



Time Series Forecasting of Density Functions: A Functional Singular Spectrum Analysis Approach

Haghibin, H. 

Department of Statistics, Faculty of Intelligent Systems Engineering and Data Science, Persian Gulf University, Bushehr, Iran.

Corresponding author: H. Haghibin, haghibin@pgu.ac.ir

Received: 12/10/2024 **Revised:** 4/6/2025 **Accepted and Published Online:** 6/6/2025.

Introduction

Functional Data Analysis (FDA) extends classical data analysis to settings where each observation is a continuous function rather than a finite-dimensional vector. This framework captures the intrinsic continuity and dependency within sequential measurements. In time series contexts, Functional Time Series (FTS) models, such as the Functional Autoregressive (FAR) model and FPCA-based approaches, are commonly used. However, practical applications often involve constrained functions such as probability density or cumulative distribution functions, which challenge the direct application of standard FDA techniques. To address this, transformation methods map constrained functions into unconstrained spaces while preserving structure. Singular Spectrum Analysis (SSA), a nonparametric tool for trend extraction and forecasting, has been extended to the functional domain as Functional SSA (FSSA). This paper aims to adapt FSSA for forecasting time series of density functions by applying suitable transformations and then mapping the forecasts back to the original functional space.

Material and Methods

The proposed method begins by transforming a sequence of probability density functions (PDFs) into unconstrained functional data using two approaches: the exponential transformation and the log-quantile-density (LQD) transformation. These mappings preserve statistical structure while enabling functional analysis. The transformed series is then modeled using FSSA, an extension of SSA to functional data, which decomposes and reconstructs the

series based on functional principal directions. Two FSSA-based forecasting strategies, recursive (R-FSSA) and vector (V-FSSA) are employed to predict future functional observations. Finally, the inverse transformations are applied to return the predicted functions to the density space.

Results and Discussion

The proposed FSSA-based approach was evaluated using both real satellite imagery data and simulated density functions. In the real-world case, NDVI (Normalized Difference Vegetation Index) time series data were transformed into density functions and analyzed using both exponential and LQD transformations. Forecast accuracy was assessed using Kullback-Leibler divergence (KLD), revealing that the LQD transformation consistently outperformed the exponential one, especially with fewer singular components. Simulation studies with beta-distributed densities confirmed these findings, showing that the LQD-based FSSA method achieved higher accuracy and robustness across various parameter settings. These results demonstrate the effectiveness of the proposed method in preserving structural properties while providing accurate forecasts.

Conclusion

This study presents a practical framework for handling complex sequential structures where traditional techniques are limited by inherent constraints. By incorporating suitable transformations and leveraging a flexible decomposition method, the framework provides reliable future pattern estimation while maintaining interpretability. The outcomes on real and synthetic data highlight the potential of the approach for advanced monitoring and decision-making in dynamic systems.

Keywords: Functional time series forecasting, Functional singular spectrum analysis, Density function estimation, Functional data analysis.

Mathematics Subject Classification (2020): 62M10.



©The Author(s). The Publisher is Iranian Statistical Society.

This is an open access article distributed under the terms and conditions of [\(CC BY-NC 4.0\)](https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/)

پیش‌بینی سری‌های زمانی تابع چگالی: رویکرد تحلیل مجموعه مقادیر تکین تابعی

حسین حق‌بین

گروه آمار، دانشکده مهندسی سیستم‌های هوشمند و علوم داده، دانشگاه خلیج فارس

نویسنده مسئول: حسین حق‌بین، haghbin@pgu.ac.ir

تاریخ دریافت: ۱۴۰۳/۷/۲۱ تاریخ بازنگری: ۱۴۰۴/۳/۱۴ تاریخ پذیرش و انتشار: ۱۴۰۴/۳/۱۶

چکیده: در این مقاله، رویکردی جدید برای پیش‌بینی یک دنباله زمانی از توابع چگالی احتمال ارائه می‌شود که بر اساس تحلیل مجموعه مقادیر تکین تابعی توسعه یافته است. این رویکرد با هدف تحلیل سری‌های زمانی تابعی و رفع محدودیت‌های موجود در پیش‌بینی توابع چگالی، مانند غیرمنفی بودن و انتگرال واحد توابع چگالی، معرفی شده است. در این مقاله ابتدا با معرفی تبدیل‌های مناسب، سری زمانی توابع چگالی را به یک سری زمانی تابعی تبدیل کرده و سپس از تحلیل مجموعه مقادیر تکین تابعی برای پیش‌بینی سری‌های زمانی تابعی جدید استفاده می‌شود و در نهایت، توابع پیش‌بینی شده با تبدیل عکس، به فضای توابع چگالی بر می‌گردند. در نهایت روش پیشنهادی با استفاده از داده‌های واقعی شامل چگالی تصاویر ماهواره‌ای ارزیابی می‌شود.

واژه‌های کلیدی: پیش‌بینی سری‌های زمانی تابعی، تحلیل مجموعه مقادیر تکین تابعی، برآورد تابع چگالی، تحلیل داده‌های تابعی

کد موضوع بندی ریاضی (۲۰۲۰): 62G07، 62M10

۱ مقدمه

تحلیل داده‌های تابعی^۱ (FDA) تعمیمی از تحلیل داده‌های کلاسیک است که برای کار با داده‌های تابعی طراحی شده است. در حالی که روش‌های کلاسیک هر مشاهده را به صورت یک بردار در $\mathbb{R}^n$ نمایش می‌دهند، FDA هر مشاهده

©نویسندگان). ناشر انجمن آمار ایران است.

این مقاله با دسترسی آزاد تحت شرایط و ضوابط (CC BY-NC 4.0) توزیع شده است.

¹Functional Data Analysis



را به‌عنوان یک یا چند تابع پیوسته در نظر می‌گیرد. این رویکرد امکان بررسی وابستگی بین اندازه‌گیری‌های عددی را فراهم می‌کند و به‌طور ویژه بر پیوستگی ذاتی اندازه‌گیری‌های متوالی تمرکز دارد (رمسی و سیلورمن، ۲۰۰۵).

از اولین تحقیقات حوزه تحلیل سری‌های زمانی تابعی (FTS)، می‌توان مقاله باسک (۱۹۹۱) را نام برد که برآوردگر یول-والکر تابعی برای داده‌های FTS با فرض یک مدل خودهمبسته تابعی^۱ (FAR) معرفی کرد. مدل‌های FAR به دلیل سادگی در تفسیر و عملکرد مناسب، یکی از روش‌های رایج در مدل‌سازی وابستگی‌های زمانی داده‌های تابعی هستند. در این مدل‌ها، پارامترهای خودهمبسته با عملگرهای هیلبرت-اشمیت جایگزین می‌شوند و به همین دلیل برآورد مدل به تخمین این عملگرها بستگی دارد. روش‌های مختلف برای تحلیل این مدل‌ها را می‌توان در هورمن و کوکوزکا (۲۰۱۲) و هوروات و کوکوزکا (۲۰۱۲) مشاهده کرد. رویکرد مرسوم دیگر توسط هیندمن و شنگ (۲۰۰۹)؛ هیندمن و اول (۲۰۰۷) ارائه گردید که مبتنی بر تجزیه FPCA سری زمانی تابعی و در نظر گرفتن سری زمانی (حقیقی مقدار) رتبه مولفه‌های اصلی و سپس پیش‌بینی آنها با استفاده از روش‌های کلاسیک سری زمانی است. اگرچه بسیاری از تحلیل‌های تابعی در فضای هیلبرت توسعه می‌یابند، در عمل گاهی با مشاهدات تابعی مواجه می‌شویم که در این فضا قرار ندارند. این مسئله به‌ویژه در تحلیل سری‌های زمانی که شامل توابع چگالی احتمال و توابع چگالی تجمعی است، مشهود است. به‌عنوان نمونه، در زمینه توابع چگالی احتمال، کنیپ و اوتیکال (۲۰۰۱) و شنگ و همکاران (۲۰۲۲) توزیع سنی مرگ‌ومیر را بررسی کرده‌اند. در ارتباط با پیش‌بینی مرگ‌ومیر، پاسکاریو و همکاران (۲۰۱۹) روش‌هایی را ارائه داده است که از معیارهای مکانی و شکلی توابع چگالی بهره می‌برند. همچنین، در ارتباط با توابع توزیع تجمعی، کندینو (۲۰۲۳) منحنی‌های لورنتز را مورد مطالعه قرار داده است و ژانگ و همکاران (۲۰۲۲) روشی برای برآورد دقیق توابع توزیع تجمعی ارائه کرده است.

تفاوت اساسی بین یک مشاهده تابعی و یک تابع چگالی این است که توابع چگالی دارای محدودیت‌های خاصی هستند؛ از جمله اینکه در همه جا غیرمنفی بوده و انتگرال آنها برابر با یک است. این محدودیت‌ها چالش‌هایی را برای استفاده مستقیم از روش‌های داده‌های تابعی بر روی توابع چگالی ایجاد می‌کنند. در تحقیقات رمسی (۱۹۹۸)، (۲۰۰۰) از روش معادلات دیفرانسیلی و تبدیل نمایی برای برازش یک تابع هموار یکنوا و سپس یک تابع چگالی استفاده شده است. کنیپ و اوتیکال (۲۰۰۱) از تحلیل مولفه‌های اصلی تابعی^۲ (FPCA) برای برازش توابع چگالی استفاده کرده و آنها را به‌عنوان نمونه‌های مستقل و هم‌توزیع در نظر گرفته‌اند. همچنین برناردت و همکاران (۲۰۰۸) از توابع توزیع و یا توابع صدکی^۳ به جای تابع چگالی احتمال استفاده کرده‌اند که هر کدام چالش‌هایی از جمله یکنوایی و دامنه ثابت دارند. پیترسن و مولر (۲۰۱۶) مدلی خودبازگشتی برای سری‌های زمانی تابعی ارائه کرده‌اند که در آن، توابع محدودشده، مانند توابع چگالی احتمال، منحنی‌های عرضه و تقاضا، و سایر توابع مقید، ابتدا به یک فضای هیلبرت بدون قید منتقل می‌شوند. این تبدیل با استفاده از یک نگاشت یکریخت دوسویی^۴ انجام می‌شود که تضمین می‌کند ساختار تابعی داده‌ها حفظ شده و ویژگی‌های آماری آنها دست‌نخورده باقی بماند. سپس، مدل خودبازگشتی

¹Functional Autoregressive

²Functional Principal Component Analysis

³Quantile function

⁴Bijjective isomorphism

تابعی در فضای جدید اعمال می‌شود، و در نهایت، با اعمال نگاشت معکوس، خروجی پیش‌بینی‌شده به فضای اولیه بازگردانده می‌شود.

روش‌های مبتنی بر تحلیل مجموعه مقادیر تکین^۱ (SSA) با رویکرد ناپارامتری در تحلیل سری‌های زمانی به‌عنوان ابزارهای اکتشافی و مدل‌سازی شناخته می‌شوند و نیاز به فرضیات محدودکننده‌ای مانند مانایی یا خطی بودن ندارند و برای اهداف مختلفی همچون استخراج روند، شناسایی مولفه‌های دوره‌ای، پیش‌بینی و پرکردن داده‌های گمشده به‌کار می‌روند (گولاندینا و اسیوف، ۲۰۰۷؛ رودریگز و محمودوند، ۲۰۱۶؛ ذبیحی و همکاران، ۱۴۰۱). روش SSA تابعی (FSSA) نخستین بار توسط حق‌بین و همکاران (۲۰۲۱) برای تحلیل سری‌های زمانی تابعی معرفی شد. روش FSSA برای داده‌های تابعی چند متغیره و پیش‌بینی‌های بازگشتی و برداری در ترینکا و همکاران (۲۰۲۳)، (۲۰۲۱) مطرح شده است.

در این مقاله تلاش می‌شود روش FSSA برای تحلیل و پیش‌بینی سری‌های زمانی چگالی احتمال توسعه یابد. برای این منظور از روش‌های تبدیل تابع چگالی احتمال به یک متغیر تابعی بدون قید استفاده می‌شود و با استفاده از روش FSSA آینده سری پیش‌بینی و نتایج آن در نهایت به فرم تابع چگالی احتمال بازگردانده می‌شوند. در ادامه، بخش ۲ به معرفی نمادها و روش کلی پیش‌بینی تابع چگالی با استفاده از روش‌های تابعی اختصاص یافته است. در بخش ۳ تبدیل‌های پیشنهادی برای ایجاد متغیرهای تابعی از توابع چگالی ارائه می‌شود. بخش ۴ به معرفی خلاصه‌ای از روش FSSA و پیش‌بینی با استفاده از این روش می‌پردازد. بخش ۵ به مطالعه و ارزیابی عملکرد روش پیشنهادی برای پیش‌بینی داده‌های واقعی شاما چگالی تصاویر سنجش از دور می‌پردازد.

۲ پیش‌بینی تابع چگالی احتمال

در این مقاله فضای هیلبرت $\mathbb{H} = L^2([0, 1])$ به عنوان خانواده تمامی توابع $x(\cdot)$ در نظر گرفته می‌شود که بر دامنه $[0, 1]$ پیوسته و انتگرال مربع آنها بر این بازه متناهی باشد. ضرب داخلی فضای بین دو عضو $x, y \in \mathbb{H}$ به صورت $\langle x, y \rangle_{\mathbb{H}} = \int_0^1 x(s)y(s)ds$ تعریف می‌شود. همچنین برای یک عدد صحیح مثبت k ، فضای هیلبرت $\mathbb{H}^k$ به عنوان ضرب دکارتی k نسخه از $\mathbb{H}$ تعریف می‌شود؛ یعنی یک بردار تابعی با طول k ، $\mathbf{x} \in \mathbb{H}^k$ ، که در یک نقطه $\mathbf{s} = [s_1, \dots, s_k]^T \in [0, 1]^k$ محاسبه می‌شود، یک بردار با طول k است که به صورت $\mathbf{x}(\mathbf{s}) = [x_1(s_1), \dots, x_k(s_k)]^T$ نمایش داده می‌شود، که در آن $x_i \in \mathbb{H}$ است. ضرب داخلی فضای $\mathbb{H}^k$ به صورت $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_{\mathbb{H}^k} = \sum_{i=1}^k \langle x_i, y_i \rangle_{\mathbb{H}}$ برای $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{H}^k$ تعریف می‌شود. نرم‌ها در فضاهای $\mathbb{H}$ و $\mathbb{H}^k$ به ترتیب با $\|\cdot\|_{\mathbb{H}}$ و $\|\cdot\|_{\mathbb{H}^k}$ مشخص می‌شوند.

فرض کنید دنباله‌ای از سری زمانی تابع چگالی‌های احتمال $f_1, \dots, f_n$ موجود است و هدف پیش‌بینی L تابع چگالی آینده این سری یعنی $f_{n+1}, \dots, f_{n+L}$ است. بدون کم شدن از کلیت مساله فرض می‌شود که دامنه تعریف این توابع چگالی فاصله $[0, 1]$ است. همچنین فرض کنید $\mathbb{F}$ مجموعه تمامی توابع چگالی پیوسته با دامنه

¹Singular Spectrum Analysis

$[\circ, \mathbb{I}]$ باشد. در FDA روش‌های متنوعی برای تحلیل و پیش‌بینی داده‌های FTS در یک فضای هیلبرت مثل $\mathbb{H}$ بیان شده است. چالش اصلی سری زمانی توابع چگالی این است که یک تابع چگالی احتمال باید محدودیت‌های بیشتری نسبت به یک FTS معمول عضو فضای $\mathbb{H}$ (مانند نامنفی بودن یا داشتن انتگرال واحد بر دامنه $[\circ, \mathbb{I}]$) برآورده کند. باتوجه به محدودیت‌های اضافه‌تر اعضای $\mathbb{F}$ نسبت به توابع عضو $\mathbb{H}$ ، فرض $\mathbb{F} \subset \mathbb{H}$ در این مقاله منطقی بنظر می‌رسد. الگوی کلی پیش‌بینی در این پژوهش به شرح زیر است:

۱. چگالی‌های f_t برای $t \leq n$ را با استفاده از یک تبدیل هم‌ریخت $\Psi(\cdot) : \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{H}$ به صورت $x_t(s) = \Psi(f_t(s))$ به توابعی چون $x_t(\cdot)$ از فضای $\mathbb{H}$ تبدیل می‌شوند. برای تبدیل Ψ از دو روش تبدیل نمایشی رمسی (۲۰۰۰) و روش تبدیل لگاریتم چگالی صدکی^۱ (LQD) پیترسن و مولر (۲۰۱۶) استفاده خواهد شد.
۲. با در نظر گرفتن FTS بدست آمده $x_1, \dots, x_n$ و یک روش پیش‌بینی معمول برای سری‌های زمانی تابعی، مقادیر آینده آن یعنی $x_{n+1}, \dots, x_{n+L}$ پیش‌بینی می‌شوند. در اینجا برای پیش‌بینی سری زمانی تابعی x_t از روش FSSA (حق‌بین و همکاران، ۲۰۲۱؛ ترینکا و همکاران، ۲۰۲۳) استفاده خواهد شد.
۳. مقادیر پیش‌بینی شده x_t با استفاده تبدیل معکوس $\Psi^{-1}(x_t(s)) = f_t(s)$ به فضای $\mathbb{F}$ برمی‌گردند.

۳ تبدیل چگالی‌های احتمال به داده‌های تابعی

در بسیاری از مسائل، یک معادله دیفرانسیل رابطه‌ای بین یک تابع و یک یا چند مشتق آن بیان می‌کند و اغلب یک روش جذاب برای توصیف توابع با ساختارهای خاص است. با توجه به مثبت بودن مقدار یک تابع چگالی احتمال $f(\cdot)$ می‌توان آن را به عنوان یک حالت خاص از یک تبدیل نمایشی به شکل $f(s) = Ce^{x(s)}$ در نظر گرفت که در آن $C = \frac{1}{\int_{\circ} e^{x(s)} ds}$ و $x \in \mathbb{H}$ می‌باشد. در اینجا از روش بسط پایه ای برای تابع x استفاده می‌شود و با استفاده از روش پیشینه درستمایی یا کمترین مربعات ضرایب آن برآورد می‌شود.

تابع چگالی تنها یکی از خصوصیات نمایش دهنده رفتار یک توزیع تصادفی است. برای نمایش یک توزیع می‌توان از تابع توزیع تجمعی (CDF) یا تابع چنک توزیع نیز استفاده نمود. فرض کنید F_t و Q_t به ترتیب تابع توزیع تجمعی و توابع چنکی متناظر با چگالی f_t باشند. در این صورت

$$F_t(s) = \int_{\circ}^s f_t(u) du, \quad Q_t(s) = F_t^{-1}(s) = \inf\{y \in (\circ, \mathbb{I}) : F_t(y) \geq s\}.$$

هر یک از سه تابع، F_t ، f_t و Q_t ، به طور منحصر به فرد می‌توانند توزیع یکتایی را تعریف کنند و بنابراین می‌تواند به عنوان یک داده تابعی مورد استفاده قرار گیرند. با این حال، همه آنها در معرض محدودیت‌های غیرخطی هستند که استفاده از روش‌های داده‌های تابعی خطی را ناکارآمد می‌سازد. در این میان تابع Q_t کمترین محدودیت را دارد.

¹Log quantile density

در واقع کافیت که مشتق آن، که چگالی چندکی نیز نامیده می‌شود، نامنفی باشد: $Q'_t(s) \geq 0$. بنابراین می‌توان از تبدیل LQD استفاده کنیم تا به یک داده تابعی بدون محدودیت در فضای $\mathbb{H}$ برسیم:

$$\Psi_t(s) = \log(Q'_t(s)) = -\log(f_t(Q_t(s))), \quad s \in [0, 1].$$

برای تبدیل عکس این تابع پیترسن و مولر (۲۰۱۶) توابع

$$\Psi_t^{-1}(s) = Ce^{-\Psi_t(F_t(s))}, \quad F_t^{-1}(s) = C^{-1} \int_0^s e^{\Psi_t(u)} du,$$

را پیشنهاد داده‌اند، که در آن $C = \int_0^1 e^{\Psi_t(u)} du$. تبدیل LQD در تحقیقات بسیاری برای مدل‌سازی تابعی توزیع احتمال بکار رفته است (چن و همکاران، ۲۰۱۹؛ کوکوزکا و همکاران، ۲۰۱۹).

۴ مروری بر الگوریتم SSA

هدف اصلی روش SSA، تجزیه یا تقریب سری زمانی $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_N)$ ، به جمع r سری زمانی یا مولفه است، به‌گونه‌ای که هر مولفه بیان‌کننده یکی از ویژگی‌های اصلی سری زمانی $\mathbf{y}$ باشد. این الگوریتم شامل دو مرحله اصلی است: مرحله تجزیه با گام‌های نشانیدن و تجزیه مقدار تکین^۱ (SVD) و مرحله بازسازی با گام‌های گروه‌بندی و میانگین‌گیری قطری (گولاندینا و همکاران، ۲۰۰۱).

مرحله تجزیه:

گام ۱. نشانیدن: با انتخاب یک عدد طبیعی L تحت شرط $L \leq N/2$ به‌عنوان طول پنجره، سری زمانی $\mathbf{y}$ به ماتریس مسیر^۲ به صورت

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} y_1 & \dots & y_K \\ \vdots & \dots & \vdots \\ y_L & \dots & y_N \end{bmatrix}, \quad (1)$$

تبدیل می‌شود، که در آن $K = N - L + 1$. همان‌طور که ملاحظه می‌شود، ماتریس مسیر یک ماتریس هنکل^۳ است، به این معنا که عناصر روی قطرهای غیر اصلی برابرند. توجه شود که هر ماتریس هنکل را می‌توان مطابق رابطه (۱) به‌عنوان یک ماتریس مسیر متناظر با یک سری زمانی در نظر گرفت و آن را به فرم اولیه بازگرداند. هر

^۱Singular value decomposition

^۲Trajectory Matrix

^۳Hankel Matrix

یک از ستون‌های ماتریس مسیر $\mathbf{X}$ را بردار L -تاخیر^۱ می‌نامیم.
گام ۲. تجزیه مقدار تکین: ماتریس مسیر $\mathbf{X}$ با استفاده از تجزیه مقدار تکین به مجموع زیر تجزیه می‌شود. اگر
 $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_r > 0$ ویژه‌مقادیر مرتب‌شده و نامنفی ماتریس $\mathbf{X}\mathbf{X}^T$ باشند و $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r$ ویژه‌بردارهای
متناظر آن‌ها باشند، آنگاه تجزیه SVD ماتریس مسیر به صورت

$$\mathbf{X} = \sum_{i=1}^r \sqrt{\lambda_i} \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^T = \sum_{i=1}^r \mathbf{X}_i, \quad (2)$$

خواهد بود، که در آن $\mathbf{v}_i = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} \mathbf{X}^T \mathbf{u}_i$ و $\mathbf{X}_i$ یک ماتریس مرتبه یک است. مقادیر $\sqrt{\lambda_i}$ به عنوان مقادیر تکین و
بردارهای $\mathbf{u}_i$ و $\mathbf{v}_i$ به ترتیب بردار تکین چپ و بردار تکین راست ماتریس $\mathbf{X}$ نامیده می‌شوند.

مرحله بازسازی:

گام ۱. گروه‌بندی: در این گام، با در نظر گرفتن افراز $I_1, \dots, I_m$ از مجموعه شاخص‌های $\{1, \dots, r\}$ ، مولفه‌های
مشابه در یک گروه قرار می‌گیرند. برای این منظور، تعریف می‌کنیم $\mathbf{X}_{I_j} := \sum_{i \in I_j} \mathbf{X}_i$. انتخاب شاخص‌های هر
گروه به گونه‌ای انجام می‌شود که مولفه‌هایی با ویژگی‌های مشابه در یک گروه قرار گیرند. برای این کار، شاخص‌ها و
نمودارهای تشخیصی مختلفی معرفی شده‌اند.

گام ۲. میانگین‌گیری قطری: در این گام، میانگین عناصر روی قطرهای غیر اصلی هر ماتریس $\mathbf{X}_{I_j}$ محاسبه شده
و به عنوان مقدار نهایی در قطر اصلی قرار می‌گیرد. این فرآیند به منظور هنکل‌سازی^۲ ماتریس‌ها و بازسازی سری
زمانی متناظر با آن‌ها انجام می‌شود.

۵ تحلیل مجموعه مقادیر تکین تابعی

در این بخش تعمیم روش SSA برای داده‌های تابعی (FSSA) (حق‌بین و همکاران، ۲۰۲۱)، ارائه می‌شود. در این
بخش، $\mathbf{y}$ یک سری زمانی تابعی فرض می‌شود بدین معنی که هر مشاهده این سری، یک تابع عضو فضای هیلبرت
 $\mathbb{H} = L^2[0, 1]$ ، مجموعه تمامی توابع پیوسته مربع انتگرال پذیر بر دامنه $[0, 1]$ ، در نظر گرفته می‌شود. تعمیم اصلی
FSSA نسبت به SSA اسکالر را می‌توان در مرحله تجزیه دانست. همانند روش SSA به ازای پارامتر طول پنجره
 L ، بردار تابعی L -تاخیر $\mathbf{z}$ ام به صورت

$$\mathbf{x}_j = (y_j, \dots, y_{j+L-1})^T, \quad j = 1, \dots, K \quad (3)$$

^۱Lag-vector

^۲Hankelization

تعریف می‌شوند. این بردارها عضوی از فضای $\mathbb{H}^L$ ، ضرب دکارتی L کپی از $\mathbb{H}$ هستند. ابتدا در گام نشانیدن، عملگر مسیر^۱ $\mathcal{X} : \mathbb{R}^K \rightarrow \mathbb{H}^L$ ، به عنوان تعمیمی از ماتریس مسیر به صورت

$$\mathcal{X}\mathbf{a} = \sum_{j=1}^K a_j \mathbf{x}_j, \quad \mathbf{a} = [a_1, \dots, a_K]^T \in \mathbb{R}^K \quad (۴)$$

تعریف می‌شود. سپس با استفاده از تجزیه مقادیر تکین تابعی عملگر $\mathcal{X}$ (حق‌بین و همکاران، ۲۰۲۱)، عملگر مسیر $\mathcal{X}$ به مجموعه‌ای از عملگرهای رتبه واحد به صورت

$$\mathcal{X}\mathbf{a} = \sum_{i=1}^r \sqrt{\lambda_i} \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{a} \rangle_{\mathbb{R}^K} \boldsymbol{\psi}_i, \quad \mathbf{a} \in \mathbb{R}^K \quad (۵)$$

تجزیه می‌شود، که در آن مولفه‌های $\{\boldsymbol{\psi}_i\}_{i=1}^r \in \mathbb{H}^L$ و $\{\mathbf{v}_i\}_{i=1}^r \in \mathbb{R}^K$ متعامد و λ_i ها اعداد مثبت نزولی هستند. حال با تعریف عملگرهای ابتدایی (رتبه واحد) $\mathcal{X}_i := \sqrt{\lambda_i} \mathbf{v}_i \otimes \boldsymbol{\psi}_i$ به عنوان تعمیم تابعی ماتریس‌های اولیه رابطه (۲)، در مرحله گروه‌بندی عملگر $\mathcal{X}_{I_j} = \sum_{i \in I_j} \mathcal{X}_i$ تعریف می‌شود. در نهایت گام میانگیری قطری نیز برای بازگرداندن عملگرهای $\mathcal{X}_{I_j}$ به فرم سری زمانی تابعی اولیه، همانند روش SSA خواهد بود.

۶ پیش‌بینی با رویکرد FSSA

دو روش پیش‌بینی بازگشتی (R-FSSA) و برداری (V-FSSA) توسط ترینکا و همکاران (۲۰۲۳) با رویکرد FSSA توسعه داده شده است. هر دو روش مبتنی بر این فرض هستند که آخرین مؤلفه یک بردار تابعی L -تاخیر در فضای $\mathbb{L} = \text{span}\{\boldsymbol{\psi}_i\}_{i=1}^q$ را می‌توان به صورت ترکیبی خطی از $L-1$ مؤلفه قبلی بیان کرد. عملگر $\mathcal{V} : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ به صورت $\mathcal{V} = \sum_{i=1}^q \pi_i \otimes \pi_i$ تعریف می‌شود، که در آن $\pi_i = \psi_{L,i}$ آخرین مؤلفه بردار $\boldsymbol{\psi}_i$ است. برای هر $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_L) \in \mathbb{L}$ ، مؤلفه آخر، h_L ، به صورت ترکیبی خطی از $L-1$ مؤلفه قبلی، $h_L = \sum_{j=1}^{L-1} \mathcal{A}_j h_j$ بیان می‌شود، که در آن $\mathcal{A} : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ یک عملگر به صورت $\mathcal{A}_j = \sum_{n=1}^q \psi_{j,n} \otimes (\mathcal{F} - \mathcal{V})^{-1} \pi_n$ است و $\mathcal{F} : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ عملگر همانی است. حال یک سری زمانی تابعی مانند $\mathbf{z}_{N+\eta} = (z_1, \dots, z_N, z_{N+1}, \dots, z_{N+\eta}) \in \mathbb{H}^{N+\eta}$ (بازگشتی و برداری) N مؤلفه اول، یعنی $\{z_i\}_{i=1}^N$ ، همان مقادیر بازسازی شده $\tilde{\mathbf{y}}_N$ هستند و هدف اصلی پیش‌بینی η تابع آخر سری (یعنی z_{N+1} تا $z_{N+\eta}$) است.

¹Trajectory operator

رویکرد پیش‌بینی R-FSSA: در این روش مقادیر آینده سری بصورت زیر پیش‌بینی می‌شوند:

$$z_i = \begin{cases} \tilde{y}_i, & i = 1, \dots, N \\ \sum_{j=1}^{L-1} \mathcal{A}_j z_{i+j-L}, & i = N+1, \dots, N+\eta. \end{cases}$$

رویکرد پیش‌بینی V-FSSA: فرض کنید یک بردار تابعی $f \in \mathbb{H}^L$ داده شده و $f^\Delta \in \mathbb{H}^{L-1}$ و $f^\nabla \in \mathbb{H}^{L-1}$ بردارهای تابعی‌ای باشند که از $L-1$ مؤلفه اول و $L-1$ مؤلفه آخر f تشکیل شده‌اند. ما $\mathbb{L}^\nabla$ را به صورت فضای تولید شده توسط $\{\psi_i^\nabla\}_{i=1}^q$ تعریف می‌کنیم. علاوه بر این، عملگر $\mathcal{P}^\nabla: \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{H}^{L-1}$ برای هر $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^q$ ، به صورت $\mathcal{P}^\nabla \mathbf{a} = \sum_{n=1}^q a_n \psi_n^\nabla$ تعریف می‌شود. عملگر مزدوج $(\mathcal{P}^\nabla)^*: \mathbb{H}^{L-1} \rightarrow \mathbb{R}^q$ ، برای $\mathbf{v} \in \mathbb{H}^{L-1}$ به صورت $(\mathcal{P}^\nabla)^* \mathbf{v} = [\langle \mathbf{v}, \psi_1^\nabla \rangle_{\mathbb{H}^{L-1}}, \dots, \langle \mathbf{v}, \psi_q^\nabla \rangle_{\mathbb{H}^{L-1}}]^T$ تعریف می‌شود. حال تصویر متعامد از $\mathbb{H}^{L-1}$ به $\mathbb{L}^\nabla$ به صورت $\Pi = \mathcal{P}^\nabla \left((\mathcal{P}^\nabla)^* \mathcal{P}^\nabla \right)^{-1} (\mathcal{P}^\nabla)^*$ است. در مرحله بعد، بردارهای تابعی

$$\mathbf{w}_j = \begin{cases} \mathbf{x}_j^\Delta, & j = 1, \dots, K, \\ \mathcal{Q} \mathbf{w}_{j-1}, & j = K+1, \dots, K+\eta, \end{cases}$$

را تعریف می‌کنیم، که در آن

$$\mathcal{Q} \mathbf{h} = \begin{pmatrix} \Pi(\mathbf{h}^\Delta) \\ \sum_{j=1}^{L-1} \mathcal{A}_j (\mathbf{h}_j^\Delta) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{h} \in \mathbb{L}. \quad (6)$$

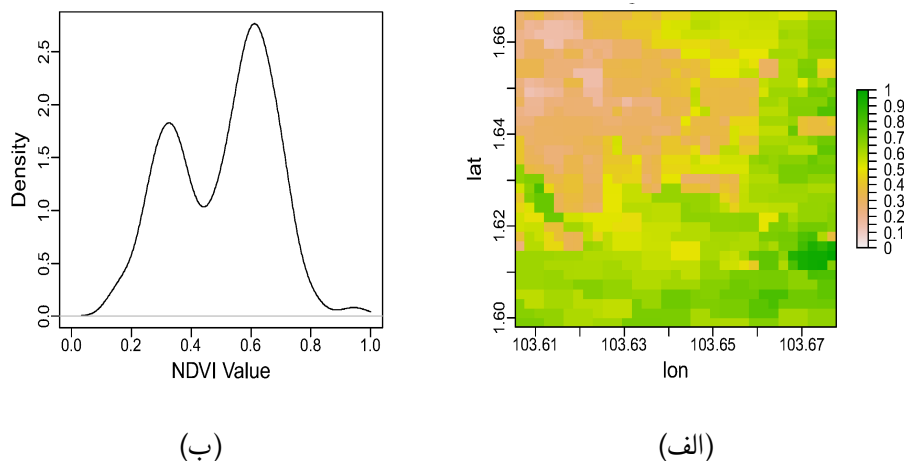
عملگر $\mathcal{W} \in \mathbb{H}^{L \times (K+\eta)}$ طوری در نظر گرفته می‌شود که توسیع آن شامل $\{\mathbf{w}_j\}_{j=1}^{K+\eta}$ باشد. روش هنکلسازی در مرحله بازسازی FSSA به $\mathcal{W}$ اعمال می‌شود تا FTS $\mathbf{z}_{N+\eta}$ را استخراج کند. توابع $\mathbf{z}_{N+1}, \dots, \mathbf{z}_{N+\eta}$ پیش‌بینی V-FSSA را تشکیل می‌دهند.

۷ پیش‌بینی تابع چگالی تصاویر ماهواره‌ای

داده‌ها شامل ۱۳۳ تصویر 33×33 از شاخص تفاضل نرمال شده پوشش گیاهی^۱ (NDVI) مربوط به منطقه‌ای در شرق پارک ملی گلشیر، مونتانا، ایالات متحده آمریکا هستند (حق‌بین و معدولیت، ۲۰۲۴). شاخص NDVI یکی از معیارهای پرکاربرد در تعیین میزان پوشش گیاهی یک ناحیه بر اساس تصاویر ماهواره‌ای است. داده‌ها به صورت دوره‌ای، هر ۱۶ روز یکبار، از اول ژانویه ۲۰۰۸ تا ۳۰ سپتامبر ۲۰۱۳ جمع‌آوری شده‌اند. مقادیر NDVI بین صفر و

^۱Normalized Difference Vegetation Index

یک قرار دارند؛ به‌طوری‌که مقادیر نزدیک به یک نشان‌دهنده پوشش گیاهی متراکم و مقادیر نزدیک به صفر نشان‌دهنده کمبود یا عدم پوشش گیاهی هستند. در اینجا، ابتدا هر تصویر به یک بردار با طول ۱۰۸۹ تبدیل شده و سپس برای هر بردار، تابع چگالی احتمال مقادیر NDVI برآورد شده است. این برآورد با استفاده از روش برآورد تابع چگالی تجربی و کتابخانه fda در نرم‌افزار R انجام شده است. تحلیل‌های مبتنی بر FSSA نیز با استفاده از کتابخانه Rfssa صورت گرفته است. همچنین این مجموعه داده‌ها در این کتابخانه موجود است. شکل ۱ نمونه‌ای از یک تصویر NDVI را به همراه تابع چگالی متناظر در تاریخ ۱۰ ژوئن ۲۰۰۹ نمایش می‌دهد. همچنین، شکل ۲ تمامی ۱۳۳ تابع چگالی برآوردشده را نشان می‌دهد. در این تحلیل، مقدار پارامتر طول پنجره برابر با $L = 45$ در نظر

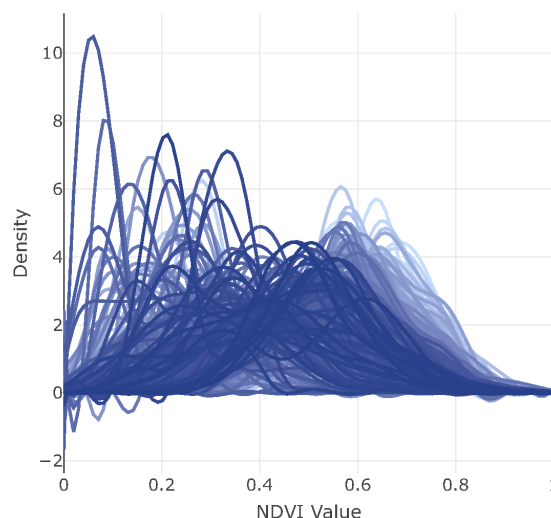


شکل ۱. الف- تصویر NDVI در ۱۰ ژوئن ۲۰۰۹، ب- تابع چگالی احتمال تجربی متناظر

گرفته شده است. این انتخاب به این دلیل انجام شده که هر پنجره تقریباً دو سال از داده‌های مشاهده‌شده را شامل شود تا بتواند روندهای دوره‌ای سالانه، فصلی و ماهانه را به‌درستی در نظر بگیرد. سپس، ۱۳۳ تابع چگالی به‌عنوان مجموعه آموزشی مورد استفاده قرار گرفته‌اند و تابع چگالی آخرین مشاهده پیش‌بینی و با مقدار واقعی آن مقایسه شده است. نتایج این پیش‌بینی شامل مقایسه روش‌های مختلف ذکرشده در این مقاله با روش‌های مبتنی بر FSSA در جدول ۱ آورده شده است. برای اندازه‌گیری میزان تفاوت بین تابع چگالی پیش‌بینی‌شده و تابع چگالی تجربی، از شاخص واگرایی کولبک-لیبلر^۱ (KLD) استفاده شده که به‌صورت

$$D_{KL}(p||q) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x) \log \left(\frac{p(x)}{q(x)} \right) dx$$

¹Kullback-Leibler Divergence

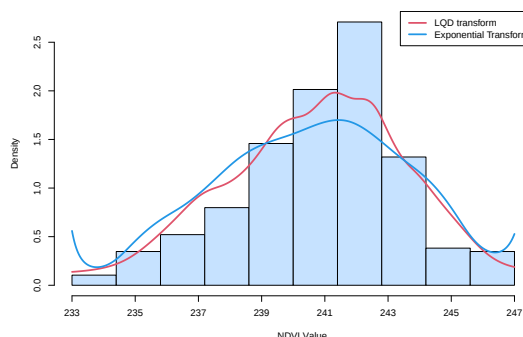


شکل ۲. الف-توابع چگالی تجربی داده‌های NDVI

جدول ۱. فاصله KLD بین توابع چگالی پیش‌بینی شده و تجربی
روش پیش‌بینی

تعداد مؤلفه‌ها	R-FSSA+LQD	V-FSSA+LQD	R-FSSA+EXP	V-FSSA+EXP
۱	۰/۰۴۴۱	۰/۰۴۷۶	۰/۰۸۲۵	۰/۰۸۴۹
۲	۰/۳۰۳۱	۰/۲۹۹۴	۰/۰۸۷۶	۰/۰۸۸۵
۳	۰/۵۳۱۱	۰/۵۳۹۵	۰/۰۸۹۶	۰/۰۹۲۳
۴	۰/۴۴۱۹	۰/۴۳۴۵	۰/۰۸۸۳	۰/۰۹۵۸
۵	۰/۵۰۷۲	۰/۴۹۴۷	۰/۰۹۵۳	۰/۱۰۴۲

تعریف می‌شود. همچنین، در جدول ۱ اثر تعداد مؤلفه‌های SVD بر کیفیت پیش‌بینی بررسی شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، در اکثر موارد، افزایش تعداد مؤلفه‌های SVD باعث کاهش کیفیت پیش‌بینی می‌شود. این اثر در روش LQD نسبت به روش تبدیل نمایی مشهودتر است. درواقع، روش تبدیل نمایی حساسیت کمتری نسبت به انتخاب تعداد مؤلفه‌ها نشان می‌دهد. از سوی دیگر، در صورتی‌که تنها اولین مؤلفه در پیش‌بینی استفاده شود، روش LQD عملکرد بهتری نسبت به تبدیل نمایی دارد. این موضوع در نمودار شکل ۳ که پیش‌بینی بر اساس یک مؤلفه را نشان می‌دهد، به‌وضوح قابل مشاهده است. با توجه به نزدیکی نتایج V-FSSA و R-FSSA در پیش‌بینی، در نمودارهای مقایسه‌ای فقط نتایج روش R-FSSA ارائه شده است تا تفاوت عملکرد دو روش تبدیل نمایی و LQD بهتر نمایش داده شود.

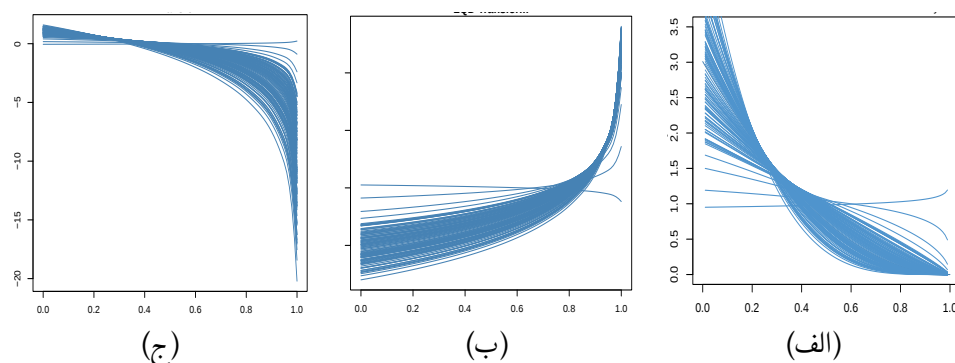


شکل ۳. برآورد تابع چگالی آخرین مشاهده با روش R-FSSA و دو تبدیل LQD و نمایی

۸ مطالعه شبیه‌سازی

برای بررسی تأثیر انتخاب ابرپارامترهای روش FSSA بر کیفیت پیش‌بینی، در یک مطالعه شبیه‌سازی، فرض می‌کنیم سری زمانی $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_N)$ از توابع چگالی بتا تشکیل شده است، به‌طوری‌که $y_i \sim \text{Beta}(1, \beta_i)$ که $\beta_i = 3 + e^{(-0.002i)} \cos(\frac{\pi i}{4}) + \epsilon_i$ و $\epsilon_i \sim i.i.d N(0, 0.25)$ نویز مستقل و هم‌توزیع است. این سری شامل یک مؤلفه متناوب با دوره تناوب ۴ و یک روند نمایی نزولی است. توابع چگالی شبیه‌سازی شده با استفاده از روش‌های LQD و نمایی به داده‌های تابعی تبدیل شده و سپس با ۲۱ پایه فوریه هموارگردیدند. شکل ۴ نمونه‌ای از یک دنباله شبیه‌سازی شده با طول $N = 100$ را همراه با تبدیل‌های نمایی و LQD نمایش می‌دهد.

روش FSSA روی مجموعه داده آزمایشی شامل ۹۹ مشاهده نخست، با انتخاب طول پنجره‌های مختلف $L = 16, 24, 32, 40$ اجرا شد. بر اساس نمودارهای تشخیصی FSSA در شکل ۵، سه مؤلفه اول می‌توانند برای بازسازی ساختار اصلی سری مورد استفاده قرار گیرند (نمودار مقادیر تکین). مؤلفه اول نشان‌دهنده روند سری، و مؤلفه‌های دوم و سوم هم‌فرکانس (در نمودار توابع تکین راست) هستند که نشان‌دهنده بخش متناوب سری هستند. همچنین، نمودار همبستگی مؤلفه‌ها وجود همبستگی قابل توجهی بین مؤلفه‌های چهارم و پنجم را نشان می‌دهد. برای اطلاعات بیشتر درباره تحلیل نمودارهای تشخیصی در SSA و FSSA، به منابع گولاندینا و همکاران (۲۰۰۱) و حق‌بین و همکاران (۲۰۲۱) مراجعه شود. مدل آموزش‌دیده برای پیش‌بینی آخرین تابع چگالی به‌کار گرفته شد. برای این منظور، تعداد مؤلفه‌های مورد استفاده در بازسازی برابر با ۱، ۳، ۵ و ۷ در نظر گرفته شد. پس از اعمال تبدیل وارون متناظر، تابع چگالی پیش‌بینی شده با تابع چگالی واقعی مقایسه گردید. این مقایسه بر اساس شاخص KLD انجام شد و نتایج آن در جدول ۲ ارائه شده است. همان‌طور که در این جدول مشاهده می‌شود، بهترین کیفیت پیش‌بینی در بازسازی با ۵ مؤلفه اول حاصل شده است. همچنین، روش تبدیل نمایی نسبت به روش LQD عملکرد بهتری داشته است. علاوه بر این، روش R-FSSA در مقایسه با V-FSSA دقت بیشتری در پیش‌بینی ایجاد کرده است. در رابطه با انتخاب پارامتر طول پنجره L ، نتایج نشان می‌دهد که تغییر مقدار L تأثیر چشمگیری بر کیفیت

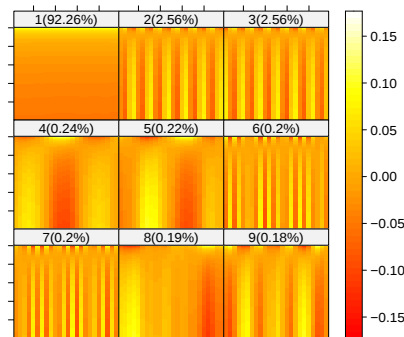


شکل ۴. دنباله سری زمانی توابع چگالی الف- شبیه‌سازی شده، ب- تبدیل LQD، ج- تبدیل نمایی

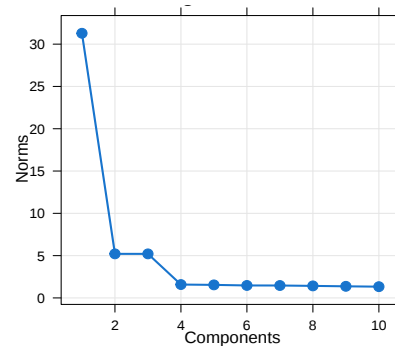
پیش‌بینی‌ها نداشته است. شکل ۶ پیش‌بینی آخرین تابع چگالی را با استفاده از روش R-FSSA، برای طول پنجره $L = 24$ و با در نظر گرفتن ۵ مؤلفه اول در بازسازی، نمایش می‌دهد.

جدول ۲. اندازه‌های KLD بین توابع چگالی پیش‌بینی شده و واقعی در مطالعه شبیه‌سازی

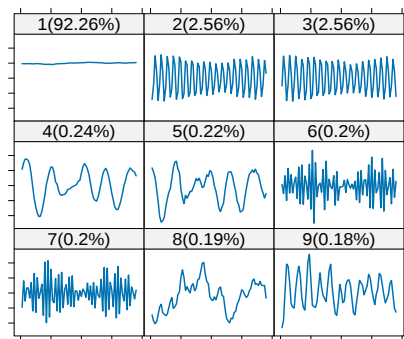
روش پیش‌بینی				تعداد مؤلفه‌ها	L
V-FSSA+EXP	R-FSSA+EXP	V-FSSA+LQD	R-FSSA+LQD		
۰/۰۷۶۹	۰/۰۷۲۹	۰/۲۳۳۳	۰/۲۳۳۷	۱	۱۶
۰/۰۱۱۱	۰/۰۰۵۸	۰/۱۱۹۸	۰/۱۰۱۹	۳	
۰/۰۰۷۶	۰/۰۰۴۴	۰/۰۰۹۰	۰/۰۰۷۶	۵	
۰/۰۰۲۷	۰/۰۰۹۹	۰/۰۸۲۸	۰/۰۹۲۸	۷	
۰/۰۰۷۳	۰/۰۰۷۹	۰/۲۲۸۵	۰/۲۴۱۷	۱	۲۴
۰/۰۰۶۱	۰/۰۰۶۵	۰/۱۱۰۰	۰/۱۱۱۸	۳	
۰/۰۰۴۱	۰/۰۰۳۴	۰/۰۹۹۵	۰/۰۹۹۷	۵	
۰/۰۰۲۵	۰/۰۰۵۸	۰/۱۰۶۶	۰/۱۲۵۵	۷	
۰/۰۸۱۳	۰/۰۷۳۲	۰/۲۴۶۳	۰/۲۳۳۰	۱	۳۲
۰/۰۰۷۴	۰/۰۰۵۰	۰/۱۱۵۳	۰/۱۰۶۹	۳	
۰/۰۱۲۶	۰/۰۱۰۶	۰/۱۰۴۵	۰/۱۰۳۲	۵	
۰/۰۱۳۰	۰/۰۲۰۲	۰/۱۴۳۲	۰/۱۳۸۸	۷	
۰/۰۷۴۶	۰/۰۶۸۲	۰/۲۳۲۸	۰/۲۲۱۲	۱	۴۰
۰/۰۰۶۶	۰/۰۰۴۹	۰/۱۱۷۷	۰/۱۱۰۹	۳	
۰/۰۱۷۷	۰/۰۱۴۳	۰/۱۳۹۴	۰/۱۳۲۸	۵	
۰/۰۲۷۱	۰/۰۱۹۳	۰/۱۶۳۳	۰/۱۵۱۸	۷	



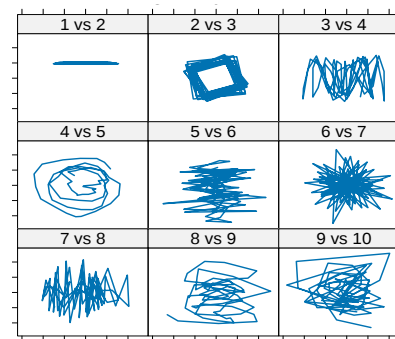
(ب)



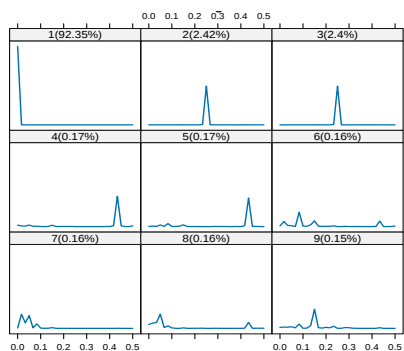
(الف)



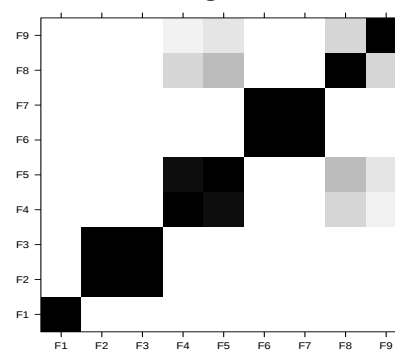
(د)



(ج)

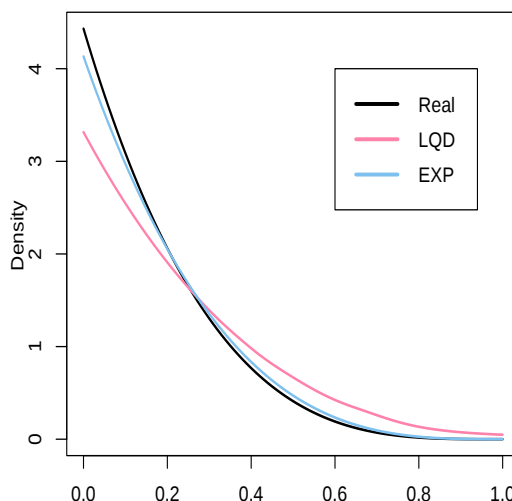


(و)



(ه)

شکل ۵. نمودارهای تشخیصی FSSA، الف-مقادیر تکین، ب- توابع تکین، ج- بردارهای تکین راست جفت‌شده، د- بردارهای تکین راست، ه- ماتریس W-همبستگی، و- دوره‌نگار بردارهای تکین راست



شکل ۶. پیش‌بینی آخرین تابع چگالی با انتخاب $L = 24$ و استفاده از تبدیل‌های LQD و نمایی

تقدیر و تشکر

نویسندگان از نظرات و پیشنهادهای داوران، سردبیر، هیئت تحریریه و ویراستار محترم مجله که در ارتقا و ارائه بهتر مقاله موثر بود کمال تشکر را دارند.

مراجع

ذبیحی مقدم ر، یارمحمدی م، حسنی ح و نصیری پ. (۱۴۰۱)، بررسی بهبود پیش‌بینی بازگشتی روش تحلیل مجموعه مقادیر تکی‌ن در مدل‌های سری‌زمانی ساختاری با استفاده از پالایش داده‌ها و الگوریتم وزنی، مجله علوم آماری ۱۶(۲)، ۳۷۳-۳۹۵.

Bernhardt, C., Klüppelberg, C. and Meyer-Brandis, T. (2008), Estimating High Quantiles for Electricity Prices by Stable Linear Models, *Journal of Energy Markets*, 1(1), 3-19.

Bosq, D. (1991), Modelization, Nonparametric Estimation and Prediction for Continuous Time Processes, *Nonparametric Functional Estimation and Related Topics* (pp. 509-529). Springer.

- Chen, Z., Bao, Y., Li, H. and Spencer Jr, B. F. (2019), LQD-RKHS-Based Distribution-to-Distribution Regression Methodology for Restoring the Probability Distributions of Missing SHM Data, *Mechanical Systems and Signal Processing*, **121**, 655–674.
- Condino, F. (2023), Share Density-Based Clustering of Income Data, *Statistical Analysis and Data Mining: The ASA Data Science Journal*, **16**(4), 336–347.
- Golyandina, N., Nekrutkin, V. and Zhigljavsky, A. A. (2001), Analysis of Time Series Structure: SSA and Related Techniques, *Chapman and Hall/CRC*, New York, NY, USA.
- Golyandina, N. and Osipov, E. (2007), The Caterpillar-SSA Method for Analysis of Time Series with Missing Values, *Journal of Statistical Planning and Inference*, **137**(8), 2642–2653.
- Haghibin, H., Najibi, S. M., Mahmoudvand, R., Trink, J. and Maadooliat, M. (2021), Functional Singular Spectrum Analysis, *Stat*, **10**(1), e330.
- Haghibin, H. and Maadooliat, M. (2024), A Journey from Univariate to Multivariate Functional Time Series: A Comprehensive Review, *Wiley Interdisciplinary Reviews: Computational Statistics*, **16**(1), e1640.
- Hyndman, R. and Ullah, S. (2007), Robust Forecasting of Mortality and Fertility Rates: A Functional Data Approach, *Computational Statistics & Data Analysis*, **51**(10), 4942–4956.
- Hyndman, R. and Shang, H. L. (2009), Functional Time Series Forecasting, *Journal of the Korean Statistical Society*, **38**(3), 199–211.
- Hörmann, S. and Kokoszka, P. (2012), Functional time series. In *Handbook of statistics*, Elsevier.
- Horváth, L. and Kokoszka, P. (2012), Inference for Functional Data with Applications, Springer.

- Kneip, A. and Utikal, K. J. (2001), Inference for Density Families Using Functional Principal Component Analysis, *Journal of the American Statistical Association*, **96**(454), 519–542.
- Kokoszka, P., Miao, H., Petersen, A. and Shang, H. L. (2019), Forecasting of Density Functions with an Application to Cross-Sectional and Intraday Returns, *International Journal of Forecasting*, **35**(4), 1304–1317.
- Pascariu, M. D., Lenart, A. and Canudas-Romo, V. (2019), The Maximum Entropy Mortality Model: Forecasting Mortality Using Statistical Moments, *Scandinavian Actuarial Journal*, **2019**(8), 661–685.
- Petersen, A. and Müller, H.-G. (2016), Functional Data Analysis for Density Functions by Transformation to a Hilbert Space, *The Annals of Statistics*, **44**, 183–218.
- Ramsay, J. O. and Silverman, B. W. (2005), *Functional Data Analysis*. Springer-Verlag, New York, NY, USA.
- Ramsay, J. O. (1998), Estimating Smooth Monotone Functions. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Statistical Methodology)*, **60**(2), 365–375.
- Ramsay, J. O. (2000), Differential Equation Models for Statistical Functions. *Canadian Journal of Statistics*, **28**(2), 225–240.
- Rodrigues, P. C., and Mahmoudvand, R. (2016), Correlation Analysis in Contaminated Data by Singular Spectrum Analysis, *Quality and Reliability Engineering International*, **32**(6), 2127–2137.
- Shang, H. L., Haberman, S. and Xu, R. (2022), Multi-Population Modelling and Forecasting Life-Table Death Counts. *Insurance: Mathematics and Economics*, **106**, 239–253.
- Trinka, J., Haghbin, H. and Maadooliat, M. (2022), Multivariate Functional Singular Spectrum Analysis: A Nonparametric Approach for Analyzing Multivariate Functional Time Series, In *Innovations in Multivariate Statistical Modeling: Navigating Theoretical and Multidisciplinary Domains*, Springer.

Trinka, J., Haghbin, H., Shang, H. L. and Maadooliat, M. (2023), Functional Time Series Forecasting: Functional Singular Spectrum Analysis Approaches, *Stat*, **12**(1), e621.

Zhang, Q., Makur, A. and Azizzadenesheli, K. (2022), Functional Linear Regression of Cumulative Distribution Functions, *arXiv Preprint*, arXiv:2205.14545.