities are among the performance evaluation criteria for any queuing system. On the other hand, due to the important role of the traffic intensity parameter in the performance evaluation criteria of queuing systems, its estimation is obtained using Bayesian, E -Bayesian, and Hierarchical Bayesian methods under the Generalized Entropy loss function and based on the system downtime, and then, based on the E -Bayesian estimator, a new estimator for the traffic intensity parameter is introduced, which is named the E^2 -Bayesian estima-

tor in this paper. Since reducing the waiting time of each customer in the queue and achieving customer satisfaction with the system is one of the concerns of any queuing system, among the Bayesian, E -Bayesian, Hierarchical Bayesian, and the new estimators, the estimator that can reduce the average waiting time in the customer queue is considered as the optimal estimator for the traffic intensity parameter in this paper. Furthermore, using the Monte Carlo simulation method and real data, the superiority of the new estimator over the other estimators mentioned in the paper is demonstrated.

Material and Methods

The statistical methods used in this article are Bayesian estimation, E -Bayesian estimation, and E^2 -Bayesian methods. The estimated parameters are the traffic intensity of the model $E_r/M/3$.

Results and Discussion

Using a measure called the average waiting time in a customer queue system, we want to choose an appropriate estimator from among the Bayesian, E -Bayesian, and E^2 -Bayesian estimators. The estimator that minimizes this measure is the best.

Conclusion

Using Monte Carlo simulation and a numerical example, it was concluded that the E^2 -Bayesian estimation of the traffic intensity parameter is better than the Bayesian and E -Bayesian estimations.

Keywords: Queuing model $E_r/M/3$, Traffic intensity parameter, Average waiting time in the queue, E -Bayesian estimation, Hierarchical Bayesian estimation, E^2 -Bayesian estimation.

Mathematics Subject Classification (2020): 62C12 62K05.



©The Author(s). The Publisher is Iranian Statistical Society.

This is an open access article distributed under the terms and conditions of [\(CC BY-NC 4.0\)](https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/)

معرفی مدل صف‌بندی $E_r/M/3$ و برآوردی جدید (E^2 -بیز) برای پارامتر شدت ترافیک

شهرام یعقوب زاده شهرستانی

گروه آمار، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران.

نویسنده مسئول: شهرام یعقوب زاده شهرستانی، yagoubzade@pnu.ac.ir

تاریخ دریافت: ۱۴۰۳/۱۲/۲۴ تاریخ بازنگری: ۱۴۰۴/۸/۱۱ تاریخ پذیرش و انتشار: ۱۴۰۴/۸/۱۳

چکیده: مطالعه مدل‌های متنوع در نظریه صف لازم است تا بهره‌وری سیستم‌های صف‌بندی افزایش یابد. در این مقاله از خانواده مدل‌های $\{E_r/M/c; r, c \in N\}$ ، مدل $E_r/M/3$ معرفی می‌شود و کمیت‌هایی مانند توزیع تعداد متقاضیان (مشتریان) در سیستم، متوسط تعداد متقاضیان در صف و سیستم و متوسط زمان انتظار در صف و سیستم یک متقاضی به دست آورده می‌شوند. به دلیل نقش ویژه پارامتر شدت ترافیک در معیارهای ارزیابی عملکرد سیستم‌های صف‌بندی، برآورد آن به روش‌های بیز، E -بیز و بیز سلسله‌مراتبی تحت تابع زیان آنتروپی عمومی و بر اساس زمان توقف سیستم، به دست آورده می‌شود و سپس بر اساس برآوردگر E -بیز، برآوردی جدید برای پارامتر شدت ترافیک معرفی می‌گردد که در این مقاله برآورد E^2 -بیز نامیده می‌شود. بنابر این در بین برآوردگرهای بیز، E -بیز، بیز سلسله‌مراتبی و برآوردگر جدید، برآوردگری که بتواند متوسط مدت زمان انتظار در صف مشتری را کاهش دهد در این مقاله به عنوان برآوردگر مطلوب پارامتر شدت ترافیک در نظر گرفته می‌شود. همچنین با استفاده از روش شبیه‌سازی مونت‌کارلو و به کمک یک مجموعه داده‌های واقعی برتری برآوردگر جدید نسبت به سایر برآوردگرهای ذکر شده در مقاله نشان داده می‌شود.

واژه‌های کلیدی: مدل صف‌بندی $E_r/M/3$ ، شدت ترافیک، متوسط مدت زمان انتظار در صف، برآورد E -بیز، برآورد بیز سلسله‌مراتبی، برآورد E^2 -بیز.
کد موضوع‌بندی ریاضی (۲۰۲۰): 62K05، 62C12.

۱ مقدمه

یکی از مظاهر جوامع مدرن که در تمام زوایای زندگی اجتماعی موجودیت یافته صف‌ها هستند. در سوپر مارکت‌ها، مطب پزشکان، ایستگاه‌های وسایط نقلیه عمومی، شرکت‌های مخابرات، بانک‌ها، بنادر، فرودگاه‌ها، سیستم‌های رایانه‌ای و خطوط تولید تشکیل صف به وضوح مشاهده می‌شود. تئوری صف یکی از اجزاء مهم و ابزارهای هوشمند محسوب شده و مطالعه مدل‌های صف در بخش‌های تولیدی و خدماتی جهت افزایش بهره‌وری سیستم و کسب مزیت‌های رقابتی و استانداردهای کیفیت لازم است. مدیران همواره در صدد ایجاد تعادل بین هزینه‌های ارائه خدمات مطلوب و هزینه‌های نگهداشتن مشتریان در صف‌ها هستند. آن‌ها در نظر دارند که طول صف‌ها طوری کنترل شود که مشتریان خسته و ناراحت نشده و صف را ترک نمایند. در واقع منتظر نگهداشتن مشتریان در صف‌ها باعث ایجاد عادات و فرهنگ‌های خاصی می‌شود که هزینه‌های چشم‌گیری را در سطح خرد و کلان بر سیستم تحمیل می‌کند. در علم مدیریت، مدل‌های سستی ریاضی جهت تجزیه و تحلیل صف مطرح شده‌اند که جهت شناخت و اتخاذ تصمیم مناسب سیستم‌های صف انتظار بسیار مفید هستند اما کافی نیستند، در نتیجه باید مدل‌هایی معرفی شوند که قابلیت انعکاس شرایط عدم قطعیت و انعطاف‌پذیری مطابق با واقعیت را دارا باشند. بهتر است مدل‌های صف‌بندی متنوعی معرفی و اندازه‌های موثر آن‌ها مانند توزیع تعداد متقاضیان در سیستم، متوسط تعداد متقاضیان در صف و سیستم و متوسط مدت زمان انتظار در صف و سیستم متقاضیان به دست آورده شوند. یک گروه از مدل‌های صف‌بندی، مدل‌های صف‌بندی دارای توزیع ارلانگ (E_r) هستند. یعنی مدل‌هایی که فاصله زمانی بین ورودهای متوالی مشتری‌ها و یا زمان سرویس آن‌ها دارای توزیع ارلانگ است که به دو گروه از مدل‌های $\{M/E_r/c; r, c \in N\}$ و $\{E_r/M/c; r, c \in N\}$ تفکیک می‌شوند. از این دو خانواده مدل‌ها بویژه خانواده مدل‌های $\{M/E_r/c; r, c \in N\}$ ، مدل‌هایی به ازای $c = 1, 2$ توسط محققین معرفی و بعضی از معیارهای ارزیابی مدل، برآورد شد. برآورد پارامترها و بررسی خواص ریاضی آن‌ها در مدل $M/E_k/1$ توسط گوپتا (۱۹۸۲) و برآورد زمان انتظار متقاضیان در سیستم صف‌بندی $E_k/M/1$ توسط فیسچر (۱۹۷۴) صورت گرفته است. تحلیل بیزی پارامترهای مدل‌های $E_r/M/1$ و $E_r/M/c$ توسط ویپر (۱۹۹۸)، تحلیل بیزی پارامترهای مدل‌های $M/E_r/1$ و $M/H_k/1$ توسط اینسوا (۱۹۹۸) و برآورد پارامتر شدت ترافیک مدل $M/E_k/1$ توسط هاریش چاندارا و سوبارائو (۱۹۹۸) انجام شد. تحقیقی هم در زمینه کنترل کیفیت در مدل $M/E_k/1$ توسط جابین و دهیانی (۲۰۱۱) صورت گرفته شد. برآورد بیزی پارامترها در مدل $M/E_r/1$ توسط چادهوری و میتی (۲۰۱۴)، برآورد بیزی پارامترها در انواع مدل‌های صف‌بندی توسط جوس و مانوهاران (۲۰۱۴)، برآورد پارامترها در مدل $M/E_r/1$ به روش‌های درستمایی ماکسیم و بیزی توسط وایدیاناتان و چاندراساхар (۲۰۱۸) و برآورد بیزی پارامترها با استفاده از توزیع پیشین دو متغیره توسط دیپتی و جوس (۲۰۲۱) به دست آورده شد. همچنین برآورد پارامتر شدت ترافیک و احتمال پایایی مدل صف‌بندی $M/M/c$ (که همان مدل $M/E_1/c$ است) تحت یک زمان توقف در سیستم توسط یعقوب‌زاده (۱۴۰۲) به دست آورده شد.

برای ارائه مدل‌های متنوع‌تر در نظریه صف‌بندی، مدلی از خانواده مدل‌های صف‌بندی $\{E_r/M/c; r \in N\}$

به نام $E_r/M/3$ معرفی و توزیع تعداد متقاضیان در سیستم و سایر معیارهای ارزیابی عملکرد سیستم به دست آورده می‌شود. همچنین در این مقاله فرض می‌شود سیستم تا زمان T فعال است. سپس بر اساس زمان توقف T و تحت تابع زیان آنتروپی عمومی، پارامتر شدت ترافیک مدل (ρ) به روش‌های بیز، E -بیز و بیز سلسله‌مراتبی برآورد شده و بر اساس برآورد E -بیز برآوردی جدید برای ρ به نام $\hat{\rho}_{E^*B}$ معرفی و کارایی آن نسبت به برآوردهای بیز، E -بیز و بیز سلسله‌مراتبی ρ سنجیده می‌شود. از طرفی وقت هر متقاضی یا مشتری از لحاظ اقتصادی-اجتماعی بسیار بارز است و مدت زمان زیادی نباید در صف بماند. یکی از اهداف هر سیستم صف‌بندی راضی نگه داشتن مشتری است و همواره سعی بر آن است مدت زمان انتظار در صف مینیمم گردد. بنابر این در این مقاله برآوردهای برآورد مناسب ρ محسوب می‌شود که به ازای آن، مدت زمان انتظار در صف متقاضی مینیمم شود.

ساختار مقاله به این صورت است. در بخش ۲ مدل صف‌بندی $E_r/M/3$ معرفی و بعضی از اندازه‌های موثر آن مانند توزیع تعداد متقاضیان در سیستم، متوسط تعداد متقاضیان در صف و سیستم، متوسط مدت زمان انتظار یک متقاضی در صف و سیستم به دست آورده می‌شود. در بخش ۳ برآوردهای بیز، E -بیز و بیز سلسله‌مراتبی پارامتر شدت ترافیک مدل معرفی شده تحت تابع زیان آنتروپی عمومی و بر اساس یک زمان توقف به دست آورده شده و همچنین برآوردهای جدید بر اساس برآورد E -بیز برای ρ معرفی می‌شود. در بخش‌های ۴ و ۵ با استفاده از روش شبیه‌سازی مونت‌کارلو و به کمک یک مجموعه داده‌های واقعی برتری برآوردهای معرفی شده نسبت به سایر برآوردهای اشاره شده نشان داده می‌شود. در انتها بحث و نتیجه‌گیری ارائه می‌شود.

۲ مدل صف‌بندی $E_r/M/3$

یک گروه از سیستم‌های صف‌بندی مهم، سیستم‌های صف‌بندی دارای توزیع ارلانگ هستند. به عبارت دیگر این سیستم‌ها، سیستم‌های صف‌بندی هستند که توزیع زمان بین ورودهای متوالی مشتریان یا توزیع زمان سرویس آن‌ها و یا هر دو، متغیرهایی تصادفی دارای توزیع ارلانگ می‌باشند. بنابر این در این بخش ابتدا توزیع ارلانگ تعریف می‌شود و سپس مدل صف‌بندی از خانواده مدل‌های صف‌بندی دارای توزیع ارلانگ به نام $E_r/M/3$ معرفی و توزیع تعداد متقاضیان در سیستم و برخی از معیارهای ارزیابی عملکرد آن به دست آورده می‌شوند. متغیرهای تصادفی مانند مدت زمان سرویس و یا زمان بین دو ورود مشتری‌ها در سیستم‌های صف‌بندی از توزیع‌های متنوعی پیروی می‌کنند که توزیع ارلانگ^۱ یکی از معروف‌ترین آن‌ها است.

تعریف ۱. متغیر تصادفی X دارای توزیع ارلانگ است اگر دارای تابع چگالی احتمال به صورت

$$f(x) = \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)} x^{r-1} e^{-\lambda x}, \quad x > 0, \lambda > 0, r \in \{1, 2, \dots\}$$

باشد و با نماد $E_r(r, \lambda)$ نشان داده می‌شود.

^۱Erlang

مدل صف‌بندی $E_r/M/3$ سیستمی است که زمان بین ورودهای متقاضیان دارای توزیع $E_r(r, \lambda)$ و زمان سرویس‌های آن‌ها دارای توزیع نمایی با پارامتر μ و با تابع چگالی احتمال $f(t) = \mu e^{-\mu t}, \mu > 0, t > 0$ است.

۲.۱ توزیع تعداد متقاضیان در سیستم و معیارهای ارزیابی عملکرد سیستم

به طور کلی نحوه محاسبه توزیع تعداد متقاضیان در سیستم $E_r/M/c$ در آلن (۱۹۹۰) به صورت

$$\pi_n = \begin{cases} 1 - \rho - c\rho \sum_{j=1}^{c-1} \Pi(j-1) \left(\frac{1}{j} - \frac{1}{c} \right) & n = 0 \\ \frac{c\rho}{n} \Pi(n-1) & 1 \leq n \leq c-1 \\ \rho \Pi(n-1) & n \geq c \end{cases} \quad (۱)$$

ارائه می‌شود به طوریکه $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ (پارامتر شدت ترافیک^۱) و

$$\Pi(n) = \begin{cases} \sum_{i=n}^{c-1} (-1)^{i-n} \binom{i}{n} U_i & n = 0, 1, \dots, c-2 \\ D\omega^{n-c} & n \geq c-1 \end{cases} \quad (۲)$$

و ω ریشه معادله $\omega = G(c\mu(1-\omega))$ بوده که $G(\cdot)$ تبدیل لاپلاس توزیع زمان بین دو ورود متوالی متقاضیان است ($0 < \omega < 1$). همچنین

$$\begin{aligned} U_i &= DC_i \sum_{j=i+1}^c \frac{\binom{c}{j}}{C_j(1-g_j)} \left[\frac{c(1-g_j)-j}{c(1-\omega)-j} \right], 0 \leq i \leq c-1, \\ g_j &= G(j\mu), \quad j = 1, \dots, c, \\ C_j &= \begin{cases} 1 & j = 0 \\ \prod_{i=1}^j \left(\frac{g_i}{1-g_i} \right) & j = 1, \dots, c, \end{cases} \\ D &= \left[\frac{1}{1-\omega} + \sum_{j=1}^c \frac{\binom{c}{j}}{C_j(1-g_j)} \left(\frac{c(1-g_j)-j}{c(1-\omega)-j} \right) \right]^{-1} \end{aligned} \quad (۳)$$

هستند.

^۱Traffic intensity

قضیه ۱. در مدل صفبندی $E_r/M/3$ توزیع تعداد متقاضیان در سیستم به صورت زیر است.

$$\begin{aligned}\pi_0 &= 1 - \frac{\rho^3(1-\omega)}{2} \left(\frac{12 + 12\rho^2 - 252\rho^2\omega - 30\rho - 135\rho\omega + 27\rho\omega^2 + 60\omega}{2 + \omega - 12\omega^2 - 36\rho\omega - 9\rho^2\omega + 189\rho\omega^2 + 9\omega^3 - 162\rho^2\omega^3} \right. \\ &\quad \left. + \frac{432\rho^2\omega - 270\rho^2\omega^2 - 99\omega^2}{2 + \omega - 12\omega^2 - 36\rho\omega - 9\rho^2\omega + 189\rho\omega^2 + 9\omega^3 - 162\rho^2\omega^3} \right) \\ \pi_1 &= 3\rho^2(1-\omega) \left(\frac{2 + 3\rho^2 - 36\rho^2\omega - 6\rho - 405\rho\omega + 135\rho\omega^2 + 24\omega + 36\omega^2}{2 + \omega - 12\omega^2 - 36\rho\omega - 9\rho^2\omega + 189\rho\omega^2 + 9\omega^3 - 162\rho^2\omega^3} \right. \\ &\quad \left. + \frac{216\rho^2\omega - 216\rho^2\omega^2}{2 + \omega - 12\omega^2 - 36\rho\omega - 9\rho^2\omega + 189\rho\omega^2 + 9\omega^3 - 162\rho^2\omega^3} \right) \\ \pi_2 &= \frac{3\rho^2(1-\omega)(2-3\omega)(2+9\omega-54\rho^2\omega-3\rho+9\rho\omega)}{2(2+\omega-12\omega^2-36\rho\omega-9\rho^2\omega+189\rho\omega^2+9\omega^3-162\rho^2\omega^3)} \\ \pi_n &= \frac{9\rho^2(1-\omega)(1-3\omega)(2-3\omega)\omega^{n-2}}{2+\omega-12\omega^2-36\rho\omega-9\rho^2\omega+189\rho\omega^2+9\omega^3-162\rho^2\omega^3}, \quad n \geq 3\end{aligned}$$

برهان: به ازای $c = 3$ روابط (۱) و (۲) به ترتیب به صورت

$$\pi_n = \begin{cases} 1 - \frac{2+3\Pi(0)+\Pi(1)}{2}\rho & n = 0 \\ \frac{3\rho\Pi(n-1)}{n} & n = 1, 2 \\ \rho\Pi(n-1) & n \geq 3 \end{cases} \quad (4)$$

$$\Pi(n) = \begin{cases} U_0 - U_1 + U_2 & n = 0 \\ U_1 - 2U_2 & n = 1 \\ D\omega^{n-2} & n \geq 2 \end{cases} \quad (5)$$

تبدیل می‌شوند. از طرفی تبدیل لاپلاس توزیع زمان بین دو ورود متوالی متقاضیان یعنی $E_r(r, \lambda)$ ، تابع $G(s) = (\lambda/(\lambda+s))^r$ است. بنابراین به ازای $c = 3$ و با فرض $x = \omega^{\frac{1}{2}}$ ، از معادله $\omega = G(c\mu(1-\omega))$ رابطه $3\mu x^{r+1} - (\lambda + 3\mu)x + \lambda = 0$ یا $x^{r+1} - (1+\rho)x + \rho = 0$ حاصل می‌شود. همچنین به ازای $c = 3$ از رابطه (۳) روابط

$$\begin{aligned}g_i &= \frac{\lambda}{\lambda + i\mu} = \frac{\rho}{i + \rho}, \quad i = 1, 2, 3 \\ C_i &= \begin{cases} 1 & i = 0 \\ \frac{(\rho)^i}{i!} & i = 1, 2, 3 \end{cases}\end{aligned}$$

$$D = \frac{9\rho^2\omega(1-\omega)(1-3\omega)(2-3\omega)}{2+\omega-12\omega^2-36\rho\omega-9\rho^2\omega+189\rho\omega^2+9\omega^3-162\rho^2\omega^3}$$

$$U_0 = \frac{(1-\omega)(2+3\omega-18\rho\omega-9\omega^2-27\rho^2\omega+54\rho^2\omega^2)}{2+\omega-12\omega^2-36\rho\omega-9\rho^2\omega+189\rho\omega^2+9\omega^3-162\rho^2\omega^3}$$

$$U_1 = \frac{3\rho(1-\omega)(2-3\omega)(1+3\omega-18\rho\omega^2)}{2+\omega-12\omega^2-36\rho\omega-9\rho^2\omega+189\rho\omega^2+9\omega^3-162\rho^2\omega^3}$$

$$U_2 = \frac{15\rho^2(1-\omega)(1-3\omega)(2-3\omega)}{2+\omega-12\omega^2-36\rho\omega-9\rho^2\omega+189\rho\omega^2+9\omega^3-162\rho^2\omega^3}$$

به دست آورده می‌شوند. بنابر این به کمک این روابط، رابطه (۵) به رابطه

$$\Pi(n) = \begin{cases} \frac{\rho(1-\omega)(2+3\rho^2-36\rho^2\omega-6\rho-40\delta\rho\omega+13\delta\rho\omega^2+12\omega+18\omega^2-108\rho^2\omega^2+108\rho^2\omega^3)}{2+\omega-12\omega^2-36\rho\omega-9\rho^2\omega+189\rho\omega^2+9\omega^3-162\rho^2\omega^3} & n = 0 \\ \frac{\rho(1-\omega)(2-3\omega)(2+9\omega-54\rho^2\omega-3\rho+9\rho\omega)}{2+\omega-12\omega^2-36\rho\omega-9\rho^2\omega+189\rho\omega^2+9\omega^3-162\rho^2\omega^3} & n = 1 \\ \frac{9\rho^2\omega(1-\omega)(1-3\omega)(2-3\omega)\omega^{n-2}}{2+\omega-12\omega^2-36\rho\omega-9\rho^2\omega+189\rho\omega^2+9\omega^3-162\rho^2\omega^3} & n \geq 2 \end{cases}$$

تبدیل می‌شود. بنابر این به کمک این رابطه و رابطه (۴)، توزیع تعداد متقاضیان در سیستم (N) یعنی $\pi_n = P(N=n)$ به صورت

$$\pi_0 = 1 - \frac{\rho^2(1-\omega)}{2} \left(\frac{12+12\rho^2-252\rho^2\omega-30\rho-13\delta\rho\omega+27\rho\omega^2+60\omega}{2+\omega-12\omega^2-36\rho\omega-9\rho^2\omega+189\rho\omega^2+9\omega^3-162\rho^2\omega^3} \right. \\ \left. + \frac{432\rho^2\omega-270\rho^2\omega^2-99\omega^2}{2+\omega-12\omega^2-36\rho\omega-9\rho^2\omega+189\rho\omega^2+9\omega^3-162\rho^2\omega^3} \right)$$

$$\pi_1 = 3\rho^2(1-\omega) \left(\frac{2+3\rho^2-36\rho^2\omega-6\rho-40\delta\rho\omega+13\delta\rho\omega^2+24\omega+36\omega^2}{2+\omega-12\omega^2-36\rho\omega-9\rho^2\omega+189\rho\omega^2+9\omega^3-162\rho^2\omega^3} \right. \\ \left. + \frac{216\rho^2\omega-216\rho^2\omega^2}{2+\omega-12\omega^2-36\rho\omega-9\rho^2\omega+189\rho\omega^2+9\omega^3-162\rho^2\omega^3} \right)$$

$$\pi_2 = \frac{3\rho^2(1-\omega)(2-3\omega)(2+9\omega-54\rho^2\omega-3\rho+9\rho\omega)}{2(2+\omega-12\omega^2-36\rho\omega-9\rho^2\omega+189\rho\omega^2+9\omega^3-162\rho^2\omega^3)}$$

$$\pi_n = \frac{9\rho^2(1-\omega)(1-3\omega)(2-3\omega)\omega^{n-2}}{2+\omega-12\omega^2-36\rho\omega-9\rho^2\omega+189\rho\omega^2+9\omega^3-162\rho^2\omega^3}, \quad n \geq 3$$

به دست آورده می‌شود.

فرع ۱. متوسط تعداد متقاضیان در صف (L_q) و متوسط مدت زمان انتظار در صف هر متقاضی (W_q) در مدل

صف‌بندی $E_r/M/3$ به ترتیب

$$L_q = \frac{9\rho^3\omega^2(1-3\omega)(2-3\omega)}{(1-\omega)(2+\omega-12\omega^2-36\rho\omega-9\rho^2\omega+189\rho\omega^2+9\omega^3-162\rho^2\omega^3)}$$

$$W_q = \frac{9\rho^3\omega^2(1-3\omega)(2-3\omega)}{\lambda(1-\omega)(2+\omega-12\omega^2-36\rho\omega-9\rho^2\omega+189\rho\omega^2+9\omega^3-162\rho^2\omega^3)}$$

به دست آورده می‌شود.

برهان: با استفاده از قضیه ۱ و به کمک رابطه $L_q = E(N_q)$ که N_q معرف تعداد متقاضیان در صف است L_q و با استفاده از رابطه $L_q = \lambda W_q$ (آلن، ۱۹۹۰)، W_q به دست آورده می‌شوند. همچنین به کمک روابط $L = \lambda W$ و $W = W_q + \frac{1}{\mu}$ (آلن، ۱۹۹۰) متوسط زمان انتظار متقاضی در سیستم (W) و متوسط تعداد متقاضیان در سیستم ($L = E(N)$) محاسبه می‌شوند.

۳ برآورد پارامتر شدت ترافیک تحت یک زمان توقف در سیستم

در این بخش فرص می‌شود که سیستم تا زمانی مانند T فعال است و بعد از آن فعالیت سیستم متوقف می‌شود که در این مقاله T زمان توقف نامیده می‌شود. از زمان شروع فعالیت سیستم تا زمان T ، $A(T)$ و $B(T)$ به ترتیب تعداد متقاضیان وارد شده به سیستم و تعداد متقاضیان سرویس شده (خارج شده از سیستم) در نظر گرفته می‌شوند. سپس تابع زیان معرفی و برآوردهای E -بیز و بیز سلسله مراتبی تعریف می‌شوند. در نهایت، پارامتر شدت ترافیک مدل صف‌بندی $E_r/M/3$ به روش‌های بیز، E -بیز و بیز سلسله مراتبی تحت یک زمان توقف در سیستم و بر اساس تابع زیان آنتروپی عمومی^۱ برآورد شده و برآوردگری جدید نیز معرفی می‌شود.

روش بیز، یکی از روش‌های مختلف برای برآورد پارامترهای توزیع‌های آماری است، که انتخاب معقول توزیع‌های پیشین روی فضای پارامتر، نقش مهمی در کاهش خطای برآوردگر بیزی دارد. بنابر این، تعریف توزیع پیشین مناسب روی فضای پارامتر و اعمال شرایطی خاص روی ابرپارامترهای توزیع پیشین، نقش مهمی دارد. برآوردهای E -بیز و بیز سلسله مراتبی از این نوع برآوردها هستند. توزیع پیشین بیز سلسله مراتبی ابتدا توسط لیندلی و اسمیت (۱۹۷۲) معرفی شد و سپس توسط هان (۱۹۷۷) مورد بررسی بیشتری قرار گرفت و روش‌های برآورد E -بیز^۲ و بیز سلسله مراتبی^۳ معرفی شدند. اخیراً از این روش‌ها توسط چند نویسنده در نظریه برآوردها استفاده شد که برخی از آن‌ها عبارتند از: برآورد پارامتر توزیع نمایی و برآورد پارامتر نسبت توزیع دوجمله‌ای توسط هان (۲۰۰۹)، برآورد پارامتر و تابع قابلیت اعتماد توزیع بور نوع ۱۲ بر اساس نمونه‌های سانسور فزاینده نوع دوم

^۱General entropy loss function

^۲E-Bayesian

^۳Hierarchical Bayesian

۵۰۰ برآوردی جدید برای پارامتر شدت ترافیک

توسط **جاهین و اکاشا** (۲۰۱۱)، برآورد پارامتر توزیع پاسکال توسط **وانگ و همکاران** (۲۰۱۲)، برآورد پارامترهای پاسکال توسط **یوسف‌زاده** (۲۰۱۷)، برآورد پارامتر مقیاس توزیع گومپرتز بر اساس بر اساس طرح سانسور فزاینده نوع دوم و داده‌های فازی توسط **یعقوب‌زاده شهرستانی** (۲۰۱۸) و برآورد پارامتر تنش مقاومت در توزیع رایلی تحت تابع زیان لاینکس توسط **شادرخ و یعقوب‌زاده** (۱۳۹۸). همچنین کاربرد روش بیز سلسله‌مراتبی در تحلیل داده‌ها توسط **میچیز و ویکل** (۲۰۰۹)؛ **کرسیس و تینگلی** (۲۰۱۰)؛ **آندو و زلنر** (۲۰۱۰)؛ **اوسی و دوکر** (۲۰۱۱)؛ **ریچارد** (۲۰۱۱) نشان داده شد.

در این مقاله $\{U_k, k \geq 1\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع با توزیع $E_r(r, \lambda)$ به عنوان زمان‌های بین ورود متوالی متقاضیان و $\{V_k, k \geq 1\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع با چگالی $g(v, \mu) = \mu e^{-\mu v}, v > 0$ به عنوان زمان‌های سرویس متقاضیان و T نیز زمان توقف سیستم در نظر گرفته می‌شوند. با فرض $A(T)$ به عنوان تعداد متقاضیان وارد شده به سیستم و $B(T)$ به عنوان تعداد متقاضیان سرویس شده تا زمان T و با در نظر گرفتن نمونه $X = \{U_1, \dots, U_{A(T)}, V_1, \dots, V_{B(T)}\}$ تابع درستنمایی به صورت

$$L_T(\lambda, \mu) = \prod_{i=1}^{A(T)} f(u_i, \lambda) \prod_{i=1}^{B(T)} g(v_i, \mu) = \lambda^{A(T)} \mu^{B(T)} e^{-(\lambda \sum_{i=1}^{A(T)} u_i + \mu \sum_{i=1}^{B(T)} v_i)} \quad (6)$$

می‌شود. **کالابریا و پولسینی** (۱۹۹۶) تابع زیانی به نام تابع زیان آنروپی عمومی به صورت

$$L(\hat{\theta}, \theta) \propto \left(\frac{\hat{\theta}}{\theta}\right)^p - p \ln\left(\frac{\hat{\theta}}{\theta}\right) - 1, \quad p \neq 0. \quad (7)$$

معرفی کردند و برآورد بیز پارامتر θ به شرط داده‌ها را تحت این تابع زیان به صورت $\hat{\theta}_{GB} = [E(\theta^{-p} | data)]^{-\frac{1}{p}}$ به دست آوردند.

تعریف ۲. (هان، ۱۹۷۷) فرض کنید b_1 و b_2 ابرپارامترهایی در توزیع پیشین θ و $\pi(b_1, b_2)$ توزیع پیشین توام (b_1, b_2) و $\hat{\theta}_B(b_1, b_2)$ برآورد بیز θ باشند، آنگاه برآورد E -بیز θ که با نماد $\hat{\theta}_{EB}$ نشان داده می‌شود، به صورت

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_{EB} &= E_{\pi(b_1, b_2)}(\hat{\theta}_B(b_1, b_2)) \\ &= \int_{\Lambda_1} \int_{\Lambda_2} \hat{\theta}_B(b_1, b_2) \pi(b_1, b_2) db_1 db_2, \quad b_1 \in \Lambda_1, b_2 \in \Lambda_2 \end{aligned}$$

به دست می‌آید و در حقیقت امید ریاضی برآورد بیز θ است.

تعریف ۳. (هان، ۱۹۷۷) اگر $\pi(\theta | \lambda)$ و $\pi'(\lambda)$ به ترتیب توزیع‌های پیشین متناظر پارامتر θ و ابرپارامتر λ باشند، آنگاه توزیع پیشین سلسله‌مراتبی θ به صورت $\pi''(\theta) = \int_{\Lambda} \pi(\theta | \lambda) \pi'(\lambda) d\lambda$ ، $\lambda \in \Lambda$ به دست آورده می‌شود.

۳.۱ برآوردهای بیز، E -بیز و سلسله مراتبی

در این بخش λ و μ پارامترهای مستقل از هم و با توزیع‌های پیشین به ترتیب

$$\pi(\lambda|a, b) = \frac{b^a}{\Gamma(a)} \lambda^{a-1} e^{-b\lambda}, \lambda > 0, a > 0, b > 0, \quad (8)$$

$$\pi(\mu|c, \eta) = \frac{c^\eta}{\Gamma(c)} \mu^{c-1} e^{-\eta\mu}, \mu > 0, c > 0, \eta > 0. \quad (9)$$

در نظر گرفته می‌شوند.

قضیه ۲. برآورد E -بیز پارامتر شدت ترافیک صف‌بندی $E_r/M/3$ به صورت

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_{EB}(c_1, c_2) &= \frac{1}{c_1 c_2} \int_0^{c_2} \int_0^{c_1} \hat{\rho}_B(b, \eta) \pi(b, \eta) db d\eta \\ &= \frac{\phi^{-\frac{1}{p}}(c_2 + 2T_2)}{\epsilon c_1} \log\left(\frac{c_1 + T_1}{T_1}\right) \end{aligned}$$

است که در آن $T_1 = \sum_{i=1}^{B(T)} V_i$ و $T_2 = \sum_{i=1}^{A(T)} U_i$ و c_1 و c_2 ثابت هستند.

برهان: با توجه به روابط (۸) و (۹) توزیع پسین توام λ و μ به شرط $\mathbf{X}$ به صورت

$$\begin{aligned} \pi(\lambda, \mu|\mathbf{X}) &= \frac{(T_1 + b)^{rA(T)+a} (T_2 + \eta)^{B(T)+c}}{\Gamma(rA(T) + a) \Gamma(B(T) + c)} \lambda^{rA(T)+a-1} \mu^{B(T)+c-1} \\ &\times e^{-\lambda(T_1+b) - \mu(T_2+\eta)} \end{aligned} \quad (10)$$

به دست آورده می‌شود. بنابر این به کمک رابطه (۱۰) برآورد بیزی ρ تحت تابع زیان رابطه (۷) به صورت

$$\hat{\rho}_B(b, \eta) = \{E(\rho^{-p}|\mathbf{X})\}^{-\frac{1}{p}} = \frac{1}{3} \phi^{-\frac{1}{p}} \cdot \frac{\eta + T_2}{b + T_1}$$

به دست آورده می‌شود که در آن $\phi = \frac{\Gamma(a+rA(T)-p)\Gamma(c+B(T)+p)}{\Gamma(a+rA(T))\Gamma(c+B(T))}$ است. با توجه به هان (۱۹۷۷) در رابطه (۹)، a و b طوری در نظر گرفته می‌شوند که $\pi(\lambda|a, b)$ نسبت به λ کاهشی باشد. پس با توجه به رابطه $\frac{d\pi(\lambda|a, b)}{d\lambda} = \frac{b^a \lambda^{a-1} e^{-b\lambda}}{\Gamma(a)} ((a-1) - b\lambda)$ باید $b > 0$ و $0 < a \leq 1$ باشد. برگر (۱۹۸۵) نشان داد که بزرگ بودن b باعث کاهش استواری برآورد بیزی λ می‌شود. بنابر این ابر پارامتر باید از بالا کراندار شده و به صورت $0 < b < c_1$ در نظر گرفته می‌شود. هان (۲۰۱۱) نشان داد که مناسب‌ترین توزیع b توزیع یکنواخت است. بنابر این در این مقاله توزیع b یعنی $\pi(b)$ توزیع یکنواخت پیوسته در بازه $(0, c_1)$ در نظر گرفته می‌شود. همچنین با توجه به شرط

۵۰۲ برآوردی جدید برای پارامتر شدت ترافیک

با $a \leq 1$ ، با در نظر گرفتن $a = 1$ رابطه (۸) به صورت $b > 0, \lambda > 0$ ، $\pi(\lambda|b) = be^{-b\lambda}$ تبدیل می‌شود. استدلالی مشابه استدلال فوق در بازه a و b در رابطه (۸)، برای c و η در رابطه (۹) نیز انجام می‌شود. بنابر این توزیع η یعنی $\pi(\eta)$ توزیع یکنواخت پیوسته در بازه $(0, c_2)$ در نظر گرفته می‌شود. همچنین با فرض $c = 1$ رابطه (۹) به صورت $\mu > 0, \eta > 0$ ، $\pi(\mu|\eta) = \mu e^{-\eta\mu}$ تبدیل می‌شود. با توجه به تعریف ۲ و با استفاده از $\pi(\lambda|b)$ و $\pi(\mu|\eta)$ برآورد E -بیز ρ به صورت

$$\begin{aligned}\hat{\rho}_{EB}(c_1, c_2) &= \frac{1}{c_1 c_2} \int_0^{c_2} \int_0^{c_1} \hat{\rho}_B(b, \eta) \pi(b, \eta) db d\eta \\ &= \frac{\phi^{-\frac{1}{p}}(c_2 + \gamma T_2)}{\varepsilon c_1} \log\left(\frac{c_1 + T_1}{T_1}\right)\end{aligned}\quad (11)$$

به دست آورده می‌شود.

قضیه ۳. برآورد بیز سلسله‌مراتبی پارامتر شدت ترافیک مدل صف‌بندی $E_r/M/3$ به کمک تقریب لیندلی به صورت $\hat{\rho}_{HB}(c_1, c_2) = [\phi(\hat{\lambda}, \hat{\mu}, \hat{\rho}_1, \hat{\rho}_2)]^{-\frac{1}{p}}$ است که در آن

$$\begin{aligned}\phi(\lambda, \mu, \rho_1, \rho_2) &= \frac{\gamma A(T) + \gamma p \lambda \rho_1 + p^\gamma + p}{\gamma A(T)} + \frac{p \mu^p}{A(T) \lambda^{p+1}} \\ &+ \frac{\mu^{p-1}(\mu p^\gamma + \gamma \mu^\gamma \rho_2 - p \mu - \gamma)}{\gamma B(T) \lambda^p}.\end{aligned}$$

برهان: با استفاده از تعریف ۳، توزیع‌های پیشین سلسله‌مراتبی λ و μ به ترتیب $\pi(\lambda) = \frac{1-(1+c_1\lambda)e^{-c_1\lambda}}{c_1\lambda^\gamma}$ و $\pi(\mu) = \frac{1-(1+c_2\mu)e^{-c_2\mu}}{c_2\mu^\gamma}$ به دست آورده می‌شوند. بنابر این به کمک $\pi(\lambda)$ ، $\pi(\mu)$ و رابطه (۶) توزیع پسین سلسله‌مراتبی λ و μ به شرط $\mathbf{X}$ به صورت

$$\pi^{**}(\lambda, \mu|\mathbf{X}) = \frac{\lambda^{a+rA(T)-\gamma} \mu^{c+B(T)-\gamma} e^{-\lambda(b+T_1)-\mu(\eta+T_2)} S(\lambda, \mu)}{\int_0^\infty \int_0^\infty \lambda^{a+rA(T)-\gamma} \mu^{c+B(T)-\gamma} e^{-\lambda(b+T_1)-\mu(\eta+T_2)} S(\lambda, \mu) d\lambda d\mu} \quad (12)$$

محاسبه می‌شود که در آن $S(\lambda, \mu) = (1 - c_1 \lambda e^{-c_1 \lambda} - e^{-c_1 \lambda})(1 - c_2 \mu e^{-c_2 \mu} - e^{-c_2 \mu})$. رابطه (۱۲) برآورد بیز سلسله‌مراتبی ρ تحت تابع زیان آنتروپی عمومی به صورت

$$\hat{\rho}_{HB}(c_1, c_2) = \frac{1}{3} \left\{ \frac{\int_0^\infty \int_0^\infty \lambda^{a+rA(T)-(p+\gamma)} \mu^{c+B(T)+p-\gamma} e^{-\lambda(b+T_1)-\mu(\eta+T_2)} S(\lambda, \mu) d\lambda d\mu}{\int_0^\infty \int_0^\infty \lambda^{a+rA(T)-\gamma} \mu^{c+B(T)-\gamma} e^{-\lambda(b+T_1)-\mu(\eta+T_2)} S(\lambda, \mu) d\lambda d\mu} \right\}^{-\frac{1}{p}}$$

ارائه و با استفاده از تقریب لیندلی (۱۹۸۰) به دست آورده می‌شود. به طور کلی حاصل نسبت انتگرال‌های به فرم $E(u(\Lambda)|\mathbf{X}) = \frac{\int u(\Lambda) e^{Q(\Lambda)} d\Lambda}{\int e^{Q(\Lambda)} d\Lambda}$ که در آن $Q(\Lambda) = \ell(\Lambda) + \rho(\Lambda)$ است، به طوری که $\ell(\Lambda)$ لگاریتم تابع

۳.۲ برآورد E^2 -بیز ρ

در بخش ۱.۳ ابرپارامترهای b و η به صورت‌های $c_1 < b < \infty$ و $0 < \eta < c_2$ بودند که c_1 و c_2 ثابت در نظر گرفته شده بودند. تمامی مقالات در باره برآورد E -بیز در این گونه موارد کران بالای این ابرپارامترها را ثابت در نظر گرفتند. اما در این مقاله علاوه بر ثابت بودن، حالت متغیر تصادفی بودنشان نیز بررسی می‌شود. بنابر این در این بخش فرض می‌شود که c_1 و c_2 متغیرهای تصادفی و مستقل از هم هستند و دو حالت پیوسته و گسسته برای این متغیرهای تصادفی در نظر گرفته می‌شود. سپس بر اساس برآورد E -بیز، برآورد جدیدی که در این مقاله E^2 -بیز نامیده می‌شود، در قالب قضیه به دست آورده می‌شود.

قضیه ۴. اگر c_1 و c_2 متغیرهای تصادفی پیوسته و مستقل و هم‌توزیع با توزیع نمایی با تابع چگالی احتمال $f_{c_i}(t) = e^{-t}, t > 0$ برای $i = 1, 2$ باشند، تحت شرط $c_1 < T_1$ برآورد E^2 -بیز پارامتر شدت ترافیک مدل صف‌بندی $M/3/E_r$ به صورت $\hat{\rho}_{E^2B} = \frac{\phi^{-\frac{1}{p}}(1+2T_1)}{\epsilon} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1}}{iT_1^i} \Gamma(i, T_1)$ است که در آن $\Gamma(i, T_1) = \int_0^{T_1} t^{i-1} e^{-t} dt$.

برهان: با توجه به تعریف ۲، در این مقاله برآورد جدید E^2 -بیز ρ به صورت

$$\hat{\rho}_{E^2B} = \int_0^\infty \int_0^\infty \hat{\rho}_{EB}(c_1, c_2) \pi(c_1, c_2) dc_2 dc_1$$

تعریف می‌شود. به کمک بسط مک‌لورن $\log(1 + \frac{c_1}{T_1})$ به صورت

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_{E^2B} &= \frac{\phi^{-\frac{1}{p}}}{\epsilon} \int_0^\infty \int_0^{T_1} (c_2 + 2T_2) \left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1} c_1^{i-1}}{iT_1^i} \right) e^{-(c_1+c_2)} dc_2 dc_1 \\ &= \frac{\phi^{-\frac{1}{p}}(1+2T_2)}{\epsilon} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1}}{iT_1^i} \Gamma(i, T_1) \end{aligned}$$

به دست آورده می‌شود.

قضیه ۵. اگر c_1 و c_2 متغیرهای تصادفی گسسته با مقادیر صحیح مثبت و هم‌توزیع با توزیع هندسی با تابع احتمال $f_{c_i}(t) = (1-\theta)\theta^{t-1}, t = 1, 2, 3, \dots$ و $0 < \theta < 1$ باشند، آنگاه برآورد E^2 -بیز ρ به صورت $\hat{\rho}_{E^2B} = \frac{\phi^{-\frac{1}{p}}(1+2(1-\theta)T_2)}{\epsilon} \sum_{c_1=1}^{\infty} \theta^{c_1-1} \Phi(c_1, T_1)$ است که در آن $\Phi(c_1, T_1) = \sum_{i=1}^{[T_1]} \frac{(-1)^{(i+1)} c_1^{i-1}}{iT_1^i}$.

برهان: با توجه به تعریف ۲، برآورد جدید E^γ -بیز ρ به صورت

$$\hat{\rho}_{E^\gamma B} = \sum_{c_2=1}^{\infty} \sum_{c_1=1}^{\infty} \hat{\rho}_{EB}(c_1, c_2) \pi(c_1, c_2)$$

تعریف می‌شود، که به کمک بسط مک‌لورن $\log(1 + \frac{c_1}{T_1})$ ، به صورت

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_{E^\gamma B} &= \frac{\phi^{-\frac{1}{p}}}{\varepsilon T_1} \left(\sum_{c_2=1}^{\infty} (c_2 + \gamma T_2) (1 - \theta) \theta^{c_2-1} \right) \left(\sum_{c_1=1}^{[T_1]} (1 - \theta) \theta^{c_1-1} e^{-\frac{c_1}{T_1}} \right) \\ &= \frac{\phi^{-\frac{1}{p}} (1 + \gamma (1 - \theta) T_2)}{\varepsilon} \sum_{c_1=1}^{\infty} \theta^{c_1-1} \Phi(c_1, T_1) \end{aligned}$$

به دست می‌آید.

۴ مطالعه شبیه‌سازی

برای برآورد مناسب پارامتر شدت ترافیک از روش شبیه‌سازی مونت‌کارلو با گام‌های زیراستفاده می‌شود.
گام اول: با فرض $A(T_0) = 30$ و $\lambda = 2$ از توزیع $E_r(r, \gamma)$ به ازای $10, 100, 1000$ ، نمونه تصادفی به حجم 20 تولید و T_1 محاسبه می‌شود.

گام دوم: با فرض $B(T_0) = 40$ و $\mu = 3$ از نمایی با تابع چگالی احتمال $\mu > 0, t > 0, f(t) = \mu e^{-\mu t}$ نمونه تصادفی به حجم 40 تولید و T_2 محاسبه می‌شود.

گام سوم: با فرض $c_1 = 4$ و $c_2 = 2/5$ از توزیع‌های $U(0, c_1)$ و $U(0, c_2)$ عددی به تصادف تولید و به ترتیب b و η نامگذاری شده و سپس به ازای p ‌های مختلف به کمک رابطه (۱۱) و قضیه‌های ۲ تا ۵ به ترتیب برآوردهای بیز، E -بیز، بیز سلسله‌مراتبی، برآورد E^γ -بیز در حالت پیوسته و برآورد E^γ -بیز در حالت گسسته به ازای $\theta = 0.25$ برای پارامتر ρ به دست آورده می‌شوند.

گام چهارم: به ازای $r = 1, 100, 8$ از رابطه $x, x^{r+1} - (1 + \rho)x + \rho = 0$ محاسبه شده و سپس مقدار W_q به ازای $\hat{\rho}_{E^\gamma B}, \hat{\rho}_{E^\gamma B}^1, \hat{\rho}_{HB}, \hat{\rho}_{EB}, \hat{\rho}_B$ و $\omega = x^r$ به دست آورده می‌شوند.

گام‌های اول تا چهارم ۵۰۰۰ بار تکرار شده و میانگین مقادیر $\hat{\rho}_{E^\gamma B}, \hat{\rho}_{E^\gamma B}^1, \hat{\rho}_{HB}, \hat{\rho}_{EB}, \hat{\rho}_B$ به ازای p ‌های مختلف محاسبه و در جدول‌های ۱ و ۲ ثبت شده است. به کمک این جدول‌ها، مدت زمان انتظار در صف متقاضی (W_q) به ازای برآوردهای مختلف ρ محاسبه و در جدول‌های ۳ و ۴ قرار داده شده است. در این جدول‌ها، مقدار W_q به ازای برآوردهای بیز، E -بیز، بیز سلسله‌مراتبی و E^γ -بیز در هر دو حالت به ترتیب با نمادهای $w_{q.E^\gamma B}^1, w_{q.E^\gamma B}^2, w_{q.HB}, w_{q.EB}, w_{q.B}$ نشان داده شده است. نتایج این جدول‌ها بیان‌کننده آن است به

ازای هر p و r ، برآورد جدید یعنی برآورد E^V -بیز پارامتر شدت ترافیک از سایر برآوردهای آن بهتر است. همچنین در هر حالت برآورد $E^V B.I$ نیز از برآورد $E^V B.II$ بهتر می‌باشد. منظور از برآوردهای مناسب، آن برآوردهای است که متوسط مدت زمان انتظار در صف متقاضی متناظر با آن نسبت به برآوردهای دیگر مینیمم شود که به کمک جدول‌های ۳ و ۴ تعیین می‌شود. به عنوان مثال در جدول ۳ به ازای $p = ۰.۵$ و $r = ۴$ ، $\hat{W}_q$ مربوط به برآورد $E^V B.I$ از $\hat{W}_q$ های دیگر کوچک‌تر است که دلالت بر بهتر بودن برآورد $E^V B.I$ دارد. بر اساس همین استدلال برآوردهای $E^V B.II$ در رتبه دوم قرار می‌گیرد. البته شکل ۱ که نمودار W_q بر حسب p برای برآوردهای مطرح شده در مقاله است. بیانگر برتر بودن برآوردهای $E^V B$ است. همانطور که مشاهده می‌شود نمودار مربوط به برآوردهای $E^V B.II$ در شکل ۱ پایین‌تر از نمودار برآوردهای دیگر است که نشان دهنده آن است که برآوردهای $E^V B.I$ برترین برآوردهای است و بعد از نمودار $E^V B.II$ نسبت به برآوردهای بیز، E -بیز و بیز سلسله‌مراتبی بهتر است. همچنین به دلیل برتر بودن برآوردهای $E^V B.I$ از برآوردهای $E^V B.II$ ، بهتر است که c_1 و c_2 متغیرهای تصادفی پیوسته در نظر گرفته شوند.

جدول ۱. مقادیر برآوردهای مختلف ρ برای داده‌های شبیه‌سازی شده

$\hat{\rho}_{E^V B}$	$\hat{\rho}_{E^V B}$	$\hat{\rho}_{HB}$	$\hat{\rho}_{EB}$	$\hat{\rho}_B$	r	p
۰.۲۳۱۷	۰.۲۳۲۳	۰.۵۴۳۷	۰.۲۰۶۷	۰.۲۵۱۳	۱	۰.۵
۰.۲۲۹۸	۰.۲۳۰۶	۰.۵۴۸۳	۰.۲۱۰۷	۰.۲۴۹۴	۲	
۰.۲۱۰۷	۰.۲۰۶۴	۰.۵۹۴۵	۰.۲۱۷۲	۰.۲۳۱۸	۳	
۰.۲۱۴۶	۰.۲۱۰۷	۰.۶۳۰۸	۰.۲۲۱۸	۰.۲۳۴۰	۴	
۰.۲۱۷۴	۰.۲۱۲۴	۰.۶۵۱۸	۰.۲۲۷۶	۰.۲۳۸۷	۵	
۰.۲۱۷۳	۰.۲۱۲۰	۰.۶۵۹۰	۰.۲۲۹۵	۰.۲۳۸۸	۶	
۰.۲۱۵۷	۰.۲۱۰۴	۰.۶۵۶۱	۰.۲۲۷۱	۰.۲۳۷۱	۷	
۰.۲۱۲۳	۰.۲۰۶۸	۰.۶۴۶۵	۰.۲۲۴۶	۰.۲۳۳۹	۸	
۰.۲۱۲۶	۰.۲۰۶۹	۰.۶۴۳۹	۰.۲۲۳۸	۰.۲۳۴۳	۹	
۰.۲۱۴۵	۰.۲۰۸۷	۰.۶۹۹۵	۰.۲۲۹۶	۰.۲۳۶۴	۱۰	
۰.۲۲۰۷	۰.۲۱۹۸	۰.۵۲۸۲	۰.۱۹۷۶	۰.۲۳۷۱	۱	۱.۵
۰.۲۰۸۴	۰.۲۰۵۳	۰.۵۶۴۴	۰.۲۰۲۲	۰.۲۲۷۹	۲	
۰.۲۰۷۸	۰.۲۰۳۸	۰.۵۸۹۵	۰.۲۱۳۴	۰.۲۲۸۲	۳	
۰.۲۰۸۶	۰.۲۰۴۱	۰.۶۱۱۸	۰.۲۱۴۳	۰.۲۲۸۹	۴	
۰.۲۰۷۷	۰.۲۰۲۹	۰.۶۱۴۶	۰.۲۱۸۹	۰.۲۲۸۳	۵	
۰.۲۱۳۸	۰.۲۰۸۹	۰.۶۵۲۸	۰.۲۲۴۵	۰.۲۳۴۴	۶	
۰.۲۰۸۶	۰.۲۰۳۴	۰.۶۳۱۲	۰.۲۲۳۵	۰.۲۲۹۵	۷	
۰.۲۰۷۰	۰.۲۰۱۷	۰.۶۲۷۷	۰.۲۲۱۱	۰.۲۲۷۹	۸	
۰.۲۰۹۴	۰.۲۰۴۰	۰.۶۴۰۹	۰.۲۲۴۵	۰.۲۳۰۵	۹	
۰.۲۰۷۱	۰.۲۰۱۷	۰.۶۳۱۷	۰.۲۲۴۹	۰.۲۲۸۱	۱۰	
۰.۱۹۶۷	۰.۱۹۸۴	۰.۴۹۸۳	۰.۱۷۸۵	۰.۲۱۴۶	۱	۲.۵
۰.۱۹۸۲	۰.۱۹۵۲	۰.۵۴۶۴	۰.۱۹۵۲	۰.۲۱۶۸	۲	
۰.۲۰۹۸	۰.۲۰۶۱	۰.۶۱۴۹	۰.۲۱۲۲	۰.۲۲۹۱	۳	
۰.۲۰۵۳	۰.۲۰۰۹	۰.۶۰۶۴	۰.۲۱۲۳	۰.۲۲۵۲	۴	
۰.۲۰۲۲	۰.۱۹۷۶	۰.۶۰۷۵	۰.۲۱۵۲	۰.۲۲۲۱	۵	
۰.۲۰۲۹	۰.۱۹۸۱	۰.۶۱۳۶	۰.۲۱۵۷	۰.۲۲۳۱	۶	
۰.۱۹۵۵	۰.۱۹۰۴	۰.۵۸۰۵	۰.۲۱۱۰	۰.۲۱۵۸	۷	
۰.۱۹۳۹	۰.۱۸۸۸	۰.۵۷۹۱	۰.۲۰۹۴	۰.۲۱۳۹	۸	
۰.۱۹۸۹	۰.۱۹۳۷	۰.۶۰۳۳	۰.۲۱۰۴	۰.۲۲۵۴	۹	
۰.۲۰۵۴	۰.۲۰۰۲	۰.۶۴۳۴	۰.۲۲۲۹	۰.۲۲۵۴	۱۰	

جدول ۲. مقادیر برآوردهای مختلف ρ برای داده‌های شبیه‌سازی شده

$\hat{\rho}_{EB}$	$\hat{\rho}_{EB}^1$	$\hat{\rho}_{HB}$	$\hat{\rho}_{EB}$	$\hat{\rho}_B$	r	p
۰/۲۲۹۰	۰/۲۳۸۱	۰/۵۴۱۷	۰/۲۰۵۱	۰/۲۴۶۱	۱	
۰/۲۱۶۲	۰/۲۱۳۲	۰/۵۹۰۱	۰/۲۱۳۰	۰/۲۳۶۲	۲	
۰/۲۱۴۶	۰/۲۱۰۵	۰/۶۱۴۱	۰/۲۱۷۲	۰/۲۳۵۲	۳	
۰/۲۱۲۴	۰/۲۰۷۹	۰/۶۲۱۷	۰/۲۱۸۱	۰/۲۳۳۲	۴	
۰/۲۱۷۷	۰/۲۱۲۸	۰/۶۵۸۷	۰/۲۲۷۱	۰/۲۳۸۸	۵	۱
۰/۲۲۲۶	۰/۲۱۷۵	۰/۶۸۷۷	۰/۲۳۶۰	۰/۲۴۳۹	۶	
۰/۲۰۵۴	۰/۲۰۰۱	۰/۶۰۹۴	۰/۲۲۱۴	۰/۲۲۶۷	۷	
۰/۲۰۹۲	۰/۱۹۷۸	۰/۶۰۶۹	۰/۲۱۹۲	۰/۲۲۴۲	۸	
۰/۲۰۷۰	۰/۲۰۱۶	۰/۶۲۶۲	۰/۲۱۹۰	۰/۲۲۸۲	۹	
۰/۲۱۴۱	۰/۲۰۸۷	۰/۶۶۹۶	۰/۲۳۳۷	۰/۲۳۴۹	۱۰	
۰/۲۸۴۶	۰/۲۸۳۹	۰/۶۹۷۲	۰/۲۵۰۴	۰/۳۰۷۵	۱	
۰/۲۵۱۰	۰/۲۴۷۲	۰/۷۱۹۵	۰/۲۴۲۰	۰/۲۷۴۶	۲	
۰/۲۵۴۷	۰/۲۴۹۸	۰/۷۶۷۵	۰/۲۶۰۸	۰/۲۷۹۷	۳	
۰/۲۴۴۴	۰/۲۳۹۱	۰/۷۳۲۹	۰/۲۵۰۸	۰/۲۶۸۶	۴	
۰/۲۴۷۴	۰/۲۴۱۷	۰/۷۵۷۶	۰/۲۶۲۰	۰/۲۷۱۸	۵	-۲/۵
۰/۲۴۴۳	۰/۲۳۸۴	۰/۷۴۹۴	۰/۲۵۵۷	۰/۲۶۸۶	۶	
۰/۲۳۶۷	۰/۲۳۰۸	۰/۷۲۰۲	۰/۲۵۴۹	۰/۲۶۰۵	۷	
۰/۲۴۱۹	۰/۲۳۵۸	۰/۷۴۶۹	۰/۲۵۶۸	۰/۲۶۵۹	۸	
۰/۲۳۹۷	۰/۲۳۳۵	۰/۷۴۰۷	۰/۲۵۶۵	۰/۲۶۳۷	۹	
۰/۲۳۹۴	۰/۲۳۳۲	۰/۷۴۰۲	۰/۲۵۳۲	۰/۲۶۳۵	۱۰	
۰/۳۰۴۳	۰/۳۰۳۱	۰/۷۲۲۵	۰/۲۷۲۵	۰/۳۲۶۹	۱	
۰/۲۶۳۷	۰/۲۵۹۸	۰/۷۳۷۶	۰/۲۵۵۸	۰/۲۸۸۳	۲	
۰/۲۵۴۶	۰/۲۴۹۷	۰/۷۵۴۸	۰/۲۶۱۴	۰/۲۷۹۲	۳	
۰/۲۵۱۲	۰/۲۴۵۸	۰/۷۵۶۲	۰/۲۵۸۲	۰/۲۷۸۶	۴	
۰/۲۴۷۷	۰/۲۴۱۹	۰/۷۴۸۴	۰/۲۶۱۰	۰/۲۷۲۲	۵	-۳
۰/۲۵۳۲	۰/۲۴۷۴	۰/۷۷۸۶	۰/۲۶۵۹	۰/۲۷۷۶	۶	
۰/۲۴۵۷	۰/۲۳۹۹	۰/۷۵۰۸	۰/۲۶۳۲	۰/۲۷۰۴	۷	
۰/۲۴۲۹	۰/۲۳۶۷	۰/۷۴۱۶	۰/۲۵۹۵	۰/۲۶۷۶	۸	
۰/۲۴۵۱	۰/۲۳۸۸	۰/۷۵۳۴	۰/۲۶۲۷	۰/۲۶۹۷	۹	
۰/۲۴۱۸	۰/۲۳۵۴	۰/۷۳۹۹	۰/۲۶۲۶	۰/۲۶۶۳	۱۰	

۵ مثال عددی

بانکی در شهر رشت در استان گیلان که دارای ۳ دستگاه خودپرداز است در نظر گرفته شد و در یک روز کاری فواصل زمانی بین مراجعین و فواصل زمانی بین سرویس شده‌ها از ساعت ۸ صبح تا ساعت ۱۱ صبح ($T_0 = 11$) ثبت و داده‌ها در جدول ۵ گزارش شده است. با توجه به آنکه توزیع فواصل زمانی بین متقاضیان در این مقاله $E_r(r, \lambda)$ در نظر گرفته شد، برآورد درست‌نمایی ماکسیمم r و λ به کمک داده‌های مربوط به فواصل زمانی بین مراجعین در جدول ۵ به ترتیب $\hat{r} = 3.52 \simeq 4$ و $\hat{\lambda} = 2.09$ به دست آورده شد. از طرفی با توجه به مقدار عددی آماره آزمون کولموگوروف-اسمیرنوف (۰/۱۲۹۷) و p_value مربوطه (۰/۶۴۶۶) نتیجه گرفته می‌شود که داده‌های فواصل زمانی بین مراجعین مثال بانک از توزیع $E_4(4, 2.09)$ پیروی می‌کند. همچنین با توجه به در نظر گرفتن توزیع نمایی با پارامتر μ برای توزیع فواصل زمانی بین سرویس شده‌ها، برآورد درست‌نمایی ماکسیمم μ بر اساس داده‌های فواصل زمانی بین سرویس شده‌های در جدول ۵، $\hat{\mu} = 1.64$ به دست می‌آید. همچنین مقادیر آماره آزمون کولموگوروف

جدول ۳. مقادیر زمان انتظار در صف مشتریان به ازای برآوردهای مختلف ρ بر اساس جدول ۱

$W_{q.E^2B}$	$W_{q.E^2B}^1$	$W_{q.HB}$	$W_{q.EB}$	$W_{q.B}$	x	r	p
۰/۰۰۰۰۸۶	۰/۰۰۰۰۸۵	۰/۰۱۵۲۷	۰/۰۰۰۰۶۱	۰/۰۰۰۱۱۰	۰/۲۲۲۲۲	۱	۰.۵
۰/۰۰۰۰۸۹	۰/۰۰۰۰۹۱	۰/۰۲۱۵۵	۰/۰۰۰۰۶۸	۰/۰۰۰۱۱۷	۰/۱۸۷۱۸	۲	
۰/۰۰۰۰۶۸	۰/۰۰۰۰۶۴	۰/۰۳۳۹۱	۰/۰۰۰۰۷۵	۰/۰۰۰۰۹۲	۰/۱۸۲۷۳	۳	
۰/۰۰۰۰۷۲	۰/۰۰۰۰۶۷	۰/۰۴۹۱۵	۰/۰۰۰۰۸۰	۰/۰۰۰۰۹۵	۰/۱۸۱۹۸	۴	
۰/۰۰۰۰۷۵	۰/۰۰۰۰۶۹	۰/۰۶۲۰۳	۰/۰۰۰۰۸۶	۰/۰۰۰۱۰۰	۰/۱۸۱۸۵	۵	
۰/۰۰۰۰۷۴	۰/۰۰۰۰۶۹	۰/۰۶۷۵۰	۰/۰۰۰۰۸۹	۰/۰۰۰۱۰۱	۰/۱۸۱۸۲	۶	
۰/۰۰۰۰۷۲	۰/۰۰۰۰۶۷	۰/۰۶۵۲۴	۰/۰۰۰۰۸۶	۰/۰۰۰۰۹۹	۰/۱۸۱۸۱	۷	
۰/۰۰۰۰۶۸	۰/۰۰۰۰۶۴	۰/۰۸۴۲۵	۰/۰۰۰۰۸۳	۰/۰۰۰۰۹۵	۰/۱۸۱۷۹	۸	
۰/۰۰۰۰۶۹	۰/۰۰۰۰۶۳	۰/۰۵۶۷۵	۰/۰۰۰۰۸۲	۰/۰۰۰۰۹۵	۰/۱۸۱۷۷	۹	
۰/۰۰۰۰۷۲	۰/۰۰۰۰۶۶	۰/۱۱۶۲۲	۰/۰۰۰۰۸۹	۰/۰۰۰۰۹۸	۰/۱۸۱۷۵	۱۰	
۰/۰۰۰۰۷۴	۰/۰۰۰۰۷۳	۰/۰۱۳۵۷	۰/۰۰۰۰۵۳	۰/۰۰۰۰۹۲	۰/۲۲۲۲۲	۱	۱.۵
۰/۰۰۰۰۷۱	۰/۰۰۰۰۶۲	۰/۰۲۴۸۶	۰/۰۰۰۰۵۹	۰/۰۰۰۰۸۶	۰/۱۸۷۱۸	۲	
۰/۰۰۰۰۶۵	۰/۰۰۰۰۶۱	۰/۰۳۲۴۲	۰/۰۰۰۰۷۱	۰/۰۰۰۰۸۷	۰/۱۸۲۷۳	۳	
۰/۰۰۰۰۶۶	۰/۰۰۰۰۶۰	۰/۰۴۰۴۱	۰/۰۰۰۰۷۲	۰/۰۰۰۰۸۸	۰/۱۸۱۹۸	۴	
۰/۰۰۰۰۶۷	۰/۰۰۰۰۵۹	۰/۰۴۱۶۱	۰/۰۰۰۰۷۶	۰/۰۰۰۰۸۷	۰/۱۸۱۸۵	۵	
۰/۰۰۰۰۷۱	۰/۰۰۰۰۶۶	۰/۰۶۲۷۷	۰/۰۰۰۰۸۳	۰/۰۰۰۰۹۵	۰/۱۸۱۸۲	۶	
۰/۰۰۰۰۸۹	۰/۰۰۰۰۶۱	۰/۰۴۹۴۴	۰/۰۰۰۰۷۸	۰/۰۰۰۰۸۸	۰/۱۸۱۸۱	۷	
۰/۰۰۰۰۶۴	۰/۰۰۰۰۶۸	۰/۰۴۷۶۴	۰/۰۰۰۰۷۹	۰/۰۰۰۰۸۷	۰/۱۸۱۷۹	۸	
۰/۰۰۰۰۶۷	۰/۰۰۰۰۶۱	۰/۰۵۴۸۹	۰/۰۰۰۰۸۲	۰/۰۰۰۰۹۰	۰/۱۸۱۷۷	۹	
۰/۰۰۰۰۶۴	۰/۰۰۰۰۵۹	۰/۰۴۹۷۰	۰/۰۰۰۰۸۳	۰/۰۰۰۰۸۷	۰/۱۸۱۷۵	۱۰	
۰/۰۰۰۰۵۹	۰/۰۰۰۰۵۴	۰/۰۱۰۸۰	۰/۰۰۰۰۳۹	۰/۰۰۰۰۶۸	۰/۲۲۲۲۲	۱	۲.۵
۰/۰۰۰۰۵۶	۰/۰۰۰۰۵۳	۰/۰۲۱۱۹	۰/۰۰۰۰۵۴	۰/۰۰۰۰۷۵	۰/۱۸۷۱۸	۲	
۰/۰۰۰۰۶۷	۰/۰۰۰۰۶۳	۰/۰۴۱۴۲	۰/۰۰۰۰۶۹	۰/۰۰۰۰۸۹	۰/۱۸۲۷۳	۳	
۰/۰۰۰۰۶۲	۰/۰۰۰۰۵۸	۰/۰۳۸۲۹	۰/۰۰۰۰۷۰	۰/۰۰۰۰۸۴	۰/۱۸۱۹۸	۴	
۰/۰۰۰۰۵۹	۰/۰۰۰۰۵۳	۰/۰۳۸۷۶	۰/۰۰۰۰۷۲	۰/۰۰۰۰۸۰	۰/۱۸۱۸۵	۵	
۰/۰۰۰۰۶۰	۰/۰۰۰۰۵۶	۰/۰۴۱۲۱	۰/۰۰۰۰۷۳	۰/۰۰۰۰۸۱	۰/۱۸۱۸۲	۶	
۰/۰۰۰۰۵۳	۰/۰۰۰۰۴۹	۰/۰۲۹۸۸	۰/۰۰۰۰۶۸	۰/۰۰۰۰۷۳	۰/۱۸۱۸۱	۷	
۰/۰۰۰۰۵۲	۰/۰۰۰۰۴۸	۰/۰۲۹۴۹	۰/۰۰۰۰۶۶	۰/۰۰۰۰۷۱	۰/۱۸۱۷۹	۸	
۰/۰۰۰۰۵۶	۰/۰۰۰۰۵۲	۰/۰۳۷۱۹	۰/۰۰۰۰۶۷	۰/۰۰۰۰۸۴	۰/۱۸۱۷۷	۹	
۰/۰۰۰۰۶۲	۰/۰۰۰۰۵۸	۰/۰۵۶۴۴	۰/۰۰۰۰۸۱	۰/۰۰۰۰۸۵	۰/۱۸۱۷۵	۱۰	

و p_value مربوطه که به ترتیب $۰/۱۱۱۰$ و $۰/۷۲۶۱$ هستند، دلیل بر برازش داده‌های فواصل زمانی بین سرویس شده‌های مثال بانک از توزیع نمایی با پارامتر $\mu = ۱/۶۴$ دارد. مانند بخش قبل با فرض‌های $a = ۲$ ، $c = ۳$ ، $c_1 = ۱/۵$ ، $c_2 = ۲/۵$ و $\theta = ۰/۲۵$ برآوردهای بیز، E -بیز، بیز سلسله‌مراتبی و برآوردهای E^2 -بیز I و II پارامتر ρ به ازای p های مختلف محاسبه و سپس با مشخص شدن $\omega = ۰/۰۰۱۰۹۶$ از رابطه $x^{r+1} - (1 + \rho)x + \rho = 0$ به ازای $r = ۴$ ، مقدار W_q به ازای برآوردهای مختلف ρ به دست می‌آید. نتایج مربوط به محاسبه برآوردهای ρ و W_q در جدول ۶ قرار داده شده است. نتایج جدول ۶ بیانگر بهتر بودن برآوردهای E^2 -بیز نسبت به سایر برآوردها است. همچنین برآورد E^2 -بیز I بهتر برآورد E^2 -بیز II می‌باشد. در این مقاله معیار و ملاک برتری برآوردها نسبت به هم، مینیم کردن متوسط مدت زمان انتظار در صف متقاضی یعنی $\hat{W}_q$ است. برای توضیح بهتر، مقادیر جدول ۶ در نظر گرفته می‌شود. به عنوان مثال به ازای $p = -۲/۵$ مقادیر $\hat{W}_q$ های متناظر با برآوردهای بیز، E -بیز، بیز سلسله‌مراتبی و E^2 -بیزهای در حالت پیوسته و گسسته پارامتر شدت ترافیک به ترتیب $۰/۱۴۲۱$ ، $۰/۱۲۳۱$ ، $۰/۴۲۱۳$ ، $۰/۱۰۳۷$ و $۰/۱۰۶۱$ هستند و چون مینیم این مقادیر $۰/۱۰۳۷$ است، بنابر این برآورد E^2 -بیز مربوط

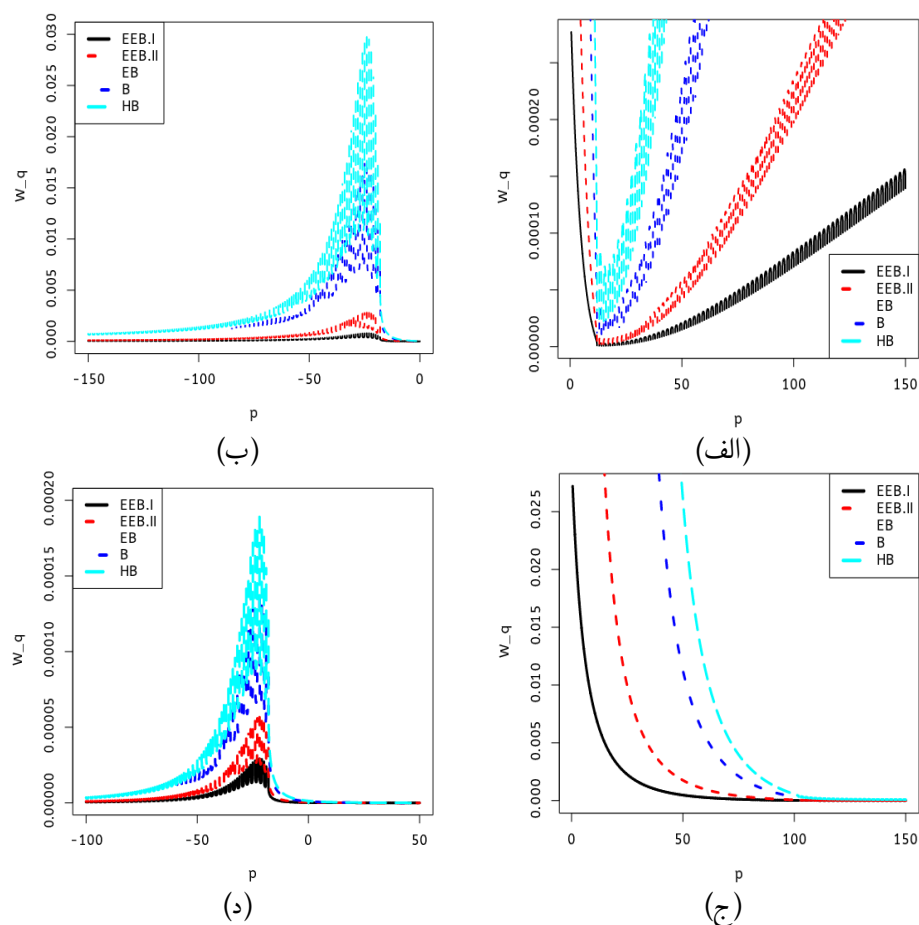
جدول ۴. مقادیر زمان انتظار در صف مشتریان به ازای برآوردهای مختلف ρ بر اساس جدول ۲

W_{q,E^+B}	W_{q,E^+B}	$W_{q,HB}$	$W_{q,EB}$	$W_{q,B}$	x	r	p
۰/۰۰۰۸۳	۰/۰۰۰۸۲	۰/۰۱۵۰۴	۰/۰۰۰۵۹	۰/۰۰۱۰۴	۰/۲۲۲۲۲	۱	
۰/۰۰۰۷۴	۰/۰۰۰۷۱	۰/۰۳۱۴۱	۰/۰۰۰۷۱	۰/۰۰۰۹۸	۰/۱۸۷۱۸	۲	
۰/۰۰۰۷۲	۰/۰۰۰۶۸	۰/۰۴۱۰۹	۰/۰۰۰۷۵	۰/۰۰۰۹۶	۰/۱۸۲۷۳	۳	
۰/۰۰۰۶۹	۰/۰۰۰۶۵	۰/۰۴۴۶۹	۰/۰۰۰۷۶	۰/۰۰۰۹۴	۰/۱۸۱۹۸	۴	
۰/۰۰۰۷۵	۰/۰۰۰۶۹	۰/۰۶۷۲۴	۰/۰۰۱۶۴	۰/۰۰۱۰۱	۰/۱۸۱۸۵	۵	۱
۰/۰۰۰۸۰	۰/۰۰۰۷۴	۰/۰۹۷۶۸	۰/۰۰۰۹۷	۰/۰۰۱۰۸	۰/۱۸۱۸۲	۶	
۰/۰۰۰۶۲	۰/۰۰۰۵۷	۰/۰۳۹۵۱	۰/۰۰۰۷۹	۰/۰۰۰۸۵	۰/۱۸۱۸۱	۷	
۰/۰۰۰۶۶	۰/۰۰۰۵۵	۰/۰۳۸۵۴	۰/۰۰۰۷۶	۰/۰۰۰۸۶	۰/۱۸۱۷۹	۸	
۰/۰۰۰۶۴	۰/۰۰۰۵۸	۰/۰۴۶۹۲	۰/۰۰۰۷۷	۰/۰۰۰۸۷	۰/۱۸۱۷۷	۹	
۰/۰۰۰۷۱	۰/۰۰۰۶۵	۰/۰۷۶۹۰	۰/۰۰۰۹۴	۰/۰۰۰۹۶	۰/۱۸۱۷۵	۱۰	
۰/۰۰۱۶۲	۰/۰۰۱۶۱	۰/۰۵۲۳۸	۰/۰۰۱۰۹	۰/۰۰۲۰۷	۰/۲۲۲۲۲	۱	
۰/۰۰۱۹۲	۰/۰۰۱۱۳	۰/۱۴۲۴۹	۰/۰۰۱۰۶	۰/۰۰۱۵۹	۰/۱۸۷۱۸	۲	
۰/۰۰۱۲۵	۰/۰۰۱۱۷	۰/۶۷۶۰۰	۰/۰۰۱۳۵	۰/۰۰۱۶۸	۰/۱۸۲۷۳	۳	
۰/۰۰۱۰۹	۰/۰۰۱۰۲	۰/۲۱۴۷۵	۰/۰۰۱۱۹	۰/۰۰۱۴۸	۰/۱۸۱۹۸	۴	
۰/۰۰۱۳۴	۰/۰۰۱۰۵	۰/۴۵۰۶۶	۰/۰۰۱۳۶	۰/۰۰۱۵۴	۰/۱۸۱۸۵	۵	-۲,۵
۰/۰۰۱۰۸	۰/۰۰۱۰۱	۰/۳۳۶۲۶	۰/۰۰۱۲۶	۰/۰۰۱۴۸	۰/۱۸۱۸۲	۶	
۰/۰۰۰۹۸	۰/۰۰۰۹۰	۰/۱۶۵۶۶	۰/۰۰۱۲۴	۰/۰۰۱۳۴	۰/۱۸۱۸۱	۷	
۰/۰۰۱۰۵	۰/۰۰۰۹۷	۰/۳۱۱۶۱	۰/۰۰۱۲۸	۰/۰۰۱۴۳	۰/۱۷۹	۸	
۰/۰۰۱۰۲	۰/۰۰۰۹۴	۰/۲۶۱۹۲	۰/۰۰۱۲۷	۰/۰۰۱۳۹	۰/۱۸۱۷۷	۹	
۰/۰۰۱۰۲	۰/۰۰۰۹۴	۰/۲۵۸۷۰	۰/۰۰۱۲۲	۰/۰۰۱۳۹	۰/۱۸۱۷۵	۱۰	
۰/۰۰۲۰۱	۰/۰۰۱۹۸	۰/۰۶۶۵۵	۰/۰۰۱۴۲	۰/۰۰۲۵۲	۰/۲۲۲۲۲	۱	
۰/۰۰۱۳۹	۰/۰۰۱۳۳	۰/۲۰۰۲۰	۰/۰۰۱۲۷	۰/۰۰۱۸۷	۰/۱۸۷۱۸	۲	
۰/۰۰۱۲۵	۰/۰۰۱۱۷	۰/۳۸۴۲۷	۰/۰۰۱۳۶	۰/۰۰۱۶۹	۰/۱۸۲۷۳	۳	
۰۰۱۱۹,۰	۰۰۱۱۱,۰	۴۲۲۹۱,۰	۰۰۱۳۰,۰	۰۰۱۶۷,۰	۱۸۱۹۸,۰	۴	
۰/۰۰۱۱۴	۰/۰۰۱۰۵	۰/۳۲۵۳۴	۰/۰۰۱۳۵	۰/۰۰۱۵۵	۰/۱۸۱۸۵	۵	-۳
۰/۰۰۱۲۲	۰/۰۰۱۱۳	۰/۴۲۷۰۹	۰/۰۰۱۴۳	۰/۰۰۱۶۵	۰/۱۸۱۸۲	۶	
۰/۰۰۱۱۰	۰/۰۰۱۰۲	۰/۳۵۲۱۲	۰/۰۰۱۳۸	۰/۰۰۱۵۱	۰/۱۸۱۸۱	۷	
۰/۰۰۱۰۶	۰/۰۰۰۹۸	۰/۲۶۸۰۵	۰/۰۰۱۳۲	۰/۰۰۱۴۶	۰/۱۸۱۷۹	۸	
۰/۰۰۱۰۹	۰/۰۰۱۰۱	۰/۲۵۶۴۹	۰/۰۰۱۳۸	۰/۰۰۱۵۰	۰/۱۸۱۷۷	۹	
۰/۰۰۱۰۵	۰/۰۰۰۹۶	۰/۲۵۶۶۹	۰/۰۰۱۳۷	۰/۰۰۱۴۴	۰/۱۸۱۷۵	۱۰	

به حالت پیوسته بهتر از سایر برآوردها است. حتی برآورد E^+ -بیز مربوط به حالت گسسته با اینکه از برآورد E^+ -بیز مربوط به حالت پیوسته بهتر نیست، اما از برآوردهای بیز، E -بیز و بیز سلسله‌مراتبی بهتر است. به عبارت دیگر همواره برآورد E^+ -بیز بهتر از سایر برآوردهای اشاره شده در این مقاله است.

جدول ۵. داده‌های مثال بانک

زمان	۱/۶۵	۲/۰۸	۰/۸۸	۰/۵۷	۰/۹۰	۱/۴۰	۲/۱۴	۲/۳۹
ورود	۲/۶۵	۲/۱۵	۱/۶۹	۱/۵۸	۱/۹۸	۱/۰۱	۱/۱۷	۲/۵۸
بین	۱/۵۲	۱/۳۹	۱/۳۵	۲/۸۳	۱/۲۰	۳/۳۶	۰/۶۴	۲/۳۴
مشتری‌ها	۱/۳۰	۲/۳۸	۰/۱۹	۳/۲۶	۱/۴۱	۰/۴۸		
زمان	۰/۴۲	۱/۰۰	۰/۲۷	۰/۲۱	۱/۰۰	۱/۰۰	۰/۱۴	۰/۳۴
سرویس	۰/۴۲	۰/۶۳	۱/۰۰	۰/۱۴	۱/۰۰	۰/۷۶	۰/۲۶	۰/۴۱
بین	۱/۰۰	۱/۶۲	۱/۸۲	۰/۲۱	۰/۱۵	۰/۴۴	۱/۰۰	۰/۳۶
مشتری‌ها	۰/۴۱	۰/۵۰	۰/۲۹	۰/۲۹	۰/۷۷	۰/۱۳		



شکل ۱. نمودار W_q برحسب p به ازای الف- $r=2$ ، ب- $r=5$ ، ج- $r=7$ و د- $r=10$

بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله مدلی از خانواده مدل‌های $\{E_r/M/c, r \in N\}$ به نام $E_r/M/3$ معرفی و معیارهای ارزیابی عملکرد این سیستم صف‌بندی مانند توزیع تعداد متقاضیان در سیستم، متوسط تعداد متقاضیان در صف و سیستم و متوسط مدت زمان انتظار در صف و سیستم به دست آورده شد. به دلیل نقش بسزای پارامتر شدت ترافیک در معیارهای ارزیابی، با فرض یک زمان توقف در سیستم و تحت تابع زیان آنتروپی عمومی، این پارامتر به روش‌های بیز، E -بیز و بیز سلسله‌مراتبی برآورد شد. سپس بر اساس روش E -بیز و با توجه به ساختار ابرپارامتر توزیع پیشین انتخابی، روش برآورد جدید E^3 -بیز در دو نوع پیوسته و گسسته معرفی شد. سپس برآوردگری که بتواند متوسط مدت زمان

جدول ۶. برآوردهای ρ و برآورد W_q به ازای آن‌ها برای داده‌های مثال بانک

$E^I B.II$	$E^I B.I$	HB	EB	B	p
۰/۴۶۴۸۱	۰/۴۶۲۱۹	۰/۶۱۵۹۳	۰/۴۸۱۶۲	۰/۴۹۷۷۹	-۲/۵
۰/۴۵۴۱۰	۰/۴۴۱۴۲	۰/۶۲۷۹۲	۰/۴۷۴۱۵	۰/۴۸۷۸۸	-۱/۵
۰/۴۶۵۷۷	۰/۴۵۶۵۸	۰/۶۳۳۳۳	۰/۴۶۹۴۱	۰/۴۸۳۰۵	-۱
۰/۴۶۴۸۱	۰/۴۶۲۱۹	۰/۶۳۷۷۶	۰/۴۷۸۳۱	۰/۴۹۹۹۲	-۰/۵
۰/۴۵۵۸۳	۰/۴۴۸۲۱	۰/۶۴۳۰۵	۰/۴۵۳۲۶	۰/۵۶۹۰۸	۰/۵
۰/۴۵۱۴۶	۰/۴۴۸۹۱	۰/۶۴۲۸۲	۰/۴۴۹۴۸	۰/۴۶۴۵۸	۱
۰/۴۴۴۶۳	۰/۴۱۸۹۱	۰/۶۳۹۹۱	۰/۴۴۷۱۶	۰/۴۶۰۱۵	۱/۵
۰/۴۳۶۲۹	۰/۴۲۶۷۷	۰/۶۲۲۸۸	۰/۴۳۸۷۷	۰/۴۵۱۵۲	۲/۵
۰/۰۱۰۶۱	۰/۰۱۰۳۷	۰/۰۴۲۱۳	۰/۰۱۲۳۱	۰/۰۱۴۲۱	-۲/۵
۰/۰۰۹۶۵	۰/۰۰۵۶۲	۰/۰۴۷۶۷	۰/۰۱۱۵۲	۰/۰۱۳۰۱	-۱/۵
۰/۰۱۰۷۰	۰/۰۰۹۸۷	۰/۰۵۰۴۹	۰/۰۱۱۰۵	۰/۰۱۲۴۶	-۱
۰/۰۱۰۶۱	۰/۰۱۰۳۷	۰/۰۵۲۹۶	۰/۰۱۱۹۵	۰/۰۱۴۴۶	-۰/۵
۰/۰۰۹۷۹	۰/۰۰۹۱۶	۰/۰۵۶۱۲	۰/۰۰۹۵۸	۰/۰۲۶۸۴	۰/۵
۰/۰۰۹۴۲	۰/۰۰۹۲۱	۰/۰۵۵۹۸	۰/۰۰۹۲۶	۰/۰۱۰۵۹	۱
۰/۰۰۸۸۷	۰/۰۰۷۰۳	۰/۰۵۴۲۱	۰/۰۰۹۰۷	۰/۰۱۰۱۸	۱/۵
۰/۰۰۸۲۲	۰/۰۰۷۵۵	۰/۰۴۵۲۴	۰/۰۰۸۴۲	۰/۰۰۹۴۳	۲/۵

انتظار در صف مشتری را مینیمم کند به عنوان برآوردگر برتر تعیین شد. همچنین در تمام تحقیقات پیشین که برآورد E -بیز برای پارامترهای مختلف به دست آورده می‌شد و با برآوردهای بیز و بیز سلسله‌مراتبی و سایر برآوردهای دیگر مقایسه می‌شد، همواره برآوردگر برتری نبود بلکه تحت شرایطی از برآوردهای دیگر بهتر می‌شد. اما در این مقاله نشان داده شد که برآوردهای E^I -بیز که در دو حالت پیوسته و گسسته به دست آورده می‌شوند، با استفاده از روش شبیه‌سازی مونت‌کارلو و مجموعه داده‌های واقعی همواره از برآوردهای دیگر بهتر است. یافته‌های این پژوهش می‌تواند در عرصه کاربردی برای سیستم‌های صف‌بندی چند باجه‌ای با ظرفیت نامتناهی موثر باشد. می‌توان جایگاه پمپ بنزینی که دارای ۳ مکان بنزین رسانی است به عنوان یک سیستم ۳ باجه‌ای با ظرفیت نامتناهی در نظر گرفت که خودروها (متقاضیان) برای اخذ سرویس (بنزین زدن) به آن مراجعه می‌کنند. با ثبت فاصله زمانی بین مراجعه خودروها و فاصله زمانی بین سرویس (دریافت بنزین) خودروها در یک بازه زمانی مشخص که انتهای بازه زمانی به عنوان زمان توقف سیستم در نظر گرفته می‌شود، می‌توان پارامتر شدت ترافیک برآورد و سپس W_q را محاسبه نمود و سپس تدابیری اندیشید تا W_q مینیمم گردد.

تقدیر و تشکر

نویسنده مقاله از سردبیر، داوران و ویراستار محترم مجله در ارزیابی این مقاله قدردانی و تشکر می‌کند.

مراجع

شادرخ، ع، یعقوبزاده شهرستانی، ش. (۱۳۹۸)، برآوردهای E -بیز و بیز سلسله‌مراتبی پارامتر تنش-مقاومت در توزیع رایلی تحت تابع زیان لاینکس، مجله علوم آماری، ۲، ۴۹۶-۴۸۳.

یعقوبزاده شهرستانی، ش. (۱۴۰۲)، برآورد پارامتر شدت ترافیک و احتمال پایایی مدل صف‌بندی $M/M/c$ تحت یک زمان توقف در سیستم، مجله علوم آماری، ۱، ۲۳۳-۲۱۹.

Allen, A. (1990), *Probability, Statistics and Queueing Theory with Computer Science Applications*, 2nd ed. Academic Press, Boston.

Ando, T. and Zellner, A. (2010), Hierarchical Bayesian Analysis of the Seemingly Unrelated Regression and Simultaneous Equations Models Using a Combination of Direct Monte Carlo and Importance Sampling Techniques, *Bayesian Analysis*, **5**, 65-96.

Berger, J. O. (1985), *Statistical Decision Theory and Bayesian Analysis*, second ed., Springer-Verlag, New York.

Calabria, R. and Pulcini, G. (1996), Point Estimation under Asymmetric Loss Functions for Left Truncated Exponential Samples, *Communications in Statistics-Theory Methods*, **25**(3), 585-600.

Cressie, M. and Tingley, M. P. (2010), Comment: Hierarchical Statistical Modeling for Paleoclimate Reconstruction, *Journal of the American Statistical Association*, **105**, 895-900.

Chowdhury, S. and Maiti, S. (2014), Bayesian Estimation of Traffic Intensity in an $M/E_r/1$ Queueing Model, Research Reviews: Journal of Statistics, *Special Issue on Recent Statistical Methodologies and Applications*, **1**, 99-106.

Deepthi, V. and Jose, J. K. (2021), Bayesian Estimation of $M/E_k/1$ Queueing Model using Bivariate Prior, *American Journal of Mathematical and Management Sciences*, **40**, 88-105.

- M. Fischer, The Waiting time in the $E_k/M/1$ Queueing System, *Operational Research*, **22** (1974), 898-902.
- Gupta P. L. (1984), Structural Properties and Estimation in $M/E_k/1$ Queue, *Communication in Statistics-Theory and Methods*, **11**, 711-719.
- Han, M. (1977), The Structure of Hierarchical Prior Distribution and its Applications, *Chinese Operations Research and Management Science*, **6**, 31-40.
- Harishchandra, K. and Subba Rao, S. (1998), A Note on Statistical Inference about the Traffic Intensity Parameter in $M/E_k/1$ Queue, *Sankhyā: The Indian Journal of Statistics, Series A*, **50**, 144-148.
- Han, M. (2009), E -Bayesian Estimation and Hierarchical Bayesian Estimation of Failure Rate, *Applied Mathematical Modelling*, **33**, 1915-1922.
- Han, M. (2011), E -Bayesian Estimation of the Reliability Derived from Binomial Distribution, *Applied Mathematical Modelling*, **35**, 2419-2424.
- Insua, D. R., Wiper, M. and Ruggeri, F. (1998), Bayesian Analysis of $M/E_r/1$ and $M/H_k/1$ queues, *Queueing and System*, **30**, 289-308.
- Jain, M. and Dhyani, I. (2011), Control Policy for $M/E_k/1$ Queueing System, *Journal of Statistics and Management Systems*, **4**, 73-82.
- Jaheen Z. F. and Okasha, H. M. (2011), E -Bayesian Estimation for the Burr type XII Model based on Type-2 Censoring, *Applied Mathematical Modelling*, **35**, 4730-4737.
- Jose, J. K. and Manoharan, M. (2014), Bayesian Estimation of rate Parameters of Queueing Models, *Journal of Probability and Statistical Science*, **12**, 69-76.
- Lindley, D. V and Smith, A. F. (1972), Bayes Estimation for the Linear Model, *Journal of the Royal Statistical Society-Series B*, **34**, 1-41.
- Lindley, D. V. (1980), Approximate Bayesian Methods, *Trabajos de Estadística y de Investigación Operativa*, **31**, 223-245.

- Micheas, A. C. and Wikle, C. K. (2009), A Bayesian Hierarchical Nonoverlapping Random Disc Growth Model, *Journal of the American Statistical Association*, **104**, 274-283.
- Osei, F. B. and Duker, A. A. (2011), Hierarchical Bayesian Modeling of the Space-Time Diffusion Patterns of Cholera Epidemic in Kumasi, *Ghana. Statistica Neerlandica*, **65**, 84-100.
- Richard, D. M. (2011), A Bayesian Hierarchical Model for the Measurement of Working Memory Capacity, *Journal of Mathematical Psychology*, **55**, 8-24.
- Wang, J., Li, D. and Chen, D. (2012), E Bayesian Estimation and Hierarchical Bayesian Estimation of the System Reliability Parameter, *Systems Engineering Procedia*, **3**, 282-289.
- Vaidyanathan, V. S. and Chandrasekhar, P. (2018), Parametric Estimation of an $M/E_r/1$ Queue, *Opsearch*, doi.org/10.1007/s12597-018-0342-0.
- M. Wiper, Bayesian Analysis of $E_r/M/$ and $E_r/M/c$ queues, *Journal of Statistical Planning and Inference*, **69**, 65-79.
- Yousefzadeh, F. (2017), E-Bayesian and Hierarchical Bayesian Estimations for the System Reliability Parameter based on Asymmetric Loss Function, *Communications in Statistics—Theory and Methods*, **46**(1), 1–8.
- Yaghoobzadeh Shahrastani, S. (2018), Estimating E-bayesian and Hierarchical Bayesian of Scalar Parameter of Gompertz Distribution under Type II Censoring Schemes based on Fuzzy Data, *Communication in Statistics-Theory and Methods*, **48**(4), 831-840.