



Estimation and Prediction in Lindley-Weibel Distribution Based on Record Data

Norouzi Firooz, M. , Jabbari Khamnei, H. , Heydari, A. A. 
Department of Statistics, University of Tabriz, Tabriz, Iran.

Corresponding author: A. A. Heydari, heydari@tabrizu.ac.ir

Received: 17/11/2025 Revised: 21/5/2026 Accepted and Published Online: 23/5/2026.

Introduction

In many applied fields such as hydrology, climatology, finance, and reliability engineering, extreme observations naturally arise. Often, only the largest values (upper records) are observed or stored. Examples include annual maximum flood discharges, stock market highs, and extreme weather events. Unlike complete samples, record data contain only partial information, posing significant challenges for traditional statistical inference. The Lindley-Weibull (LW) distribution, introduced by Afify et al. (2018), is particularly notable for its flexibility. Its hazard rate function can take various shapes: increasing, decreasing, unimodal, and bathtub. This makes it highly suitable for modeling complex real-world phenomena. However, no prior work has developed inferential procedures for the LW distribution based solely on record data. Nevertheless, the application of record theory to the LW distribution remains unexplored. This paper develops maximum likelihood estimation procedures for the LW distribution based on upper records and proposes a predictive inference method for forecasting future records.

Material and Methods

The Lindley-Weibull distribution is introduced as a flexible model for lifetime data. Upper record values are defined, and the likelihood function based on observed records is derived. Maximum likelihood estimation is used to estimate the unknown parameters numerically. Finally, a predictive likelihood method is proposed to forecast future record values.

Results and Discussion

The simulation study showed that as the number of records increases, the means and variances decrease. Larger values of the shape parameters lead to smaller record means, while the scale parameter has a similar effect. The variances also decrease with larger values of the scale and shape parameters. The real data application on Wheaton River flood discharges confirmed that the Lindley-Weibull distribution fits the data very well. It outperformed other distributions like Weibull and Beta-Weibull based on goodness-of-fit statistics, and the Kolmogorov-Smirnov test gave a p-value of 0.386, indicating an excellent fit. The next upper record was predicted to be 70.7, which is larger than the last observed record (64). Bootstrap with 5000 resamples gave a 95% confidence interval from 64 to 80, with an average prediction of 68.4. Overall, the proposed method works well and provides reliable predictions for future record values.

Conclusion

This paper developed MLE and prediction methods for the Lindley-Weibull distribution based solely on upper record values. The proposed methods were validated through simulation and applied successfully to real flood data. The LW distribution showed superior fit compared to competing distributions. The predictive framework provides reliable intervals for future records. This work offers a powerful tool for practitioners when only extreme observations are available.

Keywords: Lindley-Weibull distribution, Maximum likelihood estimation, Record statistics, Prediction.

Mathematics Subject Classification (2020): 62E10.



©The Author(s). The Publisher is Iranian Statistical Society.

This is an open access article distributed under the terms and conditions of [CC BY-NC 4.0](https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/)

برآوردیابی و پیش بینی در توزیع لیندلی-وایبول براساس داده های رکوردی

مهرداد نوروزی فیروز، حسین جباری خامنه‌ای، علی اکبر حیدری
گروه آمار، دانشکده ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر، دانشگاه تبریز

نویسنده مسئول: علی اکبر حیدری، heydari@tabrizu.ac.ir

تاریخ دریافت: ۱۴۰۴/۸/۲۶ تاریخ بازنگری: ۱۴۰۵/۲/۳۱ تاریخ پذیرش و انتشار: ۱۴۰۵/۳/۲

چکیده: در این مقاله، روش‌های استنباط آماری برای توزیع لیندلی-وایبول در شرایط فقدان داده‌های کامل و در دسترس بودن تنها مقادیر رکورد بالا توسعه یافته است. با بهره‌گیری از نظریه رکوردها، توابع درستنمایی مربوط به رکوردهای بالا استخراج شده و برآوردگرهای ماکسیم درستنمایی پارامترها ارائه گردیده است. همچنین، روشی برای پیش‌بینی رکوردهای آینده بر مبنای رکوردهای مشاهده شده پیشنهاد شده است. عملکرد روش‌های ارائه شده از طریق مطالعه شبیه‌سازی و نیز کاربرد روی داده‌های واقعی مربوط به دبی اوج سیلاب مورد ارزیابی قرار گرفته است. نتایج حاکی از آن است که توزیع لیندلی-وایبول از انعطاف‌پذیری مطلوبی در مدل‌سازی داده‌های رکوردی برخوردار بوده و روش‌های استنباطی توسعه یافته از دقت و قابلیت اطمینان مناسبی در برآورد پارامترها و پیش‌بینی مقادیر آینده برخوردارند.

واژه‌های کلیدی: توزیع لیندلی-وایبول، گشتاور، برآورد ماکسیم درستنمایی، پیش‌بینی رکورد
کد موضوع بندی ریاضی (۲۰۲۰): 62F10, 62E15

۱ مقدمه

مقادیر رکوردی به دلیل نقشی که در تبیین رفتارهای حدی یک توزیع دارند، مورد توجه بسیاری از حوزه‌های علمی قرار گرفته است. در بسیاری از مسائل واقعی، تنها مقادیر بیشینه یا کمینه (رکورد) اهمیت دارند؛ برای مثال رکوردهای ورزشی، میزان بارش باران، میزان بیشینه قیمت دلار و غیره. همین خصوصیت باعث شده رکوردها به یکی از موضوعات پرکاربرد در علوم مهندسی، هواشناسی، تحلیل ریسک، اقتصاد و قابلیت اطمینان تبدیل شود. به همین دلیل، طی



©نویسندگان). ناشر انجمن آمار ایران است.

این مقاله با دسترسی آزاد تحت شرایط و ضوابط (CC BY-NC 4.0) توزیع شده است.

دهه‌های اخیر پژوهش‌های فراوانی درباره ویژگی‌ها، توزیع‌ها و روش‌های استنباطی مربوط به رکوردها منتشر شده است (چندلر، ۱۹۵۲؛ رزنیک، ۱۹۷۳؛ شوروک، ۱۹۷۳؛ گلیک، ۱۹۷۸؛ نوزورف، ۱۹۸۸؛ بالاکریشن و احسان الله، ۱۹۹۴؛ آرنولد و همکاران، ۲۰۱۱؛ دوست‌پرست و بالاکریشن، ۲۰۱۳؛ دی و همکاران، ۲۰۱۶؛ برکات و همکاران، ۲۰۱۹؛ زنجیران و میرمصطفایی، ۲۰۲۴؛ امپاچر، ۲۰۲۴؛ امپاچر و همکاران، ۲۰۲۵؛ باستان و کامل میرمصطفایی، ۱۴۰۰). خانواده توزیع‌های لیندلی و تعمیم‌های آن به دلیل انعطاف‌پذیری بالا و توانایی مدل‌سازی الگوهای پیچیده‌تر داده‌ها، به‌ویژه در حوزه‌هایی مانند تحلیل بقا، قابلیت اطمینان و مدل‌سازی رفتارهای حدی، توجه قابل‌ملاحظه‌ای را به خود جلب کرده‌اند. معرفی نسخه‌های توسعه‌یافته‌تر این خانواده، از جمله مدل **چاکماک یاپان و اوزل (۲۰۱۶)**، مسیر را برای ارائه مدل‌های قدرتمندتر هموار کرد. در همین راستا، **عفیفی و همکاران (۲۰۱۸)** توزیع لیندلی-وایبول را معرفی کردند که به‌دلیل انعطاف بسیار بالا، قادر به نمایش شکل‌های مختلفی از تابع خطر (افزایشی، کاهش‌ی، وانی شکل و تک‌مدی) است.

ماهیت رکوردها که فقط اطلاعات مربوط به مقادیر حدی را شامل می‌شود، سبب شده بسیاری از روش‌های معمول استنباطی که بر نمونه‌های کامل بنا شده‌اند قابل استفاده نباشند؛ بنابراین توسعه روش‌های ویژه برای این نوع داده‌ها اهمیت دارد. با وجود برخی مطالعات انجام‌شده، مرور ادبیات نشان می‌دهد که بخش عمده تحقیقات بر داده‌های کامل تمرکز داشته‌اند و پژوهش مرتبط با روش‌های استنباطی برای توزیع لیندلی-وایبول براساس داده‌های رکوردی وجود ندارد. بر همین اساس، هدف این پژوهش بررسی برآوردهای کلاسیک پارامترها و پیش‌بینی رکوردهای آینده در توزیع لیندلی-وایبول بر اساس مقادیر رکوردی است. افزون بر این، از طریق مجموعه‌ای از داده واقعی، عملکرد روش‌های پیشنهادی ارزیابی می‌شود تا میزان کارایی و پایداری آن‌ها در شرایط مختلف نمونه‌برداری مشخص گردد. **چاکماک یاپان و اوزل (۲۰۱۶)** یک کلاس جدید از توزیع‌ها را با عنوان لیندلی تعمیم یافته $(Li - G)$ معرفی کردند. در این کلاس، برای یک تابع توزیع تجمعی پایه دلخواه $G(x; \xi)$ ، خانواده $Li - G$ با یک پارامتر شکل مثبت θ بترتیب دارای تابع توزیع تجمعی و تابع چگالی احتمال

$$F(x; \theta, \xi) = 1 - [1 - G(x; \xi)]^\theta \left(1 - \frac{\theta}{\theta + 1} \log \bar{G}(x; \xi)\right), \quad (1)$$

$$f(x; \theta, \xi) = \frac{\theta^2}{\theta + 1} g(x; \xi) [1 - G(x; \xi)]^{\theta-1} (1 - \log \bar{G}(x; \xi)), \quad (2)$$

است، که در آن $g(x; \xi) = \frac{dG(x; \xi)}{dx}$. اگر توزیع وایبول با تابع توزیع تجمعی و تابع چگالی احتمال

$$G(x; \alpha, \beta) = 1 - \exp [-(\alpha x)^\beta], \quad (3)$$

$$g(x; \alpha, \beta) = \beta \alpha^\beta x^{\beta-1} \exp [-(\alpha x)^\beta] \quad (4)$$

با $\alpha > 0$ پارامتر مقیاس و $\beta > 0$ پارامتر شکل، را به عنوان توزیع والد در نظر بگیریم، آنگاه چنانچه روابط (۳)

و (۴) را در روابط (۱) و (۲) جایگزین نماییم، خانواده توزیع لندلی-وایبول را تولید می‌شود که به اختصار آن را با نماد $LiW(\theta, \alpha, \beta)$ نشان می‌دهیم. بنابراین تابع توزیع و تابع چگالی خانواده لندلی-وایبول به ترتیب برابر

$$F(x) = F(x; \theta, \alpha, \beta) \\ = 1 - \exp[-\theta(\alpha x)^\beta] \left(1 + \frac{\theta}{\theta + 1}(\alpha x)^\beta\right) \quad x > 0, \theta, \alpha, \beta > 0 \quad (5)$$

$$f(x) = f(x; \theta, \alpha, \beta) \\ = \frac{\beta\theta^2}{\theta + 1}(\alpha^\beta x^{\beta-1} + \alpha^{\beta+1} x^{\beta-1}) \exp[-\theta(\alpha x)^\beta] \quad x > 0, \theta, \alpha, \beta > 0 \quad (6)$$

است. **عفیفی و همکاران (۲۰۱۸)** به معرفی و مطالعه این مدل بر اساس داده‌های کامل پرداختند. ما در این مقاله به مطالعه این توزیع بر اساس رکوردهای بالا پرداخته‌ایم. آنها مدل لندلی وایبول را به صورت یک ترکیب خطی از توزیع نمایی-وایبول بیان کردند. به عبارتی دیگر، بسطی برای رابطه (۱) با استفاده از توزیع نمایی-وایبول استخراج کردند، که در زمینه‌های مختلف کاربرد فراوانی دارد. اگر متغیر تصادفی Z دارای توزیع نمایی-وایبول با تابع پایه‌ی $G(x)$ و پارامتر توانی $d > 0$ باشد ($Z \sim \exp-W(d)$)، آنگاه برای $z > 0$ دارای تابع توزیع تجمعی $h_d(z) = d\beta\alpha^\beta z^{\beta-1} \exp[-(\alpha z)^\beta] \{1 - \exp[-(\alpha z)^\beta]\}^d$ و تابع چگالی احتمال $H_d(z) = \{1 - \exp[-(\alpha z)^\beta]\}^{d-1} \exp[-(\alpha z)^\beta]$ است. با استفاده از بسط دو جمله‌ای تعمیم‌یافته، تابع توزیع تجمعی در رابطه (۱) را می‌توان به صورت

$$F(x; \theta, \xi) = 1 - \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\theta}{k} G(x)^k + \frac{\theta}{\theta + 1} \log \bar{G}(x) \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\theta}{k} G(x)^k. \quad (7)$$

نوشت. بر اساس تابع سری توانی لگاریتمی $\frac{b^{j+1}}{j+1}$ با شرط $|b| < 1$ رابطه $\log \bar{G}(x) = -\sum_{j=1}^{\infty} \frac{b^{j+1}}{j+1}$ حاصل می‌شود. با جایگذاری این رابطه در معادله (۷)، به صورت

$$F(x; \theta, \xi) = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} \binom{\theta}{k} G^k(x) \\ + \sum_{k,j=0}^{\infty} \binom{\theta}{k} \frac{(-1)^{k+1} \theta}{(j+1)(\theta+1)} G^{k+j+1}(x). \quad (8)$$

تبدیل می‌شود. اگر در رابطه (۸) به جای $G(x)$ رابطه (۳) جایگذاری شود، تابع توزیع لندلی-وایبول به صورت

$$F(x) = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} w_k H_k(x) + \sum_{k,j=0}^{\infty} w_{k,j} H_{k+j+1}(x) \quad (9)$$

۲۸۶ استنباط برای توزیع لیندلی-وایبول با داده‌های رکوردی

خواهد شد، که در آن $w_k = (-1)^{k+1} \binom{\theta}{k}$ و $w_{k,j} = \frac{(-1)^{k+1} \theta}{(j+1)(\theta+1)} \binom{\theta}{k}$ است که به ازای تمام مقادیر $x > 0$ و $\theta \neq -1$ همگراست. با مشتق‌گیری از رابطه (۹) تابع چگالی توزیع لیندلی-وایبول بصورت

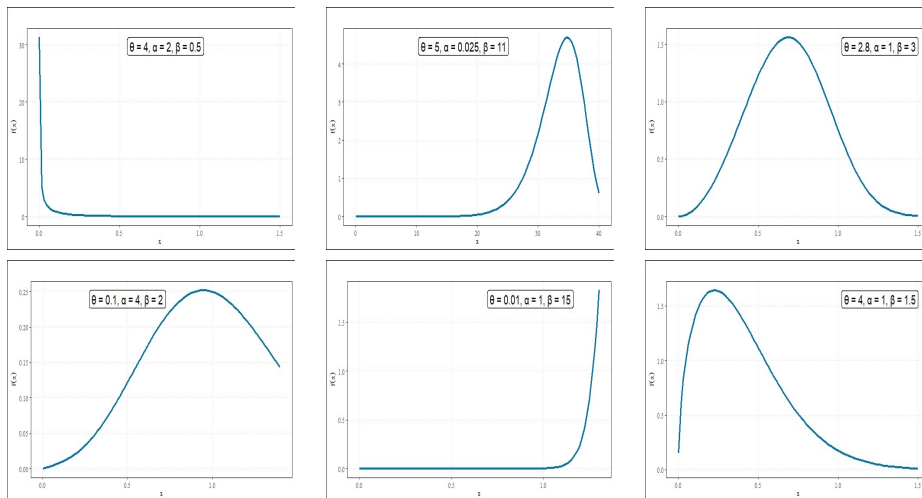
$$f(x) = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} w_{k+1} h_{k+1}(x) + \sum_{k,j=0}^{\infty} w_{k,j} h_{k+j+1}(x), \quad (10)$$

حاصل می‌شود، که در آن $h_d(x)$ تابع چگالی احتمال توزیع نمایی-وایبول با پارامتر توان d است. رابطه (۱۰) نشان می‌دهد که چگالی توزیع لیندلی-وایبول را می‌توان به صورت ترکیب خطی از چگالی‌های نمایی-وایبول بیان کرد. بنابراین، بسیاری از خواص ریاضی مدل نمایی-وایبول به توزیع لیندلی-وایبول قابل تعمیم است. تابع بقا و تابع نرخ خطر توزیع لیندلی-وایبول به ترتیب برابر

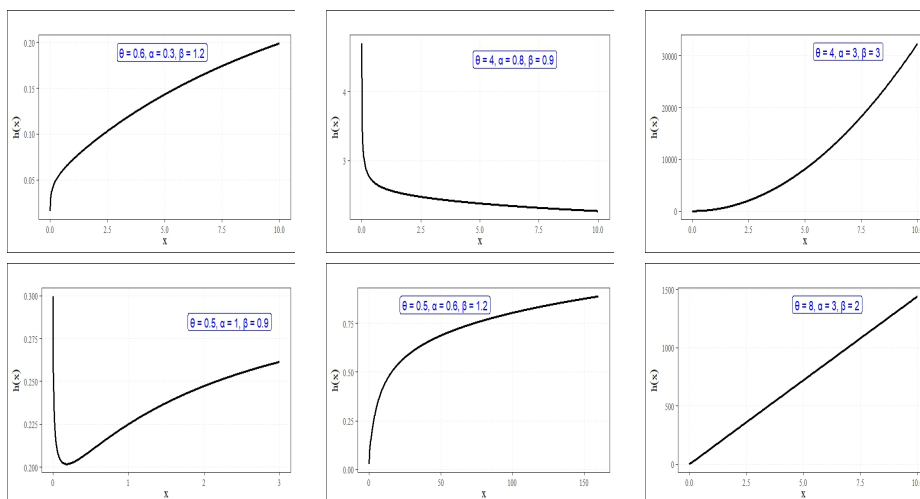
$$S(x) = \left(1 + \frac{\theta}{\theta+1} (\alpha x)^\beta\right) \exp \left[-\theta (\alpha x)^\beta \right]$$

$$h(x) = \frac{\beta \theta^\theta \alpha^\beta x^{\beta-1} (1 + \alpha^\beta x^\beta)}{\theta + 1 + \theta (\alpha x)^\beta}$$

است. نمودار تابع چگالی لیندلی-وایبول به ازای مقادیر مختلف پارامتر در شکل ۱ آمده است. تابع نرخ خطر مدل نمایی-وایبول می‌تواند دارای اشکال ثابت، یکنواخت افزایشی، یکنواخت کاهشی، تک مده و وانی شکل باشد. در نتیجه، این اشکال برای تابع نرخ خطر توزیع لیندلی-وایبول نیز برقرار خواهند بود (شکل ۲).



شکل ۱. نمودار تابع چگالی توزیع لیندلی-وایبول به ازای مقادیر مختلف پارامترها



شکل ۲. نمودار تابع خطر توزیع لیندلی-وایبول به ازای مقادیر مختلف پارامترها

۱.۱ تابع چندکی

تابع چندکی $Q(u)$ خانواده توزیع‌های $Li - G$ با وارون‌سازی معادله (۱) به دست می‌آید.

قضیه ۱. تابع چندکی $Q(u)$ خانواده $Li - G$ به صورت

$$Q(u) = G^{-1} \left\{ 1 - \left[\frac{(\theta + 1)(u - 1)}{W[(\theta + 1)(u - 1)e^{-\theta - 1}]} \right]^{1/\theta} \right\}, \quad 0 < u < 1$$

است، که در آن $W(z)$ شاخه منفی تابع لامبرت است و به عنوان وارون تابع $z = te^t$ تعریف می‌شود.

برهان: تغییر متغیر

$$z = 1 - G(x), \quad q = \frac{\theta}{\theta + 1} \quad (11)$$

را در نظر می‌گیریم و با اعمال آنها در رابطه (۱) تابع توزیع به صورت $F(x) = 1 - z^\theta + q z^\theta \log(z)$ حاصل می‌شود. برای به دست آوردن تابع چندکی باید معادله $u = 1 - z^\theta + q z^\theta \log(z)$ را نسبت به z حل کنیم، که با تغییر متغیرهای z و $t = \log z$ و رابطه $y = 1 - qt$ و $y = (1 - u)e^{-(\theta+1)}$ حاصل می‌شود که از ضرب طرفین آن در $-(\theta + 1)$ و تعریف متغیر جدید $y = -(\theta + 1)w$ داریم:

$$we^w = (\theta + 1)(u - 1)e^{-(\theta+1)}.$$

حال از تعریف تابع لامبرت W ، که وارون تابع $w \mapsto we^w$ است، نتیجه می‌شود:

$$w = W((\theta + 1)(u - 1)e^{-(\theta+1)})$$

که در عمل باید از شاخهٔ منفی آن، یعنی W_{-1} ، استفاده شود، زیرا برای $u \in (0, 1)$ آرگومان در بازهٔ $(-1/e, 0)$ قرار دارد. اکنون با توجه به اینکه $y = -(\theta + 1)w$ و $t = \frac{1-y}{q}$ ، خواهیم داشت: $t = \frac{1+\frac{w}{\theta+1}}{q}$. با جایگذاری در $z = e^t$ و استفاده از رابطه $z^\theta = e^{\theta t}$ داریم:

$$z^\theta = e^{\theta t} = e^{\theta \left(\frac{1+w/(\theta+1)}{q} \right)} = e^{\theta+1} e^w.$$

با توجه به این‌که $we^w = (\theta + 1)(u - 1)e^{-(\theta+1)}$ ، خواهیم داشت:

$$e^w = \frac{(\theta + 1)(u - 1)e^{-(\theta+1)}}{w},$$

در نتیجه:

$$z^\theta = \frac{(\theta + 1)(u - 1)}{w} = \frac{\theta(u - 1)}{q W((\theta + 1)(u - 1)e^{-(\theta+1)})}.$$

بنابراین

$$z = \left[\frac{\theta(u - 1)}{q W((\theta + 1)(u - 1)e^{-(\theta+1)})} \right]^{1/\theta}.$$

در نهایت با توجه به (۱۱)، تابع چنک به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$Q(u) = G^{-1} \left\{ 1 - \left[\frac{(\theta + 1)(u - 1)}{W[(\theta + 1)(u - 1)e^{-\theta-1}]} \right]^{1/\theta} \right\}.$$

۲ گشتاورهای رکورد بالای توزیع لیندلی وایبول

اگر $X_1, X_2, \dots$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع با تابع توزیع مشترک $F(x)$ باشد، مشاهده X_j را یک مقدار رکورد بالا گوییم هرگاه از مشاهدات قبل از خود بزرگتر باشد، یعنی $X_j > \max(X_1, \dots, X_{j-1})$. بنابر تعریف مقادیر رکورد بالا، زمانی که رکورد بالا در آن رخ می‌دهد یک متغیر تصادفی است و زمان رکورد مقادیر

بالا به صورت

$$U(1) = 1, U(n) = \max \{j | j < U(n-1), X_j > X_{U(n-1)}\}$$

تعریف می‌شود. بنابراین دنباله $\{X_{U(n)}, n \geq 1\}$ دنباله‌ای از آمارهای رکورد بالا خواهد بود. تعیین توزیع رکوردها، برآورد پارامترهای توزیع اولیه بر اساس رکوردها و تعیین توزیع اولیه بر اساس ویژگیهای رکورد از موارد مهم در مبحث رکوردها است. فرض کنید $X_{U(1)}, \dots, X_{U(n)}$ اولین n رکورد بالای یک توزیع باشد، آنگاه تابع چگالی $X_{U(n)}$ در نقطه x به صورت

$$f_n(x) = \frac{R^{n-1}(x)}{\Gamma(n)} f(x)$$

است، که در آن $R(x) = -\ln \bar{F}(x)$ (احسان الله و نوزورف، ۲۰۲۵). حال اگر به جای $F_X(x)$ به ترتیب از روابط (۵) و (۶) استفاده شود، تابع چگالی رکورد بالای $X_{U(n)}$ برای توزیع لیندلی-وایبول بصورت

$$f_n(x) = \frac{\beta \theta^\gamma \alpha^\beta}{(\theta + 1) \Gamma(n)} x^{\beta-1} (1 + (\alpha x)^\beta) \times \left(\theta (\alpha x)^\beta - \ln \left(1 + \frac{\theta}{\theta + 1} (\alpha x)^\beta \right) \right)^{n-1} e^{-\theta (\alpha x)^\beta}$$

است که با اعمال تغییر متغیرهای $t = (\alpha x)^\beta$ و $y = 1 + \frac{\theta t}{\theta + 1}$ به صورت

$$f_n(x) = \frac{\alpha \beta}{\Gamma(n)} \left(\frac{\theta}{\theta + 1} \right)^{1/\beta} (y - 1)^{\frac{\beta-1}{\beta}} (y(\theta + 1) - 1) e^{-(\theta+1)(y-1)} \times \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} (\theta + 1)^{n-1-k} (y - 1)^{n-1-k} (-\ln y)^k, \quad y \geq 1$$

حاصل می‌شود. گشتاور مرتبه r ام رکورد بالای مرتبه n ام به صورت

$$\mu_n^{(r)} = \frac{\theta^{1-\frac{1}{\beta}} e^{\theta+1}}{\Gamma(n)} \left[\sum_{k=0}^{n-1} \sum_{t=\gamma}^{n-k+1} \binom{n-1}{k} \binom{n-k+1}{t-\gamma} (\theta + 1)^{n-k} \times \frac{\partial^k}{\partial t^k} [(\theta + 1)^{-t} \Gamma(t, \theta + 1)] + \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{t=1}^{n-k} \binom{n-1}{k} \binom{n-k+1}{t-1} (\theta + 1)^{n-k-1} \times \frac{\partial^k}{\partial t^k} [(\theta + 1)^{-t} \Gamma(t, \theta + 1)] \right]$$

۲۹۰ استنباط برای توزیع لیندلی-وایبول با داده‌های رکوردی

است، که در آن، آخرین برابری با در نظر گرفتن معادله (۴.۳۵۸.۱) در **گرا د اشتاین و رژیک (۲۰۱۴)** محاسبه می‌شود. در اینجا $\Gamma(\cdot, \cdot)$ تابع گامای ناقص است که به صورت $\Gamma(v, a) = \int_a^\infty x^{v-1} e^{-x} dx$ تعریف می‌شود. تابع چگالی احتمال توأم رکوردهای بالای X_{U_n} و X_{U_m} ($m < n$) یک توزیع به صورت

$$f_{m,n}(x, y) = \frac{f(y)}{\Gamma(m)\Gamma(n-m)} [-\ln(1 - F(x))]^{m-1} \left(\frac{f(x)}{1 - F(x)} \right) \times \left[\ln \left(\frac{1 - F(x)}{1 - F(y)} \right) \right]^{n-m-1} \quad 0 < x < y < \infty, \quad m = 1, 2, \dots, m < n \quad (12)$$

ارائه شده است (**احسان الله و نوزورف، ۲۰۲۵**). بنابراین تابع چگالی احتمال توأم رکوردهای بالای X_{U_n} و X_{U_m} توزیع لیندلی-وایبول بر اساس رابطه (۱۲) به صورت

$$f_{m,n}(x, y) = \frac{\beta\theta^\alpha}{(\theta + 1)\Gamma(m)\Gamma(n-m)} \left(\theta(\alpha x)^\beta - \ln \left(1 + \frac{\theta}{\theta + 1} (\alpha x)^\beta \right) \right)^{m-1} \times \exp \left[-\theta((\alpha x)^\beta + (\alpha y)^\beta) \right] \left(1 + \frac{\theta}{\theta + 1} (\alpha x)^\beta \right) (\alpha^\beta y^{\beta-1} + \alpha^\beta y^{\beta-1}) \times \left[\ln \left(\frac{-\theta(\alpha x)^\beta + \ln \left(1 + \frac{\theta}{\theta + 1} (\alpha x)^\beta \right)}{-\theta(\alpha y)^\beta + \ln \left(1 + \frac{\theta}{\theta + 1} (\alpha y)^\beta \right)} \right) \right]^{n-m-1}$$

است. گشتاور مرتبه (r, s) ام رکوردهای بالای X_{U_n} و X_{U_m} بصورت

$$\mu_{m,n}^{(r,s)} = \int_0^\infty \int_x^\infty x^r y^s f_{m,n}(x, y) dy dx, \quad r, s = 0, 1, 2, \dots$$

تعریف می‌شود. محاسبه این انتگرال به روش غیر عددی بسیار دشوار است. بنابراین برای محاسبه آن با استفاده از روشهای عددی و بسته‌های نرم افزاری R انجام خواهد شد. جدول ۱ میانگین آمارهای رکورد بالای توزیع لیندلی-وایبول را برای مقادیر مختلف پارامترهای α ، β و θ نشان می‌دهد. نتایج نشان می‌دهد که با افزایش پارامترهای θ و β ، میانگین رکوردها کاهش یافته و با افزایش مرتبه رکورد n ، مقدار میانگین به صورت یکنواخت افزایش می‌یابد. همچنین افزایش α موجب کاهش میانگین رکوردها می‌شود. این رفتارها با ویژگی‌های نظری توزیع لیندلی-وایبول سازگار بوده و بیانگر انعطاف بالای آن در مدل‌سازی داده‌های رکوردی است. در جدول ۲ مقادیر کواریانس و واریانس رکورده آمده است. ملاحظه می‌گردد که با افزایش n و β واریانس رکوردها افزایش می‌یابد ولی با افزایش θ و α ، واریانس رکوردها کاهش می‌یابد.

جدول ۰۱. میانگین آمارهای رکورد بالای توزیع لیندلی-وایبول

$\theta = 3/5$	$\theta = 3$	$\theta = 2/5$	$\theta = 2$	$\theta = 1/5$	$\theta = 1$	$\theta = 0/5$	n	(α, β)
۰/۴۷	۰/۶۷	۱/۰۱	۱/۶۷	۳/۲۰	۸/۰۰	۳۷/۳۳	۱	$(0.5, 0.5)$
۱/۳۸	۱/۹۳	۲/۹۰	۴/۷۵	۹/۰۰	۲۲/۰۰	۹۸/۹۴	۲	
۲/۶۹	۳/۷۷	۵/۶۱	۹/۱۴	۱۷/۱۳	۴۱/۲۸	۱۸۱/۵۳	۳	
۴/۴۰	۶/۱۴	۹/۱۰	۱۴/۷۵	۲۷/۴۵	۶۵/۴۹	۲۸۳/۷۱	۴	
۶/۴۹	۹/۰۳	۱۳/۳۵	۲۱/۵۵	۳۹/۸۷	۹۴/۴۴	۴۰۴/۷۴	۵	
۰/۷۰	۰/۸۳	۱/۰۳	۱/۳۳	۱/۸۷	۳/۰۰	۶/۶۷	۱	$(0.5, 1)$
۱/۳۷	۱/۶۳	۲/۰۰	۲/۵۸	۳/۵۷	۵/۶۴	۱۲/۱۴	۲	
۲/۰۳	۲/۴۱	۲/۹۵	۳/۷۷	۵/۱۹	۸/۱۱	۱۷/۱۵	۳	
۲/۶۸	۳/۱۷	۳/۸۷	۴/۹۳	۶/۷۵	۱۰/۴۷	۲۱/۹۴	۴	
۳/۳۱	۳/۹۲	۴/۷۷	۶/۰۷	۸/۲۸	۱۲/۷۸	۲۶/۵۸	۵	
۰/۲۴	۰/۳۳	۰/۵۰	۰/۸۳	۱/۶۰	۴/۰۰	۱۸/۶۷	۱	$(1, 0.5)$
۰/۶۹	۰/۹۷	۱/۴۵	۲/۳۸	۴/۵۰	۱۱/۰۰	۴۹/۴۷	۲	
۱/۳۴	۱/۸۸	۲/۸۱	۴/۵۷	۸/۵۶	۲۰/۶۴	۹۰/۷۶	۳	
۲/۲۰	۳/۰۷	۴/۵۵	۷/۳۸	۱۳/۷۲	۳۲/۷۴	۱۴۱/۸۶	۴	
۳/۲۴	۴/۵۱	۶/۶۸	۱۰/۷۷	۱۹/۹۴	۴۷/۲۲	۲۰۲/۳۷	۵	
۰/۳۵	۰/۴۲	۰/۵۱	۰/۶۷	۰/۹۳	۱/۵۰	۳/۳۳	۱	$(1, 1)$
۰/۶۹	۰/۸۲	۱/۰۰	۱/۲۹	۱/۷۹	۲/۸۲	۶/۰۷	۲	
۱/۰۲	۱/۲۰	۱/۴۷	۱/۸۹	۲/۵۹	۴/۰۵	۸/۵۸	۳	
۱/۳۴	۱/۵۸	۱/۹۳	۲/۴۷	۳/۳۸	۵/۲۴	۱۰/۹۷	۴	
۱/۶۶	۱/۹۶	۲/۳۸	۳/۰۳	۴/۱۴	۶/۳۹	۱۳/۲۹	۵	

۳ برآورد ماکسیمم درست‌نمایی

فرض کنید که $X_{U(1)} = y_1, \dots, X_{U(n)} = y_n$ اولین n رکورد بالای یک توزیع باشد، با فرض $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$ تابع درست‌نمایی به صورت

$$L(\theta|\mathbf{y}) = f(y_n, \theta) \prod_{i=1}^{n-1} \frac{f(y_i, \theta)}{1 - F(y_i, \theta)}.$$

جدول ۰.۲. واریانس و کوواریانس آمارهای رکورد بالای توزیع لیندلی-وایبول

$\theta = ۳/۵$	$\theta = ۳$	$\theta = ۲/۵$	$\theta = ۲$	$\theta = ۱/۵$	$\theta = ۱$	$\theta = ۰/۵$	m	n	(α, β)
۰/۴۶	۰/۶۴	۰/۹۵	۱/۵۶	۲/۹۲	۷/۰۰	۳۰/۱۴	۱		
۰/۴۵	۰/۶۲	۰/۹۲	۱/۴۹	۲/۷۶	۶/۵۳	۲۷/۱۲	۲		
۰/۴۴	۰/۶۱	۰/۹۰	۱/۴۵	۲/۶۷	۶/۲۶	۲۴/۵۳	۳	۱	
۰/۴۳	۰/۶۰	۰/۸۸	۱/۴۲	۲/۶۰	۶/۰۹	۲۰/۸۴	۴		
۰/۴۲	۰/۵۹	۰/۸۷	۱/۳۹	۲/۵۶	۵/۹۷	۱۵/۱۰	۵		
۰/۸۷	۱/۲۱	۱/۷۸	۲/۸۶	۵/۱۷	۱۲/۲۱	۴۹/۸۹	۲		
۰/۸۵	۱/۱۷	۱/۷۳	۲/۷۷	۵/۰۶	۱۱/۷۱	۴۵/۲۲	۳	۲	
۰/۸۴	۱/۱۶	۱/۷۰	۲/۷۲	۴/۹۳	۱۱/۳۹	۳۸/۴۸	۴		
۰/۸۳	۱/۱۵	۱/۶۸	۲/۶۷	۴/۸۵	۱۱/۱۶	۲۷/۹۶	۵		
									$(۰,۵,۱)$
۱/۲۶	۱/۷۲	۲/۵۴	۴/۰۴	۷/۳۱	۱۶/۸۶	۶۶/۱۵	۳		
۱/۲۴	۱/۷۰	۲/۴۹	۳/۹۶	۷/۱۶	۱۶/۴۰	۵۶/۸۷	۴	۳	
۱/۲۲	۱/۶۶	۲/۴۶	۳/۹۰	۶/۹۴	۱۶/۰۷	۴۲/۱۰	۵		
۱/۶۲	۲/۲۲	۳/۲۶	۵/۱۷	۹/۳۲	۲۱/۲۷	۸۰/۱۶	۴	۴	
۱/۶۱	۲/۲۱	۳/۲۲	۵/۰۹	۹/۱۶	۲۰/۸۶	۶۲/۱۷	۵		
۲/۰۱	۲/۶۹	۳/۹۷	۶/۲۶	۱۱/۱۹	۲۵/۵۷	۹۶/۱۸	۵	۵	
۰/۱۲	۰/۱۶	۰/۲۴	۰/۳۸	۰/۷۴	۱/۷۵	۷/۵۶	۱		
۰/۱۱	۰/۱۶	۰/۲۳	۰/۳۷	۰/۶۹	۱/۶۳	۶/۹۰	۲		
۰/۱۱	۰/۱۵	۰/۲۲	۰/۳۶	۰/۶۷	۱/۵۷	۶/۵۶	۳	۱	
۰/۱۱	۰/۱۵	۰/۲۲	۰/۳۵	۰/۶۵	۱/۵۲	۶/۳۶	۴		
۰/۱۱	۰/۱۵	۰/۲۲	۰/۳۴	۰/۶۴	۱/۴۹	۶/۲۲	۵		
۰/۲۱	۰/۳۰	۰/۴۵	۰/۷۲	۱/۳۰	۳/۰۵	۱۲/۶۴	۲		
۰/۲۱	۰/۲۹	۰/۴۳	۰/۶۹	۱/۲۶	۲/۹۳	۱۲/۰۳	۲	۲	
۰/۲۱	۰/۲۹	۰/۴۳	۰/۶۸	۱/۲۳	۲/۸۵	۱۱/۶۶	۴		
۰/۲۱	۰/۲۹	۰/۴۲	۰/۶۷	۱/۲۱	۲/۷۹	۱۱/۴۰	۵		
									$(۱,۱)$
۰/۳۱	۰/۴۴	۰/۶۵	۱/۰۱	۱/۸۵	۴/۲۴	۱۷/۱۹	۳		
۰/۳۰	۰/۴۲	۰/۶۲	۰/۹۸	۱/۷۹	۴/۱۰	۱۶/۶۶	۴	۳	
۰/۳۰	۰/۴۲	۰/۶۱	۰/۹۷	۱/۷۶	۴/۰۲	۱۶/۳۰	۵		
۰/۴۵	۰/۵۷	۰/۸۳	۱/۲۸	۲/۳۰	۵/۲۸	۲۱/۵۵	۴	۴	
۰/۴۰	۰/۵۵	۰/۸۰	۱/۲۷	۲/۲۹	۵/۲۲	۲۱/۰۸	۵		
۰/۵۰	۰/۶۷	۱/۰۲	۱/۵۹	۲/۸۰	۶/۳۹	۲۵/۸۰	۵	۵	

است. بنابراین برای توزیع لیندلی وایبول، تابع درستنمایی بر اساس n رکورد بالا به صورت

$$L(\theta|\mathbf{y}) = \frac{\beta^n \theta^{\gamma n} \alpha^{n\beta}}{(\theta + 1)^n} \left(y_n^{\beta-1} + \alpha^\beta y_n^{\gamma\beta-1} \right) \exp \left[-\theta(\alpha y_n)^\beta \right] \prod_{i=1}^{n-1} \frac{y_i^{\beta-1} + \alpha^\beta y_i^{\gamma\beta-1}}{1 + \frac{\theta}{\theta+1} (\alpha y_i)^\beta}$$

است که با لگاریتم گرفتن از طرفین آن رابطه

$$\begin{aligned} \ell = & n \ln \beta + \gamma n \ln \theta + n \beta \ln \alpha - n \ln(\theta + 1) + (\beta - 1) \ln(y_n) + \ln \left(1 + \alpha^\beta y_n^\beta \right) \\ & - \theta(\alpha y_n)^\beta + (\beta - 1) \sum_{i=1}^{n-1} \ln(y_i) + \sum_{i=1}^{n-1} \ln \left(\frac{1 + \alpha^\beta y_i^\beta}{1 + \frac{\theta}{\theta+1} \alpha^\beta y_i^\beta} \right) \end{aligned} \quad (13)$$

حاصل می‌شود. بنابراین برآوردهای ماکسیمم درستنمایی پارامترهای α ، β و θ با مشتق گرفتن از رابطه (۱۳) نسبت به α ، β و θ و برابر صفر قرار دادن آن‌ها به دست می‌آید:

$$\frac{\partial \ell}{\partial \theta} = \frac{\gamma n}{\theta} - \frac{n}{\theta + 1} - (\alpha y_n)^\beta - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(\alpha y_i)^\beta (\theta + 1 + \theta(\alpha y_i)^\beta)}{(\theta + 1)^2} = 0. \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ell}{\partial \alpha} = & \frac{n\beta}{\alpha} + \frac{\beta y_n^\beta \alpha^{\beta-1}}{1 + \alpha^\beta y_n^\beta} - \theta \beta y_n^\beta \alpha^{\beta-1} \\ & + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\beta \alpha^{\beta-1} y_i^\beta}{(\theta + 1) \left(1 + \frac{\theta}{\theta+1} \alpha^\beta y_i^\beta \right) (1 + \alpha^\beta y_i^\beta)} = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ell}{\partial \beta} = & \frac{n}{\beta} + n \ln \alpha + \ln y_n + \frac{(\alpha y_n)^\beta \ln(\alpha y_n)}{1 + (\alpha y_n)^\beta} - \theta(\alpha y_n)^\beta \ln(\alpha y_n) \\ & + \sum_{i=1}^{n-1} \ln(y_i) + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\alpha^\beta y_i^\beta \ln(\alpha y_i)}{(\theta + 1) \left(1 + \frac{\theta}{\theta+1} \alpha^\beta y_i^\beta \right) (1 + \alpha^\beta y_i^\beta)} = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

معادلات (۱۴)، (۱۵) و (۱۶) فرم بسته قابل حل ندارند و باید با روش‌های عددی حل شوند. برای این منظور از تابع optim() در نرم‌افزار R و با تعیین روش "L-BFGS-B" استفاده شد.

۴ فواصل اطمینان تقریبی

از آنجایی که برآوردهای ماکسیمم درستنمایی پارامترهای α ، β و θ را نمی‌توان به صورت بسته یافت، لذا نمی‌توانیم فواصل اطمینان دقیقی را برای پارامترها بدست آوریم. بنابر تقریب نمونه بزرگ می‌دانیم که برآورد ماکسیمم درستنمایی

بردار پارامتر $\hat{\mu}=(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\theta})$ دارای توزیع تقریبی $(\hat{\mu}-\mu) \sim N_{\mathfrak{r}}(\circ, I^{-1}(\mu))$ است (لاولس، ۲۰۱۱)، که در آن

$$I^{-1}(\mu)=\left[\begin{array}{ccc}-\frac{\partial^{\mathfrak{r}} \ell}{\partial \theta^{\mathfrak{r}}} & -\frac{\partial^{\mathfrak{r}} \ell}{\partial \theta \partial \alpha} & -\frac{\partial^{\mathfrak{r}} \ell}{\partial \theta \partial \beta} \\ -\frac{\partial^{\mathfrak{r}} \ell}{\partial \theta \partial \alpha} & -\frac{\partial^{\mathfrak{r}} \ell}{\partial \alpha^{\mathfrak{r}}} & -\frac{\partial^{\mathfrak{r}} \ell}{\partial \alpha \partial \beta} \\ -\frac{\partial^{\mathfrak{r}} \ell}{\partial \theta \partial \beta} & -\frac{\partial^{\mathfrak{r}} \ell}{\partial \alpha \partial \beta} & -\frac{\partial^{\mathfrak{r}} \ell}{\partial \beta^{\mathfrak{r}}}\end{array}\right]^{-1}=\left[\begin{array}{ccc}\text{Var}(\hat{\theta}) & \text{Cov}(\hat{\theta}, \hat{\alpha}) & \text{Cov}(\hat{\theta}, \hat{\beta}) \\ \text{Cov}(\hat{\theta}, \hat{\alpha}) & \text{Var}(\hat{\alpha}) & \text{Cov}(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) \\ \text{Cov}(\hat{\theta}, \hat{\beta}) & \text{Cov}(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) & \text{Var}(\hat{\beta})\end{array}\right]$$

فرض کنید $\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\theta}$ و به ترتیب برآوردهای ماکسیم درستنمایی α, β, θ بر اساس رکوردهای بالا باشند. در این صورت، فواصل اطمینان مجانبی $\% (1-\gamma) ۱۰۰$ برای این پارامترها به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$\hat{\alpha} \pm Z_{\frac{\gamma}{2}} \sqrt{\text{Var}(\hat{\alpha})}, \quad \hat{\beta} \pm Z_{\frac{\gamma}{2}} \sqrt{\text{Var}(\hat{\beta})}, \quad \hat{\theta} \pm Z_{\frac{\gamma}{2}} \sqrt{\text{Var}(\hat{\theta})}$$

که در آن $\text{Var}(\hat{\theta}) = -\frac{1}{n} \frac{\partial^{\mathfrak{r}} L}{\partial \theta^{\mathfrak{r}}} \big|_{\theta=\hat{\theta}}$ و $\text{Var}(\hat{\beta}) = -\frac{1}{n} \frac{\partial^{\mathfrak{r}} L}{\partial \beta^{\mathfrak{r}}} \big|_{\beta=\hat{\beta}}$ ، $\text{Var}(\hat{\alpha}) = -\frac{1}{n} \frac{\partial^{\text{Var}}}{\partial \alpha^{\mathfrak{r}}} \big|_{\alpha=\hat{\alpha}}$ صدک بالای $\frac{\gamma}{2}$ توزیع نرمال استاندارد است. از آنجا که این فواصل اطمینان ممکن است منجر به کران‌های پایین منفی شوند، برای رفع این مشکل از تبدیل لگاریتمی استفاده می‌کنیم. با به کارگیری روش دلتا، توزیع‌های نرمال مجانبی $\ln(\alpha)$ ، $\ln(\beta)$ و $\ln(\theta)$ به ترتیب به صورت

$$\begin{aligned}\sqrt{n}(\ln \hat{\alpha} - \ln \alpha) &\sim N\left(\circ, \frac{\text{Var}(\hat{\alpha})}{\alpha^{\mathfrak{r}}}\right) \\ \sqrt{n}(\ln \hat{\beta} - \ln \beta) &\sim N\left(\circ, \frac{\text{Var}(\hat{\beta})}{\beta^{\mathfrak{r}}}\right) \\ \sqrt{n}(\ln \hat{\theta} - \ln \theta) &\sim N\left(\circ, \frac{\text{Var}(\hat{\theta})}{\theta^{\mathfrak{r}}}\right).\end{aligned}$$

به دست می‌آیند. در نتیجه، فواصل اطمینان مجانبی $\% (1-\gamma) ۱۰۰$ برای $\ln \alpha$ ، $\ln \beta$ و $\ln \theta$ به ترتیب

$$\begin{aligned}\ln \hat{\alpha} \pm Z_{\frac{\gamma}{2}} \frac{\sqrt{\text{Var}(\hat{\alpha})}}{\hat{\alpha}} &\equiv (L_1, U_1) \\ \ln \hat{\beta} \pm Z_{\frac{\gamma}{2}} \frac{\sqrt{\text{Var}(\hat{\beta})}}{\hat{\beta}} &\equiv (L_2, U_2) \\ \ln \hat{\theta} \pm Z_{\frac{\gamma}{2}} \frac{\sqrt{\text{Var}(\hat{\theta})}}{\hat{\theta}} &\equiv (L_3, U_3).\end{aligned}$$

هستند. در نهایت، با استفاده از تبدیل معکوس لگاریتم، فواصل اطمینان مجانبی $\% (1-\gamma) ۱۰۰$ برای α, β, θ به ترتیب به صورت (e^{L_1}, e^{U_1}) ، (e^{L_2}, e^{U_2}) و (e^{L_3}, e^{U_3}) به دست می‌آیند.

۵ پیش‌بینی مقادیر رکورد

فرض کنید که n مقدار نخست رکورد بالای از جمعیتی با تابع چگالی احتمال $f(x; \mu)$ موجود باشد و بخواهیم $(m > n), y = X_{U(m)}$ را با داشتن رکوردهای بالای $X_{U(1)}, \dots, X_{U(n)}$ پیش‌بینی نماییم، تابع درستنمایی توأم پیش‌بینی کننده توسط **باساک و بالاکریشنان (۲۰۰۳)** به صورت

$$L(y, \mu, X) = \prod_{i=1}^n r(X_{U(i)}; \mu) \frac{[R(y; \mu) - R(X_{U(n)}; \mu)]^{m-n-1}}{\Gamma(m-n)} f(y; \mu). \quad (۱۷)$$

ارائه شده است، که در آن μ بردار پارامتر است. بنابراین لگاریتم تابع درستنمایی پیش‌بینی کننده برای توزیع لندلی-وایبول به صورت

$$\begin{aligned} \log L = & \gamma \ln \beta + \gamma \ln \theta - \ln(\theta + 1) + \ln(\alpha^\beta y^{\beta-1} + \alpha^\gamma y^{\gamma\beta-1}) - \theta(\alpha y)^\beta \\ & + (m-n-1) \ln \left[\ln \left(\frac{\theta + 1 + \theta(\alpha x_{U(n)})^\beta}{\theta + 1 + \theta(\alpha y)^\beta} \right) + \theta \alpha^\beta (y^\beta - x_{U(n)}^\beta) \right] \\ & + \sum_{i=1}^n \ln(\alpha^\beta x_i^{\beta-1} + \alpha^\gamma x_i^{\gamma\beta-1}) - \sum_{i=1}^n \ln(\theta + 1 + \theta(\alpha x_i)^\beta) \end{aligned} \quad (۱۸)$$

حاصل می‌شود. بنابراین، معادلات نرمال به صورت

$$\begin{aligned} I) \quad \frac{\partial \log L}{\partial \theta} = & \frac{\gamma}{\theta} - \frac{1}{\theta+1} - (\alpha y)^\beta - \sum_{i=1}^n \frac{1 + (\alpha x_i)^\beta}{\theta + 1 + \theta(\alpha x_i)^\beta} \\ & + (m-n-1) \frac{K'(\theta) + \alpha^\beta (y^\beta - x_{U(n)}^\beta)}{K(\theta) + \theta \alpha^\beta (y^\beta - x_{U(n)}^\beta)} = 0. \end{aligned}$$

ظاهر می‌شود که در آن $K(\theta) = \ln \left(\frac{\theta + 1 + \theta(\alpha x_{U(n)})^\beta}{\theta + 1 + \theta(\alpha y)^\beta} \right)$ و $K'(\theta) = \frac{\partial K(\theta)}{\partial \theta}$ است.

$$\begin{aligned} II) \quad \frac{\partial \log L}{\partial \beta} = & \frac{\gamma}{\beta} + \frac{A'(\beta)}{A(\beta)} - \theta(\alpha y)^\beta \ln(\alpha y) + \sum_{i=1}^n \frac{A'_i(\beta)}{A_i(\beta)} - \sum_{i=1}^n \frac{\theta(\alpha x_i)^\beta \ln(\alpha x_i)}{D(x_i)} \\ & + \frac{m-n-1}{S(\beta)} \left[\frac{D'(x_{U(n)})}{D(x_{U(n)})} - \frac{D'(y)}{D(y)} + \theta \alpha^\beta [(\ln \alpha)(y^\beta - x_{U(n)}^\beta) \right. \\ & \left. + (y^\beta \ln y - x_{U(n)}^\beta \ln x_{U(n)}) \right] = 0. \end{aligned}$$

بطوری که

$$\begin{aligned}
 A(\beta) &= \alpha^\beta y^{\beta-\imath} + \alpha^{\imath\beta} y^{\imath\beta-\imath} \\
 A_i(\beta) &= \alpha^\beta x_i^{\beta-\imath} + \alpha^{\imath\beta} x_i^{\imath\beta-\imath}, \quad (i = \imath, \dots, n) \\
 D(t) &= \theta + \imath + \theta(\alpha t)^\beta \\
 S(\beta) &= \ln \frac{D(x_{U(n)})}{D(y)} + \theta \alpha^\beta (y^\beta - x_{U(n)}^\beta) \\
 A'(\beta) &= \alpha^\beta y^{\beta-\imath} (\ln \alpha + \ln y) + \alpha^{\imath\beta} y^{\imath\beta-\imath} (\imath \ln \alpha + \imath \ln y) \\
 A'_i(\beta) &= \alpha^\beta x_i^{\beta-\imath} (\ln \alpha + \ln x_i) + \alpha^{\imath\beta} x_i^{\imath\beta-\imath} (\imath \ln \alpha + \imath \ln x_i) \\
 D'(t) &= \theta(\alpha t)^\beta \ln(\alpha t).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 III) \quad \frac{\partial \log L}{\partial \alpha} &= \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\ln A(\beta) - \theta(\alpha y)^\beta \right] \\
 &\quad + (m - n - \imath) \frac{\frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\ln \frac{D(x_{U(n)})}{D(y)} + \theta \alpha^\beta (y^\beta - x_{U(n)}^\beta) \right]}{S(\theta, \beta)} \\
 &\quad + \sum_{i=\imath}^n \frac{\partial}{\partial \alpha} \ln A_i(\beta) - \sum_{i=\imath}^n \frac{\partial}{\partial \alpha} \ln D(x_i) = 0.
 \end{aligned}$$

بطوری که

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial \alpha} \ln A(\beta) &= \frac{\beta \alpha^{\beta-\imath} y^{\beta-\imath} + \imath \beta \alpha^{\imath\beta-\imath} y^{\imath\beta-\imath}}{A(\beta)}, \\
 \frac{\partial}{\partial \alpha} [-\theta(\alpha y)^\beta] &= -\theta \beta (\alpha y)^{\beta-\imath} y, \\
 \frac{\partial}{\partial \alpha} \ln D(t) &= \frac{\theta \beta (\alpha t)^{\beta-\imath} t}{D(t)}, \\
 \frac{\partial}{\partial \alpha} \ln \frac{D(x_{U(n)})}{D(y)} &= \frac{\theta \beta (\alpha x_{U(n)})^{\beta-\imath} x_{U(n)}}{D(x_{U(n)})} - \frac{\theta \beta (\alpha y)^{\beta-\imath} y}{D(y)}, \\
 \frac{\partial}{\partial \alpha} [\theta \alpha^\beta (y^\beta - x_{U(n)}^\beta)] &= \theta \beta \alpha^{\beta-\imath} (y^\beta - x_{U(n)}^\beta),
 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \ln A_i(\beta) = \frac{\beta \alpha^{\beta-1} x_i^{\beta-1} + \gamma \beta \alpha^{\gamma \beta-1} x_i^{\gamma \beta-1}}{A_i(\beta)},$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \ln D(x_i) = \frac{\theta \beta (\alpha x_i)^{\beta-1} x_i}{D(x_i)}.$$

$$IV) \quad \frac{\partial \log L}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \ln(A(y)) - \theta \frac{\partial}{\partial y} (\alpha y)^\beta + (m - n - 1) \frac{S'(y)}{S(y)} = 0.$$

بطوری که

$$\frac{\partial}{\partial y} \ln(A(y)) = \frac{A'(y)}{A(y)} = \frac{\alpha^\beta (\beta - 1) y^{\beta-2} + \alpha^{\gamma \beta} (\gamma \beta - 1) y^{\gamma \beta-2}}{\alpha^\beta y^{\beta-1} + \alpha^{\gamma \beta} y^{\gamma \beta-1}},$$

$$\frac{\partial}{\partial y} [-\theta (\alpha y)^\beta] = -\theta \beta (\alpha y)^{\beta-1} \alpha,$$

$$S'(y) = -\frac{\theta \beta (\alpha y)^{\beta-1} \alpha}{D(y)} + \theta \alpha^\beta \beta y^{\beta-1}.$$

۵.۱ مثال کاربردی

داده‌های زیر بیانگر مقادیر فراگذشت دبی اوج سیلاب (بر حسب مترمکعب بر ثانیه) در رودخانه ویتون^۱ در نزدیکی شهر کارکراس^۲ در ایالت یوکان^۳ کانادا است. این داده‌ها شامل ۷۲ مقدار فراگذشت مربوط به سال‌های ۱۹۵۸ تا ۱۹۸۴ بوده و تا یک رقم اعشار گرد شده‌اند (چولاکیان و استفانز، ۲۰۰۱). با استفاده از آزمون کلموگروف-اسمیرنوف

۱/۷	۲/۲	۱۴/۴	۱/۱	۰/۴	۲۰/۶	۵/۳	۰/۷	۱/۹	۱۳/۰	۱۲/۰	۹/۳
۱/۴	۱۸/۷	۸/۵	۲۵/۵	۱۱/۶	۱۴/۱	۲۲/۱	۱/۱	۲/۵	۱۴/۴	۱/۷	۳۷/۶
۰/۶	۲/۲	۳۹/۰	۰/۳	۱۵/۰	۱۱/۰	۷/۳	۲۲/۹	۱/۷	۰/۱	۱/۱	۰/۶
۹/۰	۱/۷	۷/۰	۲۰/۱	۰/۴	۲/۸	۱۴/۱	۹/۹	۱۰/۴	۱۰/۷	۳۰/۰	۳/۶
۵/۶	۳۰/۸	۱۳/۳	۴/۲	۲۵/۵	۳/۴	۱۱/۹	۲۱/۵	۲۷/۶	۳۶/۴	۲/۷	۶۴/۰
۱/۵	۲/۵	۲۷/۴	۱/۰	۲۷/۱	۲۰/۲	۱۶/۸	۵/۳	۹/۷	۲۷/۵	۲/۵	۲۷/۰

مناسب بودن توزیع لیندلی-وایبول با برآوردهای ماکسیمم درست‌نمایی محاسبه شده و $\hat{\theta} = ۲/۴۱۹۰$ و $\hat{\alpha} = ۰/۰۴۲۵$ و $\hat{\beta} = ۰/۸۶۸۳$ بدست آمد و مقدار آماره آزمون و $-p$ مقدار متناظر با آن به ترتیب برابر $۰/۱۰۶۷$ و $۰/۳۸۶$ حاصل شد که بیانگر این است که $LE(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\theta})$ به درستی به این داده‌ها برازش داده شده است. همچنین نمودارهای TTT، احتمال-احتمال، تابع توزیع برازش داده شده در برابر تابع توزیع تجربی و بافت نگار داده‌ها همزمان با تابع احتمال

^۱Wheaton River

^۲Carcross

^۳Yukon Territory

برازش داده شده برای این داده‌ها در شکل ۳ نشان داده شده است که موید برازش درست توزیع لندلی-وایبول به این داده‌ها است. تقعر نمودار TTT بیانگر این است که داده‌ها تقریباً دارای نرخ خرابی ثابت یا کمی افزایشی هستند و چون تابع نرخ خطر توزیع لندلی-وایبول از این ویژگی برخوردار است، بنابراین از این جهت نیز توزیع مناسبی است. از طرفی **عفیفی و همکاران (۲۰۱۸)** به منظور مقایسه برازش‌های مدل لندلی-وایبول با سایر توزیع‌ها، از آماره‌های اندرسون-دارلینگ (A^*) و کرامر-فون میزس (W^*) استفاده نمودند. این دو آماره به طور گسترده برای مقایسه مدل‌های غیر تو در تو و تعیین میزان انطباق یک تابع توزیع تجمعی خاص با توزیع تجربی یک مجموعه داده معین استفاده می‌شوند. این آماره‌ها به صورت زیر ارائه می‌شوند:

$$A^* = \left(\frac{9}{4n^2} + \frac{3}{4n} + 1 \right) \left\{ n + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (2j-1) \log \left(\frac{z_i}{1 - z_{n-j+1}} \right) \right\}$$

$$W^* = \left(\frac{1}{2n} + 1 \right) \left(\sum_{j=1}^n \left(z_i - \frac{2j-1}{2n} \right)^2 + \frac{1}{12n} \right),$$

که در آن $z_i = F(y_j)$ و مقادیر y_j مشاهدات مرتب‌شده هستند. آنها نشان دادند که مقدار این دو آماره در توزیع لندلی-وایبول در مقایسه با چند توزیع دیگر نظیر وایبول، وایبول-لندلی، بتا-وایبول و ... کمترین مقدار بوده است و بنابراین مدل مناسب‌تری برای این داده‌ها است. آماره‌های کرامر-فون میزس و اندرسون-دارلینگ برای این توزیع‌ها در جدول ۳ آمده است.

جدول ۳. آماره‌های کرامر-فون میزس و اندرسون-دارلینگ		
A^*	W^*	توزیع
۰/۷۲۸۹	۰/۱۲۵۷	وایبول
۰/۷۱۵۹	۰/۱۲۲۸	وایبول-لندلی
۱/۳۰۵۰	۰/۲۳۵۰	بتا-وایبول
۰/۷۰۷۶	۰/۱۲۱۲	لندلی-وایبول
۰/۷۴۱۸	۰/۱۲۸۹	وایبول-فرشه
۰/۹۱۴۴	۰/۱۶۲۳	هندسی وایبول مکمل تبدیل یافته
۰/۹۲۳۰	۰/۱۶۴۲	کوماراسوامی-وایبول
۱/۰۴۷۰	۰/۱۸۷۵	گاما-وایبول

رکوردهای بالا این مجموعه داده‌ها به صورت ۱۷, ۲/۲, ۱۴/۴, ۲۰/۶, ۲۵/۵, ۳۷/۶, ۳۹, ۶۴ در دستمای (۱۷) برآوردها پارامترها برابر $\hat{\alpha} = ۰/۵۵۱$ ، $\hat{\beta} = ۰/۹۹۱$ و $\hat{\theta} = ۱/۱۵۲$ و برآورد رکورد بعدی $\hat{y}_{MLE} \approx ۷۰/۷$ شد. این مقدار از آخرین رکورد مشاهده شده (۶۴) بزرگ‌تر است، که مطابق انتظار است، زیرا رکورد بعدی همواره باید از رکورد قبلی بزرگ‌تر باشد. برای بررسی پایداری و تغییرپذیری پیش‌بینی، روش بوت استرپ با

۵۰۰ نمونه باز نمونه‌گیری انجام شد. در هر نمونه:

۱. نمونه‌ای با جایگذاری از داده‌های اصلی انتخاب شد.
۲. رکوردهای بالای نمونه استخراج شدند.
۳. پارامترهای توزیع به روش ماکسیمم درستنمایی برآورد شدند.
۴. رکورد بعدی بر اساس پارامترهای برآورد شده محاسبه شد.

نتایج بوت استرپ به شرح زیر است:

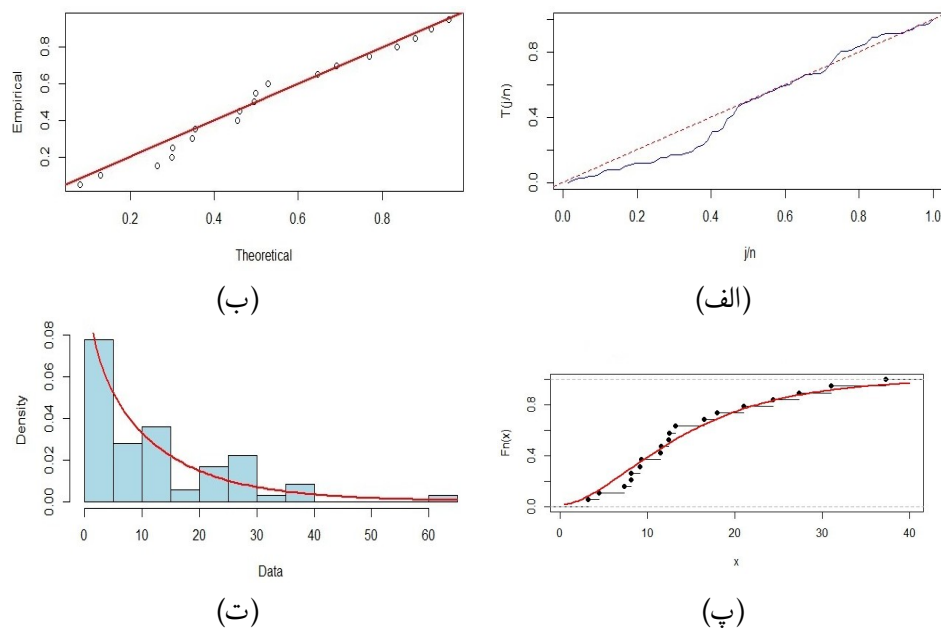
- تعداد نمونه‌های معتبر: ۴۸۸۹
- میانگین رکورد بعدی پیش‌بینی شده با: ۶۸/۴
- فاصله اطمینان ۹۵٪ برای رکورد بعدی: [۶۴/۲, ۸۰/۳]

همان‌طور که مشاهده می‌شود، کران پایین فاصله اطمینان از آخرین رکورد واقعی بزرگ‌تر است، که با منطق پیش‌بینی رکوردهای بالای داده‌ها مطابقت دارد. مقدار پیش‌بینی رکورد بعدی با روش ماکسیمم درستنمایی (۷۰/۷) کمی بیشتر از میانگین بوت استرپ (۶۸/۴) است، که نشان‌دهنده گرایش تابع درستنمایی به پیش‌بینی محتاطانه‌تر نسبت به میانگین نمونه‌های باز نمونه‌گیری است. فاصله اطمینان بوت استرپ نیز علاوه بر ارائه محدوده قابل اعتماد، تغییرپذیری پیش‌بینی رکورد بعدی را نشان می‌دهد و امکان ارزیابی ریسک خطای پیش‌بینی را فراهم می‌کند. استفاده هم‌زمان از روش‌های ماکسیمم درستنمایی و بوت استرپ، امکان برآورد نقطه‌ای و محدوده اطمینان رکورد بعدی را فراهم می‌کند. طبق تحلیل انجام شده، رکورد بعدی داده‌ها به احتمال زیاد در بازه ۶۴ تا ۸۰ قرار دارد که مطابق انتظار است.

بحث و نتیجه‌گیری

مطالعه حاضر به توسعه روش‌های استنباط برای توزیع لیندلی-وایبول بر پایه مقادیر رکورد بالا پرداخت. یافته‌ها نشان داد که این توزیع، به لطف ساختار ریاضی انعطاف‌پذیر خود، گزینه مناسبی برای مدل‌سازی داده‌های رکوردی در حوزه‌های مختلف از جمله هیدرولوژی است. روش برآورد ماکسیمم درستنمایی ارائه شده و نیز روش پیش‌بینی رکوردهای آینده، با موفقیت در داده‌های واقعی به کار گرفته شد و توانایی مدل در برازش و پیش‌بینی را به تصویر کشید.

نتایج حاصل از تحلیل داده‌های سیلاب رودخانه ویتون، برازش خوب مدل و کارایی روش پیش‌بینی را تأیید کرد. مقادیر گشتاورهای محاسبه شده و رفتار سیستماتیک پارامترها که در جداول منعکس شد، بینش مفیدی برای محققان فراهم می‌آورد. به طور کلی، می‌توان نتیجه گرفت که رویکرد ارائه شده در این مقاله، ابزار تحلیلی قدرتمندی را برای مواجهه با مسائل عملی که در آن‌ها تنها بخشی از داده‌ها به صورت رکورد در دسترس است، فراهم می‌سازد.



شکل ۳. نمودارهای الف-TTT، ب-احتمال-احتمال، پ-تابع توزیع برازش داده شده در برابر تابع توزیع تجربی و ت- بافت نگار داده ها همزمان با تابع احتمال برازش داده شده

تقدیر و تشکر

از داوران محترم و ویراستار مجله که با دقت و حوصله مقاله را مطالعه و نظرات ارزشمند خود را ارائه نمودند، کمال تشکر را داریم

مراجع

باستان، ف.، کامل میرمصطفائی، س. م. ت. (۱۴۰۰)، برآوردیابی و پیش‌بینی برای توزیع پواسن-نمایی بر اساس رکوردها و زمان‌های بین رکورد: یک مطالعه مقایسه‌ای. مجله علوم آماری، ۱۵(۲)، ۳۸۱-۴۰۵.

Ahsanullah, M., and Nevzorov, V. B. (2025), Record Statistics. In *International Encyclopedia of Statistical Science* (pp. 2132-2141), Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg.

- Aly, A. E., Barakat, H. M., and El-Adll, M. E. (2019), Prediction Intervals of the Record-Values Process., *Revstat-Statistical Journal*, **17**(3), 401-427.
- Arnold, B. C., Balakrishnan, N., and Nagaraja, H. N. (2011), Records, *John Wiley and Sons*.
- Balakrishnan, N., and Ahsanullah, M. (1994), Relations for Single and product Moments of Record Values from Lomax Distribution, *Sankhyā: The Indian Journal of Statistics, Series B*, 140–146.
- Basak, P., and Balakrishnan, N. (2003). Maximum Likelihood Prediction of Future Record Statistic, *In Mathematical and Statistical Methods in Reliability (pp. 159-175)*.
- Cakmakyapan, S.and Ozel, G. (2016), The Lindley Family of Distributions: Properties and Applications, *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, **46**(6), 1113-1137.
- Chandler, K. (1952), The Distribution and Frequency of Record Values. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological)*, **14**(2), 220–228.
- Choulakian, V., and Stephens, M. A. (2001). Goodness-of-Fit Tests for the Generalized Pareto Distribution, *Technometrics*, **43**(4), 478-484.
- Cordeiro, G. M., Afify, A. Z., Yousof, H. M., Cakmakyapan, S., and Ozel, G. (2018), The Lindley Weibull Distribution: Properties and Applications, *Anais da Academia Brasileira de Ciências*, **90**, 2579-2598.
- Dey, S., Dey, T., and Lueket, D. J. (2016), Statistical Inference for the Generalized Inverted Exponential Distribution Based on Upper Record Values, *Mathematics and Computers in Simulation*, **120**, 64–78.
- Doostparast, M., and Balakrishnan, N. (2013), Pareto Analysis Based on Records, *Statistics*, **47**(5), 1075–1089.

- Empacher, C. (2024), Point and Interval Prediction of Record Values, (*Doctoral Dissertation, Dissertation, RWTH Aachen University, 2024*).
- Empacher, C., Kamps, U., and Schmiedt, A. B. (2025), Prediction Intervals for Future Pareto Record Claims, *European Actuarial Journal*, **15**(1), 163-197.
- Glick, N. (1978), Breaking Records and Breaking Boards. *The American Mathematical Monthly*, **85**(1), 2-26.
- Gradshteyn, I. S., and Ryzhik, I. M. (2014), Table of Integrals, Series, and Products, *Academic Press*.
- Lawless, J. F. (2011), Statistical Models and Methods for Lifetime Data, *John Wiley and Sons*.
- Nevzorov, V. B. (1988), Records. *Theory of Probability and Its Applications*, **32**(2), 201-228.
- Resnick, S. I. (1973), Record Values and Maxima, *The Annals of Probability*, 650-662.
- Shorrock, R. W. (1973), Record Values and Inter-Record Times, *Journal of Applied Probability*, **10**(3), 543-555.
- Zanjiran, F., and MirMostafaei, S. M. T. K. (2024), On Estimation and Prediction for the XLindley Distribution Based on Record Data, *Reliability: Theory and Applications*, **19**(2), 258-272.