مجله علوم آماری، بهار و تابستان ۱۳۹۷
جلد ۱۲، شماره ۱، ص ۲۵۵ – ۲۷۹
DOI: 10.29252/jss.12.1.255

برآورد پارامترهای مکان و شکل توزیع گومپرتز با آماره‌های ترتیبی تعمیم‌یافته

شهرام یعقوب‌زاده شهرستانی

گروه آمار، دانشگاه پیام نور تهران

تاریخ دریافت: ۱۳۹۶/۲/۲۹   تاریخ آخرین بازنگری: ۱۳۹۷/۱/۲۶

چکیده: در این مقاله ضمن ارائه روش تولید آماره‌های ترتیبی تعمیم‌یافته از توزیع گومپرتز، برآوردهای بیزی و ماکسیمم درستنمایی پارامترها و تابع‌های قابلیت اعتماد و خطر آن در طرح‌های سانسور شده فزآینده نوع دوم و مقادیر رکوردها بر اساس آماره‌های ترتیبی به‌دست آورده شده و با استفاده از شبیه‌سازی مونت‌کارلو و دو مجموعه داده واقعی مقایسه می‌شوند. همچنین با مقایسه برآوردهای بیزی و ماکسیمم درستنمایی توزیع گومپرتز با برآوردهای مشابه در توزیع‌های وایبول و لوماکس نشان داده می‌شود که برآوردهای توزیع گومپرتز بهترند.

واژه‌های کلیدی: آماره‌های ترتیبی تعمیم‌یافته، توزیع گومپرتز، مقادیر رکوردها، سانسور فزآینده نوع دوم.

۱ مقدمه

آماره‌های مرتب تعمیم‌یافته[1] که توسط کامپس (۱۹۹۵) معرفی شد یک مدل کلی برای مدل‌های برحسب متغیرهای تصادفی مرتب است که آماره‌های مرتب معمولی، مقادیر K- رکوردها و طرح سانسور فزآینده نوع دوم[2]، حالت‌هایی خاص از آن هستند که کاربرد موثری در نظریه قابلیت اعتماد دارند. نویسندگان مختلفی از آماره‌های مرتب تعمیم‌یافته استفاده کردند. حبیب‌اله و احسان‌اله (۲۰۰۰) برآورد نااریب خطی پارامترهای توزیع پارتوی نوع دوم، الحسینی و احمد (۲۰۰۳) برآورد بیزی تابع‌های چگالی و بقا، مالینوسکا و همکاران (۲۰۰۶) برآورد ماکسیمم درستنمایی پارامترهای توزیع بور نوع ۱۲، ابوالنین (۲۰۰۷) اطلاع

آدرس الکترونیکی نویسنده مسئول مقاله: شهرام یعقوب‌زاده شهرستانی، yagoubzade@gmail.com
کد موضوع‌بندی ریاضی (۲۰۱۰): 62C10، 62F15، 62N01

[1] Generalized order statistics (gos)
[2] Type II progressive censoring scheme

فیشر در توزیع‌ها، ابوالنین (۲۰۰۸) برآورد نااریب خطی پارامترهای توزیع نمایی، ابوالنین (۲۰۱۰) برآورد بیزی و ماکسیمم درستنمایی پارامترهای توزیع وایبول و بابانژاد و همکاران (۲۰۱۲) برآورد بیزی و بسامدی پارامترهای توزیع لوماکس[3] را به کمک آماره‌های ترتیبی تعمیم‌یافته به دست آوردند. همچنین نویسندگان متعددی برای محاسبه برآورد بیزی و برآورد ماکسیمم درستنمایی، از طرح سانسور فزآینده و مقادیر رکوردها استفاده کردند که در زمینه طرح سانسور فزآینده می‌توان به حسین و زیمر (۲۰۰۳)، بالاکریشنان و همکاران (۲۰۰۴)، فرناندز (۲۰۰۴)، شو و همکاران (۲۰۰۶)، نیگم و ابوالنین (۲۰۰۷)، و در زمینه رکوردها می‌توان به جاهین (۲۰۰۴)، سولیمن و همکاران (۲۰۰۶) و سولیمن و العبود (۲۰۰۸) اشاره کرد. توزیع گومپرتز که توسط گومپرتز (۱۸۲۵) معرفی شد نقش مهمی در مدل‌سازی مرگ و میر بشر دارد (وترسترند، ۱۹۸۱؛ گاوریلو و گاوریلوا ۱۹۹۱) همچنین به کاربردهای دیگر توزیع گومپرتز در علوم مختلفی مانند زیست‌شناسی (اکونوموس، ۱۹۸۲)، آنالیز بقا (جانسون و همکاران، ۱۹۹۵)، جامعه‌شناسی (ویلمس و کوپلار، ۲۰۰۰)، کامپیوتر (اوهیشی و همکاران، ۲۰۰۹) و بازاریابی (بمائور و گلادی، ۲۰۱۲) اشاره کرد. برآورد پارامترهای توزیع گومپرتز به روش‌های ماکسیمم درستنمایی و بیزی توسط جاهین (۲۰۰۳) به دست آورده شد.

تعریف ۱: فرض کنید F تابع توزیع تجمعی به طور مطلق پیوسته و با تابع چگالی f باشد. اگر $n \in N$ و $\widetilde{m} = (m_1, \cdots, m_{n-1}) \in R^{n-1}$ و $k > 0$ باشند به طوری که برای هر، $1 \leq i \leq n-1$، $\gamma_i = k + n - i + M_i > 0$ که $M_i = \sum_{j=i}^{n-1} m_j$، آنگاه متغیرهای تصادفی $X(r, n, \widetilde{m}, k), 1 \leq r \leq n$ را آماره‌های ترتیبی تعمیم‌یافته نامند، اگر تابع چگالی توام‌شان به صورت (کامپس، ۱۹۹۵)

$$\begin{aligned} & f_{(X(1,n,\widetilde{m},k),\cdots,X(n,n,\widetilde{m},k))}(x_1, \cdots, x_n) \\ & \quad = k\left(\prod_{j=1}^{n-1} \gamma_j\right) \prod_{j=1}^{n-1} \bar{F}^{m_j}(x_j) f(x_j) \bar{F}^{k-1}(x_n) f(x_n), \end{aligned}$$

باشد، به طوری که $F^{-1}(0) < x_1 < \cdots < x_n < F^{-1}(1)$ و $\overline{F}(x) = 1 - F(x)$. با انتخاب مناسب m_iها و k چند حالت خاص از آماره‌های ترتیبی تعمیم‌یافته به صورت زیر به‌دست آورده می‌شود.

- اگر $k = 1$، $m_1 = \cdots = m_{n-1} = -1$، آنگاه $X(r, n, \widetilde{m}, k)$ ها تبدیل به رکوردها شده و رابطه (۱) تابع چگالی توام n مقدار رکورد بالا است.

[3] Lomax

- اگر به ازای هر $1 \leq i \leq m-1$، $m_i = R_i$ و بازای هر $i = m, \cdots, n-1$، $m_i = 0$ و $k = R_m + 1$ باشد، آن‌گاه $X(r,n,\widetilde{m},k)$ها تبدیل به طرح سانسور فزآینده نوع دوم شده و رابطه (۱) تابع چگالی توام نمونه سانسور فزآینده نوع دوم از یک دنباله متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع است.

- اگر $k = 1$ و $m_1 = \cdots = m_{n-1} = 0$، آن‌گاه آماره‌های ترتیبی تعمیم‌یافته به آماره‌های ترتیبی معمولی $X_{1:n}, \cdots, X_{n:n}$ برای نمونه $X_1, \cdots, X_n$ تبدیل می‌شود. برای دیدن سایر حالت‌ها به مالینوسکا و همکاران (۲۰۰۶) رجوع شود. همچنین تابع چگالی حاشیه‌ای آماره ترتیبی تعمیم یافته rام برای حالت $m_1 = \cdots = m_{n-1} = m$ به صورت

$$f_{X(r,n,\widetilde{m},k)}(x) = \frac{C^*_{r-1}}{(r-1)!}(\overline{F}(x))^{\gamma_r - 1} f(x) g_m^{r-1}(x)(F(x)), \qquad (1)$$

است (مالینوسکا و همکاران، ۲۰۰۶)، به طوری که

$$\begin{aligned} c^*_{r-1} &= \prod_{i=1}^{r} \gamma_i, \quad \gamma_i = k + (n-i)(m+1), \\ g_m(x) &= \begin{cases} (m+1)^{-1}(1-(1-x)^{m+1}), & m \neq -1, \\ -\ln(1-x), & m = 1 \end{cases} \quad x \in (0,1) \end{aligned} \qquad (2)$$

در این مقاله توزیع گومپرتز[4] با تابع توزیع و تابع چگالی احتمال به ترتیب

$$F(x;\alpha,\beta) = 1 - e^{-\frac{\alpha}{\beta}(e^{\beta x}-1)}, \quad x > 0; \alpha > 0,\ \beta > 0, \qquad (3)$$

$$f(x;\alpha,\beta) = \alpha e^{\beta x - \frac{\alpha}{\beta}(e^{\beta x}-1)}, \quad x > 0;\ \alpha > 0,\ \beta > 0. \qquad (4)$$

[4]Gompertz

در نظر گرفته می‌شود که در آن α پارامتر مکان و β پارامتر شکل می‌باشد. تابع قابلیت اعتماد $R(t)$ و تابع خطر $H(t)$ توزیع گومپرتز در زمان t به ترتیب

$$R(t) = 1 - F(x;\alpha,\beta) = e^{-\frac{\alpha}{\beta}(e^{\beta t}-1)}, \quad t > 0 \tag{۵}$$

$$H(t) = \frac{f(x;\alpha,\beta)}{1 - F(x;\alpha,\beta)} = \alpha e^{\beta t}, \qquad t > 0 \tag{۶}$$

هستند که در آن‌ها $F(x;\alpha,\beta)$ و $f(x;\alpha,\beta)$ به ترتیب تابع‌های توزیع تجمعی و چگالی احتمال توزیع گومپرتز هستند.

در بخش‌های ۲ و ۳ به ترتیب برآوردهای بیزی و ماکسیمم درستنمایی پارامترها و تابع‌های قابلیت اعتماد و خطر در توزیع گومپرتز در دو حالت معلوم بودن پارامتر شکل و مجهول بودن پارامترهای مکان و شکل در دو طرح سانسور فزآینده نوع دوم و مقادیر رکوردها به‌دست آورده می‌شود. در بخش ۴، روش تولید آماره‌های ترتیبی تعمیم‌یافته از توزیع گومپرتز بیان می‌شود. در بخش ۵ برآوردهای بیزی و ماکسیمم درستنمایی توزیع گومپرتز با استفاده از شبیه‌سازی مونت‌کارلو و دو مجموعه داده‌های واقعی در طرح‌های سانسور فزآینده نوع دوم و مقادیر رکورد بالا و با برآوردهای بیزی و ماکسیمم درستنمایی توزیع‌های وایبول و لوماکس توسط داده‌های واقعی مقایسه می شوند. بخش ۵ هم به بحث و نتیجه‌گیری اختصاص داده شده است.

۲ برآوردگرهای بیزی

برآوردهای بیزی پارامترهای توزیع گومپرتز براساس داده‌های سانسور شده نوع اول توسط اسماعیل (۲۰۱۰) و بر اساس آماره‌های رکوردی توسط جاهین (۲۰۰۳) ارائه شد. دراین بخش برآوردهای بیزی براساس آماره‌های ترتیبی تعمیم‌یافته به‌دست آورده می‌شود.

فرض کنید به ازای $k \geq 1$، $X(1,n,\widetilde{m},k), \cdots, X(n,n,\widetilde{m},k)$، آماره‌های ترتیبی تعمیم‌یافته از توزیع گومپرتز باشند. با توجه به رابطه‌های (۱) و (۲) تابع درستنمایی به صورت

$$L(\alpha,\beta;X) = k\alpha^n \left(\prod_{j=1}^{n-1} \gamma_j\right) e^{-\frac{\alpha}{\beta}u - v}, \tag{۷}$$

است که در آن

$$u=\sum_{j=1}^{n-1}(m_j+1)(e^{\beta x_j}-1)+k(e^{\beta x_n}-1), \quad v=\beta\sum_{i=1}^{n}x_i. \tag{۸}$$

۱.۲ پارامتر شکل معلوم

در حالت معلوم بودن β از توزیع پیشین مزدوج گاما با تابع چگالی احتمال

$$\pi_1(\alpha|a,b)=\frac{b^a}{\Gamma(a)}\alpha^{a-1}e^{-b\alpha}, \tag{۹}$$

برای برآورد بیزی α استفاده می‌شود که در آن $a>0$ و $b>0$ ابر پارامتر هستند. توزیع پیشین جفریز یک توزیع پیشین ناآگاهی بخش است که در صورت نداشتن توزیع پیشین مناسب می‌تواند برای برآورد بیزی پارامترها استفاده شود. بنابر این دومین توزیع پیشینی که در نظر گرفته می‌شود توزیع پیشین جفریز است که حالت خاصی از (۹) بوده و به صورت

$$\pi_2(\alpha|a,b)=1/\alpha, \quad \alpha>0. \tag{۱۰}$$

در نظر گرفته می‌شود. با توجه به روابط (۷) و (۹) توزیع پسین

$$\pi^*(\alpha|X,\beta,a,b)=\frac{(b+\frac{u}{\beta})^{a+n}}{\Gamma(a+n)}\alpha^{a+n-1}e^{-(b+\frac{u}{\beta})\alpha}. \tag{۱۱}$$

برای α به‌دست آورده می‌شود. بنابر این برآورد بیزی α، $R(t)$ و $H(t)$ تحت تابع زیان توان دوم خطا و توزیع پیشین π_1 به ترتیب به صورت‌های

$$\alpha_{Bay}^{\pi_1} = \int_0^\infty \alpha\pi^*(\alpha|X,\beta,a,b)d\alpha$$

$$= \frac{a+n}{b+\frac{u}{\beta}}, \quad (۱۲)$$

$$R^{\pi_1}_{Bay}(t) = \int_0^\infty e^{-\frac{\alpha}{\beta}(e^{\beta t}-1)}\pi^*(\alpha|X,\beta,a,b)d\alpha$$
$$= (\frac{b\beta+u}{b\beta+u+e^{\beta t}-1})^{a+n} \quad (۱۳)$$
$$H^{\pi_1}_{Bay}(t) = e^{\beta t}\frac{a+n}{b+\frac{u}{\beta}}. \quad (۱۴)$$

به‌دست آورده می‌شوند. همچنین برآوردهای بیزی α، $R(t)$ و $H(t)$ تحت تابع زیان توان دوم خطا و توزیع پیشین π_2 به ترتیب عبارتند از

$$\alpha^{\pi_2}_{Bay} = \frac{n\beta}{u}$$
$$R^{\pi_2}_{Bay}(t) = [\frac{u}{u+e^{\beta t}-1}]^n$$
$$H^{\pi_2}_{Bay}(t) = \frac{n\beta e^{\beta t}}{u} \quad (۱۵)$$

ریسک پسین برآوردهای بیزی (۱۲) تا (۱۴) تحت تابع زیان توان دوم خطا و با توجه به توزیع پسین π^* به ترتیب به صورت‌های

$$r^{\pi^*}_{\alpha_{Bay}} = \int_0^\infty (\alpha_{Bay}-\alpha)^2\pi^*(\alpha|X,\beta,a,b)d\alpha$$
$$= \frac{a+n}{(b+\frac{u}{\beta})^2}$$
$$r^{\pi^*}_{R_{Bay}(t)} = (\frac{b\beta+u}{b\beta+u+e^{\beta t}-1})^{2a+2n} + \frac{a+n}{(b+\frac{u}{\beta})^2}$$
$$-(\frac{2a+2n}{b+\frac{u}{\beta}})(\frac{b\beta+u}{b\beta+u+e^{\beta t}-1})^{a+n}$$
$$r^{\pi^*}_{H_{Bay}(t)} = e^{2\beta t}(\frac{a+n}{b+\frac{u}{\beta}})^2 + \frac{(a+n)(a+n+1)}{(b+\frac{u}{\beta})^2} - (\frac{2a+2n}{b+\frac{u}{\beta}})e^{\beta t}$$

به‌دست آورده می‌شوند. اگر توزیع پسین حاصل از توزیع پیشین π_2، π^{**} در نظر گرفته شود، آنگاه ریسک پسین بیز برآوردهای بیزی (۱۲) تا (۱۴) به راحتی قابل محاسبه هستند.

۲.۲ پارامترهای مکان و شکل نامعلوم

وقتی هر دو پارامتر α و β نامعلوم باشند در حالت کلی یک خانواده توزیع توام مزدوج پیشین برای α و β وجود ندارد. اما برای حل این مسئله از روش سولند (۱۹۶۹) استفاده می‌شود که یک خانواده توزیع توام پیشین معرفی می‌کند بدین صورت که یک توزیع پیوسته به α و یک توزیع گسسته به β اختصاص داده می‌شود. فرض کنید β، مقادیر $\beta_1, \cdots, \beta_k$ را با احتمال‌های پیشین $\psi_1, \cdots, \psi_k$ اختیار کند به طوری که

$$P(\beta = \beta_j) = \psi_j, \quad 0 \leq \psi_j \leq 1, \quad \sum_{j=1}^{k} \psi_j = 1. \tag{۱۶}$$

تابع چگالی پسین توام α و β_j به صورت

$$f(\alpha, \beta_j | X) = f(X|\alpha, \beta_j) g(\alpha|\beta_j) P(\beta = \beta_j), \tag{۱۷}$$

به‌دست آورده می‌شود که در آن

$$f(X|\alpha, \beta_j) \propto \alpha^n e^{-\frac{\alpha}{\beta_j} u_j + \beta_j v} \tag{۱۸}$$

$$u_j = \sum_{i=1}^{n-1} (m_i + 1)(e^{\beta_j x_i} - 1) + k(e^{\beta_j x_n} - 1), \quad v_j = \beta_j \sum_{i=1}^{n} x_i \tag{۱۹}$$

و

$$g(\alpha|\beta_j) = \frac{b_j^{\alpha_j}}{\Gamma(a_j)} \alpha^{a_j - 1} e^{-b_j \alpha}, \quad a_j > 0, b_j > 0. \tag{۲۰}$$

تابع چگالی احتمال پیوسته و پیشین α به شرط β_j است. توزیع پسین α به شرط β_j عبارت است از

$$g(\alpha|\beta_j, u_j) = \frac{(b_j + \dfrac{u_j}{\beta_j})^{a_j+n}}{\Gamma(a_j + n)} \alpha^{a_j+n-1} e^{-\alpha(b_j + \frac{u_j}{\beta_j})}, \quad \alpha, a_j, b_j > 0 \tag{۲۱}$$

همچنین برای به‌دست آوردن برآورد بیزی β باید ابتدا توزیع پسین

$$\begin{aligned} P_j = P(\beta=\beta_j|X) &= \int_0^\infty f(\alpha,\beta_j|X)d\alpha \\ &= A\frac{\psi_j e^{-v_j} b_j^{a_j}\beta_j^{n+a_j}\Gamma(n+a_j)}{\Gamma(a_j)(u_j+b_j\beta_j)^{n+a_j}} \end{aligned} \qquad (۲۲)$$

محاسبه شود که در آن

$$A^{-1} = \sum_{j=1}^{k} \frac{\psi_j e^{-v_j} b_j^{a_j}\beta_j^{n+a_j}\Gamma(n+a_j)}{\Gamma(a_j)(u_j+b_j\beta_j)^{n+a_j}}$$

ثابت نرمال‌ساز است. اکنون برآورد بیز پارامترهای α، β، $R(t)$ و $H(t)$ در $t>0$ تحت تابع زیان توان دوم خطا و نسبت به توزیع پیشین π_1 به ترتیب عبارتند از

$$\begin{aligned} \alpha_{Bay}^{\pi_1} &= \int_0^\infty \alpha \sum_{i=1}^{k} P_j g(\alpha|\beta_j,u_j)d\alpha \\ &= \sum_{i=1}^{k} \frac{P_j(n+a_j)}{b_j+\frac{u_j}{\beta_j}}, \end{aligned} \qquad (۲۳)$$

$$\begin{aligned} \beta_{Bay}^{\pi_1} &= E(\beta|X) \\ &= \sum_{j=1}^{k} \beta_j P(\beta=\beta_j|X) \\ &= \sum_{j=1}^{k} P_j\beta_j. \end{aligned} \qquad (۲۴)$$

$$R(t)^{\pi_۱}_{Bay}=\sum_{j=۱}^{k}P_j(\frac{b_j\beta_j+u_j}{b_j\beta_j+u_j+e^{\beta t}-۱})^{a_j+n}. \qquad (۲۵)$$

$$H(t)^{\pi_۱}_{Bay}=\sum_{j=۱}^{k}\frac{P_j(a_j+n)e^{\beta_j t}}{(b_j+\dfrac{u_j}{\beta_j})}. \qquad (۲۶)$$

ریسک پسین بیز برای α_{Bay} تحت تابع زیان توان دوم خطا و نسبت به توزیع پیشین $\pi_۱$ به صورت

$$r^{\pi_۱}_{\alpha_{Bay}}=\alpha^۲_{Bay}+\sum_{j=۱}^{k}\frac{(a_j+n)(a_j+n+۱)}{(b_j+\frac{u_j}{\beta_j})^۲}-۲\alpha_{Bay}\sum_{j=۱}^{k}(\frac{a_j+n}{b_j+\frac{u_j}{\beta_j}})$$

محاسبه می‌شود به همین ترتیب ریسک پسین بیز برای بقیه برآوردها به‌دست آورده می‌شوند. همچنین برآوردهای بیز α، β، $R(t)$ و $H(t)$ در $t>۰$ تحت تابع زیان توان دوم خطا و نسبت به توزیع پیشین $\pi_۲$ به ترتیب به صورت

$$\alpha^{\pi_۲}_{Bay}=n\sum_{j=۱}^{k}\frac{P_j\beta_j}{u_j}$$

$$\beta^{\pi_۲}_{Bay}=\sum_{j=۱}^{k}P_j\beta_j$$

$$R(t)^{\pi_۲}_{Bay}=\sum_{j=۱}^{k}P_j(\frac{u_j}{u_j+e^{\beta_j t}-۱})^{n}$$

$$H(t)^{\pi_۲}_{Bay}=\sum_{j=۱}^{k}\frac{P_j\beta_j e^{\beta_j t}}{u_j}$$

به‌دست آورده می‌شوند، که در آن

$$P_j=\frac{\psi_j(\frac{u_j}{\beta_j})^n}{n\sum_{j=۱}^{k}\psi_j(\frac{u_j}{\beta_j})^n}.$$

برای آن که به کمک داده‌های واقعی مقادیر برآوردگرها به‌دست آورده شوند باید مقادیر β_j و ψ_j ها و در رابطه (۲۰)، ابرپارامترهای a_j و b_j مشخص شود که به کمک امید ریاضی شرطی $R(t)$ به شرط $\beta = \beta_j$ یعنی

$$\begin{aligned} E_{(\alpha|\beta_j)}(R(t)|\beta = \beta_j) &= \int_{۰}^{\infty} e^{-\frac{\alpha}{\beta_j}(e^{-\beta_j t}-۱)} \frac{b_j^{a_j}}{\Gamma(a_j)} \alpha^{a_j-۱} e^{-b_j\alpha} d\alpha \\ &= \left(\frac{b_j\beta_j}{b_j\beta_j + e^{\beta_j t} - ۱}\right)^{a_j} \end{aligned} \tag{۲۷}$$

و به ازای دو مقدار مشخص $R(t_۱)$ و $R(t_۲)$، مقادیر (a_j, b_j) به ازای هر β_j به‌دست آورده می‌شود. البته با استفاده از روش ناپارامتری مارتز و والر (۱۹۸۲) که در بخش ۴.۱ از آن استفاده می‌شود به راحتی دو مقدار متفاوت از $R(t)$ قابل برآورد است.

۳.۲ تحلیل حساسیت توزیع‌های گسسته β_j

برآوردهای بیزی پارامترهای α و β و تابع‌های خطر و قابلیت اعتماد توزیع گومپرتز تحت تاثیر انتخاب توزیع پیشین β_j در رابطه (۱۶) هستند. می توان توزیع‌های گسسته متفاوتی انتخاب کرد و سپس آن توزیع پیشینی از β_j انتخاب شود که ریسک پسین بیز برآوردگرهای بیزی مربوطه کمترین مقدار را داشته باشد. چون توزیع پیشین β با استفاده از روش سولند (۱۹۶۹) توزیع پیشین محدود کننده‌ای است. بنا براین برای β توزیع‌های یکنواخت و نرمال در نظر گرفته شده و برآوردهای بیزی α، β، $R(t)$ و $H(t)$ به‌دست آورده می‌شود. با فرض $۱ < \beta < ۱,۰ = \pi_۳(\beta)$ و با شبیه‌سازی روابط (۱۷) و (۱۹) تا (۲۲)، توزیع پسین α و β به شرط $\mathbf{X}$ و توزیع پسین β به شرط $\mathbf{X}$ به ترتیب به صورت

$$\begin{aligned} g(\alpha,\beta|\mathbf{X}) &= \frac{(b+\frac{u}{\beta})^{a+n}}{\Gamma(a+n)} \alpha^{a+n-۱} e^{-(b+\frac{u}{\beta})} \\ \pi(\beta|\mathbf{X}) &= \frac{b^a \Gamma(a+n)\beta^{a+n}}{\Gamma(a)(b\beta+u)^{a+n}} \end{aligned}$$

محاسبه می‌شوند که در آن u در (۸) ارائه شده است. بنابر این برآورد بیزی α به صورت

$$\alpha_{Bay}^{\pi_۳} = \frac{(n+a)}{b^۲}\left(b - u\log\frac{u+b}{u}\right)$$

محاسبه می‌شود. همچنین برآوردهای بیزی β، $R(t)$ و $H(t)$ به ترتیب به صورت

$$\beta_{Bay}^{\pi_3} = \frac{b^a\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)} \int_0^1 \frac{\beta^{a+n+1}}{(b\beta+u)^{a+n}} d\beta$$
$$R(t)_{Bay}^{\pi_3} = \int_0^1 \left(\frac{u+b\beta}{u+b\beta+e^{\beta t}-1}\right)^{a+n} d\beta$$
$$H(t)_{Bay}^{\pi_3} = (a+n) \int_0^1 \frac{\beta e^{\beta t}}{u+b\beta} d\beta$$

هستند که به روش میانگین نمونه مونت‌کارلو به‌دست آورده می‌شوند. همچنین فرض کنید که $\pi_4(\beta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\beta^2}$ برآوردهای بیزی α، β، $R(t)$ و $H(t)$ که به ترتیب به صورت

$$\alpha_{Bay}^{\pi_4} = \frac{a+n}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\beta}{b+\beta u} e^{-\frac{1}{2}\beta^2} d\beta$$
$$\beta_{Bay}^{\pi_4} = \frac{b^a\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\beta^{a+n+1}}{(b\beta+u)^{a+n}} e^{-\frac{1}{2}\beta^2} d\beta$$
$$R(t)_{Bay}^{\pi_4} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{b\beta+u}{b\beta+u+e^{\beta t}-1}\right)^{a+n} e^{-\frac{1}{2}\beta^2} d\beta$$
$$H(t)_{Bay}^{\pi_4} = \frac{a+n}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\beta e^{\beta t}}{b\beta+u} e^{-\frac{1}{2}\beta^2} d\beta$$

هستند با شبیه‌سازی زنجیرهای مارکف مونت‌کارلو به‌دست آورده می‌شود. مقادیر برآوردهای بیزی α، β، $R(t)$ و $H(t)$ همراه با ریسک بیزی برآوردگرها (داخل پرانتز) نسبت به توزیع‌های پیشین π_3 و π_4 برای $u = ۵۴/۱۲$، $t = ۵$ و $n = ۱۰۰$ به ازای مقادیر متفاوت (a,b) محاسبه و در جدول‌های ۱ و ۲ ارائه شده‌اند.

جدول ۱. برآورد بیزی و ریسک بیزی به ازای $u = ۵۴/۱۲$، $t = ۵$ و توزیع پیشین π_3

(a,b)	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{R}(t)$	$\hat{H}(t)$
(۲, ۳)	۰/۷۷۹(۰/۱۰۵)	$۴/۶ \times ۱۰^{-۲۱}(۳/۲ \times ۱۰^{-۲۰})$	۰/۰۸۹(۰/۲۱۲)	۴۰/۲(۶۰/۳)
(۲, ۶)	۰/۷۵۱(۰/۰۹۶)	$۱/۰۲ \times ۱۰^{-۲۲}(۷/۹ \times ۱۰^{-۲۲})$	۰/۰۷۳(۰/۱۹۱)	۴۰/۲(۶۰/۱)
(۴, ۱۰)	۰/۷۳۸(۰/۰۹۱)	$۲/۵ \times ۱۰^{-۲۳}(۱/۶ \times ۱۰^{-۲۲})$	۰/۰۷۳(۰/۱۸۸)	۳۰/۹(۵۰/۶)
(۸, ۱۰)	۰/۷۶۷(۰/۰۹۵)	$۱/۳ \times ۱۰^{-۲۱}(۹/۵ \times ۱۰^{-۲۱})$	۰/۰۷۷(۰/۱۹۱)	۴۰(۵۰/۷)
(۱۲, ۱۰)	۰/۸۰۷(۰/۰۹۹)	$۴/۷ \times ۱۰^{-۲۰}(۳/۳ \times ۱۰^{-۱۹})$	۰/۰۶۹(۰/۱۸۰)	۴۰/۳(۶۰/۳)
(۲, ۱۵)	۰/۶۹۲(۰/۰۸۲)	$۵/۹ \times ۱۰^{-۲۸}(۳/۹ \times ۱۰^{-۲۷})$	۰/۰۷۵(۰/۱۹۶)	۳۰/۸(۵۰/۳)
(۱۶, ۲۰)	۰/۷۵۲(۰/۰۸۴)	$۱/۶ \times ۱۰^{-۲۲}(۱/۱ \times ۱۰^{-۲۱})$	۰/۰۷۷(۰/۱۶۷)	۳۰/۹(۵۰/۶)

جدول ۲. برآورد بیزی و ریسک بیزی به ازای $u = ۵۴/۱۲$، $t = ۵$ و توزیع پیشین $\pi_۴$

(a, b)	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{R}(t)$	$\hat{H}(t)$
$(۲, ۳)$	$۱/۸۸(۲/۵۵)$	$۳/۲ \times ۱۰^{۴۳}(۱/۱ \times ۱۰^{۴۵})$	$۳/۰۸(۳/۳۹)$	$۳/۹ \times ۱۰^{۴}(۸/۸ \times ۱۰^{۵}$
$(۲, ۶)$	$۱/۴۷(۰/۳۹۰)$	$۲/۷ \times ۱۰^{۱۱}(۲/۷ \times ۱۰^{۱۲})$	$۰/۰۷۴(۰/۲۱۱)$	$۶/۸ \times ۱۰^{۳}(۵/۸ \times ۱۰^{۴})$
$(۴, ۱۰)$	$۱/۳۵(۰/۴۱۹)$	$۱/۹ \times ۱۰^{۸}(۱/۹ \times ۱۰^{۹})$	$۰/۰۷۴(۰/۲۱۴)$	$۰/۰۰۶۴(۵/۲ \times ۱۰^{۴})$
$(۸, ۱۰)$	$۱/۴۰(۰/۴۳۵)$	$۲/۵ \times ۱۰^{۱۱}(۲/۵ \times ۱۰^{۱۲})$	$۰/۰۷۲(۰/۲۱۱)$	$۰/۰۰۶۳(۵/۴ \times ۱۰^{۴})$
$(۱۲, ۱۰)$	$۱/۴۸(۰/۴۵۹)$	$۳/۱ \times ۱۰^{۱۴}(۳/۱ \times ۱۰^{۱۵})$	$۰/۰۷۰(۰/۲۰۹)$	$۰/۰۰۶۷(۵/۷ \times ۱۰^{۴})$
$(۲, ۱۵)$	$۱/۱۹(۰/۴۱۷)$	$۱/۲۲(۱۰/۲)$	$۰/۰۷۵(۰/۲۱۵)$	$۰/۰۰۵۳(۴/۴ \times ۱۰^{۴})$
$(۱۶, ۲۰)$	$۱/۲۴(۰/۴۶۹)$	$۳/۸ \times ۱۰^{۶}(۳/۸ \times ۱۰^{۷})$	$۰/۰۷۰(۰/۲۰۹)$	$۰/۰۰۵۳(۴/۴ \times ۱۰^{۴})$

۳ برآورد ماکسیمم درستنمایی

برآورد ماکسیمم درستنمایی پارامترهای توزیع گومپرتز بر اساس یک نمونه تصادفی، توسط لنارت (۲۰۱۴) به‌دست آورده شد. در این بخش بر اساس آماره‌های ترتیبی تعمیم‌یافته برآورد ماکسیمم درستنمایی پارامترها به‌دست آورده می‌شوند. بنابر این لگاریتم تابع درستنمایی مبتنی بر n آماره ترتیبی تعمیم‌یافته اول، برای توزیع گومپرتز داده شده در رابطه (۴) به صورت

$$\ln L(\alpha, \beta; X) = \ln k + n \ln \alpha + \sum_{j=۱}^{n-۱} \ln \gamma_j - \frac{\alpha}{\beta} u - v. \qquad (۲۸)$$

است، که در آن u و v در رابطه (۸) ارائه شده‌اند. با فرض معلوم بودن β برآورد ماکسیمم درستنایی α به صورت

$$\hat{\alpha}_{MLE} = n\beta[\sum_{j=۱}^{n-۱}(m_j + ۱)(e^{\beta x_j} - ۱) + k(e^{\beta x_n} - ۱)]^{-۱} \qquad (۲۹)$$

به‌دست آورده می‌شود. در حالتی که هر دو پارامتر α و β مجهول باشند، برآوردهای ماکسیمم درستنمایی α و β که به ترتیب با نمادهای $\hat{\alpha}_{MLE}$ و $\hat{\beta}_{MLE}$ نشان داده می‌شود به کمک معادلات

$$n\beta - \alpha \sum_{j=۱}^{n-۱}(m_j + ۱)(e^{\beta x_j} + k(e^{\beta x_n} - ۱) = ۰,$$

$$\alpha[\sum_{j=۱}^{n-۱}(m_j + ۱)x_j e^{\beta x_j} - ۱) + k x_n e^{\beta x_n}] + \sum_{i=۱}^{n} x_i = ۰,$$

محاسبه می‌شوند که با توجه به خاصیت پایایی، برآورد ماکسیمم درستنمایی تابع‌های قابلیت اعتماد و خطر یعنی $\hat{R}(t)_{MLE}$ و $\hat{H}(t)_{MLE}$ در طرح‌های سانسور فزآینده نوع دوم و مقادیر رکوردها به‌دست آورده می‌شود.

۴ روش تولید آماره‌های ترتیبی تعمیم‌یافته

در این بخش بر اساس روش کرامر (۲۰۰۳)، مراحل تولید آماره‌های ترتیبی تعمیم‌یافته برای توزیع گومپرتز با تابع چگالی ارائه شده در رابطه (۳) را بیان می‌کنیم.

- یک نمونه تصادفی r تایی از توزیع یکنواخت $(۰, ۱)$ تولید کرده و آن‌ها را $V_۱, \cdots, V_r$ نام‌گذاری می‌کنیم.

- به ازای $i = ۱, ۲, \cdots, r$، متغیرهای $U_i = V_i^{\frac{۱}{\gamma_i}}$ را تعریف می‌کنیم که دارای توزیع $beta(\gamma_i, ۱)$ هستند که γ_i در تعریف ۱ ارائه شده است.

- به ازای $r = ۱, \cdots, n$، $U_r^* = ۱ - U_۱ \cdots U_r$ تعریف می‌کنیم که U_r^* را آماره ترتیبی r ام توزیع یکنواخت $(۰, ۱)$ گویند (ابوالنین، ۲۰۱۰).

- به ازای $r = ۱, \cdots, n$، X_r^* که از رابطه $X_r^* = F^{-۱}(U_r^*)$ به‌دست آورده می‌شود، آماره ترتیبی r ام توزیع پیوسته F نام دارد که با در نظر گرفتن تابع توزیع ارائه شده در رابطه (۳) به جای F آماره ترتیبی r ام توزیع گومپرتز از رابطه زیر به‌دست می‌آید.

$$X_r^* = \frac{۱}{\beta} \log(۱ - \frac{\beta}{\alpha} \log(۱ - U_r^*)), \quad r = ۱, \cdots, n$$

۵ تحلیل داده‌های واقعی

برای ارزیابی برآوردهای ارائه شده در این مقاله، از دو مجموعه داده واقعی استفاده می‌شود. اولین مجموعه داده مربوط به فواصل زمانی زمین‌لرزه‌های متوالی (برحسب ماه) رخ داده در ایران از سال ۱۳۷۰ تا ۱۳۹۰ است که توسط طهماسبی و رضایی (۲۰۰۸) برای برازش توزیع نمایی-لگاریتمی و بابازاده و همکاران (۲۰۱۲) برای معرفی توزیع نمایی تعمیم‌یافته-لگاریتمی استفاده شد. البته اطلاعات دیگر این زمین‌لرزه‌ها

بر اساس تعداد کشته ها، تعداد مجروحان و موقعیت مکان رخداد بر اساس طول و عرض جغرافیایی در طهماسبی و رضایی (۲۰۰۸) گزارش شده است. این داده‌ها از پژوهشگاه بین المللی زلزله‌شناسی و مهندسی زلزله ایران[5] گرفته شده که برحسب فواصل زمانی زلزله ها(ماه) عبارتند از:

۲۳/۸ ۲/۳۳ ۰/۸ ۳۱/۴۷ ۳/۹۷ ۳۹/۵۷ ۴/۵۴
۹/۱۷ ۸/۸ ۵/۰۷ ۵/۵۳ ۱۲/۶ ۳۷/۵۳

به کمک این مجموعه داده‌ها یک طرح مقادیر رکوردها (مقادیر ۶ رکورد بالا) به صورت

۳۹/۵۷ ۳۷/۵۳ ۳۱/۴۷ ۲۳/۸۷ ۱۲/۶ ۹/۱۷

تهیه می‌شود. دومین مجموعه داده‌ها از لاولس (۱۹۸۲) استخراج شده اند، مربوط به مدت زمان بهبودی ۲۰ بیمار سرطان خون است که با مصرف یک دارو درمان شده اند. این مجموعه داده‌ها عبارتند از:

۱/۵۳۳ ۱/۵۰۹ ۱/۲۶۶ ۱/۱۶۹ ۱/۱۰۹ ۱/۰۳۴ ۱/۰۱۳
۲/۵۴۶ ۲/۳۴۴ ۲/۰۶۱ ۱/۹۶۵ ۱/۹۲۹ ۱/۷۱۶ ۱/۵۶۳
۵/۱۳۶ ۴/۱۱۸ ۳/۴۱۳ ۲/۹۵۱ ۲/۷۷۸ ۲/۶۲۶

بر اساس این داده‌ها طرح سانسور فزآینده نوع دوم با زمان‌های شکست ۳، ۵ و ۷ $(i = ۳, ۵, ۷)$ و تعداد واحدهای سانسور شده به ترتیب ۴، ۳ و ۶ یعنی $R_i = ۴, ۳, ۶$ تولید می شود که در جدول ۳ آورده شده است.

جدول ۳. نمونه سانسور شده فزآینده نوع دوم از مجموعه داده‌های سرطان خون

j	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
$X_{j,m,n}$	۱/۰۱۳	۱/۰۳۴	۱/۱۰۹	۱/۵۶۳	۱/۷۱۶	۲/۳۴۴	۲/۴۵۶
R_j	۰	۰	۴	۰	۳	۰	۶

[5]http://www.iiees.ac.ir/

حالت مجهول بودن پارامترهای مکان و شکل:

گام ۱: با توجه به رابطه (مارتز و والر، ۱۹۸۲)

$$R(t_i = X_{i,m,n}) = \frac{n - i + ۰/۶۲۵}{n + ۰/۲۵}, \quad i = ۱, ۲, \cdots, n \tag{۳۰}$$

و با انتخاب دو زمان t از طرح مقادیر رکوردها و سانسور فزآینده نوع دوم، دو مقدار متفاوت برای $R(t)$ به دست آورده می‌شود. برای طرح سانسور فزآینده نوع دوم با توجه به جدول ۳ به ازای دو مقدار مشخص $t_۲ = ۱/۰۳۴$ و $t_۴ = ۱/۵۶۳$ و به کمک رابطه (۳۰)، $R(t)$ های متناظر به ترتیب

$$R(t_i = X_{i,m,n}) = R(t_۲ = ۱/۰۳۴) = \frac{۷ - ۲ + ۰/۶۲۵}{۷ + ۰/۲۵} = ۰/۷۸$$
$$R(t_i = X_{i,m,n}) = r(t_۴ = ۱/۵۶۳) = \frac{۷ - ۴ + ۰/۶۲۵}{۷ + ۰/۲۵} = ۰/۵۰$$

برای مقادیر رکوردها به ازای دو مقدار مشخص $t_۳ = ۲۳/۸۷$ و $t_۶ = ۳۷/۵۳$ و به کمک رابطه (۳۰) به ترتیب

$$R(t_۲ = ۱۲/۶) = ۰/۶۸, \qquad R(t_۳ = ۲۳/۸۷) = ۰/۵۳$$

به‌دست آورده می‌شوند.

گام ۲: با توجه به روش سولند (۱۹۶۹) که در بخش ۲.۲ به آن اشاره شد، فرض می‌شود β دارای مقادیر ۰/۹، ۱/۰۰، ۱/۱۰، ۱/۲۰، ۱/۳۰، ۱/۴۰ و ۱/۵۰ با $\psi_j = \frac{۱}{۷}$ برای $j = ۱, \cdots, ۷$ باشد. مقادیر β با توجه به برآورد ماکسیمم درستنمایی آن در نظر گرفته شده که در طرح مقادیر رکوردها $\hat{\beta} = ۰/۰۹۰۷$ و در طرح سانسور فزآینده نوع دوم $\hat{\beta} = ۱/۶۷$ به‌دست آورده می‌شود. اکنون با توجه به $R(t)$های محاسبه شده درگام ۱ و با توجه به رابطه (۲۷) به ازای هر مقدار β مقادیر a_j و b_j و سپس به کمک روابط (۱۹) و (۲۲) مقادیر u_j، v_j و P_j در هر دو حالت طرح سانسور فزآینده نوع دوم و مقادیر رکوردها به‌دست آورده می‌شود که نتایج در جدول ۴ آورده شده است.

گام ۳: با توجه روابط (۲۳) تا (۲۶) و جدول ۴ و بخش ۳ برآوردهای بیزی و ماکسیمم درستنمایی برای طرح سانسور فزآینده نوع دوم و مقادیر رکوردها محاسبه می‌شود که در جدول ۵ آورده شده است.

جدول ۴. مقادیر ابرپارامترها و احتمال‌های پسین P_j برای دو مجموعه داده واقعی

نمونه‌ها	j	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
طرح سانسور	β_j	۰/۹	۰۰/۱	۱۰/۱	۲۰/۱	۳۰/۱	۴۰/۱	۵۰/۱
	a_j	۵۱۰/۰	۵۱۰/۰	۵۱۰/۰	۵۱۰/۰	۵۱۰/۰	۵۱۰/۰	۵۱۰/۰
	b_j	۶۵/۲	۶۴/۱	۲۲/۱	۱۴/۱	۰۷/۱	۹۶/۰	۸۵/۰
	v_j	۴۸/۲۸	۶۵/۳۱	۲۴/۳۳	۹۷/۳۷	۱۴/۴۱	۳۱/۴۴	۴۷/۴۷
	u_j	۴۴/۸۵	۲/۱۱۰	۳/۱۴۱	۴/۱۸۰	۷/۲۲۹	۹/۲۹۱	۴/۳۷۰
	P_j	۹۸۷۶۶/۰	۰۱۱۶۶/۰	۰۰۰۶۷/۰	۰۶e−۸۰/۱	۰۸e−۱۸/۲	۱۰e−۵۳/۲	۱۲e−۸۵/۲
مقادیر رکوردها	β_j	۹/۰	۰۰/۱	۱۰/۱	۲۰/۱	۳۰/۱	۴۰/۱	۵۰/۱
	a_j	۲۴/۰	۲۴/۰	۲۴/۰	۲۴/۰	۲۴/۰	۲۴/۰	۲۴/۰
	b_j	۰۵۹/۰	۰۶۸/۰	۰۷۷/۰	۰۹۶/۰	۱۴۲/۰	۱۹۶/۰	۱۸۷/۰
	u_j	۷/۲۹۲	۴/۳۵۳	۸/۴۰۰	۸/۴۱۹	۱/۵۱۹	۷/۵۴۱	۶/۵۹۹
	v_j	۶/۱۳۹	۲/۱۵۵	۷/۱۷۰	۳/۱۸۶	۷/۲۰۱	۳/۲۱۷	۸/۲۳۲
	P_j	۹۹۹۹۹/۰	۰۸e−۳۹/۹	۱۴e−۷۲/۱	۲۱e−۱۷/۳	۲۸e−۵۸/۲	۳۵e−۴۴/۵	۴۲e−۰۴/۸

جدول ۵. برآورد بیزی و ماکسیمم درستنمایی پارامترها تحت توزیع‌های پیشین π_1 و π_2

نمونه	پارامتر	$(.)_{Bay}^{\pi_1}$	$(.)_{Bay}^{\pi_2}$	$(.)_{MLE}$
طرح سانسور	α	۰۷۶۸/۰	۰۰۴۴/۰	۰۷۷۶/۰
	β	۹۰۱۳/۰	۲۰۷۸/۰	۶۶۳۲/۱
	$R(t)$	۸۸۶۸/۰	۱۴۳۸/۰	۹۸۷۸/۰
	$H(t)$	۰۰۱۷/۰	۰۰۵۸/۰	۰۰۱۲/۰
مقادیر رکوردها	α	۰۲۱۶/۰	۰۰۲۶/۰	۰۰۵/۰
	β	۹۰۰۵/۰	۲۱۱۷/۰	۰۹۰۷/۰
	$R(t)$	۶۵۷۱/۰	۱۰۰۸/۰	۹۸۷۳/۰
	$H(t)$	۰۴۵۶/۰	۰۱۴۵/۰	۰۰۶۹/۰

جدول ۶. نمونه سانسور شده فزآینده نوع دوم از داده‌های شبیه‌سازی شده

j	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸
$X_{j,m,n}$	۰۰۸/۰	۰۱۴/۰	۰۷۴/۰	۰۹۰/۰	۱۱۸/۰	۵۲۸/۰	۷۰۱/۰	۸۰۹/۰
R_j	۲	۰	۰	۳	۰	۰	۲	۰

۶ مطالعه شبیه‌سازی

در این بخش با توجه به رابطه (۲) داده‌های شبیه‌سازی تولید شده و برآوردهای بیزی و ماکسیمم درستنمایی پارامترها در حالت مجهول بودن α و β و در حالت معلوم بودن β به‌دست آورده می‌شود.

الف- حالت مجهول بودن پارامترهای α و β :

گام ۱: از توزیع گومپرتز با پارامترهای $\alpha = ۲$ و $\beta = ۱/۵$ با توجه به رابطه (۲) ابتدا ۱۵ آماره ترتیبی تعمیم‌یافته تولید شده و سپس یک طرح سانسور شده فزآینده نوع دوم با پارامترهای $m_i = R_i$ برای $i = ۱, \cdots, m-۱$ و $m_i = ۰$ برای $i = m, \cdots, n-۱$ و $k = R_m + ۱$ با توجه به طرح سانسور زیر تهیه می‌شود که در جدول ۶ آورده شده است.

$$m = ۸, R_۱ = ۰, R_۲ = ۲, R_۳ = ۰, R_۴ = ۰, R_۵ = ۳, R_۶ = ۰, R_۷ = ۰, R_۸ = ۲$$

گام ۲: از توزیع گومپرتز با پارامترهای $\alpha = ۲$ و $\beta = ۰/۰۲$ با توجه به رابطه (۲) پس از تولید ۲۰ آماره ترتیبی تعمیم‌یافته یک طرح مقادیر رکورد بالای ۸ تایی با پارامترهای $m_i = -۱$ برای $i = ۱, \cdots, n-۱$ و $k = ۱$ به صورت زیر تولید می‌شود.

$$۰/۴۲۵ \quad ۰/۴۹۸ \quad ۰/۴۹۹ \quad ۰/۵۹۱ \quad ۰/۶۴۵ \quad ۰/۷۲۱ \quad ۰/۸۶۳ \quad ۱/۶۹$$

گام ۳: با استفاده از رابطه (۲۷) برای هر β_j، مقادیر (a_j, b_j) برای طرح سانسور فزآینده نوع دوم به ازای دو مقدار $R(t_۲ = ۰/۰۱۴) = ۰/۹۱$ و $R(t_۳ = ۰/۰۷۴) = ۰/۷۷$ و برای طرح مقادیر رکوردها به ازای دو مقدار $R(t_۷ = ۰/۸۶۳) = ۰/۲$ و $R(t_۸ = ۱/۶۹) = ۰/۷۷$ به دست آورده می‌شود که با دیگر اطلاعات لازم در جدول ۷ آورده شده است.

گام ۴: با استفاده از نتایج بخش های ۲.۲ و ۳ و جدول ۷ برآوردهای بیزی و ماکسیمم درستنمایی پارامترها به کمک طرح‌های سانسور فزآینده نوع دوم و مقادیر رکوردها به دست آورده شده که نتایج در جدول ۸ آرائه شده است.

ب- حالت معلوم بودن پارامتر β :

گام ۱: $\beta = ۱/۵, a = ۳, b = ۲, t = ۴$ در نظر گرفته می‌شود.

گام ۲: از توزیع گومپرتز با پارامترهای $\alpha = ۲/۵$ و $\beta = ۱/۵$ با انتخاب پارامترهای $m_i = R_i$ برای

جدول ۷. مقادیر ابرپارامترها و احتمال‌های پسین P_j برای داده‌های شبیه‌سازی شده

نمونه‌ها	j	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸
	β_j	۶۵/۰	۷۰/۰	۷۵/۰	۸۰/۰	۸۵/۰	۹۰/۰	۹۵/۰	۰۰/۱
	a_j	۱۴۷/۰	۱۴۷/۰	۱۴۷/۰	۱۴۷/۰	۱۴۷/۰	۱۴۷/۰	۱۴۷/۰	۱۴۷/۰
طرح	b_j	۲۴/۰	۰۲۲/۰	۰۲۱/۰	۰۱۹/۰	۰۱۸/۰	۰۱۷/۰	۰۱۶/۰	۱۵/۰
سانسور	u_j	۵۲/۳	۸۶/۳	۲۱/۴	۵۸/۴	۹۵/۴	۳۴/۵	۷۵/۵	۱۷/۶
	v_j	۵۲/۱	۶۳/۱	۷۵/۱	۸۷/۱	۹۹/۱	۱۰/۲	۲۲/۲	۳۴/۲
	P_j	۲۶۹۳/۰	۲۰۶۸/۰	۱۵۷/۰	۱۱۷/۰	۰۹۰/۰	۰۶۸/۰	۰۵۲/۰	۰۴۱/۰
	β_j	۳۵/۰	۴۵/۰	۵۵/۰	۶۵/۰	۷۵/۰	۸۵/۰	۹۵/۰	۰۵/۱
	a_j	۹۳۲/۰	۸۶۷/۰	۸۶۷/۰	۸۶۷/۰	۸۶۷/۰	۸۶۷/۰	۸۶۷/۰	۸۶۷/۰
مقادیر	b_j	۸۷۷/۰	۵۶۳/۰	۴۶۱/۰	۳۹۰/۰	۳۳۸/۰	۲۹۸/۰	۲۶۷/۰	۲۴۲/۰
رکوردها	u_j	۸۰۷/۰	۱۴/۱	۵۳/۱	۹۹/۱	۵۵/۲	۲۱/۳	۹۸/۳	۸۹/۴
	v_j	۰۷/۲	۶۷/۲	۲۷/۳	۸۶/۳	۴۵/۴	۰۴/۵	۶۴/۵	۲۳/۶
	P_j	۶۲۱/۰	۲۶۷/۰	۰۸۲/۰	۰۲۳/۰	۰۰۵۴/۰	۰۰۱۳/۰	۰۴e−۸/۲	۰۵e−۲/۶

جدول ۸. برآورد بیزی و ماکسیمم درستنمایی پارامترها تحت توزیع‌های پیشین π_1 و π_2 برای داده‌های شبیه‌سازی شده

نمونه	پارامتر	$(.)^{\pi_1}_{Bay}$	$(.)^{\pi_2}_{Bay}$	$(.)_{MLE}$
	α	۴۴۱/۱	۳۲۹۵/۰	۸۰۱/۳
	β	۷۵۸۵/۰	۸۸۹۳/۰	۳۵۴۶/۰
طرح سانسور	$R(t)$	۰۰۱۳/۰	۰۰۲۱/۰	۰۰۴۳/۰
	$H(t)$	۶۶۳/۶	۷۱۹/۲	۸۷۲/۱
	α	۸۰۷/۲	۵۳۳/۲	۶۱۹۳/۰
	β	۴۰۳۰/۰	۹۰۸۵/۰	۳۱۱/۱
مقادیر رکوردها	$R(t)$	۰۰۱۲/۰	۰۰۰۳/۰	۰۰۲۴/۰
	$H(t)$	۳۵۸/۸	۶۶/۱۳	۵۲۳/۶

جدول ۹. ریسک برآوردهای α، $R(t)$ و $H(t)$ تحت توزیع‌های پیشین $\pi_۱$ و $\pi_۲$ (داخل پرانتز) در طرح سانسور فزآینده نوع دوم برای $\beta = ۱/۵$ و $t = ۴$ بر اساس داده‌های شبیه‌سازی شده

(n,m)	$(R_۱,\cdots,R_m)$	برآورد بیزی $R(\hat{\alpha})$	برآورد بیزی $R(\hat{R}(t))$	برآورد بیزی $R(\hat{H}(t))$	برآورد ماکسیمم درستنمایی $R(\hat{\alpha})$	برآورد ماکسیمم درستنمایی $R(\hat{R}(t))$	برآورد ماکسیمم درستنمایی $R(\hat{H}(t))$
(۵،۱۰)	(۰،۰،۰،۳،۲)	۰/۱۰۰۵(۰/۰۷۷)	۰/۱۱۳۳(۰/۰۲۱)	۲/۰۲۰۵(۳۱/۱)	۳۴۵۴/۰	$۱/۹ \times ۱۰^{-۵}$	۹۳۸/۶
(۵،۱۰)	(۱,⋯,۱)	۰/۰۹۲۱(۰/۰۸۲)	۰/۱۵۴۲(۰/۰۳۲)	۱/۸۴۹(۳۳/۲)	۳۱۳۷/۰	$۱/۸ \times ۱۰^{-۵}$	۳۰۰/۶
(۵،۱۰)	(۰,⋯,۰,۵)	۰/۰۷۹۲(۰/۰۵۲)	۰/۲۲۳۲(۰/۰۶۹)	۱/۵۹۱(۲۰/۹)	۳۳۴۱/۰	$۲/۶ \times ۱۰^{-۵}$	۷۱۱/۶
(۱۰،۱۵)	(۵,۰,⋯,۰)	۰/۰۶۸۰(۰/۰۸۲)	۰/۱۵۰۲(۰/۰۱۸)	۱/۳۶۶(۳۲/۹)	۲۴۵۴/۰	$۱/۲ \times ۱۰^{-۵}$	۹۲۹/۴
(۱۰،۱۵)	(۰,⋯,۰,۵)	۰/۰۵۳۸(۰/۰۶۳)	۰/۲۱۹۶(۰/۰۴۷)	۱/۰۸۱(۲۵/۴)	۲۵۴۸/۰	$۱/۴ \times ۱۰^{-۵}$	۱۱۷/۵
(۱۰،۱۵)	(۲,۲,۰,⋯,۰,۱)	۰/۰۶۳۳(۰/۰۷۹)	۰/۱۶۶۳(۰/۰۲۸)	۱/۲۷۱(۳۱/۹)	۲۴۶۹/۰	$۱/۳ \times ۱۰^{-۵}$	۹۵۹/۴
(۱۵،۲۵)	(۱۰,۰⋯,۰)	۰/۰۳۴۵(۰۰۶۷)	۰/۱۴۴۰(۰/۰۱۵)	۰/۶۴۹۱(۲۶/۷)	۱۱۸۱/۰	$۴/۹ \times ۱۰^{-۵}$	۶۵۵/۳
(۱۵،۲۵)	(۰,⋯,۰,۱۰)	۰/۰۲۲۸(۰/۰۴۵)	۰/۱۶۷۵(۰/۰۶۹)	۰/۴۵۹۰(۱۸/۲)	۱۸۳۴/۰	$۵/۲ \times ۱۰^{-۶}$	۶۸۴/۳
(۱۵،۲۵)	(۲,۵,۰,⋯,۰,۳)	۰/۰۳۱۴(۰/۰۶۲)	۰/۱۷۹۰(۰/۰۴۲)	۰/۱۶۳۱(۲۵/۱)	۱۸۰۷/۰	$۵/۱ \times ۱۰^{-۶}$	۶۳۱/۳

جدول ۱۰. ریسک برآوردهای ماکسیمم درستنمایی و بیزی α، $R(t)$ و $H(t)$ تحت توزیع‌های پیشین π_1 و π_2 (داخل پرانتز) در طرح مقادیر رکورد بالا برای $\beta = 1/5$ و $t = 4$ بر اساس داده‌های شبیه‌سازی شده

	برآورد بیزی			برآورد ماکسیمم درستنمایی		
n	$R(\hat{\alpha})$	$R(\hat{R}(t))$	$R(\hat{H}(t))$	$R(\hat{\alpha})$	$R(\hat{R}(t))$	$R(\hat{H}(t))$
۷	۰/۱۹۱۴(۰/۱۶۱)	۰/۲۰۸۴(۰/۰۴۵)	۴/۹۹۸(۶۴/۸)	۰/۴۲۵۴	$۴/۴ \times ۱۰^{-۵}$	۵۴۴/۸
۱۰	۰/۲۰۰۷(۰/۱۷۴)	۰/۲۰۸۹(۰/۰۴۲)	۴/۰۳۳(۷۰/۱)	۳۳۱۰/۰	$۲/۳ \times ۱۰^{-۵}$	۶۵۰/۶
۱۵	۰/۲۱۶۲(۰/۱۹۳)	۰/۲۱۲۵(۰/۰۴۱)	۳/۱۳۶(۷۷/۸)	۲۵۲۸/۰	$۱/۱ \times ۱۰^{-۵}$	۰۷۸/۵
۲۵	۰/۲۳۲۳(۰/۲۲۳)	۰/۲۰۵۶(۰/۰۳۶)	۲/۱۶۶(۹۰/۱)	۱۸۴۰/۰	$۵/۳ \times ۱۰^{-۶}$	۶۹۶/۳
۵۰	۰/۲۶۶۵(۰/۲۶۱)	۰/۱۹۶۰(۰/۰۳۳)	۱/۳۱۳(۱۰۵/۳)	۱۲۴۷/۰	۲×۱۰^{-۶}	۵۰۶/۲

جدول ۱۱. برآورد ماکسیمم درستنمایی و برآورد بیزی تحت توزیع پیشین π_1 پارامترهای توزیع‌های گومپرتز، وایبول و لوماکس بر اساس مجموعه داده‌های واقعی

		برآورد ماکسیمم درستنمایی				برآورد بیزی			
توزیع	طرح	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{R(t)}$	$\hat{H(t)}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{R(t)}$	$\hat{H(t)}$
توزیع گومپرتز	۱	۰۷۷۶/۰	۶۶۳۲/۱	۹۸۷۸/۰	۰۰۱۲/۰	۰۷۶۸/۰	۹۰۱۳/۰	۸۸۶۸/۰	۰۰۱۷/۰
	۲	۰۰۵۸/۰	۰۹۰۷/۰	۹۸۷۳/۰	۰۰۶۹/۰	۰۲۱۶/۰	۹۰۰۵/۰	۶۵۷۱/۰	۰۴۶۵/۰
توزیع وایبول	۱	۳۴۶/۶	۱۴۲/۳	۲۴۸۸/۰	۱۸۵/۲	۳۸/۱۷	۰۲۹۶/۰	۷۶۶۱/۰	۰۴/۲۴
	۲	۲۶۵۰/۰	۰۳۰۷/۰	۷۱۵۲/۰	۱۰۷۱/۰	۶۳/۸۹	۳۸۶/۱	۴۸۷۳/۰	۷۷/۲۲
توزیع لوماکس	۱	۶/۴۳۷۹	۳/۷۰۳۰	۶۲۲۹/۰	۲۸۷۷/۰	۰۸۵۲/۰	۹۰۰۳/۰	۸۶۶۷/۰	۰۱۷۳/۰
	۲	۷۶۰/۱۲	۲۹۸۱/۰	۰۰۳۵/۰	۲۵۸/۹	۰۰۳۴/۰	۱۴۹۴/۰	۵۵۶۴/۰	۰۷۲۷/۰

$i = 1, \cdots, m-1$ و $m_i = 0$ برای $i = m, \cdots, n-1$ و $k = R_m + 1$ برای n و m های متفاوت بر اساس رابطه (۳) نمونه‌های سانسور فزآینده نوع دوم با n ها و m های متفاوت تولید می‌شود.

گام ۳ : از توزیع گومپرتز با پارامترهای $\alpha = 2/5$ و $\beta = 1/5$ با انتخاب پارامترهای $m_i = -1$ برای $i = 1, \cdots, n-1$ و $k = 1$ نمونه‌های مقادیر رکورد بالا تولید می‌شود.

گام ۴ : ریسک برآوردهای بیزی و ماکسیمم درستنمایی بخش‌های ۲.۲ و ۳ تحت تابع زیان توان دوم خطا نسبت به توزیع پیشین π_1 به‌دست آورده می‌شود.

گام ۵: گام‌های دوم تا چهارم ۱۰۰۰۰ بار تکرار شده و میانگین ریسک‌های تکرارها در هر طرح محاسبه می‌شود که نتایج در جدول‌های ۹ و ۱۰ نشان داده شده است.

۱.۶ تحلیل حساسیت درباره ابرپارامترها

برآوردهای بیزی و ریسک‌های پسین بیزی تحت تاثیر تغییرات ابر پارامترهای a و b هستند. با توجه به جدول‌های ۱ و ۲ نتیجه گرفته می‌شود که با ثابت ماندن a و بزرگ شدن b، ریسک پسین بیز برآوردهای بیزی α، β، $R(t)$ و $H(t)$ تحت توزیع‌های پیشین π_3 و π_4 کوچک‌تر می‌شوند. اما با ثابت شدن b

و زیاد شدن a به دلیل بزرگ شدن ریسک پسین بیزی، برآوردهای مطلوبی برای α، β، $R(t)$ و $H(t)$ به‌دست آورده نمی‌شود. همچنین افزایش همزمان a و b باعث کاهش ریسک بیز پسین برآوردگرهای اشاره شده می‌شود. با بررسی جدول‌های ۴ و ۷، نتایج مشابهی برای ابر پارامترهای a_j و b_j نسبت به توزیع پسین داده شده در رابطه (۲۲) به‌دست آورده می‌شود.

۲.۶ مقایسه توزیع‌ها

در این بخش با استفاده از داده‌های بخش ۴.۱ برآوردهای بیزی و ماکسیمم درستنمایی پارامترهای توزیع گومپرتز با برآوردهای بیزی و ماکسیمم درستنمایی پارامترهای توزیع‌های وایبول و لوماکس مقایسه می‌شود که نتایج در جدول ۱۱ آمده است. در این جدول منظور از طرح ۱ همان طرح سانسور فزآینده نوع دوم و منظور از طرح ۲ همان طرح مقادیر رکوردها است. همچنین تابع چگالی احتمال توزیع‌های وایبول و لوماکس به ترتیب به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود.

$$f(x;\alpha,\beta)=\frac{\beta}{\alpha}x^{\beta-۱}e^{-\left(\frac{x^\beta}{\alpha}\right)},\quad x>۰,\alpha,\beta>۰,$$
$$f(x;\alpha,\beta)=\frac{\alpha}{\beta}\left(۱+\frac{x}{\beta}\right)^{-(\alpha+۱)},\quad x>۰,\alpha,\beta>۰.$$

بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله بر اساس آماره‌های ترتیبی تعمیم‌یافته برآوردهای ماکسیمم درستنمایی و بیزی پارامترهای توزیع گومپرتز و تابع‌های قابلیت اعتماد و خطر آن برای طرح‌های سانسور فزآینده نوع دوم و مقادیر رکوردها به طور مجزا به‌دست آورده شد که البته برآوردهای بیزی براساس تابع زیان توان دوم خطا محاسبه شده‌اند. همچنین با استفاده از دو مجموعه داده‌های واقعی و داده‌های شبیه‌سازی شده، برآوردگرهای محاسبه شده با یکدیگر و با برآوردهای مشابه آن در توزیع‌های وایبول و لوماکس مقایسه شدند. با توجه به جدول‌های ۵ و ۸، برآورد ماکسیمم درستنمایی در هر دو طرح سانسور شده فزآینده نوع دوم و مقادیر رکورد بالا بهتر از برآوردهای بیزی است. با توجه به جدول‌های ۵ و ۸، برآورد های بیزی و ماکسیمم درستنمایی طرح سانسور فزآینده نوع دوم بهتر از برآوردهای مشابه در طرح مقادیر رکوردی است. با توجه به جدول ۵، برآوردهای بیزی نسبت به توزیع پیشین $\pi_۱$ بهتر از برآوردهای بیزی نسبت به توزیع پیشین $\pi_۲$ در طرح سانسور فزآینده نوع دوم و برآوردهای بیزی نسبت به توزیع پیشین $\pi_۲$ بهتر از برآوردهای بیزی نسبت به توزیع پیشین $\pi_۱$

در طرح مقادیر رکورد بالا هستند. اما جدول ۸ نشان می‌دهد که برآوردهای بیزی نسبت به توزیع پیشین $\pi_۲$ بهتر از برآوردهای بیزی نسبت به توزیع پیشین $\pi_۱$ در طرح سانسور شده فزآینده نوع دوم و برآوردهای بیزی نسبت به توزیع پیشین $\pi_۱$ بهتر از برآوردهای بیزی نسبت به توزیع پیشین $\pi_۲$ در طرح مقادیر رکورد بالا است. جدول‌های ۱ و ۲ نشان دهنده آن است که برآوردهای بیزی نسبت به توزیع پیشین $\pi_۳$ بهتر از برآوردهای بیزی نسبت به توزیع پیشین $\pi_۴$ هستند. جدول‌های ۹ و ۱۰ بیانگر آن است که برآوردهای بیزی بر اساس توزیع پیشین $\pi_۱$ بهتر از برآوردهای ماکسیمم درستنمایی در طرح‌های سانسور فزآینده نوع دوم و مقادیر رکورد بالا هستند. همچنین در طرح مقادیر رکورد بالا، برآوردهای بیزی α و $R(t)$ نسبت به توزیع پیشین $\pi_۲$ از برآوردهای بیزی متناظرشان نسبت به توزیع پیشین $\pi_۱$ و در طرح سانسور فزآینده نوع دوم، برآورد بیزی $R(t)$ بر اساس توزیع پیشین $\pi_۲$ از برآورد متناظرش بر اساس توزیع پیشین $\pi_۱$ بهتر هستند. در طرح سانسور فزآینده نوع دوم با افزایش حجم نمونه برآورد بیزی α بر اساس توزیع پیشین $\pi_۲$ بهتر از برآورد بیزی متناظرش بر اساس توزیع پیشین $\pi_۱$ است. جدول ۱۱ بیانگر آن است که برآوردهای بیزی و ماکسیمم درستنمایی پارامترهای توزیع گومپرتز بهتر از برآوردهای مشابه در توزیع‌های وایبول و لوماکس است.

تقدیر و تشکر

نویسند مقاله برخود لازم می‌داند از زحمات سردبیر، داوران و ویراستار محترم مجله درتمام مراحل مربوط به این مقاله تشکر کند.

مراجع

AL-Hussaini, E. K. and Ahmad, A. A. (2003). On Bayesian Predictive Distributions of Generalized Order Statistics, *Metrika*, **57**, 165-176.

Aboeleneen, Z. A. (2007). Fisher Information in Generalized Order Statistics and their Concomitants, *Journal of Statistical Theory and Applications*, **6**,156-173.

Aboeleneen, Z. A. (2008), Fisher Information in Progressive Type II Censored Samples, *Communications in Statatistics-Theory and Methods*, **37**, 1-10.

Aboeleneen, Z. A. (2010). Inference for Weibull Distribution under Generalized Order Statistics, *Mathematics and Computers in Simulation*, **81**, 26-36.

Balakrishnan, N., Kannan, N., Lin, C. T. and Wu, S. J. S. (2004). Inference for the Extreme Value Distribution under Progressive Type-II Censoring, *Journal of Statistical Computation and Simulation*, **74**, 25-45.

Babanezhad, M., Sadeghi Moghadam, M. and Yaghmaei, F. (2012). Inference for Lomax Distribution under Generalized Order Statistics, *Applied Mathematical Sciences*, **6**, 5241 - 5251.

Bemmaor, A. C. and Glady, N. (2012), Modeling Purchasing Behavior with Sudden Death. A Flaxibe Customre Lifetime Model, *Managment Science*, **58**, 1012-1021.

Babazadeh, M., Rezaee, S. and Abdi, M. (2012). A New Generalized Exponential-Logarithmic Lifetime Distribution, *Journal of Statistical Sciences*, **6**, 1-20.

Cramer, E. (2003), *Contributions to Generalized Order Statistics*, Habililationsschrift, Reprint, University of Oldenburg.

Economos, A. C. (1982). Rate of again, Rate of dying and the Mechansim of Mortality, *Archives of Gerontology and Geriatrics*, **1**, 46-51.

Fernandez, A. J. (2004). On Estimating Exponential Parameters with General type II Progressive Censoring, *Journal of Statistical Planning and Inference*, **121**, 135-145.

Gavrilov, L. and Gavrilova, N. (1991). The Biology of Life Span: A Quantitative approach. Chur:Harwood.

Gompertz, B. (1825). On the Nature of the Function Expresive of the Low of Human Mortality and on the New Mode of determining the value of Life Contingencies, *Philosophical Transactions of the Royal Society American*, **115**, 513-580.

Hossain, A. M. and Zimmer, W. J. (2003). Comparison of Estimation Methods for Weibull Parameters: Complete and Censored Samples, *Journal of Statistical Computation and Simulation*, **73**, 145-153.

Habibullah, M. and Ahsanullah, M. (2000). Estimation of Parameters of a Pareto Distribution by Generalized Order Statistics, *Communication in Statistics-Theory and Methods*, **29**, 1597-1609.

Ismail, A. A. (2010). Bayes Estimation of Gompertz Parameters and Acceleration Factor under Partialy Accelerated Life Tests wtth Type-1 Censoring, *Journal of Statistical Computation and Simulation*, **80**, 1253-1264.

Jaheen, Z. F. (2004). Emprical Bayes Analysis of Recod Statistics based on Linex and Quadratic Loss Function, *Computers and Mathematics with Applications*, **47**, 947-954.

Jaheen, Z. F. (2003), A Bayesian Analysis of Record Statistics from the Gompertz Model, *Appied Mathematical and Computation*, **145**, 307-320.

Johnson, N. L., Kotz, S. and Balakrishnan, N. (1995). *Countinues Univariate Distributions*, Vol.2, 2 edn, John Wiley & Sons, New York.

Kamps, U. (1995). *A Concept of Generalized Order Statistics*, Teubner, Stuttgart.

Lenart, A. (2014). The Moments of the Gompertz Distribution and Maximum Liklihood of its, *Scandinavian Actural Journal*, **3**, 255-277.

Lawless, J. F. (1982), *Statistical Models and Methods for Lifetime data*, Wiley, New York.

Malinowska, I., Pawlas, P. and Szynal, D. (2006). Estimation of Location and Scale Parameters for the Burr XII Distribution Using Generalized Order Statistics, *Linear Algebra Application*, **417**, 150-162.

Martz, H. F. and Waller, R. A. (1982). *Bayesian reliability analysis*, NewYork: Wiley.

Nigm, E. M. and Aboeleneen, Z. A. (2007). Estimation of the Parameters of Inverse Weibull Distribution with Progressive Censoring Data, *Journal of Applied Statatistical Science*, **15**, 39-47.

Ohishi, K., Okamura, H. and Dohi, T. (2009). Gompertz Software Reliability Model: Estimation Algorithm and Emprical Validation, *Journal of System and Software*, **82**, 535-543.

Soland, R. M. (1969). Bayesian Analysis of the Weibull Process with Unknown Scale and Shape Parameters, *IEEE Transactions on Reliability*, **18**, 181-184.

Soliman, A. A., Abd Ellah, A. H. and Sultan, K. S. (2006). Comparison of Estimates Using Record Statistics from Weibull Model: Bayesian and non-Bayesian approaches, *Computational Statistics and Data Analysis*, **51**, 2065-2077.

Shuo, J. W., Dar, H. C. and Shyi, T. C. (2006). Bayesian Inference for Rayleigh Distribution under Progressive Censored Sample, *Applied Stochastic Models in Business and Industry*, **22**, 269-279.

Soliman, A. A. and Al-Aboud, M. (2008). Fahd Bayesian Inference Using Record values from Rayleigh Model with Application, *European Journal of Operational Research*, **185**, 659-672.

Tahmasabi, R. and Rezaie, S. (2008). A Two-Parameter Lifetime Distribution with Decreasing Failure Rate, *Computational Statistics and Data Analysis*, **52**, 3889-3901.

Wetterstrand, W. (1981). Parametrics Models for Life Insurance Data: Gompertz's Law Over Time, *Transactions of the Society of Actuaries*, **33**, 159-175.

Willems, W. and Koppelaar, H. (2000), Knowledge Elicitation of Gompertz law of Mortality, *Scandinavian Actuanal Journal*, 2, 168-179.