



## Estimation of Linear Mixed Measurement Error Models in the Presence of Multicollinearity

Ghapani, F.<sup>1</sup> , Babadi, B.<sup>2</sup> 

<sup>1</sup>Department of Mathematics and Statistics, Shoushtar Branch, Islamic Azad University, Shoushtar, Iran.

<sup>2</sup>Department of Statistics, Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, Iran.

**Corresponding author:** B. Babadi, b.babadi@scu.ac.ir

Received: 22/10/2022 Revised: 21/7/2023 Accepted and Published Online: 2/8/2023.

### Introduction:

Linear mixed effects models are the most common statistical tools towards inference about repeated measurement data and in particular, longitudinal data in biomedical, agricultural, environmental and also in economics and social sciences. These models are an extension of simple linear models with various combinations of fixed and random effects. In these models, regressors are often measured with negligible errors. Hence it is of great interest to study the estimation for the measurement error models. Also, the presence of collinearity in such models complicates the problem of parameter estimation. To conquer the collinearity problem, many alternative biased estimators have been proposed. A popular technique to overcome the collinearity problem is to consider parameter estimation in addition to the sample information such as some exact or stochastic linear restrictions on the unknown parameters. Our primary aim in this paper is to obtain the weighted ridge estimator of fixed and random effects in stochastic restricted linear mixed measurement error models when collinearity is present.

### Material and Methods:

The asymptotic properties of the resulting estimates are examined. The necessary and sufficient conditions, for the superiority of the different estimators based on the mean squared error matrix of estimators are investigated. Furthermore, the selection of the ridge biasing parameter is discussed. A real

data analysis is provided to illustrate the theoretical results and a simulation study is conducted to characterize the performance of estimators in the linear mixed measurement

**Results and Discussion:**

With the increase of the levels of collinearity, measurement error and variance the estimated mean square error values of the estimators increase in general. Also, the weighted mixed ridge estimator has a smaller estimated mean square error value than the other estimators. In addition, we can get more exact estimators of the parameters when we get more dependent prior information. Therefore, we conclude that the proposed estimator can perform better than the other estimators.

**Conclusion:**

In this paper, we obtain the ridge estimator, weighted mixed estimator and weighted mixed ridge estimator for the vector of parameters in linear mixed measurement error models when additional stochastic linear restrictions on the parameter vector are assumed to hold. In order to investigate the performance of the estimators, mean square error matrix comparisons were done and the selection of the ridge biasing parameter was given. Both the numerical example results and simulation study indicate that always the restricted estimator is better than the unrestricted estimator. Also, there exists a ridge biasing parameter such that the ridge and mixed ridge estimators dominates the corrected estimator and restricted estimator, respectively in the sense of having a smaller mean square error value. In addition, results show that the biasing parameter affects the performance of the ridge estimators. Furthermore, this study confirms the use of stochastic linear restrictions in the presence of collinearity.

**Keywords:** Weighted estimator, Weighted ridge estimators, Stochastic restricted, Collinearity.

**Mathematics Subject Classification (2010):** 62J02, 62F12.



## برآورد مدل‌های خطی آمیخته با خطا در اندازه‌گیری در حضور هم‌خطی

فاطمه قیانی<sup>۱</sup>، بابک بابادی<sup>۲</sup>

<sup>۱</sup> گروه آمار و ریاضی، واحد شوشتر، دانشگاه آزاد شوشتر

<sup>۲</sup> گروه آمار، دانشگاه شهید چمران اهواز

نویسنده مسئول: بابک بابادی، b.babadi@scu.ac.ir

تاریخ دریافت: ۱۴۰۱/۷/۳۰ تاریخ بازنگری: ۱۴۰۲/۴/۳۰ تاریخ پذیرش و انتشار: ۱۴۰۲/۵/۱۱

**چکیده:** در این مقاله، برآوردگر ریج، برآوردگر محدود شده موزون و برآوردگر ریج محدود شده موزون در مدل‌های خطی آمیخته با خطا در اندازه‌گیری در حضور هم‌خطی در نظر گرفته می‌شود. سپس ویژگی‌های مجانبی برآوردگرهای به‌دست آمده بررسی می‌شود. شرایط لازم و کافی برای برتری برآوردگر ریج محدود شده موزون نسبت به برآوردگر محدود شده موزون به منظور تعیین پارامتر ریج با استفاده از ماتریس میانگین توان‌های دوم خطا تعیین می‌شود و سرانجام با استفاده از مطالعه شبیه‌سازی و ارائه یک مثال از داده‌های واقعی عملکرد برآوردگرهای به‌دست آمده مورد ارزیابی قرار می‌گیرد.

**واژه‌های کلیدی:** برآوردگر موزون، برآوردگر ریج موزون، محدودیت تصادفی، هم‌خطی  
کد موضوع‌بندی ریاضی (۲۰۱۰): 62F12, 62J02

## ۱ مقدمه

یکی از فرض‌های اساسی در تحلیل رگرسیون خطی این است که همه متغیرهای تبیینی مستقل خطی باشند. عدم برقراری این فرض و وجود وابستگی خطی بین ستون‌های ماتریس متغیرهای تبیینی باعث بروز مشکلاتی در برآورد پارامترهای مدل می‌شود. از جمله اینکه برآورد کمترین توان‌های دوم دارای واریانس بزرگ خواهند بود. همچنین وجود هم‌خطی در مدل باعث کاهش دقت برآورد و حساسیت برآورد نسبت به تغییر کوچکی در مجموعه داده‌ها می‌شود. حذف برخی از متغیرهای تبیینی از جمله روش‌های حل مشکل هم‌خطی است؛ اما یکی از اشکالات حذف



©نویسندگان). ناشر انجمن آمار ایران است.

این مقاله با دسترسی آزاد تحت شرایط و ضوابط (CC BY-NC 4.0) توزیع شده است.

متغیر این است که در این حالت از روابط موجود بین متغیرهای تبیینی چشم‌پوشی می‌شود (بلزلی، ۱۹۹۱). برای رفع مشکل هم‌خطی برآوردگرهای مختلفی توسط استین (۱۹۵۶)، هورل و کنارد (۱۹۷۰) و لیو (۱۹۹۳) پیشنهاد شده است. روش دیگر برخورد با مسئله هم‌خطی به‌دست آوردن برآورد پارامترهای مدل با اضافه کردن اطلاعات پیشین به‌صورت محدودیت‌های خطی دقیق یا تصادفی روی پارامترهای نامعلوم مدل است (رائو و همکاران، ۲۰۰۸). در مدل‌های خطی آمیخته لیو و هو (۲۰۱۳) برآورد ریج را معرفی کردند و یانگ و همکاران (۲۰۱۴) نیز مسئله پیش‌بینی را در این مدل‌ها بررسی نمودند. کوران و ازکال (۲۰۱۶) برآوردگرهای ریج محدود شده تصادفی را با استفاده از روش گیلمو به‌دست آوردند و ازکال و کن (۲۰۱۷) برآورد ریج اثرات ثابت و تصادفی را با استفاده از مدل آمیخته هندرسون پیشنهاد کردند. همچنین ازکال و کوران (۲۰۲۰) برآوردگر لیو و پیش‌بینی لیو برای اثرات تصادفی برای رفع مشکل هم‌خطی در برآورد پارامترها را به‌دست آوردند. در مدل‌های خطی با خطا در اندازه‌گیری قپانی و بابادی (۲۰۱۶) یک برآورد ریج جدید را تحت محدودیت‌های خطی تصادفی به‌دست آوردند. زمانی که اطلاعات نمونه و اطلاعات پیشین به یک اندازه اهمیت نداشته باشند، قپانی و همکاران (۲۰۱۸) برآورد ریج موزون را برای کاهش اثر هم‌خطی پیشنهاد دادند. در مدل‌های خطی آمیخته با خطا در اندازه‌گیری یآوری زاده و همکاران (۲۰۱۹) برآوردگر ریج محدود شده را به‌دست آوردند و امامی و منصور (۱۳۹۶) مباحث تشخیصی در مدل‌های خطی آمیخته نیمه‌پارامتری را مطرح کردند. هدف اصلی مقاله حاضر معرفی برآوردگر ریج موزون در مدل‌های خطی آمیخته با خطا در اندازه‌گیری می‌باشد. کارایی برآوردگر جدید نسبت به برآوردگر ماکسیمم درست‌نمایی تصحیح شده، برآوردگر ریج و برآوردگر موزون مورد ارزیابی قرار می‌گیرد و با استفاده از معیار ماتریس میانگین توان‌های دوم برآورد پارامتر ریج تعیین می‌شود. این مقاله به شرح زیر تنظیم شده است. در بخش ۲ ابتدا مدل با خطا در اندازه‌گیری معرفی و با استفاده از روش امتیاز تصحیح شده برآورد پارامترهای این مدل محاسبه می‌شوند. در بخش ۳، ابتدا برآوردگر ریج (RE) در مدل‌های خطی آمیخته با خطا در اندازه‌گیری معرفی و سپس مدل خطی آمیخته با خطا در اندازه‌گیری تحت محدودیت‌های تصادفی خطی معرفی و برآورد ریج محدود شده موزون اثرات ثابت و تصادفی با استفاده از روش امتیاز تصحیح شده تعیین می‌شود. در انتهای این بخش نیز ویژگی‌های مجانبی برآوردگرها بررسی می‌گردد. در بخش ۴ کارایی برآوردگرها با استفاده از معیار MSEM و انتخاب پارامتر اریب ریج مورد مطالعه قرار می‌گیرد. مطالعه شبیه‌سازی در بخش ۵ و تحلیل داده‌های واقعی در بخش ۶ ارائه می‌شود. در بخش ۷ به بحث و نتیجه‌گیری پرداخته خواهد شد.

## ۲ مدل آمیخته با خطا در اندازه‌گیری

یک مدل خطی آمیخته با خطا در اندازه‌گیری روی اثرات ثابت را به‌صورت

$$y = Z\beta + Su + \varepsilon, \quad X = Z + \Delta, \quad (1)$$

در نظر بگیرید، که در آن  $y$  یک بردار  $n \times 1$  از مشاهدات،  $Z$  یک ماتریس  $n \times p$  غیر قابل مشاهده از متغیرهای تبیینی،  $\beta$  بردار  $p \times 1$  از پارامترهای اثرات ثابت مدل، ماتریس  $S$  به شکل  $S = [S_1 | S_2 | \dots | S_\ell]$  یک ماتریس  $n \times q$  و  $S_i$  ماتریس طرح معلوم  $n \times q_i$  مربوط به  $i$ -امین اثر تصادفی است. همچنین  $u$  برداری  $q \times 1$  است که به صورت  $u = [u'_1 | u'_2 | \dots | u'_\ell]'$  افراز می‌شود، به طوری که  $u_i$  بردار تصادفی  $q_i \times 1$  نامعلوم با توزیع  $N(0, \sigma_i^2 I_{q_i})$ ،  $\varepsilon$  بردار خطای تصادفی با توزیع  $N(0, \sigma^2 I_n)$  هستند و فرض می‌شود  $u_i$ ،  $\varepsilon$  و  $\Delta$  از هم مستقل هستند. بردار تصادفی  $u$  را می‌توان به صورت  $u \sim N(0, \sigma^2 \Sigma)$  نوشت، به طوری که  $\Sigma$  یک ماتریس قطری است که  $i$ -امین بلوک قطری آن برای  $i = 1, \dots, \ell$  به صورت  $\gamma_i I_{q_i}$  با  $\gamma_i = \sigma_i^2 / \sigma^2$  است. ماتریس  $X$  مقدار مشاهده شده ماتریس  $Z$  با خطای اندازه‌گیری  $\Delta$  است و  $\Delta$  ماتریس تصادفی  $n \times p$  با توزیع  $MN(0, I \otimes \Lambda)$ ، که در آن  $\Lambda$  ماتریسی  $p \times p$  معلوم با عناصر قطری نامنفی است (فولر، ۱۹۸۷). با توجه به مفروضات فوق  $y$  دارای توزیع نرمال چند متغیره با  $E(y) = Z\beta$  و  $Var(y) = \sigma^2 V$  و  $V = I_n + \sum_{i=1}^{\ell} \gamma_i S_i S_i' = I_n + S \Sigma S'$  است. لگاریتم تابع درستنمایی و لگاریتم تابع درستنمایی تصحیح شده توام  $y$  و  $u$  به ترتیب به صورت

$$\begin{aligned} \ell(y, u, Z) &= -\frac{n+q}{2} \log(\pi \sigma^2) - \frac{1}{2} \log |\Sigma| \\ &\quad - \frac{1}{2\sigma^2} [(y - Z\beta - Su)'(y - Z\beta - Su) + u' \Sigma^{-1} u], \\ \ell^*(y, u, X) &= -\frac{n+q}{2} \log(\pi \sigma^2) - \frac{1}{2} \log |\Sigma| \\ &\quad - \frac{1}{2\sigma^2} [(y - X\beta - Su)'(y - X\beta - Su) - tr(V^{-1})\beta' \Lambda \beta + u' \Sigma^{-1} u], \end{aligned}$$

نوشته می‌شوند که لگاریتم تابع درستنمایی تصحیح شده  $\ell^*(y, u, X)$  دارای ویژگی‌های

$$E^* \left[ \frac{\partial \ell^*(y, u, X)}{\partial \beta} \right] = \frac{\partial \ell(y, u, Z)}{\partial \beta}, \quad E^* \left[ \frac{\partial \ell^*(y, u, X)}{\partial u} \right] = \frac{\partial \ell(y, u, Z)}{\partial u},$$

است و  $E^*$  امید ریاضی  $X$  به شرط  $y$  است. با حل معادلات  $\frac{\partial \ell^*(y, u, X)}{\partial \beta} = 0$  و  $\frac{\partial \ell^*(y, u, X)}{\partial u} = 0$  رابطه

$$[X'X - tr(V^{-1})\Lambda] \hat{\beta} + X'S(S'S + \Sigma^{-1})^{-1}S'(y - X\hat{\beta}) = X'y$$

به دست می‌آید و با توجه به تساوی  $V^{-1} = (I_n + S\Sigma S')^{-1} = I_n - S(S'S + \Sigma^{-1})^{-1}S'$ ، برآورد  $\hat{\beta}$  به صورت

$$\hat{\beta} = [X'V^{-1}X - tr(V^{-1})\Lambda]^{-1}X'V^{-1}y,$$

حاصل می‌شود. همچنین از رابطه  $(S'S + \Sigma^{-1})^{-1}S' = S'(S\Sigma S' + I_n)^{-1}S'$  رابطه  $(S'S + \Sigma^{-1})\Sigma S' = S'(S\Sigma S' + I_n) = S'V$  حاصل می‌شود. بنابراین مقدار پیش‌بینی تصحیح شده  $u$  برابر با  $\hat{u} = \Sigma S'V^{-1}(y - X\hat{\beta})$  است. لگاریتم تابع درست‌نمایی حاشیه‌ای و لگاریتم تابع درست‌نمایی حاشیه‌ای تصحیح شده  $y$  به ترتیب

$$\begin{aligned} \ell(\gamma, Z, y) &= -\frac{n}{\gamma} \log(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{\gamma} \log |V| - \frac{1}{\gamma\sigma^2} [(y - Z\beta)'V^{-1}(y - Z\beta)], \\ \ell^*(\gamma, X, y) &= -\frac{n}{\gamma} \log(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{\gamma} \log |V| - \frac{1}{\gamma\sigma^2} [(y - X\beta)'V^{-1}(y - X\beta) \\ &\quad - tr(V^{-1})\beta'\Lambda\beta], \end{aligned}$$

هستند، به طوری که تابع درست‌نمایی حاشیه‌ای تصحیح شده  $\ell^*(\gamma, X, y)$  دارای ویژگی

$$E^* \left[ \frac{\partial}{\partial \sigma^2} \ell^*(\gamma, X, y) \right] = \frac{\partial}{\partial \sigma^2} \ell(\gamma, Z, y),$$

است. با حل معادله  $\frac{\partial}{\partial \sigma^2} \ell^*(\gamma, X, y) = 0$  و جایگزینی  $\beta$  با  $\hat{\beta}$ ، برآورد  $\sigma^2$  به صورت

$$\hat{\sigma}^2 = n^{-1} [(y - X\hat{\beta})'V^{-1}(y - X\hat{\beta}) - tr(V^{-1})\hat{\beta}'\Lambda\hat{\beta}],$$

محاسبه می‌شود. با توجه به اینکه  $|V| = |I_q + S'S\Sigma|$ ،  $\partial V / \partial \gamma_i = \partial V^{-1} / \partial \gamma_i = -V^{-1}S_i S_i' V^{-1}$ ،  $S_i S_i'$  و  $\partial \Sigma / \partial \gamma_i = \text{diag}(0, \dots, 0, I_{q_i}, 0, \dots, 0)$  داریم

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ell^*(\gamma, X, y)}{\partial \gamma_i} &= -\frac{1}{\gamma} tr[(I_n + S'S\Sigma)^{-1}S'S \frac{\partial \Sigma}{\partial \gamma_i}] \\ &\quad + \frac{1}{\gamma \hat{\sigma}^2} [(y - X\hat{\beta})'V^{-1}S_i S_i' V^{-1}(y - X\hat{\beta}) - tr(V^{-1}S_i S_i' V^{-1})\hat{\beta}'\Lambda\hat{\beta}] \\ &= -\frac{1}{\gamma} \gamma_i^{-1} (q_i - tr(T_{ii})) + \frac{1}{\gamma \hat{\sigma}^2} [\gamma_i^{-1} \hat{u}_i' \hat{u}_i - \gamma_i^{-1} tr(D_i' D_i) \hat{\beta}'\Lambda\hat{\beta}] = 0, \end{aligned}$$

که در آن  $T_{ij}$  بلوک  $ij$ -ام از ماتریس  $T = (I + S'S\Sigma)^{-1}$  و  $D_i = \gamma_i S_i' V^{-1}$  است. با حل معادله فوق برآورد  $\hat{\sigma}_i^2$  ها به صورت

$$\hat{\sigma}_i^2 = \frac{[\hat{u}_i' \hat{u}_i - tr(\hat{D}_i' \hat{D}_i) \hat{\beta}'\Lambda\hat{\beta}]}{q_i - tr(T_{ii})},$$

است، که در آن  $\hat{D}_i = \hat{\gamma}_i S_i' V^{-1} = \frac{\hat{\sigma}_i^2}{\sigma^2} S_i' V^{-1}$ . در اینجا برای برآورد کردن پارامترها باید از روش‌های عددی استفاده شود (زارع و همکاران، ۲۰۱۲).

### ۳ برآورد رنج تحت محدودیت‌های خطی تصادفی

برای کاهش اثر هم‌خطی در مدل‌های آمیخته با خطا در اندازه‌گیری از برآوردگر رنج استفاده می‌شود. برای این منظور محدودیت خطی تصادفی  $\circ = \sqrt{k}I_p\beta + e$  در نظر گرفته می‌شود، به طوری که  $e \sim N(0, \sigma^2 I_p)$  و  $k > 0$  پارامتر رنج است. به منظور اعمال محدودیت رنج در برآورد پارامترها، تابع لگاریتم تصحیح شده توام  $y$  و  $u$  را به صورت

$$\ell^*(y, u, X, k) = \ell^*(y, u, X) - \frac{k\beta'\beta}{2\sigma^2},$$

تعریف می‌کنند. با مشتق گرفتن از  $\ell^*(y, u, X, k)$  نسبت به  $\beta$  و  $u$  برآورد رنج تصحیح شده  $\beta$  و مقدار پیش‌بینی رنج  $u$  به ترتیب به صورت

$$\begin{aligned} \hat{\beta}_k &= (X'V^{-1}X - \text{tr}(V^{-1})\Lambda + kI_p)^{-1}X'V^{-1}y, \\ \hat{u}_k &= \Sigma S'V^{-1}(y - X\hat{\beta}_k), \end{aligned} \quad (۲)$$

محاسبه می‌شود. لگاریتم تابع درست‌نمایی حاشیه‌ای تصحیح شده  $y$  با در نظر گرفتن محدودیت رنج به صورت

$$\ell^*(\gamma, X, y, k) = \ell^*(\gamma, X, y) - \frac{k\beta'\beta}{2\sigma^2},$$

در نظر گرفته می‌شود. با حل معادله  $\frac{\partial \ell^*(\gamma, X, y, k)}{\partial \sigma^2} = 0$  برآورد رنج تصحیح شده  $\sigma^2$  به صورت

$$\hat{\sigma}_k^2 = n^{-1}[(y - X\hat{\beta}_k)'V^{-1}(y - X\hat{\beta}_k) - \text{tr}(V^{-1})\hat{\beta}'_k\Lambda\hat{\beta}_k + k\hat{\beta}'_k\hat{\beta}_k].$$

است. همچنین برآورد تصحیح شده  $\sigma_i^2$  تحت محدودیت رنج به صورت

$$\hat{\sigma}_{ki}^2 = \frac{[\hat{u}_{ki}'\hat{u}_{ki} - \text{tr}(\hat{D}_{ki}'\hat{D}_{ki})\hat{\beta}'_k\Lambda\hat{\beta}_k]}{q_i - \text{tr}(T_{ii})},$$

به دست می‌آید، که در آن  $\hat{D}_{ki} = \hat{\gamma}_{ki}S'_iV^{-1} = \frac{\hat{\sigma}_{ki}^2}{\sigma_k^2}S'_iV^{-1}$  است. به کار بردن اطلاعات پیشین به صورت محدودیت‌های خطی تصادفی برآوردگرهای کاراتری از پارامترها را نتیجه می‌دهد. محدودیت‌های خطی تصادفی به صورت

$$r = R\beta + e, \quad (۳)$$

تعریف می‌شود، که در آن بردار تصادفی معلوم  $m \times 1$ ،  $R$  ماتریس معلوم  $m \times p$  پر رتبه سطری است و فرض می‌کنیم  $m < p$  است.  $e$  بردار  $m \times 1$  از خطای تصادفی با توزیع  $N(0, \sigma^2 W)$  است. در این مدل  $W$  ماتریس معین مثبت با عناصر معلوم است. همچنین فرض می‌کنیم  $e$  مستقل از  $\varepsilon$  و  $\Delta$  است. با ترکیب مدل (۱) با محدودیت‌های خطی تصادفی (۳) مدل به صورت  $y_r = Z_r \beta + S_r u + \varepsilon_r$ ، یا به فرم ماتریسی

$$\begin{bmatrix} y \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z \\ R \end{bmatrix} \beta + \begin{bmatrix} S \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} \varepsilon \\ e \end{bmatrix},$$

معرفی می‌شود. همچنین توزیع توام  $y_r$  و  $u$  به صورت

$$\begin{bmatrix} y_r \\ u \end{bmatrix} \sim N \left( \begin{bmatrix} Z_r \beta \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \sigma^2 V_r & \sigma^2 S_r \Sigma \\ \sigma^2 \Sigma S_r' & \sigma^2 \Sigma \end{bmatrix} \right), V_r = \begin{bmatrix} V & 0 \\ 0 & W \end{bmatrix},$$

است. بنابراین  $u|y_r$  دارای توزیع  $N(Z_r \beta + S_r u, \sigma^2 H_r)$  است، که در آن

$$H_r = V_r - S_r \Sigma S_r' = \begin{bmatrix} V - S \Sigma S' & 0 \\ 0 & W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & W \end{bmatrix}.$$

از آنجا که اطلاعات پیشین و اطلاعات نمونه اهمیت یکسانی ندارند، اسچاففرین و توتنبرگ (۱۹۹۰) برآورد آمیخته موزون را پیشنهاد کردند. بنابراین برای به دست آوردن برآورد ریج محدود شده موزون تابع لگاریتم تصحیح شده موزون توام تحت محدودیت ریج به صورت

$$\begin{aligned} \ell^*(y_r, u, X, k) = & -\frac{1}{2} \{ (n + m + q) \log(2\pi\sigma^2) + \log |\Sigma| + \log |W| \} \\ & - \frac{1}{2\sigma^2} \{ (y - X\beta - Su)'(y - X\beta - Su) - \text{tr}(V^{-1})\beta' \Lambda \beta \\ & + u' \Sigma^{-1} u + w(r - R\beta)' W^{-1} (r - R\beta) + k\beta' \beta \}, \end{aligned}$$

تعریف می‌شود. با مشتق گرفتن از  $\ell^*(y_r, u, X, k)$  نسبت به بردار  $\beta$  و  $u$  داریم

$$\begin{aligned} (X'X + wR'W^{-1}R - \text{tr}(V^{-1})\Lambda + kI_p)\hat{\beta}_{wrk} + X'S\hat{u}_{wrk} &= X'y + wR'W^{-1}r, \\ \hat{u}_{wrk} &= (S'S + \Sigma^{-1})^{-1}S'(y - X\hat{\beta}_{wrk}). \end{aligned} \quad (۴)$$



از حل این دو معادله برآورد ریج محدود شده موزون و مقدار پیش‌بینی محدود شده موزون به‌ترتیب به صورت

$$\hat{\beta}_{wrk} = (A_{wr} + kI_p)^{-1}(X'V^{-1}y + wR'W^{-1}r),$$

$$\hat{u}_{wrk} = \Sigma S'V^{-1}(y - X\hat{\beta}_{wrk}),$$

به‌دست می‌آیند که در آن  $A_{wr} = X'V^{-1}X + wR'W^{-1}R - tr(V^{-1})\Lambda$  اگر  $(w = 1, k = 0)$  آنگاه اطلاعات نمونه و اطلاعات پیشین دارای وزن یکسانی هستند و در این صورت  $\hat{\beta}_{wrk} = \hat{\beta}_r$  اگر  $(k = 0)$  آنگاه  $\hat{\beta}_{wrk} = \hat{\beta}_{wr}$  و هرگاه  $(w = 0)$  آنگاه  $\hat{\beta}_{wrk} = \hat{\beta}_k$  که بیانگر آن است که هیچ وزنی به اطلاعات پیشین داده نشده است. با استفاده از تساوی

$$(X'V^{-1}X + wR'W^{-1}R - tr(V^{-1})\Lambda + kI_p)^{-1} = A_k^{-1} - wA_k^{-1}R'(W + wRA_k^{-1}R')^{-1}RA_k^{-1},$$

که در آن  $A_k = X'V^{-1}X - tr(V^{-1})\Lambda + kI_p$  و داریم

$$[A_k^{-1} - wA_k^{-1}R'(W + wRA_k^{-1}R')^{-1}RA_k^{-1}]R'W^{-1}r = A_k^{-1}R'(W + wRA_k^{-1}R')^{-1}r.$$

بنابراین  $\hat{\beta}_{wrk}$  به‌صورت  $\hat{\beta}_{wrk} = \hat{\beta}_k + wA_k^{-1}R'(W + wRA_k^{-1}R')^{-1}(r - R\hat{\beta}_k)$  برای بدست آوردن برآورد ریج موزون  $\sigma^2$  تابع لگاریتم تصحیح شده

$$\begin{aligned} \ell^*(\gamma, X, y_r, k) = & -\frac{1}{\nu} \{ (n+m) \log(\nu\pi\sigma^2) + \log|\Sigma| + \log|W| \} \\ & - \frac{1}{\nu\sigma^2} \{ (y - X\beta)'V^{-1}(y - X\beta) - tr(V^{-1})\beta'\Lambda\beta \\ & + w(r - R\beta)'W^{-1}(r - R\beta) + k\beta'\beta \}, \end{aligned}$$

در نظر گرفته می‌شود. با حل معادله  $\frac{\partial \ell^*(\gamma, X, y_r, k)}{\partial \sigma^2} = 0$  برآورد ریج موزون  $\sigma^2$  به‌صورت

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{wrk}^2 = & (n+m)^{-1} [(y - X\hat{\beta}_{wrk})'V^{-1}(y - X\hat{\beta}_{wrk}) - tr(V^{-1})\hat{\beta}'_{wrk}\Lambda\hat{\beta}_{wrk} \\ & + w(r - R\hat{\beta}_{wrk})'W^{-1}(r - R\hat{\beta}_{wrk}) + k\hat{\beta}'_{wrk}\hat{\beta}_{wrk}], \end{aligned}$$

است. همچنین برای تعیین برآورد ریج موزون  $\gamma_{ij}$  -ها، از برآورد ریج موزون

$$\hat{\sigma}_{wrki}^2 = \frac{[\hat{u}_{wrki}'\hat{u}_{wrki} - tr(\hat{D}_{wrki}'\hat{D}_{wrki})]\hat{\beta}'_{wrk}\Lambda\hat{\beta}_{wrk}}{q_i - tr(T_{ii})},$$

استفاده می‌شود، که در آن  $\hat{D}_{wrki} = \hat{\gamma}_{wrki}S'_iV^{-1} = \frac{\hat{\sigma}_{wrki}^2}{\sigma_{wrk}^2}S'_iV^{-1}$  است.

### ۳.۱ ویژگی‌های مجانبی برآوردگرها

در این بخش خواص مجانبی برآوردگر  $\hat{\beta}_{wrk}$  را مورد بررسی قرار می‌دهیم. فرض می‌کنیم پارامتر  $\beta$  قابل تعیین است و حدهای  $n^{-1}(Z'V^{-1}Z + wR'W^{-1}R)$ ،  $n^{-1}(Z'V^{-1}Z + wR'W^{-1}R + kI_p)$  و  $n^{-1}(Z'V^{-1}Z)$  و  $kI_p$  وقتی  $n$  به سمت بی‌نهایت میل می‌کند، وجود دارند.

**قضیه ۱.** توزیع مجانبی  $\sqrt{n}(\hat{\beta}_{wrk} - G_{wr}G_{wrk}^{-1}\beta)$  نرمال با میانگین صفر و ماتریس کواریانس  $G_{w'r} = Z'V^{-1}Z + w'R'W^{-1}R$  است، که در آن  $AVar(\hat{\beta}_{wrk}) = G_{wrk}^{-1}(B + \sigma^2 G_{w'r})G_{wrk}^{-1}$ ،  $G_{wrk} = Z'V^{-1}Z + wR'W^{-1}R + kI_p$  و  $B = [\sigma^2 tr(V^{-1}) + \beta'Z'V^{-2}Z\beta]\Lambda$ .

**برهان:** با توجه به رابطه  $E(X'V^{-1}X) = Z'V^{-1}Z + tr(V^{-1})\Lambda$  **فونگ و همکاران (۲۰۰۳)** تساوی  $X'V^{-1}X = Z'V^{-1}Z + tr(V^{-1})\Lambda + O_p(n^{\frac{1}{2}})$  به دست می‌آید. با اعمال محدودیت‌های تصادفی خطی و محدودیت ریج در رابطه فوق داریم

$$\begin{aligned} n^{-1}[X'V^{-1}X + wR'W^{-1}R + kI_p - tr(V^{-1})\Lambda] &= n^{-1}(Z'V^{-1}Z + wR'W^{-1}R + kI_p) + O_p(n^{-\frac{1}{2}}), \\ \sqrt{n}\hat{\beta}_{wrk} &= [n^{-1}(Z'V^{-1}Z + wR'W^{-1}R + kI_p) + O_p(n^{-\frac{1}{2}})]^{-1} \\ n^{-\frac{1}{2}}(X'V^{-1}y + wR'W^{-1}r) &= [I_p + O_p(n^{-\frac{1}{2}})]^{-1}(n^{-1}G_{wrk})^{-1}\xi \\ &= [I_p + O_p(n^{-\frac{1}{2}})](n^{-1}G_{wrk})^{-1}\xi. \end{aligned}$$

عبارت  $\xi = n^{-\frac{1}{2}}(X'V^{-1}y + wR'W^{-1}r)$  به طور مجانبی نرمال است و اگر حد  $C = n^{-1}G_{wrk}$  وجود داشته باشد، می‌توان نتیجه گرفت

$$\sqrt{n}\hat{\beta}_{wrk} = C^{-1}\xi + O_p(n^{-\frac{1}{2}}). \quad (5)$$

از آنجا که  $E(X'V^{-1}y + wR'W^{-1}r) = (Z'V^{-1}Z + wR'W^{-1}R)\beta$ ، امید ریاضی بردار تصادفی  $\xi$  به صورت  $E(\xi) = n^{-\frac{1}{2}}G_{wr}\beta$  به دست می‌آید. در نتیجه

$$\sqrt{n}(\hat{\beta}_{wrk} - G_{wrk}^{-1}G_{wr}\beta) = C^{-1}[\xi - E(\xi)] + O_p(n^{-\frac{1}{2}}).$$

بنابراین  $\sqrt{n}(\hat{\beta}_{wrk} - G_{wr}G_{wrk}^{-1}\beta)$  دارای توزیع مجانبی نرمال با میانگین صفر است. همچنین از رابطه (۵)

می‌توان نتیجه گرفت  $AVar(\sqrt{n}\hat{\beta}_{wrk}) = C^{-1}Var(\xi)C^{-1}$ . واریانس مجانبی بردار  $\xi$  به صورت

$$Var(\xi) = E[Var(\xi|y)] + Var[E(\xi|y)]$$

$$= n^{-1}E(y'V^{-1}y\Lambda) + n^{-1}Var(Z'V^{-1}y + wR'W^{-1}r),$$

نوشته می‌شود. از آنجا که

$$E(y'V^{-1}y) = \sigma^2 tr(V^{-1}) + \beta'Z'V^{-1}Z\beta$$

$$Var(Z'V^{-1}y + wR'W^{-1}r) = \sigma^2 G_{w'r},$$

داریم  $Var(\xi) = n^{-1}(B + \sigma^2 G_{w'r})$ ، بنابراین  $AVar(\hat{\beta}_{wrk}) = G_{wrk}^{-1}(B + \sigma^2 G_{w'r})G_{wrk}^{-1}$ .

تذکر ۱. میانگین و کواریانس ماتریس‌های  $\hat{\beta}_k$  و  $\hat{\beta}_{wr}$  به ترتیب عبارتند از

$$E(\hat{\beta}_{wr}) = \beta, \quad AVar(\hat{\beta}_{wr}) = G_{wr}^{-1}(B + \sigma^2 G_{w'r})G_{wr}^{-1},$$

$$E(\hat{\beta}) = \beta, \quad AVar(\hat{\beta}) = G^{-1}(B + \sigma^2 G)G^{-1}.$$

## ۴ ماتریس میانگین توان‌های دوم خطا

برآورد ترکیبات خطی اثرات ثابت و اثرات تصادفی، توسط بسیاری از نویسندگان از جمله هندرسون (۱۹۷۰)، پراساد و راثو (۱۹۹۰)، داس و همکاران (۲۰۰۴)، لیو و همکاران (۲۰۰۸)، کوران وازکال (۲۰۱۶)، ازکال و کن (۲۰۱۷) و ازکال و کوران (۲۰۲۰) در نظر گرفته شده است. برای مقایسه برآوردهای ذکر شده در بخش‌های قبلی مسئله پیش‌بینی ترکیبات خطی اثرات ثابت و اثرات تصادفی به فرم  $f(L, M) = \mu = L'\beta + M'u$  در نظر گرفته می‌شود، که در آن  $L \in R^{p \times s}$  و  $M \in R^{q \times s}$  است. یانگ و همکاران (۲۰۱۴)، پیرا و کوئلهو (۲۰۲۱) و رابینسون (۱۹۰۱) مسئله پیش‌بینی ترکیبات خطی را برای حالت خاص  $s = 1$  در نظر گرفتند. بر همین اساس پیش‌بینی برآوردها به صورت

$$\hat{\mu} = L'\hat{\beta} + M'\hat{u} = Q\hat{\beta} + M'\Sigma S'V^{-1}y,$$

$$\hat{\mu}_k = L'\hat{\beta}_k + M'\hat{u}_k = Q\hat{\beta}_k + M'\Sigma S'V^{-1}y,$$

$$\hat{\mu}_{wr} = L'\hat{\beta}_{wr} + M'\hat{u}_{wr} = Q\hat{\beta}_{wr} + M'\Sigma S'V^{-1}y,$$

$$\hat{\mu}_{wrk} = L'\hat{\beta}_{wrk} + M'\hat{u}_{wrk} = Q\hat{\beta}_{wrk} + M'\Sigma S'V^{-1}y,$$

تعریف می‌شود، که در آن  $Q = L' - P'\Sigma S'V^{-1}X$  است. در حالی که مولفه‌های واریانس نامعلوم باشند، از برآوردهای تصحیح شده توسط زارع و همکاران (۲۰۱۲) استفاده می‌شود. یک معیار مهم برای ارزیابی عملکرد پیش‌بینی‌ها، استفاده از ماتریس MSEM است. برای هر برآوردگر یا پیش‌بینی ماتریس MSEM به صورت

$$MSEM(\tilde{\mu}) = Var(\tilde{\mu}) + Var(\mu) + Bias(\tilde{\mu})Bias(\tilde{\mu})' - Cov(\tilde{\mu}, \mu) - Cov(\mu, \tilde{\mu}),$$

تعریف می‌شود، که در آن  $Bias(\tilde{\mu}) = E(\tilde{\mu}) - \mu$  مقدار اریبی است و

$$Var(\mu) = \sigma^2 M' \Sigma M$$

$$Var(\hat{\mu}_{wrk}) = QVar(\hat{\beta}_{wrk})Q' + QCov(\hat{\beta}_{wrk}, y)V^{-1}\Sigma M + M'\Sigma S'V^{-1}Cov(y, \hat{\beta}_{wrk})Q' + \sigma^2 M'\Sigma S'V^{-1}\Sigma M,$$

$$Cov(\hat{\beta}_{wrk}, y) = \sigma^2 (A_{wr} + kI_p)^{-1} X',$$

$$Bias(\hat{\mu}_{wrk}) = QE(\hat{\beta}_{wrk} - \beta) = -kQG_{wrk}^{-1}\beta,$$

$$Cov(\hat{\mu}_{wrk}, \mu) = QCov(\hat{\beta}_{wrk}, u)M + M'\Sigma S'V^{-1}Cov(y, u)M,$$

به دست می‌آید، که در آن  $Cov(\hat{\beta}_{wrk}, u) = \sigma^2 (A_{wr} + kI_p)^{-1} X'V^{-1}\Sigma$  و همچنین  $Cov(y, u) = \sigma^2 S\Sigma$  بنابراین می‌توان نوشت

$$Cov(\hat{\mu}_{wrk}, \mu) = QCov(\hat{\beta}_{wrk}, y)V^{-1}\Sigma M + \sigma^2 M'\Sigma S'V^{-1}\Sigma M.$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} MSEM(\hat{\mu}_{wrk}) &= QVar(\hat{\beta}_{wrk})Q' + QCov(\hat{\beta}_{wrk}, y)V^{-1}\Sigma M \\ &+ M'\Sigma S'V^{-1}Cov(y, \hat{\beta}_{wrk})Q' + \sigma^2 M'\Sigma S'V^{-1}\Sigma M \\ &+ \sigma^2 M'\Sigma M + QBias(\hat{\beta}_{wrk})Bias(\hat{\beta}_{wrk})'Q' \\ &- QCov(\hat{\beta}_{wrk}, y)V^{-1}\Sigma P - \sigma^2 M'\Sigma S'V^{-1}\Sigma M \\ &- M'\Sigma S'V^{-1}Cov(y, \hat{\beta}_{wrk})Q' - \sigma^2 M'\Sigma S'V^{-1}\Sigma M \\ &= QMSEM(\hat{\beta}_{wrk})Q' + \sigma^2 M'(\Sigma - \Sigma S'V^{-1}\Sigma)M. \end{aligned}$$

$$MSEM(\hat{\mu}) = QMSEM(\hat{\beta})Q' + \sigma^2 M'(\Sigma - \Sigma S'V^{-1}\Sigma)M.$$

بنابراین برتری ماتریس  $MSEM(\hat{\mu}_{wrk})$  نسبت به ماتریس  $MSEM(\hat{\mu})$  معادل برتری ماتریس  $MSEM(\hat{\beta}_{wrk})$  نسبت به ماتریس  $MSEM(\hat{\beta})$  است. با توجه به نتایج به دست آمده در بخش قبل ماتریس مجانبی میانگین توان‌های دوم خطا برآوردگرهای ذکر شده به صورت

$$AMSEM(\hat{\beta}) = G^{-1}(B + \sigma^2 G)G^{-1}, \quad (۶)$$

$$AMSEM(\hat{\beta}_k) = G_k^{-1}(B + \sigma^2 G)G_k^{-1} + b_1 b_1', \quad (۷)$$

$$AMSEM(\hat{\beta}_{wr}) = G_{wr}^{-1}(B + \sigma^2 G_{wr})G_{wr}^{-1}, \quad (۸)$$

$$AMSEM(\hat{\beta}_{wrk}) = G_{wrk}^{-1}(B + \sigma^2 G_{wrk})G_{wrk}^{-1} + b_2 b_2', \quad (۹)$$

هستند، که در آن‌ها  $b_1 = -kG_k^{-1}\beta$  و  $b_2 = -kG_{wrk}^{-1}\beta$ .

#### ۴.۱ مقایسه ماتریس میانگین توان‌های دوم

قضیه ۲. فرض کنید  $w$  ثابت و  $0 < w < 1$  باشد. آنگاه  $\hat{\beta}_{wrk}$  با استفاده از معیار ماتریس میانگین توان‌های دوم خطا نسبت به  $\hat{\beta}_{wr}$  کارائی بیشتری دارد هرگاه  $k \leq \frac{\sigma^2}{\beta'(G_{wr}^{-1}G_{wr} + G_{wr}^{-1})^{-1}\beta}$ .

برهان: از روابط (۸) و (۹) داریم

$$\begin{aligned} \Delta &= AMSEM(\hat{\beta}_{wr}) - AMSEM(\hat{\beta}_{wrk}) \\ &= G_{wr}^{-1} [kG_{wr}^{-1}B + k\sigma^2 G_{wr}^{-1}G_{wr} + kB G_{wr}^{-1} + k^2 G_{wr}^{-1}B G_{wr}^{-1} \\ &\quad + k\sigma^2 G_{wr}^{-1}G_{wr} + k^2 \sigma^2 G_{wr}^{-1}G_{wr} G_{wr}^{-1} - k^2 \beta \beta'] G_{wrk}^{-1}. \end{aligned}$$

با توجه به اینکه  $kG_{wr}^{-1}B + kB G_{wr}^{-1} + k^2 G_{wr}^{-1}B G_{wr}^{-1} + k^2 \sigma^2 G_{wr}^{-1}G_{wr} G_{wr}^{-1}$  ماتریس معین مثبت است، آنگاه  $\Delta \geq 0$  است اگر  $k\sigma^2 G_{wr}^{-1}G_{wr} + k\sigma^2 G_{wr}^{-1}G_{wr} G_{wr}^{-1} - k^2 \beta \beta' \geq 0$  باشد. بنابراین شرط کافی برای برتری  $\hat{\beta}_{wrk}$  به  $\hat{\beta}_{wr}$  با استفاده از معیار ماتریس میانگین توان‌های دوم خطا این است که  $k \leq \sigma^2 [\beta'(G_{wr}^{-1}G_{wr} + G_{wr}^{-1})^{-1}\beta]^{-1}$  باشد. یک مقدار برای  $k$  وجود دارد، به طوری که برآوردگر  $\hat{\beta}_{wrk}$  نسبت به برآوردگر  $\hat{\beta}_{wr}$  کاراتر باشد. اگر پارامترهای نامعلوم در  $k$  با برآوردگرهای مناسب جایگزین شود، یک برآورد برای  $k$  به صورت  $\hat{k} \leq \hat{\sigma}^2 [\hat{\beta}'(G_{wr}^{-1}G_{wr} + G_{wr}^{-1})^{-1}\hat{\beta}]^{-1}$  به دست می‌آید.

## ۵ مطالعه شبیه‌سازی

به منظور بررسی عملکرد برآوردگرها یک مطالعه شبیه‌سازی انجام شده است. برای در نظر گرفتن درجات مختلف هم‌خطی با توجه به مقاله مک‌دونالد و گالارنو (۱۹۷۵) متغیرهای تبیینی به صورت

$$z_{ij} = (1 - \rho^2)^{\frac{1}{2}} w_{ij} + \rho w_{i,p+1}, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, p,$$

تولید می‌شود، که در آن متغیرهای شبه تصادفی مستقل نرمال استاندارد و  $\rho$  همبستگی بین دو اثر ثابت را نشان می‌دهد. مقادیر  $0.75, 0.80, 0.85, 0.90$  و  $0.95$  برای  $\rho$  در نظر گرفته می‌شود. داده‌ها همچنین استاندارد می‌شوند تا  $Z'V^{-1}Z$  به فرم ماتریس همبستگی شود. مدل خطی آمیخته با خطا در اندازه‌گیری تحت محدودیت‌های خطی تصادفی به صورت

$$y_t = Z\beta + Su_t + \varepsilon_t, \quad X = Z + \Delta, \quad r_t = R\beta + e_t, \quad t = 1, \dots, 1000$$

تولید می‌شود، که در آن  $Z = (z^{(1)}, \dots, z^{(p)})$ ،  $u_t = (u_{1t}, \dots, u_{qt})'$ ،  $y = (y_{1t}, \dots, y_{qt})'$ ،  $z^{(j)} = (z_{1j}^{(j)}, \dots, z_{qj}^{(j)})'$ ،  $j = 1, \dots, p$  بردار یکه  $1 \times n$ ،  $q$  تعداد گروه‌های مستقل،  $\ell$  اندازه هر گروه و  $n = \ell q$  تعداد کل مشاهدات است. همچنین برای انجام شبیه‌سازی  $R^{(j)} = (R_1^{(j)}, \dots, R_m^{(j)})'$ ،  $R = (R^{(1)}, \dots, R^{(p)})$ ،  $r = (r_{1t}, \dots, r_{mt})'$  ترکیبات متفاوت پارامترهای مدل به صورت  $3, 6, \ell = 3, 15, q = 9, 15, m = 1, p = 4$ ،  $\sigma^2 = N(0, 1)$ ،  $\Lambda = \text{diag}(0.75, 0.75, 0.75)$  یا  $\Lambda = \text{diag}(0.75, 0.75, 0.75)$ ،  $w = 0.3, 0.7, 1$ ،  $\sigma_1^2 = 0.5, 1, 0.5, 1$  نظر گرفته می‌شود. برای هر مجموعه از متغیرهای تبیینی، بردار اثرات ثابت، بزرگترین بردار ویژه متناظر ماتریس  $Z'V^{-1}Z$  در نظر گرفته می‌شود. مطالعه شبیه‌سازی با نرم افزار R انجام شده است. ابتدا برآوردهای  $\hat{\beta}$ ،  $\hat{\sigma}^2$  و یک برآورد مناسب برای  $Z$  به صورت  $\hat{Z} = X + \hat{\sigma}_v^{-2} \hat{v} \hat{\beta}' \Lambda$  (زارع و راسخ، ۲۰۱۲) محاسبه می‌شود، که در آن  $\hat{v}_i = y_i - x_i' \hat{\beta} - s_i' \hat{u}$  و  $\hat{\sigma}_v^2 = \hat{\sigma}^2 + \hat{\beta}' \Lambda \hat{\beta}$  است. سپس برای هر ترکیب از پارامترها با تولید خطای جدید، ۱۰۰۰ تکرار انجام می‌شود. عملکرد برآوردها با استفاده از برآورد میانگین توان‌های دوم خطاها به صورت

$$AM\hat{S}E(\tilde{\beta}) = \frac{1}{1000} \sum_{l=1}^{1000} \sum_{j=1}^p (\tilde{\beta}_{jl} - \beta_j)^2,$$

ارزیابی می‌شود، که در آن  $\tilde{\beta}_{jl}$  برآورد  $\beta$  در  $j$ -امین تکرار آزمایش است. نتایج شبیه‌سازی در جداول ۱ تا ۴ بیانگر آن است که با افزایش سطح هم‌خطی،  $\Lambda$  و  $\sigma^2$  برآورد مقدار AMSE افزایش می‌یابد. وقتی  $\sigma^2$  ثابت است و  $\sigma_1^2$  از ۰.۵ به ۱ افزایش می‌یابد، در همه حالات مقدار AMSE کاهش می‌یابد. با افزایش اندازه نمونه مقادیر AMSE

جدول ۱. برآورد مقدار AMSE برآوردهای مختلف با  $n = 27$  و  $\Lambda = \text{diag}(0.1, 0.1, 0.1)$

$w = 1$		$w = 0.7$		$w = 0.3$		$\hat{\beta}_k$	$\hat{\beta}$	$\sigma_1^2$	$\sigma^2$	$\rho$
$\hat{\beta}_{wrk}$	$\hat{\beta}_{wr}$	$\hat{\beta}_{wrk}$	$\hat{\beta}_{wr}$	$\hat{\beta}_{wrk}$	$\hat{\beta}_{wr}$					
0.1103	0.1183	0.1104	0.1184	0.1105	0.1185	0.1107	0.1187	0.5		
0.1103	0.1184	0.1104	0.1185	0.1105	0.1186	0.1107	0.1188	1	0.5	
0.2019	0.2270	0.2018	0.2271	0.2020	0.2274	0.2024	0.2278	0.5		0.75
0.2036	0.2298	0.2037	0.2299	0.2039	0.2302	0.2042	0.2305	1	1	
0.1290	0.1399	0.1291	0.1400	0.1294	0.1402	0.1296	0.1405	0.5		
0.1290	0.1399	0.1291	0.1400	0.1294	0.1402	0.1296	0.1405	1	0.5	
0.1287	0.1397	0.1287	0.1398	0.1289	0.1400	0.1292	0.1403	0.5		0.80
0.1347	0.2694	0.2347	0.2695	0.2351	0.2699	0.2356	0.2705	1	1	
0.1677	0.1664	0.1678	0.1865	0.1682	0.1869	0.1686	0.1875	0.5		
0.1673	0.1871	0.1674	0.1872	0.1677	0.1876	0.1682	0.1882	1	0.5	
0.2939	0.3476	0.2940	0.3478	0.2946	0.3486	0.2954	0.3496	0.5		0.85
0.3027	0.3595	0.3028	0.3598	0.3034	0.3606	0.3043	0.3616	1	1	
0.2366	0.2714	0.2368	0.2717	0.2376	0.2728	0.2387	0.2740	0.5		
0.2322	0.2684	0.2323	0.2687	0.2332	0.2698	0.2342	0.2711	1	0.5	
0.4061	0.4999	0.4064	0.5004	0.4077	0.5022	0.4094	0.5044	0.5		0.90
0.4149	0.5132	0.4152	0.5138	0.4167	0.5157	0.4185	0.5181	1	1	
0.4581	0.5617	0.4597	0.5637	0.4633	0.5686	0.4675	0.5742	0.5		
0.4359	0.5374	0.4366	0.5392	0.4398	0.5439	0.4439	0.5496	1	0.5	
0.7750	1.0144	0.7768	1.0175	0.7822	1.0257	0.7887	1.0353	0.5		0.95
0.7619	1.0124	0.7633	1.0154	0.7689	1.0238	0.7756	1.0339	1	1	

کاهش می‌یابد. در تمام حالات مقادیر AMSE برآوردهای  $\hat{\beta}_{wrk}$ ،  $\hat{\beta}_{wr}$  و  $\hat{\beta}_k$  کمتر از مقدار AMSE برآوردهای  $\hat{\beta}$  است. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که برآوردهای پیشنهادی عملکرد بهتری نسبت به  $\hat{\beta}$  دارند. با افزایش مقادیر  $w$  مقادیر برآورد شده  $\hat{\beta}_{wrk}$ ،  $\hat{\beta}_{wr}$  کوچک و کوچکتر می‌شوند که بدان معناست که با به‌کار بردن اطلاعات پیشین در برآورد پارامترها برآوردهای کاراتری به‌دست می‌آید. در تمام موارد برآوردهای  $\hat{\beta}_{wrk}$  دارای مقدار برآورد AMSE کمتری نسبت به بقیه برآوردها دارد. بنابراین در حضور هم‌خطی استفاده از برآوردهای محدود شده بهتر از سایر برآوردها است.

## ۶ تحلیل داده‌های مسکن

در این بخش نتایج نظری برای یک مجموعه از مشاهدات واقعی تحت عنوان مجموعه داده‌های مسکن در بوستون که توسط هریسون و رابینفلد (۱۹۷۸) ارائه شده است، به‌کار می‌رود. ژانگ و همکاران (۲۰۰۲) از این مجموعه داده

جدول ۲. برآورد مقدار AMSE برآوردهای مختلف با  $n = 90$  و  $\Lambda = \text{diag}(0.1, 0.1, 0.1)$

$w = 1$		$w = 0.7$		$w = 0.3$		$\hat{\beta}_k$	$\hat{\beta}$	$\sigma^2$	$\sigma^2$	$\rho$
$\hat{\beta}_{wrk}$	$\hat{\beta}_{wr}$	$\hat{\beta}_{wrk}$	$\hat{\beta}_{wr}$	$\hat{\beta}_{wrk}$	$\hat{\beta}_{wr}$					
0.481	0.495	0.485	0.499	0.502	0.517	0.531	0.548	0.5		
0.477	0.491	0.480	0.495	0.497	0.512	0.526	0.543	1	0.5	
0.912	0.961	0.917	0.968	0.948	0.1002	0.1001	0.1060	0.5		0.75
0.916	0.967	0.922	0.974	0.952	0.1008	0.1007	0.1067	1	1	
0.579	0.599	0.584	0.605	0.609	0.631	0.652	0.677	0.5		
0.571	0.591	0.575	0.596	0.599	0.621	0.641	0.667	1	0.5	
0.1090	0.1160	0.1098	0.1170	0.1140	0.1218	0.1219	0.1306	0.5		0.80
0.1091	0.1162	0.1098	0.1172	0.1141	0.1220	0.1220	0.1309	1	1	
0.743	0.776	0.751	0.785	0.788	0.825	0.860	0.903	0.5		
0.725	0.758	0.732	0.766	0.767	0.804	0.838	0.880	1	0.5	
0.1383	0.1494	0.1394	0.1510	0.14591	0.1584	0.1587	0.1731	0.5		0.85
0.1375	0.1488	0.1386	0.1502	0.1449	0.1576	0.1578	0.1723	1	1	
0.1069	0.1135	0.1082	0.1150	0.1147	0.1222	0.1294	0.1385	0.5		
0.1027	0.1090	0.1037	0.1103	0.1097	0.1169	0.1238	0.1325	1	0.5	
0.1953	0.2166	0.1973	0.2193	0.2083	0.2324	0.2337	0.2626	0.5		0.90
0.1921	0.2133	0.1937	0.2157	0.2043	0.2284	0.2295	0.2584	1	1	
0.2057	0.2270	0.2083	0.2304	0.2229	0.2471	0.2698	0.3017	0.5		
0.1900	0.2099	0.1920	0.2124	0.2046	0.2270	0.2475	0.2770	1	0.5	
0.3623	0.4240	0.3659	0.4297	0.3899	0.4598	0.4671	0.5586	0.5		0.95
0.3470	0.4068	0.3498	0.4116	0.3718	0.4393	0.4459	0.5346	1	1	

جهت برآورد اثرات ثابت و تصادفی در یک مدل خطی آمیخته زمانی که اثرات ثابت با خطای اندازه‌گیری مواجه‌اند، استفاده کردند. تعداد کل نمونه ۵۰۶ مشاهده و در محدوده سرشماری SMSA بوستون در سال ۱۹۷۰ جمع‌آوری شده است که از میان آنها تعداد ۱۳۲ مشاهده مربوط به ۱۵ ناحیه در شهر بوستون را انتخاب کردند. محدوده‌های سرشماری در بین نواحی با تکرار اندازه‌گیری شده‌اند و بنابراین از یک مدل خطی آمیخته باید استفاده کرد. از آنجا که متغیر مربوط به آلودگی هوا یعنی NOXSQ با خطای اندازه‌گیری شده است (سایر متغیرهای مستقل در مدل همگی بدون خطای اندازه‌گیری شده است)، در نتیجه **ژانگ و همکاران (۲۰۰۲)** یک مدل خطی آمیخته با خطای اندازه‌گیری را برای انجام تحقیق خود پیشنهاد دادند. برای بررسی عملکرد برآوردهای ذکر شده در این مقاله یک مدل خطی آمیخته با خطای اندازه‌گیری  $y = Z\beta + Su + \varepsilon$  به داده‌ها برازش می‌شود که  $y$  یک بردار  $132 \times 1$  از مقادیر پاسخ،  $X$  و  $U$  به ترتیب ماتریس‌های پیش‌بین  $132 \times 8$  و  $132 \times 15$  هستند (مکسای و همکاران، ۲۰۲۲). برای بررسی وجود هم‌خطی عدد شرطی محاسبه و مقادیر اولیه مولفه‌های واریانس در ابتدا  $\sigma^2 = 0.5$  و  $\sigma^2 = 0.5$  در نظر گرفته می‌شود. مقادیر ویژه ماتریس  $X'V^{-1}X$  به ترتیب  $\lambda_1 = 1.537596e + 05$ ،  $\lambda_2 = 1.731559e + 04$  و ...



جدول ۳. برآورد مقدار AMSE برآوردهای مختلف با  $n = 27$  و  $\Lambda = \text{diag}(0.5, 0.5, 0.5)$

$w = 1$		$w = 0.5$		$w = 0.3$		$\hat{\beta}_k$	$\hat{\beta}$	$\sigma_1^2$	$\sigma^2$	$\rho$
$\hat{\beta}_{wrk}$	$\hat{\beta}_{wr}$	$\hat{\beta}_{wrk}$	$\hat{\beta}_{wr}$	$\hat{\beta}_{wrk}$	$\hat{\beta}_{wr}$					
0.1347	0.1438	0.1348	0.1439	0.1350	0.1441	0.1352	0.1443	0.5		
0.1302	0.1392	0.1303	0.1393	0.1304	0.1394	0.1306	0.1396	1	0.5	
0.2328	0.2598	0.2329	0.2600	0.2332	0.2603	0.2335	0.2607	0.5		0.75
0.2301	0.2576	0.2302	0.2577	0.2305	0.2581	0.2308	0.2585	1	1	
0.1649	0.1778	0.1651	0.1779	0.1653	0.1782	0.1656	0.1785	0.5		
0.1580	1705	0.1581	0.1706	0.1583	0.1709	0.1586	0.1712	1	0.5	
0.2782	0.3147	0.2783	0.3149	0.2788	0.3155	0.2793	0.3161	0.5		0.80
0.2733	0.3102	0.2734	0.3104	0.2739	0.3109	0.2744	0.3116	1	1	
0.2115	0.2325	0.2118	0.2328	0.2123	0.2335	0.2129	0.2341	0.5		
0.1939	0.2146	0.1941	0.2148	0.1946	0.2154	0.1952	0.2161	1	0.5	
0.3560	0.4129	0.3563	0.4133	0.3571	0.4144	0.3581	0.4156	0.5		0.85
0.3524	0.4100	0.3526	0.4105	0.3536	0.4116	0.3546	0.4128	1	1	
0.3253	0.3649	0.3260	0.3658	0.3275	0.3675	0.3290	0.3692	0.5		
0.2879	0.3255	0.2885	0.3262	0.2896	0.3277	0.2910	0.3293	1	0.5	
0.5313	0.6300	0.5321	0.6313	0.5341	0.6341	0.5363	0.6369	0.5		0.90
0.5166	0.6145	0.5174	0.6158	0.5194	0.6185	0.5217	0.6214	1	1	
48089	39225	44092	45249	56908	58179	75540	77089	0.5		
37613	38621	43898	44935	57372	58521	76897	78224	1	0.5	
55838	58209	66833	69282	96121	98834	155252	158746	0.5		0.95
66990	69294	78115	80470	102641	105198	140437	143554	1	1	

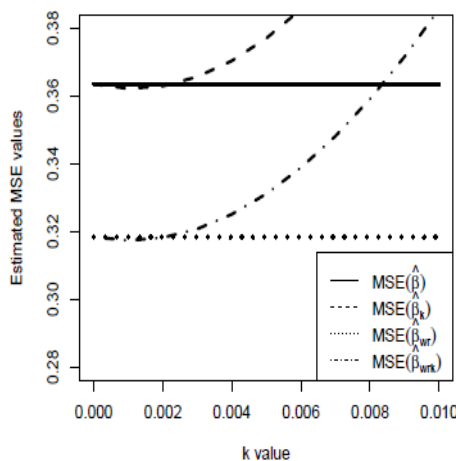
$\lambda_9 = 30.0313e - 1$  هستند. بنابراین مقدار عدد شرطی  $\sqrt{\lambda_{\max}/\lambda_{\min}} = 354.23$  است که نشان‌دهنده وجود هم‌خطی است. همچنین برای این مجموعه داده‌ها، محدودیت‌های خطی تصادفی به صورت  $r = R\beta + e$ ، که در آن برداری  $1 \times 2$  از مشاهدات خارج و نزدیک شهر بوستون انتخاب شده‌اند. عناصر متناظر ماتریس  $X$  به عنوان ماتریس  $R$  در نظر گرفته می‌شوند. برآورد پارامترها و برآورد مقدار MSE در جدول ۵ ارائه شده است و مقدار برآورد MSE برآوردهای مختلف از فرمول  $MSE(\hat{\beta}) = tr[AMSEM(\hat{\beta})]$  به دست می‌آید. مقدار MSE برآورد شده برآوردهای  $\hat{\beta}_k$ ،  $\hat{\beta}_{wr}$  و  $\hat{\beta}_{wrk}$  کمتر از برآوردگر  $\hat{\beta}$  است. همچنین دارای مقدار MSE کمتری نسبت به بقیه برآوردهای مختلف است. علاوه بر این با افزایش  $w$  مقدار MSE برآوردهای  $\hat{\beta}_{wrk}$  و  $\hat{\beta}_{wr}$  کاهش می‌یابد. بنابراین برآوردگر ریب موزون عملکرد بهتری نسبت به بقیه برآوردهای مختلف دارد. به منظور بررسی بیشتر نمودار مقادیر MSE برای برآوردهای مختلف در شکل ۱ رسم شده است.

جدول ۴. برآورد مقدار AMSE برآوردهای مختلف با  $n = 90$  و  $\Lambda = \text{diag}(0.5, 0.5, 0.5)$

$w = 1$		$w = 0.7$		$w = 0.3$		$\hat{\beta}_k$	$\hat{\beta}$	$\sigma^2$	$\sigma^2$	$\rho$
$\hat{\beta}_{wrk}$	$\hat{\beta}_{wr}$	$\hat{\beta}_{wrk}$	$\hat{\beta}_{wr}$	$\hat{\beta}_{wrk}$	$\hat{\beta}_{wr}$					
0.556	0.571	0.563	0.579	0.586	0.602	0.619	0.637	0.5		
0.521	0.535	0.527	0.541	0.547	0.562	0.578	0.595	1	0.5	
0.124	0.174	0.136	0.188	0.175	0.131	0.133	0.194	0.5		0.75
0.992	0.104	0.102	0.1054	0.1039	0.1094	0.1096	0.1156	1	1	
0.688	0.710	0.699	0.722	0.733	0.758	0.784	0.811	0.5		
0.643	0.654	0.643	0.664	0.673	0.695	0.719	0.774	1	0.5	
0.1253	0.1325	0.1271	0.1346	0.1329	0.1409	0.1416	0.1505	0.5		0.80
0.1200	0.1270	0.1216	0.1288	0.1269	0.1347	0.1353	0.1440	1	1	
0.9115	0.950	0.933	0.970	0.988	0.1028	0.1074	0.1120	0.5		
0.824	0.856	0.839	0.872	0.885	0.921	0.962	1.003	1	0.5	
0.1639	0.1752	0.1668	0.1786	0.1760	0.1888	0.1906	0.2051	0.5		0.85
0.1545	0.1653	0.1570	0.1682	0.1653	0.1775	0.1791	0.1930	1	1	
0.1370	0.1438	0.1405	0.1475	0.1508	0.1586	0.1686	0.1779	0.5		
0.1196	0.12565	0.1222	0.1284	0.1306	0.1375	0.1460	0.1541	1	0.5	
0.2405	0.2610	0.2458	0.2672	0.2627	0.2864	0.2921	0.3200	0.5		0.90
0.2216	0.2407	0.2260	0.2459	0.2404	0.2629	0.2680	0.2940	1	1	
0.2685	0.2855	0.2761	0.2940	0.3015	0.3215	0.3558	0.3814	0.5		
0.2225	0.2367	0.2280	0.2429	0.2477	0.2643	0.2921	0.3132	1	0.5	
0.4599	0.5060	0.4717	0.5200	0.5128	0.5667	0.6006	0.6689	0.5		0.95
0.4079	0.4493	0.4173	0.4605	0.4519	0.5002	0.5298	0.5911	1	1	

جدول ۵. برآورد پارامترها و مقادیر MSE برآوردهای مختلف

برآورد ریبج موزون			برآورد موزون			برآورد ریبج	امتیاز تصحیح شده	پارامتر
$w$								
0.1	0.7	0.3	0.1	0.7	0.3			
8.7477	8.8253	8.9460	8.7546	8.8283	8.9503	9.0591	9.0667	$\beta_5$
-0.0013	-0.0013	-0.0014	-0.0013	-0.0013	-0.0014	-0.0014	-0.0014	$\beta_1$
0.00001	0.00002	0.00005	0.00001	0.00002	0.00005	0.00008	0.00008	$\beta_2$
0.1401	0.1272	0.1079	0.1382	0.1264	0.1067	0.0899	0.0879	$\beta_3$
0.41217	0.42246	0.44009	0.41242	0.4226	0.44003	0.4575	0.4579	$\beta_4$
-0.5727	-0.5631	-0.5483	-0.5722	-0.5629	-0.5480	-0.5349	-0.5343	$\beta_5$
-0.0066	-0.0068	-0.0071	-0.0066	-0.0068	-0.0071	-0.0073	-0.0073	$\beta_6$
-0.0275	-0.0279	-0.0288	-0.0275	-0.028	-0.0288	-0.0297	-0.0297	$\beta_7$
-0.0061	-0.0071	-0.0087	-0.0061	-0.0071	-0.0088	-0.0102	-0.0103	$\beta_8$
0.3179	0.3273	0.3444	0.3183	0.3275	0.3347	0.3630	0.3635	MSE



شکل ۱. نمودار مقادیر MSE برآوردهای مختلف

## ۷ بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله با استفاده از روش امتیاز تصحیح شده برآوردگر ریچ، برآوردگر محدود شده موزون و برآوردگر ریچ محدود شده موزون در مدل‌های خطی با خطا در اندازه‌گیری تحت محدودیت‌های خطی تصادفی معرفی گردید. ویژگی‌های مجانبی برآوردها بررسی و با استفاده از معیار ماتریس میانگین توان‌های دوم خطا کارایی برآوردها مورد ارزیابی قرار گرفت. نتایج مثال عددی و مطالعه شبیه‌سازی نشان داد که همواره برآوردگر محدود شده کارایی بهتری نسبت به برآوردها غیر محدود شده دارد. همچنین برای مقدار معینی از پارامتر اریب ریچ نشان داده شد که برآوردها ریچ و برآوردها ریچ محدود شده کارایی بیشتری نسبت به برآوردها امتیاز تصحیح شده و برآوردها محدود شده دارند. نتایج حاصل استفاده از محدودیت‌های خطی تصادفی را در به‌دست آوردن برآورد کاراتری از پارامترها تایید می‌کند.

## تقدیر و تشکر

نویسندگان مقاله از نظرات و رهنمودهای ارزنده داوران محترم، ویرایش ادبی سردبیر محترم و هیئت تحریریه مجله باعث ارتقا کیفی مقاله شد، کمال تشکر و قدردانی را دارند.

## مراجع

امامی، هـ. و منصورى القناب، پ. (۱۳۹۶)، مباحث تشخیصی در مدل‌های خطی آمیخته نیمه پارامتری با خطای اندازه‌گیری، مجله علوم آماری، ۱۱ (۲)، ۲۱۹-۲۴۰.

Belsley, D. A. (1991), *Conditioning Diagnostics: Collinearity and Weak Data in Regression*, Wiley, New York.

Das, K., Jiang, J. and Rao, J. N. K. (2004), Mean Squared Error of Empirical Predictor, *The Annals of Statistics*, **32**(2), 818-840.

Fuller, W. A. (1987), *Measurement Error Models*, Wiley, New York.

Fung, W. K., Zhong, X. P. and Wei, B. C. (2003), On Estimation and Influence Diagnostics in Linear Mixed Measurement Error Models, *American Journal of Mathematical and Management Sciences*, **23**, 37-59.

Ghapani, F. and Babadi, B. (2016), A New Ridge Estimator in Linear Measurement Error Model with Stochastic Linear Restrictions, *Journal of the Iranian Statistical Society*, **15**(2), 87-103.

Ghapani, F., Rasekh, A. R. and Babadi, B. (2018), The Weighted Ridge Estimator in Stochastic Restricted Linear Measurement Error Models, *Statistical Papers*, **59**(2), 709-723.

Harrison, D. and Rubinfeld, D. L. (1978), Hedonic Housing Prices and the Demand for Clean Air., *Journal of Environmental Economics and Management*, **5**(1), 81-102.

Henderson, C.R. (1975), Best Linear Unbiased Estimation and Prediction under a Selection Model, *Biometrics*, **31**(2), 423-447.

Hoerl, A.E. and Kennard, R.W. (1970), Ridge Regression: Biased Estimation for Nonorthogonal Problems, *Technometric.*, **12**(1), 55-67.

- Kuran, O. and Özkale, M.R. (2016), Gilmour's Approach to Mixed and Stochastic Restricted Ridge Predictions in Linear Mixed Models, *Linear Algebra and Its Applications*, **508**, 22–47.
- Maksaei, N., Rasekh, A. and Babadi, B. (2022), Local Influence in Linear Mixed Measurement Error Models with Ridge Estimation, *Communications in Statistics Simulation and Computation*, <https://doi.org/10.1080/03610918.2023.2205063>.
- McDonald, C. and Galarneau, D.A. (1975), A Monte Carlo Evaluation of Some Ridge-Type Estimators, *Journal of the American Statistical Association*, **70**, 407–416.
- Özkale, M.R. and Can, F. (2017), An Evaluation of Ridge Estimator in Linear Mixed Models: An Example From Kidney Failure Data, *Journal of Applied Statistics*, **44**(12), 2251–2269.
- Özkale, M. R. and Kuran, O. (2020), A Further Prediction Method in Linear Mixed Models: Liu Prediction, *Communications in Statistics - Simulation and Computation*, **49**(12), 3171-3195.
- Pereira, L. N. and Coelho, P. S. (2012), A Small Area Predictor under Area-Level Linear Mixed Models with Restrictions., *Communications in Statistics - Theory and Methods*, **41**, 2524-2544.
- Prasad, N. G. N. and Rao, J. N. K. (1990), The Estimation of the Mean Squared Error of Small-Area Estimators. *Journal of the American Statistical Association*. **85**, 163–171.
- Rao, C. R., Toutenburg, H., Shalabh and Heumann, C. (2008), *Linear Models and Generalizations*, Springer, Berlin.
- Robinson, G. K. (1991), That BLUP Is A Good Thing: The Estimation of Random Effects (with Discussion), *Statistical Science*, **6**, 15-51.

- Schaffrin, B. and Toutenburg, H. (1990), Weighted Mixed Regression, *Zeitschrift for Angewandte Mathematic and Mechanic*, **70**, 735–738.
- Stein, C. (1956), Inadmissibility of the Usual Estimator for Mean of Multivariate Normal Distribution, *Proceedings of the Third Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, **31**(1), 197–206.
- Liu, K. (1993), A New Class of Biased Estimate in Linear Regression, *Communications in Statistics - Theory and Methods*, **22**, 393–402.
- Liu, X. -Q., Rong, J. -Y. and Liu, X. -Y. (2008), Best Linear Unbiased Prediction for Linear Combinations in General Mixed Linear Models, *Journal of Multivariate Analysis*, **99**, 1503–1517.
- Liu, X-Q. and Hu, P. (2013), General Ridge Predictors in A Mixed Linear Model, *Statistics*, **47**, 363–378.
- Yang, H., Ye, H. and Xue, K. (2014), A Further Study of Predictions in Linear Mixed Models, *Communications in Statistics - Theory and Methods*, **43**(20), 4241–4252.
- Yavarizadeh, B., Rasekh, A. R., Ahmed, S. E. and Babadi, B. (2022), Ridge Estimation in Linear Mixed Measurement Error Models with Stochastic Linear Mixed Restrictions, *Communications in Statistics - Simulation and Computation*, **51**(6), 3037-3053.
- Zare, K. and Rasekh, A. R. (2012), Residuals and Leverages in the Linear Mixed Measurement Error Models, *Journal of Statistical Computation and Simulation*, **84**, 1427-1443.
- Zare, K., Rasekh, A. R. and Rasekhi, A. (2012), Estimation of Variance Components in Linear Mixed Measurement Error Models, *Statistical Papers*, **53**, 849-863.
- Zhong, X. P., Fung, W. K. and Wei, B. C. (2002), Estimation in Linear Models with Random Effects and Errors-Invariables, *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, **54**, 595–606.