



Estimation of Conditional Expected Shortfall based on Copula function and ARMA-GARCH time series Models with Generalized Error Distribution

Alizadeh, F.¹, Amini, M.¹, Mohtashami borzadaran, Gh.¹, Tabasi, S.H.²

¹Department of Statistics, Ferdowsi University of Mashhad , Mashhad, Iran.

²Department of Computer science, Ferdowsi University of Mashhad , Mashhad, Iran.

Corresponding author: M. Amini, m-amini@um.ac.ir

Received: 22/2/2025 Revised: 8/11/2025 Accepted and Published Online: 9/11/2025.

Introduction

Events at a financial institution can affect the economic systems of other institutions. For this reason, Systemic Risk —the impact of a crisis in one institution on the risk levels of other institutions or the entire financial system—has been the focus of risk analysts. The most important methods for measuring it are the Conditional Value-at-Risk (CoVaR) and the Conditional Expected Shortfall (CoES). If there is dependence between the returns of two financial institutions, Copula functions can be used to model it. Since return time series often exhibit unstable fluctuations, ARMA-GARCH models can be used to model volatility. Therefore, Copula functions and ARMA-GARCH time series models with different error distributions can be used to estimate these criteria.

Material and Methods

The estimation of Conditional Expected Shortfall consists of several steps. First, we determine the time-series model for financial institutions using the rugarch and TSA packages in R. Then, we examine the structure of the dependence between the returns of financial institutions and obtain the appropriate copula function using VineCopula and copula packages. Finally, based on the estimation of conditional value at risk, we estimate the Conditional Expected Shortfall.

Results and Discussion

In this paper, we evaluate the CoVaR for $BB1$, $BB6$, $BB7$, and $BB8$ Copula functions and, based on this, estimate the CoES in ARMA-GARCH models with GED errors. Finally, these two criteria are calculated with the returns of Bank Tejarat and Bank Mellat.

Conclusion

In this paper, essential methods for examining systemic risk, namely Conditional Value at Risk and Conditional Expected Shortfall, were studied based on Archimedean Copula functions $BB1$, $BB6$, $BB7$, and $BB8$ and ARMA-GARCH time series models with Generalized Error Distribution. Finally, this criterion was calculated for Bank Mellat if Bank Tejarat is in a critical situation. Finally, this criterion was calculated for Bank Mellat, assuming Bank Tejarat is in a crucial situation. To examine the dependence structure between these two returns and to predict Bank Mellat's future volatility, different Copula functions were used, and GARCH and ARMA-GARCH time series models were employed. The results indicated that the copula $BB8$ and the time series $AR(1) - GARCH(1, 1)$ provide the best modeling.

Keywords: Systemic risk, Conditional Value at Risk, Conditional ES, Copula Function.

Mathematics Subject Classification (2020): 39B52, 34K20.



©The Author(s). The Publisher is Iranian Statistical Society.

This is an open access article distributed under the terms and conditions of [CC BY-NC 4.0](https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/)

برآورد کمبود مورد انتظار شرطی بر اساس تابع مفصل و مدل‌های سری زمانی آرما-گارچ با توزیع مانده‌های خطای تعمیم‌یافته

فاطمه علیزاده^۱، محمد امینی^۱، غلامرضا محتشمی برزادران^۱ و سیدهاشم طبسی^۲

^۱گروه آمار، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه فردوسی مشهد

^۲گروه علوم کامپیوتر، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه فردوسی مشهد

نویسنده مسئول: محمد امینی، m-amini@um.ac.ir

تاریخ دریافت: ۱۴۰۳/۱۲/۴ تاریخ بازنگری: ۱۴۰۴/۸/۱۷ تاریخ پذیرش و انتشار: ۱۴۰۴/۸/۱۸

چکیده: رویدادهای یک نهاد مالی می‌توانند بر سیستم مالی سایر نهادها اثر بگذارند، به همین دلیل ریسک سیستمی که تاثیر بحران یک نهاد بر سایر نهادها را بررسی می‌کند، مورد توجه تحلیل‌گران ریسک قرار دارد و از مهم‌ترین روش‌های اندازه‌گیری آن معیارهای ارزش در معرض خطر شرطی و کمبود مورد انتظار شرطی است. اگر بین بازدهی دو نهاد مالی وابستگی وجود داشته باشد، می‌توان از توابع مفصل برای بررسی ساختار وابستگی بین آن‌ها استفاده کرد. از آنجا که داده‌های بازدهی اکثر اوقات مشاهده می‌شوند در طی زمان دارای نوسانات ناپایدارند، می‌توان از مدل‌های سری زمانی آرما-گارچ برای مدل‌بندی تغییرپذیری نیز استفاده کرد. در این مقاله ارزش در معرض خطر شرطی برای چهار تابع مفصل ارزیابی سپس بر اساس آن کمبود مورد انتظار شرطی در مدل‌های آرما-گارچ دارای توزیع مانده‌های خطای تعمیم‌یافته، برآورد شده است. سپس این دو معیار با بازدهی دو بانک تجارت و ملت محاسبه می‌شود.

واژه‌های کلیدی: ریسک سیستمی، ارزش در معرض خطر شرطی، کمبود مورد انتظار شرطی، تابع مفصل.

کد موضوع بندی ریاضی (۲۰۲۰): 34K20، 39B52.



©نویسندگان). ناشر انجمن آمار ایران است.

این مقاله با دسترسی آزاد تحت شرایط و ضوابط (CC BY-NC 4.0) توزیع شده است.

۱ مقدمه

از دهه ۱۹۷۰ با افزایش روز افزون ریسک در جنبه‌های مختلف تصمیم‌گیری‌های مالی، اندازه‌گیری ریسک مورد توجه مدیران مالی قرار گرفته است. تاکنون محققان معیارهای گوناگونی برای اندازه‌گیری ریسک معرفی کرده‌اند. یکی از مهم‌ترین این معیارها، ارزش در معرض خطر^۱ (Var) است که ابتدا توسط تیل گلدیمن در سال ۱۹۸۰ ارائه شد و سپس در اواخر دهه ۱۹۸۰ توسط موسسه جی-پی مورگان توسعه یافت. این معیار نمایانگر حداکثر زیان مورد انتظار در یک سطح احتمال معین α و در طول یک دوره زمانی مشخص است که با نماد Var نمایش داده می‌شود و به این صورت تعریف می‌شود که اگر X متغیر بازدهی با تابع توزیع F_X باشد، آنگاه

$$Var_{\alpha}(X) = F_X^{-1}(\alpha) = \inf\{x; F_X(x) \geq \alpha\} ; \alpha \in (0, 1).$$

از آنجایی که ارزش در معرض خطر هیچ گونه اطلاعاتی راجع به دم توزیع نمی‌دهد و زیان‌های خیلی بزرگ را در نظر نمی‌گیرد، معیار دیگری به نام کمبود مورد انتظار^۲ توسط آسربی و همکاران (۲۰۰۱) معرفی شد که این نقطه ضعف را پوشش می‌دهد. بنابراین عملکرد آن نسبت به ارزش در معرض خطر در سنجش ریسک دقیق‌تر است. این معیار را با نماد ES نشان داده و متوسط زیان‌ها در بدترین حالات را با سطح احتمال معین α محاسبه می‌کند، یعنی

$$ES_{\alpha}(X) = E(X|X \leq Var_{\alpha}(X)). \quad (۱)$$

برآورد ارزش در معرض خطر نیازمند مدل‌بندی نوساناتی است که اغلب به صورت واریانس تعریف می‌شود. یکی از ساده‌ترین مدل‌ها برای مدل‌بندی تغییرپذیری که توسط بولرسلو (۱۹۸۶) و تیلور (۱۹۸۶) پیشنهاد شد، مدل ناهم واریانسی شرطی اتو رگرسیون تعمیم یافته ($GARCH$) است. در یک مدل $GARCH(p, q)$ سری زمانی $\{X_t, t \in \{1, 2, 3, \dots\}\}$ ، به صورت

$$X_t = \mu + a_t; \quad a_t = \sigma_t \varepsilon_t, \\ \sigma_t^2 = \omega + \alpha_1 a_{t-1}^2 + \dots + \alpha_q a_{t-q}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 + \dots + \beta_p \sigma_{t-p}^2,$$

تولید می‌شود، که در آن σ_t^2 واریانس شرطی، α_i, β_i و ω پارامترهای مدل، $\{\varepsilon_t, t \in \{1, 2, 3, \dots\}\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل و هم توزیع با میانگین صفر و واریانس واحد است. در صورتی که مرتبه q برابر با صفر باشد، مدل $ARCH(p)$ به دست می‌آید. در مدل‌های گارچ فرض بر این است که میانگین شرطی ثابت است ولی می‌توان ساختار میانگین شرطی را با یک مدل $ARMA(r, s)$ و مانده‌های آن را به وسیله مدل‌های

^۱ Value-at-risk^۲ Expected Shotfall

$GARCH(p, q)$ مدل سازی کرد که به آن مدل $ARMA(r, s) - GARCH(p, q)$ گفته می شود و داریم

$$X_t = \mu + \phi_1 X_{t-1} + \dots + \phi_r X_{t-r} + \theta_1 e_{t-1} + \dots + \theta_s e_{t-s} + e_t, \quad e_t = \sigma_t \varepsilon_t,$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha_1 e_{t-1}^2 + \dots + \alpha_q e_{t-q}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 + \dots + \sigma_{t-p}^2.$$

برای برآورد ارزش د معرض خطر روش های متفاوتی وجود دارد. برای مثال **آقا محمدی و سجودی (۱۳۹۵)** با استفاده از رگرسیون چندگی ترکیبی به برآورد این معیار پرداخته اند. یکی از روش های برآورد ارزش در معرض خطر روش پارامتری است که در **تهسای (۲۰۱۲)** برای سری های $GARCH(p, q)$ مورد بررسی قرار گرفته است. اگر سری زمانی بازدهی از مدل $ARMA(u, v) - GARCH(p, q)$ و مانده های آن از توزیع نرمال پیروی کند، ارزش در معرض خطر از طریق مدل

$$VaR_\alpha = z_\alpha \sigma_{t+1} + \mu + \phi_1 x_{t-1} + \dots + \phi_u x_{t-u} + \theta_1 e_{t-1} + \dots + \theta_v e_{t-v}, \quad (2)$$

برآورد می شود و در صورتی که مانده ها از توزیع $F(x)$ پیروی کند، در رابطه (۲) به جای z_α از چندک α ام توزیع استفاده می شود. برای بررسی اعتبار روش برآورد ارزش در معرض خطر از آزمون های پس آزمایی استفاده می شود. یکی از این آزمون ها آزمون کوپیک (کوپیک، ۱۹۹۵) با آماره

$$LR_{uc} = 2 \ln \left(\frac{(1 - \frac{L}{n})^{n-L} (\frac{L}{n})^L}{(1 - \alpha)^{n-L} \alpha^L} \right),$$

با توزیع خی دو با یک درجه آزادی است، که در آن n حجم کل نمونه و L تعداد تخطی ها است. تعداد تخطی ها بر این اساس بدست می آیند که ابتدا یک دوره تخمین مثلاً s روزه در نظر گرفته شده و معیار ارزش در معرض خطر s داده اول برای روز $1 + s$ ام محاسبه می شود و سپس دوره تخمین را یک روز به جلو جابه جا کرده و مجدداً معیار مورد نظر را برآورد می کنیم تا به آخرین داده نمونه برسیم. در این صورت $n - s$ برآورد از معیار ارزش در معرض خطر خواهیم داشت. حال به مقایسه برآورد این معیار و بازدهی روز مورد نظر پرداخته و در صورتی که میزان بازدهی از برآورد به دست آمده کمتر بود به عنوان یک تخطی در نظر گرفته می شود. از آنجا که آزمون کوپیک فقط بر روی تعداد تخطی ها تمرکز می کند، **کریستوفرسن (۱۹۹۸)** با در نظر گرفتن یک آماره برای استقلال تخطی ها یعنی LR_{ind} ، آزمون کوپیک را توسعه داد. آماره آزمون آن به صورت $LR_{cc} = LR_{uc} + LR_{ind}$ ، و دارای توزیع کای دو با درجه آزادی ۲ است، که در آن

$$LR_{ind} = -2 \ln \left(\frac{(1 - \hat{\pi})^{n_{..} + n_{1.}} (\hat{\pi})^{n_{.1} + n_{11}}}{(1 - \hat{\pi}_0)^{n_{..}} (\hat{\pi}_0)^{n_{.1}} (1 - \hat{\pi}_1)^{n_{.1}} (\hat{\pi}_1)^{n_{11}}} \right)$$

۴۰۴ برآورد کمبود مورد انتظار شرطی بر اساس تابع مفصل

و n_{ij} یعنی تعداد روزهایی که تعداد تخطی های روز t ام برابر i و تعداد تخطی های روز $t-1$ ام برابر با j باشد و

$$\hat{\pi}_0 = \frac{n_{01}}{n_{00} + n_{01}}, \hat{\pi}_1 = \frac{n_{11}}{n_{11} + n_{01}}, \hat{\pi} = \frac{n_{01} + n_{11}}{n_{00} + n_{01} + n_{10} + n_{11}}.$$

رویدادهایی که در نهادهای مالی رخ می دهد ممکن است بر سیستم مالی سایر نهادها و یا حتی بر کل سیستم اقتصاد اثر بگذارد. در این صورت نمی توان تاثیر متقابل بین ریسک ها را نادیده گرفت به همین دلیل از زمان شروع بحران های مالی و اقتصادی در سال ۲۰۰۷ ریسک سیستمی^۱ یعنی ریسکی که بحران در یک نهاد، بر سایر نهادها یا کل سیستم مالی تاثیر می گذارد، مطرح شد. یکی از روش های اندازه گیری ریسک سیستمی، ارزش در معرض خطر شرطی^۲ است که اولین بار توسط آدرین و برونرمر (۲۰۱۶) معرفی شد و پس از آن جیراردی و ارگان (۲۰۱۳) تعریف دیگری از آن ارائه دادند. این معیار ارزش در معرض خطر یک سازمان با بازدهی Y را در صورتی که سازمانی دیگر با بازدهی X در بحران قرار داشته باشد، بدین معنی که بازدهی آن حداکثر برابر ارزش در معرض خطر در سطح احتمال α باشد، در سطح احتمال β را محاسبه می کند، یعنی

$$CoVaR_{\alpha,\beta}(Y|X) = VaR_{\beta}(Y | X \leq VaR_{\alpha}(X)); \alpha, \beta \in (0, 1),$$

محاسبه می کند که به آن ارزش در معرض خطر شرطی ($CoVaR$) می گویند. اگر در رابطه (۱) به جای VaR از $CoVaR$ استفاده کنیم، یعنی

$$CoES_{\alpha,\beta}(Y | X) = E(Y|Y \leq CoVaR_{\alpha,\beta}(Y|X)).$$

معیار بدست آمده را کمبود مورد انتظار شرطی^۳ نامیده و آن را با نماد $CoES$ نشان می دهیم. یکی از ویژگی های مطلوب معیارهای $CoVaR$ و $CoES$ به علت وابستگی بین بازدهی ها این است که می توان از توابع مفصل^۴ به عنوان ابزاری مفید برای بررسی ساختار وابستگی بین ریسک ها استفاده کرد. ماینیک و اسکنینگ (۲۰۱۴) معیار $CoVaR$ را بر اساس توابع مفصل گاوسی و استودنت، روبردو و همکاران (۲۰۱۵) در مفصل های تغییر شکل یافته گامبل و برناردی و همکاران (۲۰۱۷) نیز برای توابع مفصل کران های فرشه، مارشال اولکین، و FGM و برخی مفصل های ارشمیدسی یعنی گامبل، فرانک، جو و کلیتون تحلیل کرده اند. کاریمالیس و نومیکس (۲۰۱۸)، $CoVaR$ را با توجه به نتایج برناردی و همکاران (۲۰۱۷) و مدل های سری زمانی گارچ بررسی و سپس ریسک سیستمی در سیستم بانکی اروپا را با توابع مفصل فرانک و جو محاسبه کرده اند. جی و همکاران (۲۰۱۸) ارزش در معرض خطر شرطی را با استفاده از مفصل های زمان متغیر برای قیمت نفت و دلار، عثمان و همکاران (۲۰۲۳) نیز

^۱Systemic Risk

^۲Conditional Value-at-risk

^۳Conditional Expected Shotfall

^۴Copula

بر اساس توزیع GCE با رویکرد تابع مفصل و استفاده از توابع مفصل نرمال، کلیتون، تی استودنت و گامبل این معیار را برآورد کرده‌اند. **هوانگ و همکاران (۲۰۲۴)** به روش شبیه سازی مونت کارلو و مفصل و **وانگ و همکاران (۲۰۲۵)** با مفصل های واین مطالعه کرده‌اند. ما در این مقاله ابتدا ارزش در معرض خطر شرطی را در سری های زمانی آرماگارچ بر اساس تابع مفصل تحلیل و سپس در حالت خاص برای توابع مفصل ارشمیدسی $BB\epsilon$ ، $BB\gamma$ و $BB\lambda$ بررسی می‌کنیم و در پایان بنا بر نتایج بدست آمده و توزیع خطای تعمیم یافته معیار کمبود مورد انتظار شرطی را برآورد می‌کنیم.

به اختصار مفصل تابعی است که بین توزیع های چند متغیره و توزیع های حاشیه ای آن ها ارتباط برقرار می‌کند. قضیه اسکالر^۱ بیان می‌کند، اگر (X, Y) یک بردار تصادفی با تابع توزیع توأم $F(x, y)$ و توابع توزیع حاشیه ای $F_X(x)$ و $F_Y(y)$ باشند، آنگاه مفصل $C: I^2 \rightarrow I$ وجود دارد به طوری که

$$F(x, y) = C(F_X(x), F_Y(y)), \quad x, y \in R.$$

$$C(u, v) = F(F_X^{-1}(u), F_Y^{-1}(v)), \quad u, v \in [0, 1].$$

خانواده مفصل های ارشمیدسی با استفاده از یک تابع مولد $\phi: [0, 1] \rightarrow [0, \infty)$ با ویژگی های $\phi(1) = 0$ و $\phi(0) = \infty$ توسط رابطه $C(u, v) = \phi^{-1}(\phi(u) + \phi(v))$ ، ساخته می‌شوند. در جدول ۱ توابع مفصل ارشمیدسی بررسی شده در این مقاله ارائه شده است.

جدول ۱. برخی از توابع مفصل ارشمیدسی

نام مفصل	فضای پارامتر	تابع مولد $\phi(u, v)$
$BB\lambda$	$\theta > 0, \delta \geq 1$	$(t^{-\theta} - 1)^{\delta}$
$BB\epsilon$	$\theta \geq 1, \delta \geq 1$	$-\log(1 - (1 - t)^{\theta})^{\delta}$
$BB\gamma$	$\theta \geq 1, \delta > 0$	$(1 - (1 - t)^{-\theta})^{-\delta} - 1$
$BB\lambda$	$\theta \geq 1, 0 < \delta \leq 1$	$-\log(\frac{1 - (1 - \delta t)^{\theta}}{1 - (1 - \delta)^{\theta}})$

یکی از روش های برآورد پارامترهای مفصل روش ماکزیم درستنمایی است. فرض کنید متغیرهای X و Y دارای توابع چگالی حاشیه ای $f_X(x)$ و $f_Y(y)$ ، توابع توزیع $F_X(x)$ و $F_Y(y)$ ، تابع چگالی توأم $f(x, y)$ و ساختار وابستگی مفصل $C_{\theta}(u, v)$ با بردار پارامترهای θ باشند، بر اساس ارتباط بین تابع مفصل و چگالی توأم تابع درستنمایی برای یک نمونه تصادفی n تایی به صورت

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n c_{\theta}(F_{X_i}(x_i), F_{Y_i}(y_i)) f_{X_i}(x_i), f_{Y_i}(y_i)$$

¹Sklar

۴۰۶ برآورد کمبود مورد انتظار شرطی بر اساس تابع مفصل

است که در آن $c_{\theta}(u, v) = \frac{\partial^2 C_{\theta}(u, v)}{\partial u \partial v}$ و $\hat{\theta}$ برآوردگریست که تابع درستنمایی را ماکسیمم کند.

۲ ارزش در معرض خطر شرطی

مایینک و اسکینینگ (۲۰۱۴) برای دو متغیر بازدهی X و Y با توابع توزیع حاشیه‌ای $F_X(x)$ و $F_Y(y)$ ، ساختار وابستگی $C(u, v)$ و توزیع توأم $F(x, y)$ ارزش در معرض خطر شرطی را با ساختار

$$CoVaR_{\alpha, \beta}(Y | X) = F_{Y_t}^{-1}(F_{V|U \leq \alpha}^{-1}(\beta)) = VaR_{F_{V|U \leq \alpha}^{-1}(\beta)}(Y),$$

بدست آوردند که در آن (U, V) دارای توزیع توأم $C(u, v)$ با توابع توزیع حاشیه‌ای یکنواخت استاندارد هستند و $w^* = \frac{C(\alpha, v)}{\alpha}$ و $F_{V|U \leq \alpha}(v) = \frac{C(\alpha, v)}{\alpha}$. علاوه بر این **برناردی و همکاران (۲۰۱۷)** نشان داد با در نظر گرفتن $w^* = F_{V|U \leq \alpha}^{-1}(\beta)$ ، مقدار w^* از طریق حل معادله $C(\alpha, w^*) = \alpha\beta$ به دست می‌آید. در ادامه w^* را برای حالتی که با دو سری زمانی $Y_t = \mu_{t_1} + \sigma_{t_1}\varepsilon_{t_1}$ و $X_t = \mu_{t_1} + \sigma_{t_1}\varepsilon_{t_1}$ مواجه هستیم، بررسی می‌کنیم. می‌دانیم $CoVaR = F_{(Y_t|X_t \leq VaR_{\alpha}(X_t))}^{-1}(\beta)$ ، حال با قرار دادن $F_{\varepsilon_{t_1}}(\varepsilon_{t_1}) = V$ و $F_{\varepsilon_{t_2}}(\varepsilon_{t_2}) = U$ داریم

$$\begin{aligned} F_{(Y_t|X_t \leq VaR_{\alpha}(X_t))}(y) &= P(Y_t \leq y | X_t \leq VaR_{\alpha}(X_t)) \\ &= P(\varepsilon_{t_1} \leq \frac{y - \mu_{t_1}}{\sigma_{t_1}} | \varepsilon_{t_2} \leq \frac{VaR_{\alpha}(X_t) - \mu_{t_2}}{\sigma_{t_2}}) \\ &= P(V \leq F_{\varepsilon_{t_1}}(\frac{y - \mu_{t_1}}{\sigma_{t_1}}) | U \leq F_{\varepsilon_{t_2}}(\frac{VaR_{\alpha}(X_t) - \mu_{t_2}}{\sigma_{t_2}})) \\ &= F_{V|U \leq F_{\varepsilon_{t_2}}(\frac{VaR_{\alpha}(X_t) - \mu_{t_2}}{\sigma_{t_2}})}(F_{\varepsilon_{t_1}}(\frac{y - \mu_{t_1}}{\sigma_{t_1}})) \\ &= F_{V|U \leq \alpha}(F_{\varepsilon_{t_1}}(\frac{y - \mu_{t_1}}{\sigma_{t_1}})), \end{aligned} \quad (۳)$$

اگر عبارت (۳) را به ازای $y = CoVaR$ ، برابر با β قرار دهیم، نتیجه می‌گیریم که

$$CoVaR_{\alpha, \beta}(Y_t | X_t) = \mu_{t_1} + \sigma_{t_1} F_{\varepsilon_1}^{-1}(F_{V|U \leq \alpha}^{-1}(\beta)),$$

و با در نظر گرفتن $w^* = F_{V|U \leq \alpha}^{-1}(\beta)$ ، w^* از طریق حل معادله $C(\alpha, w^*) = \alpha\beta$ به دست می‌آید، که در آن $C(u, v)$ مفصل متناظر بین مانده‌های دو مدل سری زمانی است.

برناردی و همکاران (۲۰۱۷)، w^* را در مفصل‌های کران‌های فرچت، مارشال اولکین، FGM و مفصل‌های ارشمیدسی فرانک، کلیتون و گامبل محاسبه کرده است. در حالت خاص اگر $C(u, v)$ یک مفصل ارشمیدسی با

تابع مولد $\varphi(t)$ باشد با محاسبات جبری ساده داریم

$$w^* = \varphi^{-1}(\varphi(\alpha\beta) - \varphi(\alpha)), \quad (۴)$$

در نتیجه $CoVaR_{\alpha,\beta}(Y_t | X_t) = VaR_{w^*}(Y_t)$. در ادامه به محاسبه w^* در مفصل های ارشمیدسی $BB۱$ ، $BB۶$ ، $BB۷$ و $BB۸$ می پردازیم.

الف) مفصل $BB۱$: اگر X و Y دارای ساختار وابستگی مفصل $BB۱$ با تابع مولد $\varphi(t) = (t^{-\theta} - ۱)^{\delta}$ باشد، آنگاه $\varphi^{-1}(s) = (s^{\frac{1}{\delta}} + ۱)^{-\frac{1}{\theta}}$ و با استفاده از رابطه (۴) می توان نوشت

$$w^* = [((\alpha\beta)^{-\theta} - ۱)^{\delta} - (\alpha^{-\theta} - ۱)^{\delta}]^{\frac{1}{\delta}} + ۱]^{-\frac{1}{\theta}}.$$

ب) مفصل $BB۶$: اگر X و Y دارای ساختار وابستگی مفصل $BB۶$ با تابع مولد $\varphi(t) = -\log(۱ - (۱ - t)^{\theta})^{\delta}$ باشد، آنگاه $\varphi^{-1}(s) = ۱ - (۱ - \exp\{-\frac{s}{\delta}\})^{\frac{1}{\theta}}$ و بر اساس رابطه (۴) می توان نوشت

$$w^* = ۱ - \exp\left\{-\frac{\log(۱ - (۱ - \alpha)^{\theta})^{\delta} - \log(۱ - (۱ - \alpha\beta)^{\theta})^{\delta}}{\delta}\right\}^{\frac{1}{\theta}}.$$

ج) مفصل $BB۷$: اگر X و Y دارای دو متغیر تصادفی و دارای ساختار وابستگی مفصل $BB۷$ با تابع مولد $\varphi(t) = (۱ - (۱ - t)^{-\theta})^{-\delta} - ۱$ باشد، آنگاه $\varphi^{-1}(s) = ۱ - [۱ - (s + ۱)^{-\frac{1}{\delta}}]^{\frac{1}{\theta}}$ و با استفاده از رابطه (۴) داریم

$$w^* = ۱ - \{۱ - [(۱ - (۱ - \alpha\beta)^{\theta})^{-\delta} - (۱ - (۱ - \alpha)^{\theta})^{-\delta} + ۱]^{-\frac{1}{\delta}}\}^{\frac{1}{\theta}}.$$

د) مفصل $BB۸$: اگر X و Y دو متغیر تصادفی و دارای ساختار وابستگی مفصل $BB۸$ با تابع مولد $\varphi(t) = -\log(\frac{۱ - (۱ - \delta t)^{\theta}}{۱ - (۱ - \delta)^{\theta}})$ باشد، آنگاه

$$\varphi^{-1}(s) = \frac{۱ - (۱ - [\exp\{-s\}(۱ - (۱ - \delta)^{\theta})])^{\frac{1}{\theta}}}{\delta}$$

و بر اساس رابطه (۴) نتیجه می شود که

$$w^* = \frac{۱ - (۱ - [\exp\{(\log(\frac{۱ - (۱ - \delta\alpha\beta)^{\theta}}{۱ - (۱ - \delta)^{\theta}}) - \log(\frac{۱ - (۱ - \delta\alpha)^{\theta}}{۱ - (۱ - \delta)^{\theta}}))\}(۱ - (۱ - \delta)^{\theta})])^{\frac{1}{\theta}}}{\delta}. \quad (۵)$$

۴۰۸ برآورد کمبود مورد انتظار شرطی بر اساس تابع مفصل

۳ کمبود مورد انتظار شرطی

برای سری زمانی بازدهی به صورت $X_t = \mu_t + \sigma_t \varepsilon_t$ ، با قرار دادن $\eta = \frac{CoVaR_{\alpha, \beta}(Y_t | X_t) - \mu_t}{\sigma_t}$ ، کمبود مورد انتظار شرطی به صورت

$$\begin{aligned} CoES_{\alpha, \beta}(Y_t | X_t) &= E(\mu_t + \sigma_t \varepsilon_t | \mu_t + \sigma_t \varepsilon_t \leq CoVaR_{\alpha, \beta}(Y_t | X_t)) \\ &= \mu_t + \sigma_t E(\varepsilon_t | \varepsilon_t \leq \frac{CoVaR_{\alpha, \beta}(Y_t | X_t) - \mu_t}{\sigma_t}) \\ &= \mu_t + \sigma_t E(\varepsilon_t | \varepsilon_t \leq \eta). \end{aligned}$$

بازنویسی می‌شود. می‌دانیم ε_t ها دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی با میانگین صفر و واریانس واحد هستند. حال اگر ε_t ها از توزیع خطای تعمیم یافته با پارامترهای (μ, σ, β) و تابع چگالی

$$g(x) = \frac{\beta}{\sqrt{\sigma} \Gamma(\frac{1}{\beta})} e^{-|\frac{x-\mu}{\sigma}|^\beta}; \quad \beta, \sigma > 0, \mu \in R,$$

پیروی کند، به‌ازای $\mu = 0$ ، $\sigma = (\frac{\Gamma(\frac{1}{\beta})}{\Gamma(\frac{\gamma}{\beta})})^{\frac{1}{\gamma}}$ و $\xi_t = \varepsilon_t | \varepsilon_t \leq \eta_t$ و $\sigma = (\frac{\Gamma(\frac{1}{\beta})}{\Gamma(\frac{\gamma}{\beta})})^{\frac{1}{\gamma}}$ ، $\mu = 0$ ، $\sigma = (\frac{\Gamma(\frac{1}{\beta})}{\Gamma(\frac{\gamma}{\beta})})^{\frac{1}{\gamma}}$ به ترتیب به صورت

$$\begin{aligned} \overline{F}_{\xi_t}(x) &= P(\varepsilon_t > x | \varepsilon_t \leq \eta) = \frac{F_{\varepsilon_t}(\eta) - F_{\varepsilon_t}(x)}{F_{\varepsilon_t}(\eta)}, \\ f_{\xi_t}(x) &= \frac{f_{\varepsilon_t}(x)}{F_{\varepsilon_t}(\eta)} = \frac{\beta \sqrt{\Gamma(\frac{\gamma}{\beta})}}{\sqrt{\Gamma(\frac{1}{\beta})}^\gamma F_{\varepsilon_t}(\eta)} e^{-\left(\frac{\Gamma(\frac{\gamma}{\beta})}{\Gamma(\frac{1}{\beta})}\right)^{\frac{\beta}{\gamma}} |x|^\beta}. \end{aligned}$$

به دست می‌آیند.

در ادامه به محاسبه امید ریاضی ξ_t می‌پردازیم.

حالت اول: برای $\eta > 0$ ، با تغییر متغیرهای $y = (\frac{\Gamma(\frac{\gamma}{\beta})}{\Gamma(\frac{1}{\beta})})^{\frac{\beta}{\gamma}} (-x)^\beta$ و $z = (\frac{\Gamma(\frac{\gamma}{\beta})}{\Gamma(\frac{1}{\beta})})^{\frac{\beta}{\gamma}} x^\beta$ داریم

$$\begin{aligned} E(\xi_t) &= \frac{\beta \sqrt{\Gamma(\frac{\gamma}{\beta})}}{\sqrt{\Gamma(\frac{1}{\beta})}^\gamma F_{\varepsilon_t}(\eta)} \left(\int_{-\infty}^0 x e^{-\left(\frac{\Gamma(\frac{\gamma}{\beta})}{\Gamma(\frac{1}{\beta})}\right)^{\frac{\beta}{\gamma}} (-x)^\beta} dx + \int_0^\eta x e^{-\left(\frac{\Gamma(\frac{\gamma}{\beta})}{\Gamma(\frac{1}{\beta})}\right)^{\frac{\beta}{\gamma}} x^\beta} dx \right) \\ &= \frac{\beta}{\sqrt{((\Gamma(\frac{1}{\beta}) \Gamma(\frac{\gamma}{\beta}))^{\frac{1}{\gamma}}) F_{\varepsilon_t}(\eta)}} \left(\frac{1}{\beta} \int_0^\infty y^{\frac{1}{\beta}-1} e^{-y} dy + \frac{1}{\beta} \int_0^{\eta^\beta} z^{\frac{1}{\beta}-1} e^{-z} dz \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{((\Gamma(\frac{1}{\beta}) \Gamma(\frac{\gamma}{\beta}))^{\frac{1}{\gamma}}) F_{\varepsilon_t}(\eta)}} (-\Gamma(\frac{\gamma}{\beta}, \eta^\beta)), \end{aligned}$$

که در آن انتگرال‌ها را می‌توان بر اساس تابع گاما و تابع گامای ناقص بیان کرد. تابع گاما، تابع گامای ناقص پایینی و تابع گامای ناقص بالایی به ترتیب به صورت $\Gamma(a) = \int_0^\infty y^{a-1} e^{-y} dy$ ، $\gamma(a, b) = \int_0^b y^{a-1} e^{-y} dy$ و $\Gamma(a, b) = \int_b^\infty y^{a-1} e^{-y} dy$ تعریف می‌شوند و رابطه $\gamma(a, b) + \Gamma(a, b) = \Gamma(a)$ برقرار است، که در آن

$$\begin{aligned} F_{\varepsilon_t}(\eta) &= \frac{\beta \Gamma(\frac{\gamma}{\beta})^{\frac{1}{\gamma}}}{\gamma \Gamma(\frac{1}{\beta})^{\frac{1}{\gamma}}} \left(\int_{-\infty}^0 e^{-\left(\frac{\gamma}{\Gamma(\frac{\gamma}{\beta})}\right)^{\frac{\beta}{\gamma}} (-x)^\beta} dx + \int_0^\eta e^{-\left(\frac{\gamma}{\Gamma(\frac{\gamma}{\beta})}\right)^{\frac{\beta}{\gamma}} x^\beta} dx \right), \\ &= \frac{1}{\gamma \Gamma(\frac{1}{\beta})} (\gamma \Gamma(\frac{1}{\beta}) - \Gamma(\frac{1}{\beta}, \eta^\beta)). \end{aligned} \quad (۶)$$

در نتیجه $E(\xi_t) = \frac{-\sqrt{\frac{\Gamma(\frac{1}{\beta})}{\Gamma(\frac{\gamma}{\beta})}} \Gamma(\frac{\gamma}{\beta}, \eta^\beta)}{\gamma \Gamma(\frac{1}{\beta}) - \Gamma(\frac{1}{\beta}, \eta^\beta)}$ و کمبود مورد انتظار شرطی عبارت است از

$$CoES_{\alpha, \beta}(Y_t | X_t) = \mu_t + \left(\frac{-\sqrt{\frac{\Gamma(\frac{1}{\beta})}{\Gamma(\frac{\gamma}{\beta})}} \Gamma(\frac{\gamma}{\beta}, \eta^\beta)}{\gamma \Gamma(\frac{1}{\beta}) - \Gamma(\frac{1}{\beta}, \eta^\beta)} \right) \sigma_t. \quad (۷)$$

حالت دوم: برای $\eta < 0$ با تغییر متغیر $y = \left(\frac{\gamma}{\Gamma(\frac{\gamma}{\beta})}\right)^{\frac{\beta}{\gamma}} (-x)^\beta$ داریم

$$E(\xi_t) = \frac{\sqrt{\frac{\Gamma(\frac{1}{\beta})}{\Gamma(\frac{\gamma}{\beta})}} \Gamma(\frac{\gamma}{\beta}, (-\eta)^\beta)}{\gamma (\Gamma(\frac{1}{\beta}) \Gamma(\frac{\gamma}{\beta}))^{\frac{1}{\gamma}} F_{\varepsilon_t}(\eta)}$$

که در آن

$$F_{\varepsilon_t}(\eta) = \frac{\Gamma(\frac{1}{\beta}, (-\eta)^\beta)}{\gamma \Gamma(\frac{1}{\beta})}. \quad (۸)$$

بنابراین

$$\begin{aligned} E(\xi_t) &= \frac{\sqrt{\frac{\Gamma(\frac{1}{\beta})}{\Gamma(\frac{\gamma}{\beta})}} \Gamma(\frac{\gamma}{\beta}, (-\eta)^\beta)}{\Gamma(\frac{1}{\beta}, (-\eta)^\beta)}, \\ CoES_{\alpha, \beta}(Y_t | X_t) &= \mu_t + \frac{\sqrt{\frac{\Gamma(\frac{1}{\beta})}{\Gamma(\frac{\gamma}{\beta})}} \Gamma(\frac{\gamma}{\beta}, (-\eta)^\beta)}{\Gamma(\frac{1}{\beta}, (-\eta)^\beta)} \sigma_{t|t-1}. \end{aligned} \quad (۹)$$

۴۱۰ برآورد کمبود مورد انتظار شرطی بر اساس تابع مفصل

اکنون برای برآورد کمبود مورد انتظار شرطی یک نهاد مالی با بازدهی Y_t در شرایط بحران نهاد مالی دیگر با بازدهی X_t ابتدا ارزش در معرض خطر شرطی را برآورد می‌کنیم که در آن برای محاسبه سطح احتمال w^* نیاز به بررسی ساختار وابستگی بین بازدهی‌ها داریم، سپس مناسب‌ترین مدل سری زمانی بازدهی Y_t را به دست آورده، پارامترهای مدل سری زمانی، پارامتر توزیع خطای تعمیم یافته و میانگین (μ_t) و انحراف معیار $(\sigma_{t|t-1})$ زمان آتی را برآورد کرده و برای برآورد ارزش در معرض خطر شرطی در سطح احتمال w^* به روش

$$P(Y_T < CoVaR_{\alpha,\beta}(Y_t | X_t)) = P(\mu_t + \sigma_{t|t-1}\varepsilon_t < CoVaR_{\alpha,\beta}(Y_t | X_t)) = w^*$$

$$\Rightarrow P(\varepsilon_t < \frac{CoVaR_{\alpha,\beta}(Y_t | X_t) - \mu_t}{\sigma_{t|t-1}}) = w^*,$$

عمل می‌کنیم. بنابراین

$$CoVaR_{\alpha,\beta}(Y_t | X_t) = \mu_t + \sigma_{t|t-1}F_{\varepsilon_t}^{-1}(w^*). \quad (۱۰)$$

که در آن وقتی مانده‌ها از توزیع خطای تعمیم یافته تبعیت کند، $F_{\varepsilon_t}^{-1}(w^*)$ برای $\frac{1}{\beta} > w^*$ با استفاده از رابطه (۸) از طریق حل معادله

$$\frac{\Gamma(\frac{1}{\beta}, (-F_{\varepsilon_t}^{-1}(w^*))^\beta)}{\Gamma(\frac{1}{\beta})} = w^*, \quad (۱۱)$$

و برای $\frac{1}{\beta} < w^*$ بر اساس رابطه (۶) از طریق حل معادله زیر به دست می‌آید که برای حل این معادلات نیازمند روش‌های عددی مانند نیوتون رافسون می‌باشیم و در نهایت با استفاده از روابط (۷) یا (۹) این معیار برآورد می‌شود.

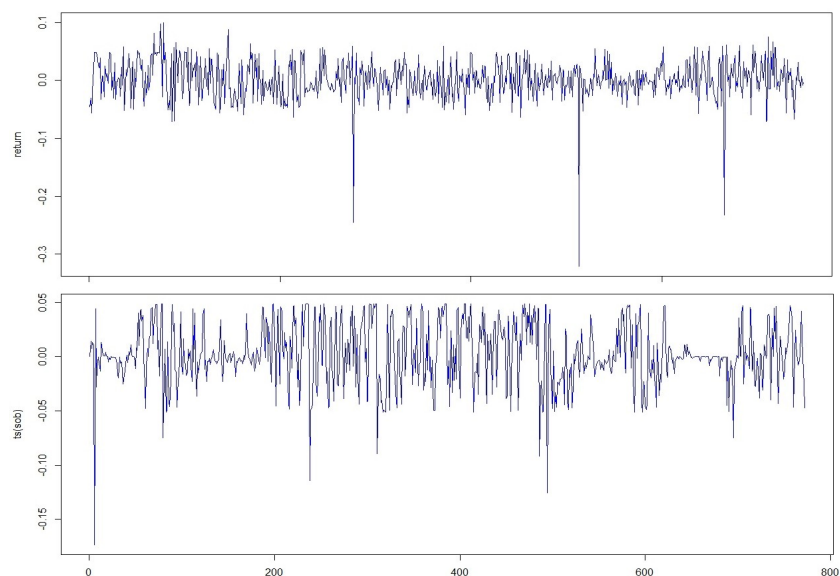
۴ کاربرد در داده واقعی

در این بخش، اگر X_t و Y_t به ترتیب بازدهی سهام بانک تجارت و ملت از سال ۲۰۲۰ تا ۲۰۲۳ باشد، ارزش در معرض خطر شرطی و کمبود مورد انتظار شرطی برای بانک ملت در صورتی که بانک تجارت در شرایط بحرانی قرار گیرد محاسبه می‌شود.

مرحله ۱: تعیین مدل سری زمانی بازدهی‌ها

در شکل ۱ سری زمانی بازدهی بانک ملت و تجارت رسم شده است، بنابر جدول ۲، پی-مقدارهای آزمون مک‌لیود-لی که برای بررسی وجود اثر آرچ در داده‌ها انجام می‌شود، همگی مقادیری نزدیک به صفر دارند، بنابراین در سطح ۵ درصد معنادارند و شواهدی قوی به نفع اثر ARCH در داده‌های بانک تجارت (به طور مشابه در بانک

ملت) وجود دارد. پی-مقدارهای آزمون ریشه واحد دیکي فولر در سری زمانی بازدهی بانک تجارت و بانک ملت به ترتیب ۰/۰۰۳۲ و ۰/۰۰۰۶ است. در نتیجه می‌توان گفت هر دو سری زمانی ایستا در میانگین هستند.



شکل ۱. نمودار بازدهی روزانه بانک ملت (بالا) و بانک تجارت (پایین)

جدول ۲. پی-مقدارهای آزمون مک لیود-لی

شماره لگ	۴	۳	۲	۱
پی-مقدار	4.78×10^{-7}	1.39×10^{-6}	2.05×10^{-6}	1.54×10^{-5}
شماره لگ	۸	۷	۶	۵
پی-مقدار	2.2×10^{-12}	1.53×10^{-9}	3.86×10^{-9}	2.74×10^{-8}

با استناد به نمودار $EACF$ سری زمانی بازدهی بانک ملت در شکل ۲-الف یک مدل $AR(1)$ مناسب به نظر می‌رسد و جدول $EACF$ برای قدر مطلق مانده‌های این مدل در شکل ۲-ب نشان از یک مدل $ARMA(1, 1)$ دارد، یعنی برای مانده‌ها مدل $GARCH(1, 1)$ و در نتیجه مدل $GARCH(1, 1) - AR(1)$ برای داده‌های اصلی مناسب خواهد بود. لازم به ذکر است در برازش مدل سری زمانی برای مانده‌ها توزیع‌های نرمال، خطای تعمیم یافته و تی-استودنت مورد بررسی قرار گرفت که در مرحله بررسی مانده‌ها فقط توزیع خطای تعمیم یافته مورد تأیید قرار گرفت. با افزایش مرتبه‌های مدل مثلاً مدل $GARCH(1, 1) - ARMA(1, 1)$ و $ARMA(1, 2) - ARMA(1, 1)$ برخی از ضرایب مدل معنادار نمی‌شوند و مدل‌هایی با مراتب پایین‌تر نیز دارای MSE ، AIC و BIC بیشتر و یا لگاریتم تابع درستنمایی ($loglikelihood$) کمتری نسبت به مدل $GARCH(1, 1) - AR(1)$ هستند، که در جدول ۲ مشاهده می‌شود. برای بررسی درستی مدل $GARCH(1, 1) - AR(1)$ در شکل ۴ نمودار ACF مانده‌های استاندارد شده، توان دوم و قدر مطلق مانده‌های استاندارد شده حاصل از مدل برازنده شده تأیید می‌کنند که مانده‌ها، توان دوم و قدر مطلق آن‌ها در طی زمان ناهمبسته‌اند و بنابراین مانده‌های استاندارد شده ممکن است مستقل باشند. نمودار چندک-چندک مانده‌های استاندارد شده در شکل ۳ نشان می‌دهد توزیع مانده‌ها از توزیع خطای تعمیم یافته پیروی می‌کند. در جدول ۲ برآورد ضرایب مدل نهایی محاسبه شده است.

AR/MA	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
0	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
1	x	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	x	o
2	x	x	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o
3	x	x	x	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o
4	x	x	x	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o
5	x	x	x	x	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o
6	x	x	x	x	x	o	o	o	o	o	o	o	o	o
7	x	x	x	x	o	x	o	o	o	o	o	o	o	o

(ب)

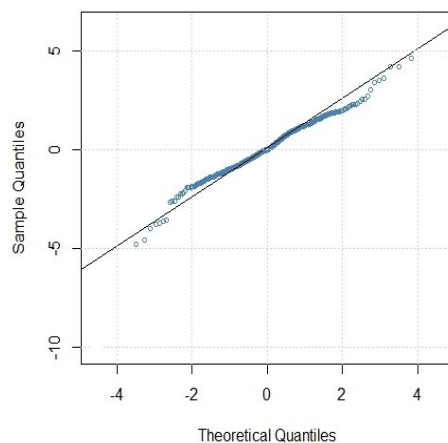
AR/MA	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
0	x	x	o	o	o	o	o	o	o	o	o	x	o	o
1	o	x	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o
2	x	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o
3	x	x	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o
4	x	x	x	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o
5	x	x	o	x	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o
6	x	x	o	x	x	o	o	o	o	o	o	o	o	o
7	x	x	x	x	x	x	o	o	o	o	o	o	o	o

(الف)

شکل ۲. نمودار $EACF$ الف: سری زمانی بازدهی بانک ملت و ب: قدر مطلق مانده‌های مدل $AR(1)$

جدول ۳. مقایسه معیارهای برخی مدل‌ها در بازدهی بانک ملت

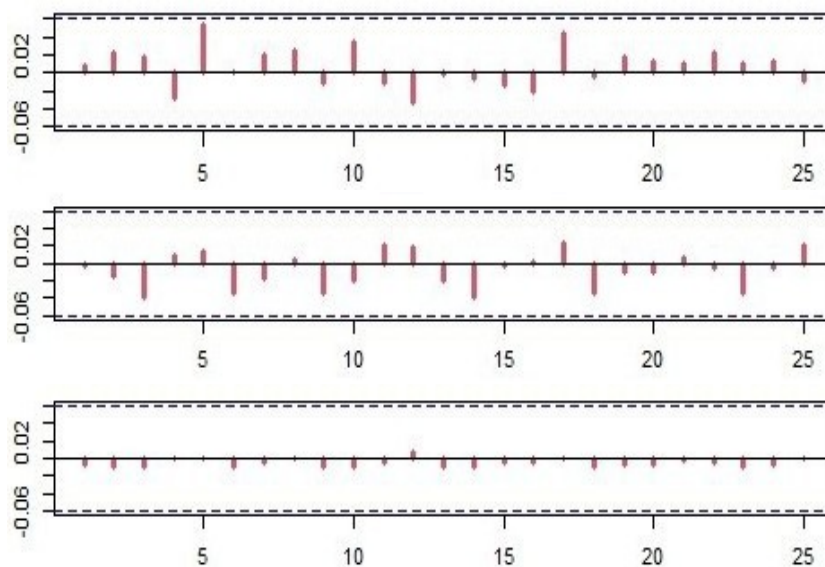
MSE	AIC	BIC	$LogLikelihood$	مدل
۶۹۴۳۴	-۳۵۳۵۸۰۶۵	-۳۵۱۷۲۰۶۱	۱۷۷۱۹۰۳۷	$GARCH(1, 1)$
۶۸۸۶۵	۳۶۶۷۶۸۵۸	۳۶۴۴۴۳۲۲	۱۸۳۰۸۴۱۲	$MA(1) - GARCH(1, 1)$
۶۰۰۰۲	-۳۶۷۴۸۰۸۱	-۳۶۵۱۵۵۸۸	۱۸۴۲۴۰۴۳	$AR(1) - GARCH(1, 1)$
۶۹۵۴۵	-۳۶۷۴۰۹۳۹۴	-۳۶۵۳۶۸۴۸	۱۸۴۳۴۶۵۱	$ARMA(1, 1) - GARCH(1, 1)$
۶۸۷۵۹	-۳۶۷۹۹۱۲۳	-۳۶۵۶۶۶۲۱	۱۸۴۴۹۵۶۸	$ARMA(2, 1) - GARCH(1, 1)$



شکل ۳. الف) نمودار چندک-چندک توزیع خطای تعمیم یافته برای مانده‌های مدل $AR(1) - GARCH(1, 1)$

جدول ۴. برآورد ضرایب مدل سری زمانی $AR(1) - GARCH(1, 1)$

$\hat{\mu}$	$\hat{\phi}_1$	$\hat{\omega}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	برآورد پارامتر توزیع خطای تعمیم یافته
۰	۱٫۵۱۱۱	۰٫۱۹۵۳	۳٫۳۴۳۵	۱۴٫۳۱۵۱	۵٫۳۳۵۳



شکل ۴. نمودار ACF مانده‌ها، توان دوم و قدرمطلق مانده‌های مدل $AR(1)GARCH(1, 1)$.

به طور مشابه در بازدهی بانک تجارت بنابر نمودارهای $EACF$ در شکل ۵ و ۶ نشان از یک مدل $ARMA(1, 2)$ برای داده‌ها و مدل $GARCH(1, 1)$ برای مانده‌ها می‌دهد بنابراین یک مدل $ARMA(1, 2) - GARCH(1, 1)$ با توزیع شرطی تی-استودنت برای داده‌های اصلی مناسب خواهد بود، (یادآوری می‌شود که برای مانده‌ها توزیع‌های نرمال و خطای تعمیم یافته هم بررسی شد که در سنجش مانده‌ها توزیع تی-استودنت پذیرفته شد.) با افزایش مرتبه های مدل برخی از ضرایب مدل معنادار نمی شوند و مدل‌هایی با مراتب پایین‌تر نیز دارای MSE ، AIC و BIC بیشتر و یا لگاریتم تابع درستنمایی کمتری نسبت به مدل نهایی هستند، که در جدول ۵ مشاهده می‌شود. در شکل ۸ نمودار ACF مانده‌های استاندارد شده، توان دوم و قدر مطلق مانده‌های استاندارد شده نشان می‌دهند که مانده‌ها، توان دوم و قدر مطلق آن‌ها در طی زمان ناهمبسته اند. الگوی خط راست نمودار چندک-چندک و هیستوگرام مانده‌های استاندارد شده در شکل ۷ نشان می‌دهد مانده‌ها دارای توزیع تی-استودنت هستند.

AR/MA		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
0	x	x	x	x	x	x	x	x	0	0	0	0	0	0	0
1	0	x	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	x	x	x	0	0	0	0	0	0	x	0	0	0	0	0
3	x	x	x	x	0	0	0	0	x	0	0	0	0	0	0
4	x	x	0	x	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	x	x	0	x	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	x	x	x	x	0	0	x	0	0	0	0	0	0	0	0
7	x	x	x	x	x	0	x	0	0	0	0	0	0	0	0

شکل ۵. نمودار $EACF$ بازدهی بانک تجارت

AR/MA		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
0	x	x	x	x	x	x	x	0	x	x	x	x	x	x	x
1	x	0	0	0	0	x	0	0	0	0	0	0	0	0	x
2	x	x	0	0	0	x	0	x	0	0	0	0	0	0	x
3	x	x	x	0	0	0	0	x	0	0	0	0	0	0	x
4	x	x	x	x	0	0	0	x	0	0	0	0	0	0	0
5	x	x	x	x	x	0	0	x	0	0	0	0	0	0	0
6	x	x	x	x	0	0	x	0	0	0	0	0	0	0	x
7	x	0	x	0	x	x	x	0	0	0	0	0	0	0	x

(ب)

(الف)

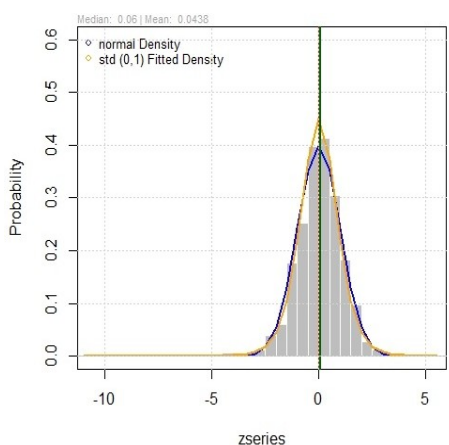
شکل ۶. جدول $EACF$ (الف) قدر مطلق و (ب) توان دوم باقی مانده‌های مدل $ARMA(1, 2)$

مرحله ۲: بررسی ساختار وابستگی مانده‌ها:

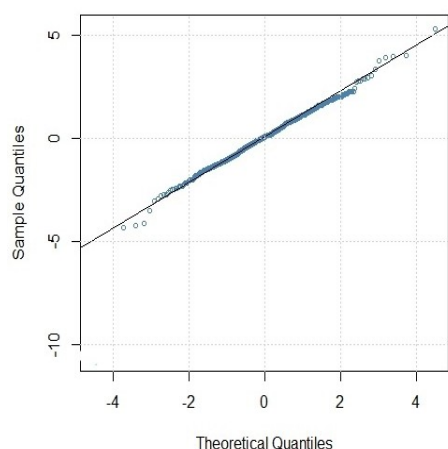
برای محاسبه مقدار w^* ساختار وابستگی بین مانده‌های سری زمانی در مرحله قبل را مورد بررسی قرار می‌دهیم. در

جدول ۵. مقایسه مدل‌ها در بازدهی بانک تجارت

مدل	LogLikelihood	BIC	AIC	MSE
$ARCH(1)$	۱۸۲۳,۱۳۴۳	-۳۶۲۶,۳۱۸۱	-۳۶۴۰,۲۶۸۱	۵,۲۱۳۳
$GARCH(1, 1)$	۱۸۳۵,۰۶۵۴	-۳۶۴۳,۵۳۲۲	-۳۶۶۲,۱۳۱۴	۵,۲۱۲۶
$AR(1) - GARCH(1, 1)$	۱۸۴۸,۷۰۳۶	-۳۶۶۴,۱۵۶۵	-۳۶۸۷,۴۰۶۹	۵,۶۸۷۶
$MA(1) - GARCH(1, 1)$	۱۸۴۵,۴۳۸	-۳۶۵۷,۶۱۸۷	-۳۶۸۰,۸۶۶۸	۵,۸۷۲۸
$ARMA(1, 1) - GARCH(1, 1)$	۱۸۵۷,۴۹۶۱	-۳۶۷۵,۰۹۲۹	-۳۷۰۲,۹۹۲۰	۴,۶۸۶۵
$ARMA(1, 2) - GARCH(1, 1)$	۱۸۶۴,۳۷۴۸	-۳۶۸۲,۱۹۸۲	-۳۷۱۴,۷۴۸۳	۳,۵۹۶۳



(ب)



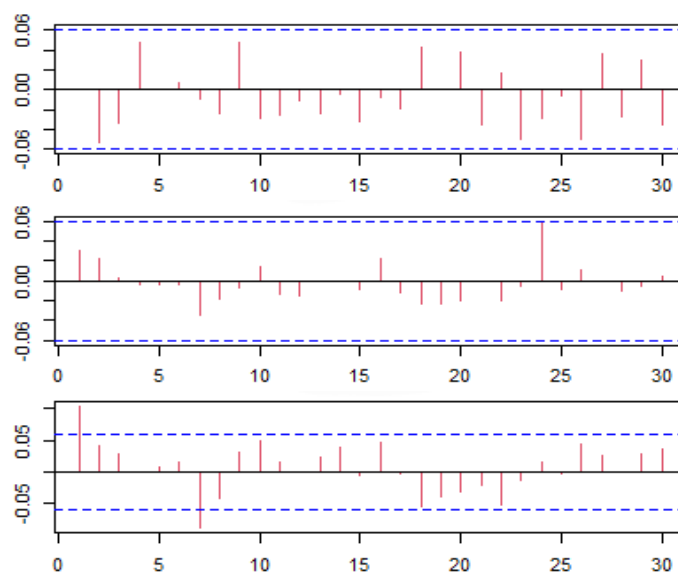
(الف)

شکل ۷. (الف) نمودار چندک-چندک توزیع تی-استودنت (ب) هیستوگرام مانده‌های مدل $ARMA(1, 2) - GARCH(1, 1)$.

جدول ۶. برآورد ضرایب مدل سری زمانی $ARMA(1, 2) - GARCH(1, 1)$

برآورد پارامتر توزیع شرطی	$\hat{\beta}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\omega}$	$\hat{\theta}_2$	$\hat{\theta}_1$	$\hat{\phi}_1$	$\hat{\mu}$
۵,۶۵۳۴	۰,۸۶۶۷	۰,۱۵۴۵	۰	۰,۳۱۹	-۰,۳۴۲۶	۰,۶۴۸۷	۰

قسمت (الف) شکل ۹ نمودار پراکنش مانده‌ها و در قسمت (ب) مقادیر توزیع تجربی آن‌ها که اعدادی بین ۰ و صفر و یک هستند و با نماد u و v نشان می‌دهیم، رسم شده است. با توجه به نمودار پراکنش u و v مشاهده می‌شود، داده‌ها دارای وابستگی مثبت ضعیفی بوده و وابستگی دمی بالا و پایین ندارند. با در نظر گرفتن X و Y به عنوان مانده‌های سری زمانی دو بانک برآورد ناپارامتری ضریب همبستگی تاو کندال از رابطه $\tau_c = \frac{2(P - Q)}{n(n - 1)}$ برابر ۰/۲۱۱۹ محاسبه شده است، که در آن P تعداد جفت‌های هماهنگ، Q تعداد جفت‌های ناهماهنگ و n حجم نمونه



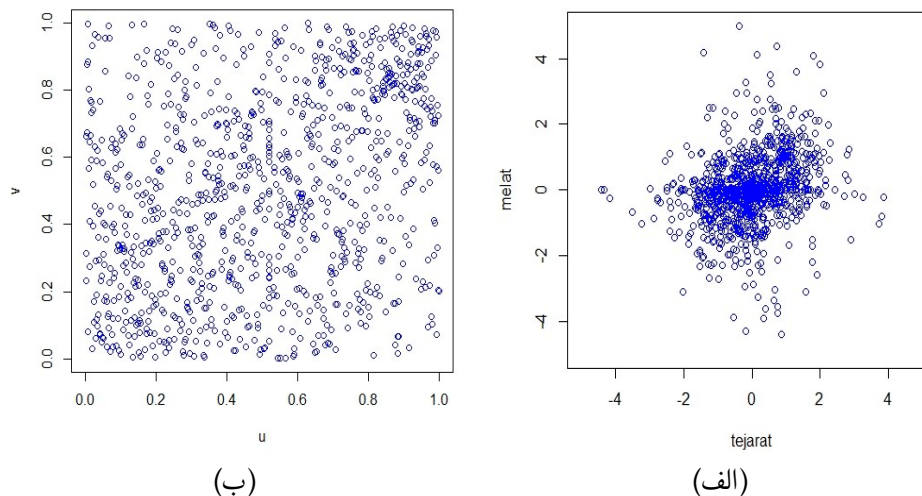
شکل ۸. نمودار ACF مانده‌ها، توان دوم و قدرمطلق مانده‌های مدل $GARCH(1,1) - ARMA(1,2)$.

است. برای هر جفت (X_i, Y_i) و (X_j, Y_j) اگر $(X_i < X_j, Y_i < Y_j)$ یا $(X_i > X_j, Y_i > Y_j)$ باشد، این جفت هماهنگ و در غیر اینصورت ناهماهنگ است. مقدار وابستگی دمی بالا $(\hat{\lambda}_U)$ نیز به روش ناپارامتری با انتخاب مقدار آستانه صدک ۹۵ام و وابستگی دمی پایین $(\hat{\lambda}_L)$ با مقدار آستانه صدک ۵ام با روابط

$$\hat{\lambda}_U = \frac{\sum_{i=1}^n I_{(x_i > \hat{F}_X^{-1}(\cdot_{0.95}), y_i > \hat{F}_Y^{-1}(\cdot_{0.95}))}}{\sum_{i=1}^n I_{(x_i > \hat{F}_X^{-1}(\cdot_{0.95}))}}, \quad \hat{\lambda}_L = \frac{\sum_{i=1}^n I_{(x_i \leq \hat{F}_X^{-1}(\cdot_{0.05}), y_i \leq \hat{F}_Y^{-1}(\cdot_{0.05}))}}{\sum_{i=1}^n I_{(x_i \leq \hat{F}_X^{-1}(\cdot_{0.05}))}}.$$

صفر به دست آمده است. با مقایسه تاو کندال، وابستگی دمی بالا، پایین و معیارهای AIC و BIC توابع مفصل مختلف برازش داده شده در جدول ۵ مفصل‌های فرانک و $BB\lambda$ مناسب به نظر می‌رسند. زیرا در داده‌ها مقدار تاو کندال ۰/۲۱۱۷ و وابستگی‌های دمی صفر محاسبه شده است که در این دو مفصل، تاو کندال مقادیر نزدیک‌تری به تاو کندال داده‌ها نسبت به سایر توابع مفصل و وابستگی دمی بالا و پایین صفر دارند و از آنجایی که مفصل $BB\lambda$ دارای مقادیر AIC و BIC کمتری نسبت به مفصل فرانک است، مفصل مناسبی برای بیان ساختار وابستگی است. جدول ۵ پی-مقدار و یافته آماره‌های آزمون نیکویی برازش کرامر ون مایسز و کولموگروف اسمیرنوف را نشان می‌دهد که در آن پی-مقدار آزمون‌ها برای مفصل $BB\lambda$ بیشتر از پنج صدم و برای مفصل فرانک نزدیک به صفر است، بنابراین فرض H_0 مبنی بر مناسب بودن مفصل $BB\lambda$ را رد نمی‌کنیم. نمودار کندال یک ابزار گرافیکی برای

بررسی مناسب بودن یک مفصل برای داده‌هاست. در این نمودار مقادیر مرتب شده تابع توزیع تجربی داده‌ها را در برابر مقادیر مورد انتظار متناظر تحت فرض استقلال و علاوه بر آن یک نمودار هم با شبیه سازی یک نمونه بزرگ از مفصل برازش یافته رسم می‌کند. اگر مفصل برازش یافته مناسب باشد این دو نمودار هم خوانی زیادی دارند. نمودار کندال در شکل ۱۰ نیز مناسب بودن مفصل $BB8$ را نشان می‌دهد.



شکل ۹. الف) نمودار پراکنش مانده‌های سری زمانی، ب) نمودار پراکنش مانده‌ها پس از تبدیل به اعداد بین صفر و یک.

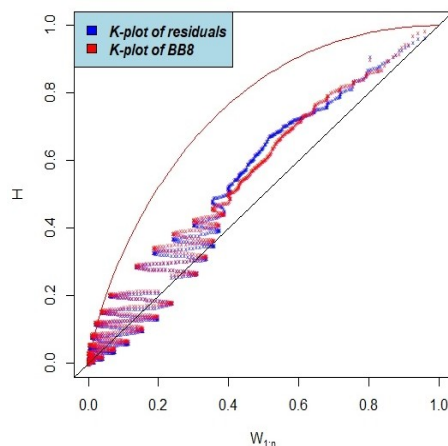
مرحله ۳: برآورد $CoES$

جدول ۷. مقایسه مفصل‌های مختلف				
مفصل	BIC	AIC	وابستگی دمی پایین	وابستگی دمی بالا
گاوسی	-۶۹/۲۵	-۷۴/۱۸	۰	۰
استودنت	-۶۹/۵۸	-۷۹/۴۴	۰/۰۲	۰/۰۲
کلیتون	-۳۳/۱۱	-۳۸/۱۱	۰/۰۸	۰
گامبل	-۷۸/۴۸	-۸۳/۴۱	۰	۰/۲۴
فرانک	-۹۹/۱۶	-۱۰۴/۰۹	۰	۰
جو	-۶۳/۱۲۳	-۶۸/۰۶	۰	۰/۳
$BB1$	-۷۱/۵۳	-۸۱/۳۹	۰	۰/۲۴
$BB6$	-۱۲/۱۰۱	-۲۱/۶۶	۰	۰/۲۲
$BB7$	-۶۹/۶۲	-۹۲/۷۱	۰/۰۶	۰/۲۳
$BB8$	-۱۰۱/۲۳	-۱۱۱/۰۹	۰	۰

از آنجایی که ساختار وابستگی مانده‌های سری زمانی بازدهی بانک تجارت و بانک ملت از مفصل $BB8$ که برآورد پارامترهای آن با روش ماکزیمم درست‌نمایی $\theta = ۲/۵۲$ و $\delta = ۰/۶۹$ بدست آمد، تبعیت می‌کند، بر اساس رابطه

جدول ۸. نتایج آزمون نیکویی برازش مفصل فرانک و BB۸

مفصل	پی-مقدار	آماره کلوموگروف اسمیرنوف	پی-مقدار	آماره کرامر ون مایسز
فرانک	< 0.001	۰.۲۶۸۸	< 0.001	۱.۲۱۸۰
BB۸	۰.۱۱۳	۰.۸۴۲۶	۰.۰۸۱	۰.۱۰۱۲



شکل ۱۰. نمودار کندال بر اساس مفصل BB۸

(۵) برای $\alpha = \beta = 0.05$ مقدار w^* برابر 0.316 محاسبه شد و در نتیجه بنابر مدل سری زمانی $AR(1)$ و $GARCH(1, 1)$ توزیع خطای تعمیم یافته برای مانده‌ها با پارامتر 5.3353 مقادیر پیش بینی شده میانگین و انحراف معیار روز آتی $\hat{\mu}_t = 0.0671$ و $\hat{\sigma}_t = 1.619$ و با حل معادله (۱۱) به روش نیوتون رافسون و استفاده از رابطه (۱۰) مقدار $CoVaR$ برابر با -0.051 بدست آمد. پی-مقدارهای آزمون های کریستوفرسن و کوپیک به ترتیب 0.954 و 0.281 است که بیشتر از 5 صدم بوده و فرض H_0 که معادل معتبر بودن روش مورد استفاده است را رد نمی‌کنیم. سرانجام از طریق رابطه (۹) مقدار $CoES$ برابر با 0.0751 محاسبه شد. حال اگر در محاسبه ریسک بانک ملت بحران بانک تجارت را در نظر بگیریم، آنگاه مقدار VaR در سطح احتمال 95 درصد برابر -0.436 و مقدار ES برابر -0.665 بدست آمد. بنابراین طبق رابطه $-12.93 = \frac{CoES - ES}{ES} \times 100$ بحران در بانک تجارت حدود 13 درصد به حداکثر زیان مورد انتظار بانک ملت در روز آینده می‌افزاید.

بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله روش‌های مهم بررسی ریسک سیستمی یعنی ارزش در معرض خطر شرطی و کمبود مورد انتظار شرطی بر اساس توابع مفصل ارشمیدسی $BB1$ ، $BB6$ ، $BB7$ و $BB8$ و مدل‌های سری زمانی آرماگارچ در صورتی

که مانده‌های آن از توزیع خطای تعمیم یافته پیروی کند، مورد مطالعه قرار گرفت و در پایان این معیار برای بانک ملت در صورتی که بانک تجارت در شرایط بحرانی قرار گیرد محاسبه شد که در آن توابع مفصل مختلف برای بررسی ساختار وابستگی بازدهی بین این دو بانک و مدل‌های سری زمانی گارچ و آرماگارچ برای پیش بینی نوسان روز آینده بانک ملت بررسی شد، نتایج حاکی از آن بود که مفصل $BB\lambda$ و سری زمانی $AR(1) - GARCH(1, 1)$ مدل ب برتر را ارائه می‌دهند. اگر وابستگی بین بازدهی‌ها نسبت به زمان متغیر باشد به عنوان آینده تحقیق با استفاده از مفصل‌های وابسته به زمان و سایر مدل‌های ناهم‌وابستگی شرطی توسط همین نویسندگان در حال انجام است.

تقدیر و تشکر

نویسندگان مقاله لازم می‌دانند از زحمات سردبیر، داوران و ویراستار محترم مجله که با نقطه نظرات و پیشنهادات سازنده خود باعث بهبود مقاله شدند، تقدیر و تشکر نمایند.

مراجع

- آقا محمدی، ع. سجودی، م. (۱۳۹۵). برآورد معیارهای ارزش د معرض خطر و میانگین ارزش در معرض خطر با استفاده از مدل رگرسیون چندکی ترکیبی، مجله علوم آماری، ۱۰(۲)، ۱۸۵-۲۰۲.
- Acerbi, C., Nardio, C., Cirtori, C., (2001), Expected Shortfall as a Tool for Financial Risk Management, *arXiv preprint cond-mat/0102304*.
- Adrian, T., Brunnermeier, M.K., (2016), CoVaR, *Amer. Econ. Rev.*, **106**, 1705–1741.
- Bernardi, M., Durante, F., Jaworski, P. (2017), CoVaR of Families of Copulas, *Statist. Probab. Lett.* **120**, 8–17.
- Bolersllev, T. (1986), Generalized Autoregressiv Conditional Heteroscedasticity, *Econometrics*, **31**, 307-327.
- Christoffersen, P.F. (1998), Evaluating Interval Forecasts, *International Economic Review*, **39**(4), 841-861.
- Girardi, G., Ergün, A.T., (2013), Systemic Risk Measurement: Multivariate GARCH Estimation of CoVaR. *Bank. Finance*, **37**, 3169–3180.

- Huang, W., Lin, N., & Hong, L. J. (2024), Monte Carlo Estimation of CoVaR, *Operations Research*, **72**(6), 2337-2357.
- Ji, Q., Bouri, E., Roubaud, D., & Shahzad, S. J. H. (2018), Risk Spillover between Energy and Agricultural Commodity Markets: A Dependence-Switching CoVaR-Copula Model, *Energy Economics*, **75**, 14-27.
- Karimalis, E. N., & Nomikos, N. K., (2018), Measuring Systemic Risk in the European Banking Sector: A Copula CoVaR Approach, *The European Journal of Finance*, **24**(11), 944-975.
- Kupiec, P. H. (1995), Techniques for Verifying the Accuracy of Risk Measurement Models, *Derivatives*, Winter, 73–84.
- Mainik, G., Schaanning, E., (2014), On Dependence Consistency of CoVaR and Some Other Systemic Risk Measures, *Statistical Risk Models*, **31**, 49–77.
- Nelsen, R.B., (2006), *An Introduction to Copulas. In: Lectures Notes in Statistics*, vol. 139, Springer-Verlag, New York.
- Reboredo, Juan C., Ugolini, A., (2015), Systemic Risk in European Sovereign Debt Markets: A CoVaR-Copula Approach, *International Money and Finance*, **51**, 214–244.
- Taylor, S.J. (1986), *Modeling Financial Time Series*. Chichester: John Wiley & Sons.
- Tsay, R.S. (2012), *An Introduction to Analysis of Financial Data with R*, University of Chicago.
- Usman, M., Umar, Z., Gubareva, M., & Tran, D. K., (2023), Spillovers From Stock Markets to Currency Markets: Evidence from Copula-CoVaR with Time-varying Higher Moments, *Applied Economics*, **55**(52), 6091-6114.
- Wang, J., Yan, X., Cao, Y., & Wang, X. (2025), Multi-scale Dependence and Risk Contagion among International Financial Markets Based on VMD-Vine Copula-CoVaR, *Applied Economics*, **57**(6), 658-677.