

مجله علوم آماری، پاییز و زمستان ۱۳۹۵

جلد ۱۰، شماره ۲، ص ۳۱۶-۲۹۹

DOI: 10.18869/acadpub.jss.10.2.299

یک بازه تحمل تقریبی برای متغیر تصادفی پواسون-لیندلی اندازه-اریب

آزاده کیاپور^۱، مهران نقی زاده قمی^۲

^۱ گروه آمار، دانشگاه آزاد واحد بابل

^۲ گروه آمار، دانشگاه مازندران

تاریخ دریافت: ۱۳۹۴/۲/۲۳ تاریخ آخرین بازنگری: ۱۳۹۴/۱۱/۵

چکیده: در این مقاله، یک بازه تحمل تقریبی برای توزیع گسسته پواسون-لیندلی اندازه-اریب ارائه می شود. این بازه تحمل تقریبی، براساس بازه اطمینان والد با نمونه های بزرگ برای پارامتر توزیع پواسون-لیندلی اندازه-اریب ساخته می شود. سپس به مطالعه احتمال پوشش و طول مورد انتظار بازه تحمل ارائه شده پرداخته می شود. نتایج نشان می دهند که احتمال های پوشش برای مقادیر کوچک پارامتر توزیع، رفتار بهتری دارد و به سطح اطمینان اسمی نزدیک تر است و برای مقادیر بزرگتر پارامتر، رفتار محافظه کارانه ای دارد. در پایان، یک مثال کاربردی برای نمایش بازه تحمل تقریبی ارائه خواهد شد.

واژه های کلیدی: توزیع پواسون-لیندلی اندازه-اریب، بازه اطمینان، بازه تحمل.

آدرس الکترونیک مسئول مقاله: آزاد کیاپور، kiapour@baboliau.ac.ir

کد موضوع بندی ریاضی (۲۰۱۰): ۶۲۴۲۵

بازه‌های اطمینان برای برآورد پارامترهای جامعه مانند میانگین، واریانس و ... به کار می‌روند. بازه‌های پیشگویی برای پیشگویی یک مقدار مشاهده آینده از جامعه به کار می‌روند. بازه‌های تحمل^۱ نوع دیگری از بازه‌ها هستند که برای کیفی کردن یک نسبت مشخص p از جامعه با یک سطح اطمینان مشخص $(1 - \alpha)$ به کار می‌روند. چنین بازه‌ای را معمولاً یک بازه تحمل با میزان پوشش p و سطح اطمینان $(1 - \alpha)$ یا برای سادگی یک بازه تحمل $(p, 1 - \alpha)$ گویند. بازه‌های تحمل در بسیاری از زمینه‌های کاربردی مانند کنترل کیفیت، مهندسی و صنایع دارویی مورد استفاده قرار می‌گیرند. به عنوان مثال در کنترل کیفیت، در فرایند تولید یک کالا، حدود مشخصه‌های فنی (LSL, USL) از قبل توسط مهندسان تعیین می‌شوند. برای آن‌که متوجه شویم که چه نسبتی از این محصولات، در حدود مشخصه‌های فنی صدق می‌کنند، یافتن یک بازه تحمل بر اساس نمونه‌ای از محصولات تولید شده می‌تواند مفید باشد. چنانچه بازه تحمل محاسبه شده (L, U) درون حدود مشخصه‌های فنی قرار گیرد، یعنی $(L, U) \subseteq (LSL, USL)$ ، آن‌گاه کالای موردنظر مورد پذیرش قرار می‌گیرد و با اطمینان معینی می‌توان نتیجه گرفت که حداقل درصد مشخصی از محصولات، مطابق با معیارهای مورد نظر تولید شده‌اند.

بیشتر مطالعات انجام شده در حوزه بازه‌های تحمل مربوط به توزیع‌های پیوسته می‌شود. اولین تحقیقات در رابطه با این موضوع، توسط ویلکس (۱۹۴۱) در توزیع نرمال انجام گرفت. از مطالعات جدید در زمینه توزیع‌های پیوسته می‌توان به فرناندز (۲۰۱۰)، کریشنامورسی و همکاران (۲۰۱۱)، پاتماناتان و اونگ (۲۰۱۴)، کیاپور و نقی‌زاده قمی (۲۰۱۶)، میرمصطفایی و همکاران (۲۰۱۶) و نقی‌زاده قمی و کیاپور (۲۰۱۷) اشاره کرد.

برخلاف توزیع‌های پیوسته، به مسئله یافتن بازه‌های تحمل برای متغیرهای تصادفی گسسته کمتر پرداخته شده است. هان و چاندرا (۱۹۸۱) بازه‌های تحمل را برای توزیع‌های دو جمله‌ای و پواسون مورد بررسی قرار دادند. کریشنامورسی و

^۱ Tolerance intervals

همکاران (۲۰۱۱) بازه‌های تحمل تقریبی با فرم بسته برای توزیع‌های دوجمله‌ای و پواسون ارائه کردند. یونگ (۲۰۱۴a,b) بازه‌های تحمل را برای متغیرهای تصادفی دوجمله‌ای منفی، فوق‌هندسی و فوق‌هندسی منفی فراهم کرد. نقی زاده قمی و همکاران (۲۰۱۶) بازه‌های تحمل تقریبی را برای توزیع پواسون-لیندلی ارائه دادند. فرض کنید X یک متغیر تصادفی گسسته با تابع توزیع تجمعی F باشد. بازه تصادفی $[L(X), U(X)]$ را یک بازه تحمل $(p, 1 - \alpha)$ گویند هرگاه

$$P\{F(U(X)) - F(L(X) - 1) \geq p\} \geq 1 - \alpha. \quad (1)$$

بازه‌های تحمل یک‌طرفه به‌طور مشابه تعریف می‌شوند. $U_1(X)$ را یک حد بالای تحمل $(p, 1 - \alpha)$ گویند هرگاه

$$P\{F(U_1(X)) \geq p\} \geq 1 - \alpha.$$

حد پایین تحمل نیز به‌طور مشابه تعریف می‌شود. اگر q_p چندک p توزیع باشد، آن‌گاه یک حد بالای اطمینان $(1 - \alpha)$ برای q_p ، یک حد بالای تحمل $(p, 1 - \alpha)$ است، یعنی $Pr(q_p \leq U_1(X)) \geq 1 - \alpha$. به‌طور مشابه اگر q_{1-p} چندک $1 - p$ توزیع باشد، آن‌گاه یک حد پایین اطمینان $(1 - \alpha)$ برای q_{1-p} یک حد پایین تحمل $(p, 1 - \alpha)$ است.

بازه تصادفی $[L_e(X), U_e(X)]$ را یک بازه تحمل $(p, 1 - \alpha)$ با کنترل چندک‌ها در دو دم توزیع گویند هرگاه

$$P\{L_e(X) \leq q_{\frac{1-p}{2}} \text{ and } q_{\frac{1+p}{2}} \leq U_e(X)\} \geq 1 - \alpha. \quad (2)$$

کریشناامورسی (۲۰۰۶) چنین بازه‌ای را یک بازه تحمل با دم‌های برابر نامید. باید توجه داشت که بازه $[L_e(X), U_e(X)]$ که در رابطه (۲) صدق می‌کند، در رابطه (۱) نیز صدق می‌کند اما بازه $[L(X), U(X)]$ که در رابطه (۱) صدق می‌کند، لزوماً در رابطه (۲) صدق نمی‌کند.

در این مقاله، یک بازه تحمل تقریبی برای متغیر تصادفی گسسته پواسون-لیندلی اندازه-اریب^۲ ارائه می‌شود. برای این منظور، در بخش ۲، روش عمومی برای

^۲ Size-biased Poisson-Lindley distribution

۳۰۲ بازه تحمل تقریبی برای متغیر تصادفی پواسون-لیندلی اندازه-اریب

ساختن بازه‌های تحمل برای متغیرهای تصادفی گسسته براساس روش همان و چندرا (۱۹۸۱) بیان می‌شود. در بخش ۳، پس از معرفی توزیع پواسون-لیندلی اندازه-اریب، مطابق با روش ارائه شده در بخش ۲، یک بازه تحمل تقریبی براساس بازه اطمینان والد با نمونه‌های بزرگ برای آن ارائه می‌شود. در بخش ۴، احتمال‌های پوشش و طول مورد انتظار بازه‌های تحمل ارائه شده به کمک یک شبیه‌سازی مونت کارلو مورد بررسی قرار می‌گیرند. در پایان، یک مثال واقعی برای نمایش بازه تحمل ارائه خواهد شد.

۲ روش عمومی برای ساختن بازه تحمل برای متغیرهای تصادفی گسسته

فرض کنید X یک متغیر تصادفی با تابع توزیع $F(x|\theta)$ دارای خاصیت به‌طور تصادفی صعودی^۳ نسبت به θ باشد، یعنی به ازای هر t داشته باشیم:

$$P(X > t|\theta_1) \geq P(X > t|\theta_2), \quad \forall \theta_1 > \theta_2.$$

در نتیجه تابع چندک $q_p(\theta)$ که به عنوان کوچکترین مقداری تعریف می‌شود که برای آن داریم $P(X \leq q_p(\theta)|\theta) \geq p$ ، یک تابع صعودی نسبت به θ است. بنابراین اگر θ_U و θ_L به ترتیب بازه‌های اطمینان پایین و بالای $(1 - \alpha)$ برای θ باشند، آن‌گاه چندک‌های $q_p(\theta_U)$ و $q_{1-p}(\theta_L)$ که در عبارت‌های زیر صدق می‌کنند به ترتیب حدود تحمل پایین و بالای $(p, 1 - \alpha)$ برای توزیع گسسته هستند.

$$P(X \geq q_{1-p}(\theta_L)|\theta_L) \geq p, \quad (۳)$$

$$P(X \leq q_p(\theta_U)|\theta_U) \geq p \quad (۴)$$

توجه کنید که $q_{1-p}(\theta_L)$ به عنوان بزرگترین مقداری تعریف می‌شود به‌طوری‌که رابطه (۳) برقرار باشد و $q_p(\theta_U)$ کوچکترین مقداری است که برای آن رابطه (۴) برقرار باشد. همچنین اگر (θ_L, θ_U) یک بازه اطمینان دوطرفه $(1 - \alpha)$ برای θ باشد، آن‌گاه به طور همزمان نامساوی‌های $q_{1-p}(\theta_L) \leq q_{1-p}(\theta)$ و $q_{1+p}(\theta) \leq q_{1+p}(\theta_U)$ برقرار است.

^۳ Stochastically increasing

آزاده کیاپور، مهران نقی زاده قمی ۳۰۳

با احتمال $1 - \alpha$ برقرار هستند. بنابراین بازه $[q_{1-p}(\theta_L), q_{1+p}(\theta_U)]$ یک بازه تحمل $(p, 1 - \alpha)$ با دم‌های برابر است.

۳ توزیع پواسون-لیندلی اندازه-اریب

توزیع گسسته پواسون-لیندلی به عنوان رقیبی برای توزیع‌های پواسون و دو جمله‌ای منفی با تابع جرم احتمال به صورت

$$f_{\circ}(x; \theta) = \frac{\theta^2(x + \theta + 2)}{(\theta + 1)^{x+2}}, \quad x = 0, 1, \dots, \quad \theta > 0, \quad (5)$$

توسط سنکاران (۱۹۷۰) برای مدل‌بندی داده‌های گسسته معرفی شد. این توزیع از ترکیب توزیع پواسون با توزیع پیوسته لیندلی به دست می‌آید به طوری که پارامتر λ توزیع پواسون دارای توزیع لیندلی با تابع چگالی احتمال به صورت

$$g_{\circ}(\lambda; \theta) = \frac{\theta^2}{\theta + 1} (1 + \lambda) e^{-\theta\lambda}, \quad \lambda > 0, \quad \theta > 0$$

باشد. قیتانی و الموتاری (۲۰۰۹) به برآوردیابی نقطه‌ای و فاصله‌ای تحت توزیع (۵) پرداختند و نقی زاده قمی و همکاران (۲۰۱۶) بازه‌های تحمل تقریبی برای این توزیع ارائه دادند. وقتی یک محقق، مشاهده‌ای را در طبیعت با توجه به مدل تصادفی مشخصی ثبت می‌کند، مشاهده ثبت شده دارای توزیع اصلی نخواهد بود مگر اینکه هر مشاهده با شانس یکسانی ثبت شده باشد. برای مثال، فرض کنید مشاهده اصلی x_0 از جامعه‌ای با تابع چگالی (تابع جرم) احتمال $f_{\circ}(x_0)$ استخراج و مشاهده x مطابق با یک احتمال دوباره وزنی شده $w(x)$ ثبت شده باشد، در این صورت x از توزیعی با تابع چگالی (تابع جرم) احتمال به صورت

$$f(x) = \frac{w(x)}{E[w(X_0)]} f_{\circ}(x), \quad (6)$$

است که رائو (۱۹۶۵) آن را توزیع وزنی نامید. توزیع وزنی به ازای x $w(x) = x$ توزیع اندازه-اریب نامیده می‌شود. پاتیل و رائو (۱۹۷۸) تعدادی از مدل‌های عمومی که منجر به توزیع‌های وزنی می‌شوند را مورد بررسی قرار دادند و نشان دادند که چگونگی وزن $w(x) = x$ در بسیاری از مسایل نمونه‌گیری رخ می‌دهد. مطالعه‌ای در

۳۰۴ بازه تحمل تقریبی برای متغیر تصادفی پواسون-لیندلی اندازه-اریب

مورد نمونه‌گیری اندازه-اریب و توزیع‌های وزنی پایای مربوطه توسط پاتیل و اورد (۱۹۷۵) انجام شده است. برای مطالعه‌ای در مورد کاربردهای توزیع‌های اندازه-اریب به پاتیل و راثو (۱۹۷۷، ۱۹۷۸) مراجعه کنید. از رابطه‌های (۵) و (۶)، توزیع پواسون-لیندلی اندازه-اریب دارای تابع جرم احتمال به صورت

$$f(x; \theta) = \frac{x}{\mu_0} f_0(x; \theta) = \frac{\theta^2 x(x + \theta + 2)}{(\theta + 2)(\theta + 1)^{x+2}}, \quad x = 1, 2, \dots, \quad \theta > 0, \quad (7)$$

است، که در آن $\mu_0 = \frac{\theta+2}{\theta(\theta+1)}$ امید ریاضی توزیع پواسون-لیندلی با تابع جرم احتمال (۵) می‌باشد. گویم X دارای توزیع پواسون-لیندلی اندازه-اریب با پارامتر θ است و می‌نویسیم $X \sim SBPL(\theta)$. قیتانی و الموتاری (۲۰۰۸) توزیع (۷) را معرفی کرده و به بررسی ویژگی‌های آن پرداختند. آن‌ها در مقاله خود اشاره کردند که توزیع پواسون-لیندلی اندازه-اریب از توزیع پواسون اندازه-اریب با تابع جرم احتمال

$$g(x|\lambda) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!}, \quad x = 1, 2, \dots, \quad \lambda > 0$$

به دست می‌آید، که در آن λ دارای توزیع لیندلی اندازه-اریب با تابع چگالی احتمال زیر است.

$$h(\lambda; \theta) = \frac{\theta^2}{\theta + 2} \lambda(1 + \lambda)e^{-\theta\lambda}, \quad \lambda > 0, \quad \theta > 0.$$

۱.۳ بازه اطمینان تقریبی والد برای θ

فرض کنید X_1, \dots, X_n یک نمونه تصادفی مستقل و هم‌توزیع از توزیع $SBPL(\theta)$ و x_1, \dots, x_n مقادیر مشاهده شده آن باشند. قیتانی و الموتاری (۲۰۰۸) نشان دادند که برآوردگر ماکسیمم درست‌نمایی θ از حل معادله غیرخطی

$$\frac{2n}{\theta} - \frac{n(\bar{x} + 2)}{\theta + 1} - \frac{n}{\theta + 2} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i + \theta + 2} = 0,$$

به دست می‌آید، که برآوردگری سازگار با توزیع مجانبی $(N(\theta, (nI(\theta))^{-1})$ می‌باشد که در آن

$$I(\theta) = \frac{\theta^5 + \theta^4 + 2\theta^3 + 16\theta^2 + 24\theta + 12}{\theta^2(\theta + 1)^2(\theta + 2)^2} - \frac{\theta^2}{(\theta + 1)^2} \int_0^1 \frac{t^{\theta+2}}{\theta - t + 1} dt$$

اطلاع فیشر θ است. بنابراین بازه اطمینان تقریبی $(1 - \alpha)$ برای θ عبارت است از

$$(\theta_L, \theta_U) = (\hat{\theta} - z_{1-\frac{\alpha}{2}}(nI(\theta))^{-\frac{1}{2}}, \hat{\theta} + z_{1-\frac{\alpha}{2}}(nI(\theta))^{-\frac{1}{2}})$$

که در آن $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ چندک $1 - \frac{\alpha}{2}$ توزیع نرمال استاندارد است.

۲.۳ بازه تحمل تقریبی والد برای توزیع پواسون-لیندلی اندازه-اریب

اگر $X \sim SBPL(\theta)$ ، آن گاه تابع توزیع تجمعی آن به صورت

$$F(x|\theta) = \frac{\theta^x}{\theta + 2} \sum_{i=1}^x \frac{i(i + \theta + 2)}{(\theta + 1)^{i+2}}, \quad x = 1, 2, \dots, \quad \theta > 0$$

است. برای θ و $k > 0$ دلخواه و به ازای تمام مقادیر $x = 1, 2, \dots$ نسبت دو تابع توزیع تجمعی

$$\frac{F(x|\theta + k)}{F(x|\theta)} = \frac{(\theta + 2)(\theta + k)^x \sum_{i=1}^x i(i + \theta + k + 2)/(\theta + k + 1)^{i+2}}{\theta^x(\theta + 2) \sum_{i=1}^x i(i + \theta + 2)/(\theta + 1)^{i+2}} \quad (۸)$$

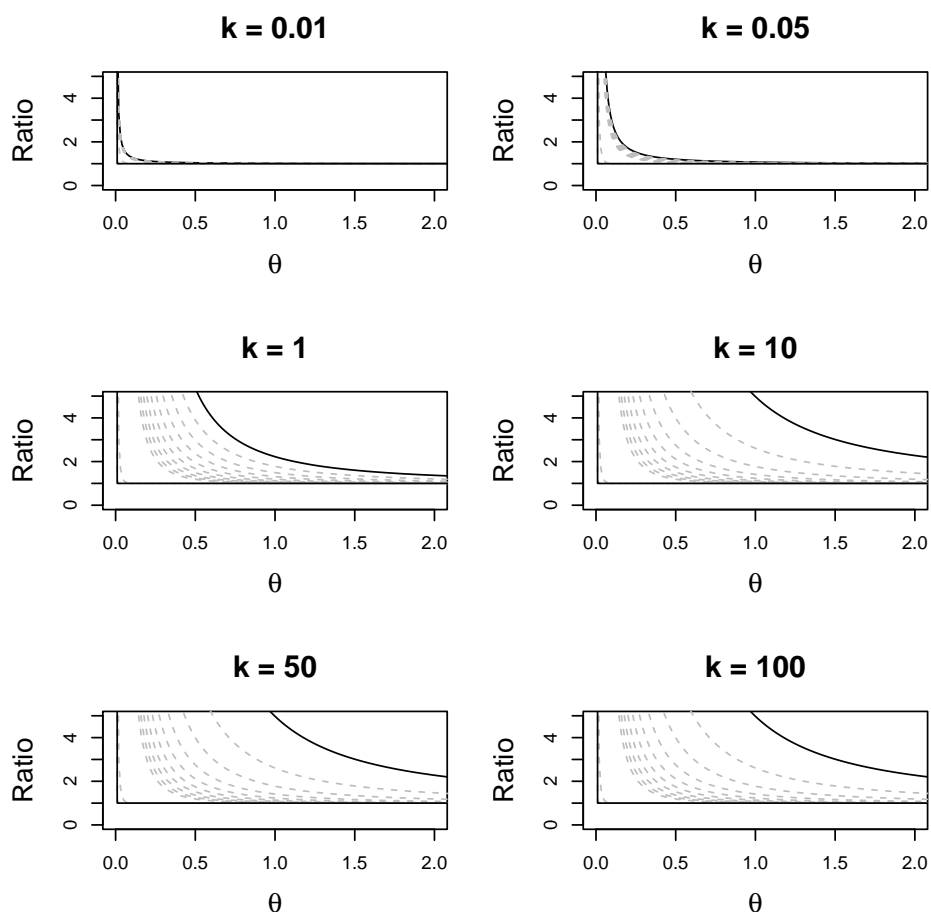
را در نظر بگیرید. شکل ۳ نمودارهای نسبت (۸) را برای مقادیر مختلف θ ، k و x نشان می دهد. در هر نمودار منحنی بالا و پایین به ترتیب برای مقادیر $x = 1$ و $x = 1000$ و بقیه منحنی ها مربوط به مقادیر بین این دو مقدار هستند. این شکل نشان می دهد که نسبت (۸) همواره از ۱ بزرگتر است، لذا توزیع پواسون-لیندلی اندازه-اریب دارای خاصیت به طور تصادفی نزولی است. اما یکی از شرایط ساختن بازه های تحمل برای متغیرهای تصادفی گسسته براساس روش هان و چندرا (۱۹۸۱) این است که توزیع بر حسب پارامتر به طور تصادفی صعودی باشد. بنابراین لازم است تغییری در روش هان و چندرا (۱۹۸۱) انجام شود. برای این کار، روش ارائه شده در بخش ۲ برای یافتن بازه های تحمل طی مراحل زیر بیان انجام می شود:

مرحله ۱: براساس نمونه مشاهده شده، یک بازه اطمینان دوطرفه $(1 - \alpha)$ برای θ به صورت (θ_L, θ_U) به دست آورید.

مرحله ۲: بزرگترین مقدار $q_{1-p}(\theta_U)$ را طوری بیابید که برای آن داشته باشیم

$$Pr(X \geq q_{1-p}(\theta_U) | \theta_U) \geq \frac{1+p}{2} \quad (۹)$$

۳۰۶ بازه تحمل تقریبی برای متغیر تصادفی پواسون-لیندلی اندازه-اریب



شکل ۱: نمودار نسبت توزیع‌های تجمعی برای مقادیر مختلف x در مقابل θ . در هر نمودار منحنی بالا و پایین به ترتیب برای مقادیر $x = 1$ و $x = 1000$ و بقیه منحنی‌ها مربوط به مقادیر بین این دو مقدار هستند.

و کوچکترین مقدار $q_{1+p}(\theta_L)$ را طوری بیابید که برای آن داشته باشیم

$$Pr(X \leq q_{1+p}(\theta_L) | \theta_L) \geq \frac{1+p}{2}. \quad (10)$$

با انجام این مراحل، بازه $[q_{1-p}(\theta_U), q_{1+p}(\theta_L)]$ یک بازه تحمل $(p, 1-\alpha)$ با دم‌های برابر برای توزیع پواسون-لیندلی اندازه-اریب است. برای یافتن بازه‌های تحمل یک‌طرفه کافی است در رابطه‌های (۹) و (۱۰)، بازه‌های اطمینان یک‌طرفه را محاسبه کرده و $\frac{1+p}{2}$ با p جایگذاری شود.

چولگی توزیع پواسون-لیندلی اندازه-اریب برابر است با

$$\beta(\theta) = \frac{\theta^5 + 10\theta^4 + 42\theta^3 + 84\theta^2 + 72\theta + 24}{\sqrt{2}(\theta^3 + 6\theta^2 + 12\theta + 6)}.$$

چون $\lim_{\theta \rightarrow \infty} \beta(\theta) = \frac{2}{\sqrt{3}}$ ، بنابراین مقادیر کوچکتر θ منجر به تقارن بیشتر و کاهش چولگی به راست شکل توزیع می‌شوند. شکل ۲ نمودار تابع جرم احتمال توزیع پواسون-لیندلی اندازه-اریب را برای مقادیر مختلف θ نشان می‌دهد. همان‌طور که ملاحظه می‌شود برای θ کوچک، شکل توزیع متقارن‌تر و کمتر چوله به راست است و برای $\theta > 1$ و مقادیر بیشتر از ۲۰، تابع توزیع به ۱ نزدیک می‌شود. به‌طور کلی برای مقادیر $\theta \leq 1$ توزیع دارای اطلاعات بیشتری است.

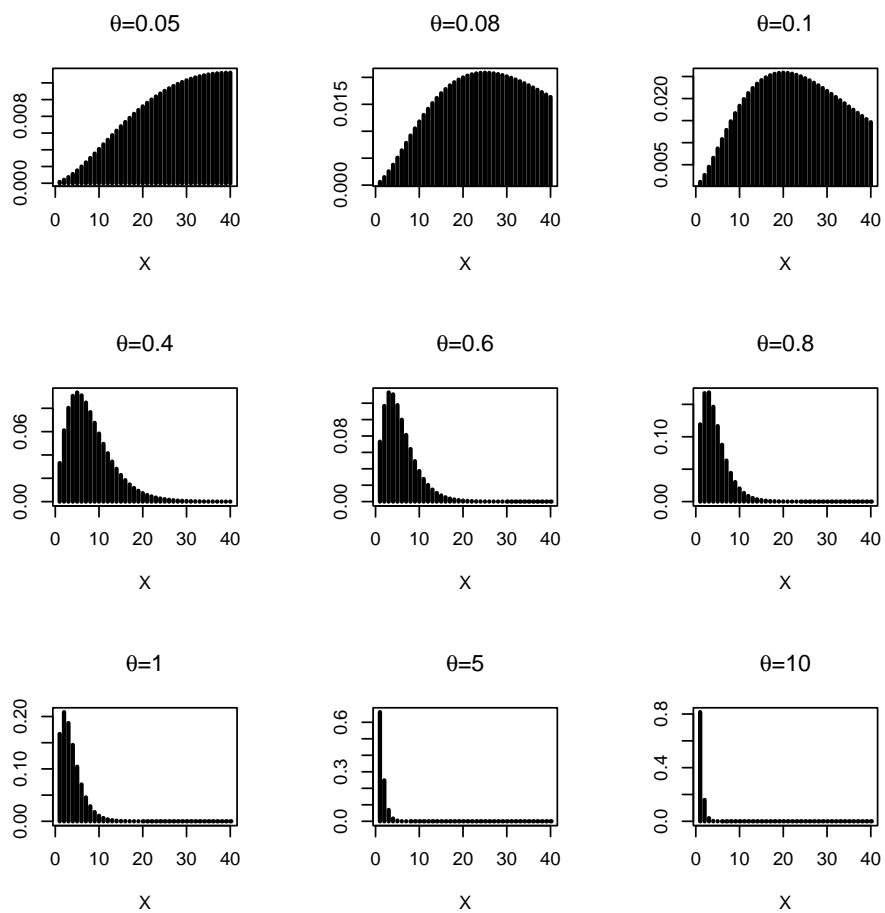
۴ احتمال پوشش و طول موردانتظار بازه تحمل

در این بخش با استفاده از یک مطالعه شبیه‌سازی مونت کارلو، به بررسی احتمال پوشش و طول مورد انتظار بازه‌های تحمل تقریبی پرداخته می‌شود. مقادیر $n \in \{100, 500, 1000\}$ برای حجم نمونه و برای سطح اطمینان و میزان پوشش مقادیر

$$(p, 1-\alpha) \in \{(0/80, 0/90), (0/90, 0/95), (0/95, 0/90)\}$$

در نظر گرفته شده‌اند. هممان‌گونه که بیماں شد بازه‌های تحمل برای توزیع پواسون-لیندلی اندازه-اریب، وقتی قابل استفاده خواهند بود که داده‌ها از یک توزیع

۳۰۸ بازه تحمل تقریبی برای متغیر تصادفی پواسون-لیندلی اندازه-اریب



شکل ۲: نمودار تابع جرم احتمال توزیع پواسون-لیندلی اندازه-اریب برای مقادیر مختلف θ .

آزاده کیاپور، مهران نقی زاده قمی ۳۰۹

پواسون-لیندلی اندازه-اریب با مقادیر کوچک پارامتر θ استخراج شده باشند. بنابراین، برای θ مقادیر

$$\theta \in \{0/05, 0/01, 0/15, 0/20, 0/5, 1\}.$$

در نظر گرفته شد و برای هر ترکیب از مقادیر n , θ و $(p, 1 - \alpha)$ الگوریتم زیر اجرا می شود:

- گام ۱: تعداد $M = 10^5$ نمونه به حجم n از توزیع $SBPL(\theta)$ تولید شود.
- گام ۲: بازه های تحمل دوطرفه با روش ذکر شده در بخش ۲.۳ به دست آورده شود. فرض کنید $\{(L_1, U_1), \dots, (L_M, U_M)\}$ مجموعه بازه های تحمل دوطرفه $(p, 1 - \alpha)$ باشند.
- گام ۳: برآوردهای مونت کارلویی احتمال پوشش (CP) و طول مورد انتظار (EW) به صورت

$$CP = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M I \left\{ \{L_i \leq q_{1-p}(\theta)\} \cap \{U_i \geq q_{1-p}(\theta)\} \right\},$$
$$EW = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M (U_i - L_i)$$

محاسبه شود، که در آن $I(\cdot)$ تابع نشانگر است.

احتمال های پوشش برای بازه تحمل دوطرفه در جدول ۱ نشان می دهند که روش مورد بررسی کمی محافظه کارانه است. در عمل باید گروه اول و سوم از احتمال های پوشش به سطح اطمینان اسمی ۰/۹ و گروه سوم به سطح اطمینان اسمی ۰/۹۵ نزدیک باشند. تحت هیچ یک از شرایط، احتمال های پوشش پایین تر از سطح اطمینان اسمی قرار نمی گیرند. همچنین احتمال های پوشش برای مقادیر کوچکتر θ رفتار بهتری دارند، یعنی به سطح اطمینان اسمی نزدیکترند و برای مقادیر θ بزرگتر، از سطح اطمینان اسمی بزرگتر یا محافظه کارتر می شوند.

جدول ۲ مقادیر طول مورد انتظار بازه تحمل را نشان می دهد. برای p , α و θ داده شده، طول مورد انتظار با افزایش n کاهش می یابد. همچنین با افزایش θ ، طول مورد انتظار کاهش می یابد که این می تواند به علت خاصیت به طور تصادفی نزولی

۳۱۰ بازه تحمل تقریبی برای متغیر تصادفی پواسون-لیندلی اندازه-اریب

در توزیع پواسون-لیندلی اندازه-اریب باشد.

جدول ۱: احتمال‌های پوشش برای بازه‌های تحمل دوطرفه

n			θ	$(p, 1 - \alpha)$
۱۰۰۰	۵۰۰	۱۰۰		
۰/۹۲۴	۰/۹۱۷	۰/۹۱۱	۰/۰۵	(۰/۸۰, ۰/۹۰)
۰/۹۲۶	۰/۹۲۱	۰/۹۱۸	۰/۱۰	
۰/۹۲۹	۰/۹۲۷	۰/۹۲۲	۰/۱۵	
۰/۹۳۱	۰/۹۲۹	۰/۹۲۴	۰/۲۰	
۰/۹۳۷	۰/۹۳۴	۰/۹۳۲	۰/۵۰	
۰/۹۵۱	۰/۹۴۷	۰/۹۴۱	۱	
۰/۹۶۱	۰/۹۵۷	۰/۹۵۱	۰/۰۵	(۰/۹۰, ۰/۹۵)
۰/۹۶۹	۰/۹۵۸	۰/۹۵۳	۰/۱۰	
۰/۹۷۸	۰/۹۷۲	۰/۹۶۱	۰/۱۵	
۰/۹۸۲	۰/۹۷۶	۰/۹۶۳	۰/۲۰	
۰/۹۸۹	۰/۹۸۲	۰/۹۶۸	۰/۵۰	
۱/۰۰۰	۰/۹۹۱	۰/۹۷۸	۱	
۰/۹۳۹	۰/۹۳۲	۰/۹۲۷	۰/۰۵	(۰/۹۵, ۰/۹۰)
۰/۹۴۳	۰/۹۳۴	۰/۹۲۹	۰/۱۰	
۰/۹۴۸	۰/۹۳۹	۰/۹۳۲	۰/۱۵	
۰/۹۶۲	۰/۹۵۱	۰/۹۴۶	۰/۲۰	
۰/۹۷۹	۰/۹۶۳	۰/۹۵۲	۰/۵۰	
۰/۹۸۷	۰/۹۷۶	۰/۹۶۳	۱	

۵ مثال کاربردی

در مطالعه‌ای توسط کیت و مسلیو (۱۹۶۸)، تعدادی خرگوش در برف و بوران در طول ۷ روز صید شدند. سپس علامت‌گذاری شده و آزاد شدند. در ادامه تعدادی دیگر از خرگوش‌ها دستگیر شدند که ممکن است علامت‌دار باشند یا نباشند. ۲۶۱ خرگوش در طول ۷ روز دستگیر شدند که از این میان ۱۸۴ تای آن‌ها یک‌بار، ۵۵ تای آن‌ها دوبار، ۱۴ تای آن‌ها سه‌بار، ۴ تای آن‌ها ۴ بار و ۵ تای آن‌ها ۴ بار دستگیر شده‌اند. جدول ۳ مقادیر مشاهده شده و مقادیر مورد انتظار و شکل ۴ نحوه

جدول ۲: طول مورد انتظار برای بازه‌های تحمل دوطرفه

n			θ	$(p, 1 - \alpha)$
۱۰۰۰	۵۰۰	۱۰۰		
۵۹/۲۷۱	۶۱/۷۲۳	۷۰/۵۲۸	۰/۰۵	
۲۵/۲۱۷	۲۶/۴۲۷	۳۰/۶۲۱	۰/۱۰	
۱۴/۷۶۱	۱۵/۱۴۷	۲۰/۱۱۲	۰/۱۵	(۰/۸۰, ۰/۹۰)
۹/۴۹۹	۱۰/۹۲۸	۱۳/۲۹۱	۰/۲۰	
۵/۵۹۳	۶/۶۷۱	۹/۸۲۷	۰/۵۰	
۲/۹۹۹	۳/۰۲۱	۳/۶۶۹	۱	
۸۰/۸۸۹	۸۲/۵۲۱	۹۸/۹۲۳	۰/۰۵	
۳۷/۷۸۷	۳۹/۹۳۹۶	۴۷/۱۵۱	۰/۱۰	
۲۵/۷۸۸	۲۷/۹۵۱	۳۶/۹۷۹	۰/۱۵	(۰/۹۰, ۰/۹۵)
۱۶/۸۲۱	۱۸/۶۷۷	۲۵/۹۵۱	۰/۲۰	
۸/۷۲۶	۱۰/۲۸۹	۱۵/۱۲۱	۰/۵۰	
۴/۹۲۵	۶/۷۲۲	۹/۸۲۱	۱	
۱۰۲/۰۸۱	۱۰۴/۹۳۹	۱۱۵/۱۸۱	۰/۰۵	
۶۰/۷۹۲	۶۲/۷۰۳	۷۵/۱۹۱	۰/۱۰	
۵۱/۷۴۳	۵۳/۲۰۴	۶۰/۲۴۶	۰/۱۵	(۰/۹۵, ۰/۹۰)
۳۶/۱۵۴	۳۹/۳۸۰	۴۹/۷۰۳	۰/۲۰	
۱۳/۴۷۹	۱۵/۸۲۰	۲۴/۳۳۰	۰/۵۰	
۶/۲۲۷	۸/۰۷۲	۱۲/۸۰۱	۱	

توزیع این مقادیر را نشان می‌دهد. قیتانی و الموتاری (۲۰۰۸) نشان دادند که برآوردگر ماکسیمم درست‌نمایی برابر است با $\hat{\theta} = ۵/۳۵۱$ و توزیع پواسون-لیندلی اندازه-اریب با پارامتر $۵/۳۵۱$ ($SBPL(۵/۳۵۱)$) به این داده‌ها به خوبی برازش می‌شود. همچنین یک بازه اطمینان تقریبی ۹۵ درصدی برای پارامتر θ برابر است با $(\theta_L, \theta_U) = (۴/۳۴۶, ۶/۳۵۶)$.

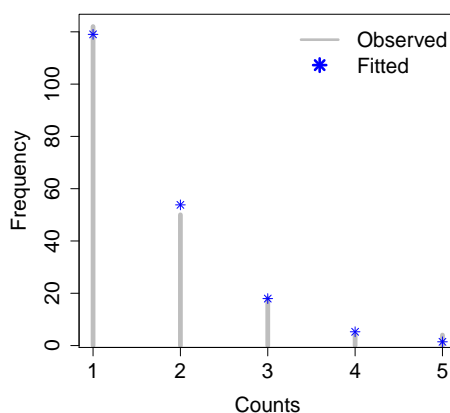
داریم

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\theta_U^2 i(i + \theta_U + 2)}{(\theta_U + 2)(\theta_U + 1)^{i+2}} = 1, \quad (11)$$

۳۱۲ بازه تحمل تقریبی برای متغیر تصادفی پواسون-لیندلی اندازه-اریب

جدول ۳: توزیع تعداد دفعات صید ۲۶۱ خرگوش در طول ۷ روز

تعداد دفعات صید	۱	۲	۳	۴	۵
مقادیر مشاهده شده	۱۸۴	۵۵	۱۴	۴	۴
مقادیر مورد انتظار	۱۷۷/۳	۶۲/۵	۱۶/۴	۳/۸	۱



شکل ۳: نمودار میله‌ای تعداد خرگوش‌های صید شده در طول ۷ روز.

و

$$\sum_{i=1}^4 \frac{\theta_L^2 i(i + \theta_L + 2)}{(\theta_L + 2)(\theta_L + 1)^{i+2}} = 0/9813. \quad (12)$$

بنابراین ۱ بزرگترین عددی است که برای آن مجموع (۱۱) بزرگتر از $0/95 = \frac{1}{p}$ است و ۴ کوچکترین عددی است که برای آن مجموع (۱۲) بزرگتر از $0/95$ می‌باشد. در نتیجه یک بازه تحمل $(0/9, 0/95)$ برای تعداد دفعات صید خرگوش‌ها برابر با $[1, 4]$ است. یعنی با ۹۵ درصد اطمینان حداقل ۹۰ درصد خرگوش‌ها بین ۱ تا ۴ بار صید شده‌اند.

بحث و نتیجه گیری

در این مقاله، یک بازه تحمل تقریبی برای توزیع پواسون-لیندلی اندازه-اریب ارائه شد. این بازه تحمل براساس بازه اطمینان تقریبی والد با نمونه‌های بزرگ برای پارامتر θ و با تغییر و اصلاح روش هان و چندرا (۱۹۸۱) ساخته شد. مطالعه احتمال پوشش نشان داد که برای مقادیر کوچک پارامتر θ رفتار بهتری وجود دارد به این مفهوم که مقادیر احتمال پوشش به سطح اطمینان اسمی نزدیک‌تر است اما با افزایش θ مقادیر احتمال پوشش نیز افزایش یافته و از سطح اطمینان اسمی بزرگتر می‌شود یا به اصطلاح رفتار محافظه‌کارانه‌ای دارند. همچنین طول مورد انتظار نیز با افزایش θ کوچکتر می‌شود. با توجه به این که بازه اطمینان دیگری برای پارامتر θ در توزیع گسسته پواسون-لیندلی اندازه-اریب وجود ندارد، بنابراین نمی‌توان رفتار بازه تحمل تقریبی ارائه شده را با دیگر بازه‌های تحمل مقایسه کرد.

تقدیر و تشکر

نویسندگان مقاله از نظرات ارزشمند سردبیر، هیئت تحریریه و داوران محترم مجله که باعث ارتقاء کیفیت مقاله شدند، تشکر و قدردانی می‌نمایند.

مراجع

- Fernandez, A. J. (2010), Two-sided Tolerance Intervals in the Exponential Case: Corrigenda and Generalizations, *Computational Statistics and Data Analysis*, **54**, 151-162.
- Ghitany, M. E., and Al-Mutairi, D. K. (2008), Size-biased Poisson-Lindley Distribution and its Application, *METRON - International Journal of Statistics*, **3**, 299-311.
- Ghitany, M. E., and Al-Mutairi, D. K. (2009), Estimation Methods for the Discrete Poisson-Lindley Distribution, *Journal of Statistical Computation and Simulation*, **79**, 1-9.

- Hahn, G. J., and Chandra, R. (1981), Tolerance Intervals for Poisson and Binomial Random Variables, *Journal of Quality Technology*, **13**, 100-110.
- Keith, L. B., and Meslow, E. C. (1968), Trap Response by Snowshoe Hares, *Journal of Wildlife Management*, **20**, 795-801.
- Kiapour, A., and Naghizadeh Qomi, M. (2016), Equal-tailed and Shortest Bayesian Tolerance Intervals Based on Exponential k -Records, *Communications in Statistics-Theory and Methods*, In Press.
- Krishnamoorthy, K. (2006), *Handbook of Statistical Distributions with Applications*, Chapman and Hall-CRC Press, New York.
- Krishnamoorthya, K., Liana, X., and Mondalb, S. (2011), Tolerance Intervals for the Distribution of the Difference Between Two Independent Normal Random Variables, *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **40**, 117-129.
- Krishnamoorthy, K., Xia, Y., and Xie, F. (2011), A Simple Approximate Procedure for Constructing Binomial and Poisson Tolerance Intervals, *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **40**, 2443-2458.
- MirMostafaei, S. M. T. K., Naghizadeh Qomi, M., and Fernandez, A. J. (2016), Tolerance Limits for Minimal Repair Times of a Series System with Rayleigh Distributed Component Lifetimes, *Applied Mathematical Modeling*, **40**, 3153-3163.
- Naghizadeh Qomi, M., and Kiapour, A. (2017), Shortest Tolerance Intervals Controlling Both Tails of the Exponential Distribution Based on Record Values, *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **46**, 271-279.

Naghizadeh Qomi, M., Kiapour, A., and Young, D. S. (2016), Approximate tolerance Intervals for the Discrete Poisson-Lindley Distribution, *Journal of Statistical Computation and Simulation*, **86**, 841-854.

Pathmanathan, D., and Ong, S. H. (2014), A Monte Carlo Simulation Study of Two-Sided Tolerance Intervals in Balanced One-Way Random Effects Model for Non-Normal Errors, *Journal of Statistical Computation and Simulation*, **84**, 2329-2344.

Patil, G. P. and Ord, J. K. (1975). On Size-Biased Sampling and Related Form-Invariant Weighted Distributions, *Sankhya*, **38**, 48-61.

Patil, G. P. and Rao, C. R. (1977) Weighted Distributions: a Survey of Their Applications, in: P. R. Krishnaiah (Ed.), *Applications of Statistics*, Amsterdam, North-Holland, 383-405.

Patil, G. P. and Rao, C. R. (1978) Weighted Distributions and Size-Biased Sampling with Applications to Wildlife Populations and Human Families, *Biometrics*, **34**, 179-189.

Rao, C. R. (1965), On Discrete Distributions Arising out of Ascertainment, In: Classical and Contagious Discrete Distributions, G. P. Patil (ed.), *The Indian Journal of Statistics*, Series A, **27**, 311-324.

Sankaran, M. (1970), The Discrete Poisson-Lindley Distribution, *Biometrics*, **26**, 145-149.

Young, D. S. (2014a), A Procedure for Approximate Negative Binomial Tolerance Intervals, *Journal of Statistical Computation and Simulation*, **84**, 438-450.

..... ۳۱۶ بازه تحمل تقریبی برای متغیر تصادفی پواسون-لیندلی اندازه-اریب

Young, D. S. (2014b), Tolerance Intervals for Hypergeometric and Negative Hypergeometric Variables, *Sankhya, The Indian Journal of Statistics*, Series B, **77**, 114-140.