




Inference for the Modified Lindley Distribution Based on Progressively Type-II Censored Data

Fallah, A. 

Department of Statistics, University of Payame Noor, Tehran, Iran.

Corresponding author: A. Fallah, adelehfallah@pnu.ac.ir Received: 21/11/2024

Revised: 9/5/2025 Accepted and Published Online: 10/4/2025.

Introduction

In industrial life testing and medical survival analysis, very often the object of interest is lost or withdrawn before failure or the object lifetime is only known within an interval. Hence, the obtained sample is called a censored sample. The progressive type-II censoring to be of great importance in the literature of life testing and reliability analysis. In this paper, a one-parameter distribution is introduced as the modified Lindley distribution, which provides a new perspective in terms of lifetime modeling. For the modified Lindley, hazard rate function, $h(x)$, is neither constant nor monotonic; if x_0 denotes the unique critical point of $h(x)$, $h(x)$ increases for $(0, x_0]$ and decreases for $(x_0, +\infty)$. Also, for the modified Lindley distribution we always have $h(x) \geq \theta$ if $x \geq 1/\theta$ and $h(x) \leq \theta$ if $x \in (0, 1/\theta]$. By these properties of the hazard rate function, we can say that the modified Lindley distribution is a one-parameter alternative distribution to the exponential and Lindley distributions. In this paper, estimation for the modified Lindley distribution parameter is studied based on progressive Type II censored data.

Material and Methods

Various point estimators, including maximum likelihood estimation, Pivotal estimation and Bayesian estimation have been calculated. Since the integrals required for Bayes estimation do not have closed forms, the Metropolis-Hastings algorithm and Lindley approximation methods are applied to approximate these integrals. Asymptotic confidence intervals, confidence inter-

vals based on the maximum likelihood ratio test, Pivotal confidence intervals, bootstrap confidence intervals and Bayesian confidence intervals were calculated using Markov chain Monte Carlo method.

Results and Discussion

Comparing the Bayes estimators based on different prior distributions, as expected, the Bayes estimator based on the informative prior perform better than the Bayes estimator based on the non-informative prior. Comparing the Bayes estimators obtained using Lindley's approximation and importance sampling methods, we observe that the Lindley's approximation method is better than the importance sampling method unless reliable prior information on the unknown parameter is available. Also, when the prior information on the unknown parameter is unavailable, Bayesian estimation using the importance sampling method performs better than Lindley's approximation method. Bayesian estimators based on informative prior distributions perform better in both methods than maximum likelihood and Pivotal estimators. Comparing the average widths of the interval estimates, it is observed that the Bayesian confidence intervals are superior to the asymptotic confidence intervals and bootstrap confidence intervals.

Conclusion

Using Monte Carlo simulation, we recommend using the Bayesian estimator for point estimation unless reliable prior information on the unknown parameter is available. Also, when the prior distribution is unknown and information about the parameter θ is not available, it is recommended to use maximum likelihood estimation among different point estimators. For confidence intervals, we suggest using the Bayesian confidence intervals to construct confidence intervals.

Keywords: Modified Lindley distribution, Progressively type-II censored, Bootstrap confidence intervals, Markov chain Monte Carlo, Lindley approximation.

Mathematics Subject Classification (2010): 62N01, 62N05.



©The Author(s). The Publisher is Iranian Statistical Society.

This is an open access article distributed under the terms and conditions of [\(CC BY-NC 4.0\)](https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/)



مجله علوم آماری، بهار و تابستان ۱۴۰۴

جلد ۱۹، شماره ۱، ص ۱۳۷ -- ۱۵۹

DOI: 10.61186/jss.19.1.11

مقاله پژوهشی

استنباط برای توزیع لیندلی اصلاح شده بر اساس داده‌های سانسور شده فزاینده نوع دو

عادلۀ فلاح

گروه آمار، دانشگاه پیام نور، تهران

نویسنده مسئول: عادلۀ فلاح، adelehfallah@pnu.ac.ir

تاریخ دریافت: ۱۴۰۳/۹/۱ تاریخ بازنگری: ۱۴۰۴/۲/۱۹ تاریخ پذیرش و انتشار: ۱۴۰۴/۲/۲۰

چکیده: در این مقاله، برآوردیابی برای پارامتر توزیع لیندلی اصلاح شده بر اساس داده‌های سانسور شده فزاینده نوع دو مورد مطالعه قرار گرفته است. برآورد ماکسیمم درستنمایی، برآورد به روش محوری و برآورد بیزی پارامتر با دو روش تقریب لیندلی و مونت کارلو زنجیر مارکوف محاسبه شده است. بازه‌های اطمینان مجانبی، محوری، بوت استرپ و بیزی ارائه شده است. یک مطالعه شبیه‌سازی مونت کارلو برای ارزیابی و مقایسه عملکرد روش‌های مختلف برآورد انجام شده است. همچنین، برای تشریح بیشتر روش‌های برآورد معرفی شده دو مثال واقعی ارائه شده است.

واژه‌های کلیدی: توزیع لیندلی اصلاح شده، سانسور فزاینده نوع دو، فواصل اطمینان بوت استرپ، مونت کارلو زنجیر مارکوف، تقریب لیندلی.
کد موضوع بندی ریاضی (۲۰۱۰): 62N05، 62N01

۱ مقدمه

در بسیاری از مطالعات مربوط به طول عمر و قابلیت اعتماد با مواردی مواجه می‌شویم که واحدهای آزمایش، قبل از اتمام آزمایش از مطالعه خارج می‌شوند. به داده‌هایی که قبل از مشاهده زمان شکست آنها از آزمایش حذف می‌شوند، داده‌های سانسور شده می‌گویند. در این مقاله، طرح سانسور شده فزاینده نوع دو مورد مطالعه قرار گرفته است. فرض کنید n واحد در معرض آزمایش طول عمر قرار گرفته است. مقادیر

m و $(m < n)$ قبل از شروع آزمایش ثابت در نظر گرفته می‌شوند، به طوری که $m +$



©نویسنده(گان). ناشر انجمن آمار ایران است.
این مقاله با دسترسی آزاد تحت شرایط و ضوابط (CC BY-NC 4.0) توزیع شده است.

در این طرح با مشاهده اولین شکست، به طور تصادفی R_1 واحد از بین $n - 1$ واحد آزمایشی سالم، از آزمایش کنار گذاشته می‌شود. به طور مشابه، به محض مشاهده دومین شکست، به طور تصادفی R_2 واحد از بین $n - R_1 - 2$ واحد سالم باقیمانده از آزمایش کنار گذاشته می‌شود. این فرآیند تا وقتی ادامه دارد که بعد از شکست واحد m ام، همه واحدهای سالم باقیمانده، یعنی $R_m = n - m - R_1 - \dots - R_{m-1}$ از آزمایش کنار گذاشته شوند. داده‌های طول عمر سیستم به دست آمده از چنین آزمایش طول عمر را با $X_{1:m:n} < X_{m:m:n} < \dots$ نشان داده و آن را نمونه سانسور شده فزاینده نوع دو می‌نامند. در این مقاله برای ساده‌سازی، نمونه سانسور شده فزاینده نوع دو با $X_1 < \dots < X_m$ و نمونه سانسور شده فزاینده نوع دو مشاهده شده با $x_1 < \dots < x_m$ نشان داده می‌شوند. در حالت خاص، اگر $R_1 = \dots = R_{m-1} = 0$ و $R_m = n - m$ آنگاه، این طرح به طرح سانسور نوع دوم متداول تبدیل می‌شود، که در آن فقط اولین m خرابی مشاهده می‌شوند. همچنین اگر $n = m$ و $R_1 = \dots = R_m = 0$ باشد، آنگاه طرح فوق، به طرح فاقد سانسور یا طرح نمونه کامل تبدیل می‌شود، که در آن طول عمر همه n سیستم، مشاهده می‌شوند (بالاکریشان و آگاروالا، ۲۰۰۰؛ بالاکریشان و کرامر، ۲۰۱۴؛ قهرمانی و همکاران، ۱۴۰۱؛ نادب و ترابی، ۱۳۹۸).

چسینو و همکاران (۲۰۲۱) یک خانواده از توزیع لیندلی اصلاح شده را معرفی نمودند که تابع چگالی و تابع توزیع تجمعی آن به ترتیب به صورت

$$f_X(x; \theta) = \frac{\theta}{1 + \theta} [x(\theta\omega(x) - \omega(x)) + 1 - \omega'(x) + \theta] e^{-\theta x}, \quad x > 0, \theta > 0,$$

$$F_X(x; \theta) = 1 - \left[1 + \frac{\theta x}{1 + \theta} \omega(x) \right] e^{-\theta x}, \quad x > 0, \theta > 0.$$

هستند، که برای حالت خاص $\omega(x) = 0$ همان توزیع نمایی با پارامتر θ است که تابع نرخ خطر آن $h(x) = \theta$ و یک تابع ثابت است. برای حالت $\omega(x) = 1$ همان توزیع لیندلی با پارامتر θ است که اولین بار توسط لیندلی (۱۹۵۸) به عنوان یک توزیع مفید برای تحلیل داده‌های طول عمر به ویژه در مدل‌سازی قابلیت اعتماد تنش-مقاومت، زلزله، مواد معدنی، مهندسی، فیزیک، کنترل کیفیت، پزشکی و همچنین برای مدل‌سازی داده‌های طول عمر معرفی شده است. تابع نرخ خطر آن به صورت $h(x) = \frac{\theta(1+x)}{\theta+1+\theta x}$ و در x کاهشی است و برای هر $x > 0$ تابع $h(x) \leq \theta$ است. برای حالت $\omega(x) = e^{-\theta x}$ توزیع فوق، توزیع لیندلی اصلاح شده (ML) با پارامتر θ است که اخیراً به عنوان یک توزیع طول عمر مورد توجه قرار گرفته است. تابع چگالی احتمال و تابع توزیع تجمعی توزیع لیندلی اصلاح شده به ترتیب به صورت

$$f_X(x; \theta) = \frac{\theta}{1 + \theta} e^{-\theta x} [(\theta + 1)e^{\theta x} + \theta x - 1], \quad x > 0, \theta > 0, \quad (1)$$

$$F_X(x; \theta) = 1 - \left[1 + \frac{\theta x}{1 + \theta} e^{-\theta x} \right] e^{-\theta x}, \quad x > 0, \theta > 0. \quad (2)$$

¹Modified Lindely

و تابع نرخ خطر آن به صورت

$$h(x; \theta) = \frac{\theta(\theta x - 1)}{(\theta + 1)e^{-\theta x} + \theta x} + \theta, \quad x > 0$$

است. تابع نرخ خطر توزیع لیندلی اصلاح شده ثابت و یکنواخت نیست. اگر x یک نقطه بحرانی منحصر به فردی از $h(x)$ را نشان دهد آنگاه $h(x)$ در بازه $(0, x]$ افزایشی و در بازه $(x, +\infty)$ کاهشی است. همچنین، برای $x \geq 1/\theta$ تابع نرخ خطر $h(x) \geq \theta$ و برای $x \in (0, 1/\theta)$ تابع نرخ خطر $h(x) \leq \theta$ است. چسنیو و همکاران (۲۰۲۱) نشان دادند که توزیع لیندلی اصلاح شده برای مدل‌سازی داده‌های طول عمر بهتر از توزیع‌های نمایی و لیندلی عمل می‌کند. همچنین، تابع توزیع لیندلی اصلاح شده را می‌توان به صورت ترکیبی از توزیع نمایی و گاما به صورت

$$f(x) = f_1(x) + \frac{1}{2(1 + \theta)} [f_2(x) - f_3(x)],$$

بازنویسی کرد، که در آن $f_1(x)$ ، $f_2(x)$ و $f_3(x)$ به ترتیب توابع چگالی احتمال توزیع‌های نمایی با پارامتر 2θ ، نمایی با پارامتر θ و گاما با پارامترهای $(2, 2\theta)$ هستند (اصغرزاده و همکاران، ۲۰۱۸؛ زاکرزاده و دولتی، ۲۰۰۹؛ کریشنا و کومار، ۲۰۱۱؛ گایتانی و همکاران، ۲۰۰۸؛ محمودی و ابوالحسینی، ۱۳۹۵؛ چسنیو و همکاران، ۲۰۲۲؛ خوارزمی و همکاران، ۲۰۲۳؛ چسنیو و همکاران، ۲۰۲۰).

ساختار این مقاله به صورت زیر است. در بخش ۲، برآورد ماکسیمم درست‌نمایی، برآورد به روش محوری و برآورد بی‌زی محاسبه شده است. فواصل اطمینان مختلفی در بخش ۳ مورد مطالعه قرار گرفته است. در بخش ۴، با استفاده از شبیه‌سازی مونت کارلو کارایی روش‌های مختلف برآورد با هم مقایسه شده است. در بخش ۵، دو مثال واقعی برای تشریح روش‌های برآورد ارائه شده است. در نهایت، بحث و نتیجه‌گیری در بخش ۶ ارائه شده است.

۲ برآوردگرهای نقطه‌ای

۲.۱ برآورد ماکسیمم درست‌نمایی

فرض کنید X_1, \dots, X_m یک نمونه سانسور شده فزاینده نوع دو از توزیعی با چگالی $f(\cdot)$ و تابع توزیع $F(\cdot)$ با طرح سانسور (R_1, \dots, R_m) هستند. آنگاه تابع درست‌نمایی به صورت

$$L(\mathbf{x}, \theta) = C \prod_{i=1}^m f(x_i) [1 - F(x_i)]^{R_i}, \quad (3)$$

۱۴۲ استنباط برای توزیع لیندلی اصلاح شده

است، که در آن $C = n(n - R_1 - 1)(n - R_1 - R_2 - 2) \dots (n - R_1 - \dots - R_{m-1} - m + 1)$ (بالاکریشن و کرامر، ۲۰۱۴). با توجه به روابط (۱)، (۲) و (۳)، تابع درستنمایی به صورت

$$L(\mathbf{x}, \theta) = C \frac{\theta^m}{(1 + \theta)^m} e^{-\theta[\sum_{i=1}^m x_i + \sum_{i=1}^m x_i R_i]} \prod_{i=1}^m [(1 + \theta)e^{\theta x_i} + 2\theta x_i - 1] \times \prod_{i=1}^m (1 + \frac{\theta x_i}{1 + \theta} e^{-\theta x_i})^{R_i} \quad (۴)$$

است، که در آن x_1, \dots, x_m نمونه‌های سانسور شده فزاینده نوع دو مشاهده شده هستند. با مشتق‌گیری از لگاریتم تابع درستنمایی نسبت به پارامتر θ ، معادله

$$\frac{m}{\theta} - \frac{n}{1 + \theta} - 2 \sum_{i=1}^m x_i - \sum_{i=1}^m x_i R_i + \sum_{i=1}^m \left(\frac{e^{\theta x_i} [1 + x_i(1 + \theta)] + 2x_i}{(1 + \theta)e^{\theta x_i} + 2\theta x_i - 1} \right) + \sum_{i=1}^m R_i \left(\frac{1 + x_i e^{-\theta x_i} (1 - x_i \theta)}{1 + \theta + \theta x_i e^{-\theta x_i}} \right) = 0.$$

به دست می‌آید، که با حل آن به روش‌های عددی مانند نیوتن رافسون و تکراری نقطه ثابت می‌توان برآورد ماکسیمم درستنمایی^۱ (MLE) پارامتر θ را محاسبه کرد. در روش تکراری نقطه ثابت، $g(\theta)$ به صورت

$$g(\theta) = m \left[\frac{n}{1 + \theta} + 2 \sum_{i=1}^m x_i + \sum_{i=1}^m x_i R_i - \sum_{i=1}^m \left(\frac{e^{\theta x_i} [1 + x_i(1 + \theta)] + 2x_i}{(1 + \theta)e^{\theta x_i} + 2\theta x_i - 1} \right) - \sum_{i=1}^m R_i \left(\frac{1 + x_i e^{-\theta x_i} (1 - x_i \theta)}{1 + \theta + \theta x_i e^{-\theta x_i}} \right) \right]^{-1},$$

تعریف شده است. برای اینکه نشان دهیم برآورد ماکسیمم درستنمایی پارامتر θ وجود دارد توابع $\phi_1(\theta) = g(\theta)$ و $\phi_2(\theta) = \theta$ تعریف شده است. در این صورت

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \phi_1(\theta) = 0, \quad \lim_{\theta \rightarrow +\infty} \phi_1(\theta) = \frac{m}{\sum_{i=1}^m x_i + \sum_{i=1}^m R_i(x_i + 1)} > 0.$$

این به نوبه خود نشان داده است که $\phi_1(\theta)$ از صفر شروع و به یک مقدار مثبت افزایش می‌یابد. همچنین، برای θ های بزرگ تابع $\phi_1(\theta)$ مقادیر متناهی را می‌پذیرد و هنگامی که $\theta \rightarrow +\infty$ میل کند تابع $\phi_2(\theta)$ به ∞ میل خواهد کرد. بنابراین، معادله $g(\theta) = \theta$ دارای یک ریشه حقیقی است. برای حل معادله $g(\theta) = \theta$ ابتدا $\theta^{(0)}$

^۱Maximum Likelihood Estimator

به عنوان مقدار اولیه برای پارامتر θ در نظر گرفته شده است تا تقریب های پی در پی برای پارامتر θ به صورت $\theta^{(1)} = g(\theta^{(0)}), \theta^{(2)} = g(\theta^{(1)}), \dots, \theta^{(j+1)} = g(\theta^{(j)})$ به دست آورده شود. اگر $|\theta^{(j+1)} - \theta^{(j)}| < \epsilon$ ، آنگاه فرآیند تکرار در مرحله j ام پایان می پذیرد که در آن ϵ مقدار بسیار کوچکی است. بعد از مرحله j ام برآورد ماکسیم درستنمایی پارامتر θ به صورت $\hat{\theta} = \theta^{(j)}$ به دست آورده می شود.

۲.۲ برآورد با روش محوری

فرض کنید X_1, \dots, X_m یک نمونه سانسور شده فزاینده نوع دو با تابع توزیع $F(\cdot)$ است. متغیر تصادفی $Y_{i:m:n}$ برای $i = 1, \dots, m$ به صورت

$$Y_{i:m:n} = -\ln[1 - F(X_i; \theta)] = -\ln \left[\left(1 + \frac{\theta X_i}{1 + \theta} e^{-\theta X_i} \right) e^{-\theta X_i} \right],$$

تعریف شده است. با توجه اینکه $-\ln[1 - F(X_{i:m:n}; \theta)]$ دارای توزیع نمایی استاندارد است، بنابراین $Y_{1:m:n} < Y_{2:m:n} < \dots < Y_{m:m:n}$ یک نمونه سانسور فزاینده نوع دوم از توزیع نمایی استاندارد است. تحت تبدیلات

$$\begin{cases} Z_1 = nY_{1:m:n} \\ Z_2 = (n - R_1 - 1)(Y_{2:m:n} - Y_{1:m:n}) \\ \vdots \\ Z_m = (n - R_1 - \dots - R_{m-1} - m + 1)(Y_{m:m:n} - Y_{m-1:m:n}). \end{cases}$$

نشان داده می شود که $Z_1 < \dots < Z_m$ متغیرهای مستقل و هم توزیع با توزیع نمایی استاندارد هستند (بالاکریشنان و آگاروالا، ۲۰۰۰). متغیرهای U و V به صورت

$$V = 2Z_1 = 2nY_{1:m:n}, \quad U = 2 \sum_{i=2}^m Z_i = 2 \left[\sum_{i=1}^m (R_i + 1) Y_{i:m:n} - nY_{1:m:n} \right].$$

تعریف شده است. این متغیرها از یکدیگر مستقل بوده و متغیر V دارای توزیع خی دو با ۲ درجه آزادی و متغیر U دارای توزیع خی دو با $2m - 2$ درجه آزادی هستند. بدیهی است

$$\begin{aligned} Q(\theta) = U + V &= 2 \sum_{i=1}^m (R_i + 1) Y_{i:m:n} \\ &= -2 \sum_{i=1}^m (1 + R_i) \ln \left[\left(1 + \frac{\theta X_i}{1 + \theta} e^{-\theta X_i} \right) e^{-\theta X_i} \right], \end{aligned}$$

دارای توزیع خی دو با $2m$ درجه آزادی است. با استفاده از نامساوی مارکف، برای هر $\epsilon > 0$ و $m \rightarrow \infty$ داریم

$$\begin{aligned} Pr\left(\left|\frac{Q(\theta)}{2m} - 1\right| > \epsilon\right) &< \frac{E\left(\frac{Q(\theta)}{2m} - 1\right)^2}{\epsilon^2} \\ &= \frac{Var\left(\frac{Q(\theta)}{2m}\right) + E^2\left(\frac{Q(\theta)}{2m} - 1\right)}{\epsilon^2} = \frac{1}{\epsilon^2 m} \rightarrow 0, \end{aligned}$$

بنابراین احتمال فوق، زمانی که m به سمت بینهایت میل می‌کند به صفر همگرا است. بنابراین

$$\frac{Q(\theta)}{2m} = \frac{-2 \sum_{i=1}^m (1 + R_i) \ln \left[\left(1 + \frac{\theta X_i}{1 + \theta} e^{-\theta X_i}\right) e^{-\theta X_i} \right]}{2m} \xrightarrow{p} 1.$$

براساس کمیت محوری $Q(\theta)$ ، برآورد پارامتر θ به روش محوری، از حل معادله $Q(\theta) = 2m - 2$ یا

$$m + \sum_{j=1}^m (1 + R_j) \ln \left[\left(1 + \frac{\theta X_j}{1 + \theta} e^{-\theta X_j}\right) e^{-\theta X_j} \right] = 0.$$

به دست آورده می‌شود. توجه شود که

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \{Q(\theta)\} = -2 \sum_{i=1}^m (1 + R_i) X_i \left\{ \frac{e^{-\theta X_i} [1 - X_i \theta - \theta^2 X_i]}{(1 + \theta)(1 + \theta + \theta X_i e^{-\theta X_i})} - 1 \right\} \geq 0,$$

و

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} Q(\theta) = -2 \sum_{i=1}^m (1 + R_i) \ln(1) = 0, \quad \lim_{\theta \rightarrow +\infty} Q(\theta) = +\infty.$$

بنابراین $Q(\theta)$ تابعی پیوسته و اکیدا صعودی در بازه $(0, \infty)$ است. در نتیجه، برآوردی که از روش محوری و حل معادله $Q(\theta) = 2m$ محاسبه می‌شود یکتا است.

۲.۳ برآورد بیزی

در این بخش، برای محاسبه برآورد بیزی از تابع زیان مربع خطا $L_1(\theta, \delta) = (\delta - \theta)^2$ استفاده شده است، که در آن δ برآورد پارامتر θ است. این تابع زیان متقارن است و بیش برآوردی و کم برآوردی را به یک اندازه نشان می‌دهد. فرض کنید θ دارای توزیع پیشین گاما با تابع چگالی

$$\pi(\theta; \alpha, \beta) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \theta^{\alpha-1} e^{-\beta\theta}, \quad \theta > 0, \quad (5)$$

است، که در آن α و β مقادیر ثابت و معلوم هستند و مقادیر آن‌ها می‌تواند با توجه به اطلاعات پیشین درباره میانگین‌ها و واریانس‌های پارامترها انتخاب شوند. توزیع پیشین گاما یک توزیع انعطاف‌پذیر است، زیرا با انتخاب مقادیر مناسبی از α و β توزیع پیشین آگاهی بخش و توزیع پیشین ناآگاهی بخش حاصل می‌شود. با استفاده از تابع درستنمایی (۴) و توزیع پیشین (۵)، تابع چگالی پسین θ به صورت

$$\pi(\theta|\mathbf{x}) = \frac{\theta^{m+\alpha-1} e^{-\theta[\sum_{i=1}^m x_i(\nu+R_i)+\beta]} \prod_{i=1}^m [(1+\theta)e^{\theta x_i} + \nu\theta x_i - 1]}{K(\mathbf{x})(1+\theta)^m \prod_{i=1}^m \left(1 + \frac{\theta x_i}{1+\theta} e^{-\theta x_i}\right)^{-R_i}},$$

محاسبه شده است، که در آن

$$K(\mathbf{x}) = \int_0^\infty \frac{\theta^{m+\alpha-1}}{(1+\theta)^m} e^{-\theta[\sum_{i=1}^m x_i(\nu+R_i)+\beta]} \prod_{i=1}^m [(1+\theta)e^{\theta x_i} + \nu\theta x_i - 1] \\ \times \prod_{i=1}^m \left(1 + \frac{\theta x_i}{1+\theta} e^{-\theta x_i}\right)^{-R_i} d\theta.$$

برآورد بیزی پارامتر θ تحت تابع زیان مربع خطا به صورت

$$\hat{\theta}_{BS} = \int_0^\infty \frac{\theta^{m+\alpha} e^{-\theta[\sum_{i=1}^m x_i(\nu+R_i)+\beta]} \prod_{i=1}^m [(1+\theta)e^{\theta x_i} + \nu\theta x_i - 1]}{K(\mathbf{x})(1+\theta)^m \prod_{i=1}^m \left(1 + \frac{\theta x_i}{1+\theta} e^{-\theta x_i}\right)^{-R_i}} d\theta. \quad (6)$$

به دست می‌آید. با توجه به فرم تابع چگالی پسین، انتگرال داده شده در رابطه (۶) به صورت تحلیلی قابل محاسبه نیست. بنابراین برای محاسبه برآورد بیزی، روش مونت کارلو زنجیر مارکوف^۱ (MCMC) و روش تقریب لیندلی ارائه شده است.

از روش مونت کارلو زنجیر مارکوف و الگوریتم متروپولیس-هستینگز با توزیع پیشنهادی نرمال به منظور تولید نمونه از تابع چگالی پسین استفاده شده است (رابرت و کسلا، ۲۰۰۴).

الگوریتم ۱. الگوریتم متروپولیس-هستینگز:

گام ۱- مقدار اولیه $\theta^{(0)}$ را برای پارامتر θ در نظر بگیرید. برای شروع الگوریتم، مقدار اولیه را می‌توان برآورد ماکسیمم درستنمایی در نظر گرفت.

گام ۲- قرار دهید $j = 1$.

گام ۳- با الگوریتم متروپولیس-هستینگز $\theta^{(j)}$ از توزیع $\pi(\theta^{(j-1)}|\mathbf{x})$ با توزیع پیشنهادی $N(\theta^{(j-1)}, S_\theta^j)$ تولید می‌شود. که در آن S_θ^j واریانس فیشتر است.

¹Markov chain Monte Carlo

گام ۴- قرار دهید $j = j + 1$.

گام ۵- گام‌های ۳ و ۴ را تکرار کنید تا نمونه‌های مونت کارلو زنجیر مارکوفی $\theta_1, \dots, \theta_N$ تولید شود.

برآورد بیزی θ در رابطه (۶)، با روش MCMC به صورت $\hat{\theta}_{BS} = \frac{1}{N-M} \sum_{j=M+1}^N \theta_j$ به دست آورده می‌شود، که در آن M تعداد تکرارهای دوره داغیدن است. برای محاسبه برآورد بیز با الگوریتم متروپولیس-هستینگز از بسته MHadaptive، در نرم افزار R، استفاده شده است (چیورس، ۲۰۱۲).

لیندلی (۱۹۸۰) روشی را برای تقریب نسبت دو انتگرال پیشنهاد کرد که از آن برای محاسبه تقریبی برآوردهای بیزی استفاده شده است. تقریب لیندلی در حالت تک پارامتری برای تابعی از پارامتر، مانند $U(\theta)$ به صورت

$$E(U(\theta)|\mathbf{x}) = U(\theta) + \frac{1}{\nu} [U_{\nu} + \nu U_1 \rho_1] [\sigma(\theta)]^{\nu} + \frac{1}{\nu} \ell_{\nu} U_1 [\sigma(\theta)]^{\nu}, \quad (7)$$

بیان شده است، که در آن $U(\theta) = \theta$ در آن $U_j = \frac{\partial^j}{\partial \theta^j} U(\theta)$ ، برای $j = 1, 2$ و $\ell_{\nu} = \frac{\partial^{\nu} \ln L(\mathbf{x}, \theta)}{\partial \theta^{\nu}}$ و $[\sigma(\theta)]^{\nu}$ معکوس اطلاع فیشر هستند. همچنین $\pi(\theta)$ توزیع پیشین و $\rho_1 = \frac{\partial}{\partial \theta} \ln \pi(\theta)$ است. با توجه به رابطه (۷)، برآورد تقریبی بیز به روش لیندلی برای پارامتر θ به صورت

$$\hat{\theta}_{BLS} = \hat{\theta} + \left(\frac{\alpha - 1}{\hat{\theta}} - \beta \right) \sigma^{\nu}(\hat{\theta}) + \frac{1}{\nu} \ell_{\nu}(\hat{\theta}) \sigma^{\nu}(\hat{\theta}),$$

است، که در آن $\hat{\theta}$ برآورد ماکسیم درستنمایی θ ، $[\sigma(\hat{\theta})]^{\nu}$ معکوس اطلاع فیشر در نقطه برآورد ماکسیم درستنمایی، و $\rho_1 = \frac{\partial}{\partial \theta} \ln \pi(\theta) = \frac{\alpha - 1}{\theta} - \beta$

$$\begin{aligned} \ell_{\nu} &= \frac{\partial^{\nu} \ln L(\mathbf{x}, \theta)}{\partial \theta^{\nu}} \\ &= \frac{\nu m}{\theta^{\nu}} - \frac{\nu n}{(\nu + \theta)^{\nu}} + \sum_{i=1}^m \left(\frac{x_i^{\nu} e^{\theta x_i} [\nu + x_i(\nu + \theta)]}{(\nu + \theta) e^{\theta x_i} + \nu \theta x_i - \nu} \right) \\ &+ \nu \sum_{i=1}^m \left[\frac{e^{\theta x_i} [\nu + x_i(\nu + \theta)] + \nu x_i}{(\nu + \theta) e^{\theta x_i} + \nu \theta x_i - \nu} \right]^{\nu} + \sum_{i=1}^m R_i \left(\frac{x_i^{\nu} e^{-\theta x_i} (\nu - x_i \theta)}{\nu + \theta + \theta x_i e^{-\theta x_i}} \right) \\ &- \nu \sum_{i=1}^m \frac{(x_i e^{\theta x_i} [\nu + x_i(\nu + \theta)]) (e^{\theta x_i} [\nu + x_i(\nu + \theta)] + \nu x_i)}{[(\nu + \theta) e^{\theta x_i} + \nu \theta x_i - \nu]^{\nu}} \\ &- \nu \sum_{i=1}^m R_i \left(\frac{(x_i^{\nu} e^{-\theta x_i} [-\nu + x_i \theta]) (\nu + x_i e^{-\theta x_i} [\nu - x_i \theta])}{(\nu + \theta + \theta x_i e^{-\theta x_i})^{\nu}} \right) \\ &+ \nu \sum_{i=1}^m R_i \left[\frac{\nu + x_i e^{-\theta x_i} [\nu - x_i \theta]}{\nu + \theta + \theta x_i e^{-\theta x_i}} \right]^{\nu}. \end{aligned}$$

۳ فواصل اطمینان مختلف

۳.۱ فاصله اطمینان بر اساس توزیع مجانبی MLE

برآوردگر ماکسیم درستنمایی پارامتر θ تحت شرایط مطلوب تیکو و آکایا (۲۰۰۴)، به طور مجانبی دارای توزیع نرمال با میانگین θ و واریانس $\widehat{Var}(\hat{\theta}) = \left[-\frac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial \theta^2} \Big|_{\theta=\hat{\theta}} \right]^{-1}$ است. که در آن

$$\begin{aligned}
 -\frac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial \theta^2} &= \frac{m}{\theta^2} - \frac{n}{(1+\theta)^2} - \sum_{i=1}^m \left(\frac{x_i e^{\theta x_i} [2 + x_i(1+\theta)]}{(1+\theta)e^{\theta x_i} + 2\theta x_i - 1} \right) \\
 &+ \sum_{i=1}^m \left[\frac{e^{\theta x_i} [1 + x_i(1+\theta)] + 2x_i}{(1+\theta)e^{\theta x_i} + 2\theta x_i - 1} \right]^2 - \sum_{i=1}^m R_i \left(\frac{x_i^2 e^{-\theta x_i} (-2 + x_i \theta)}{1 + \theta + \theta x_i e^{-\theta x_i}} \right) \\
 &+ \sum_{i=1}^m R_i \left[\frac{1 + x_i e^{-\theta x_i} (1 - x_i \theta)}{1 + \theta + \theta x_i e^{-\theta x_i}} \right]^2. \tag{۸}
 \end{aligned}$$

بنابراین کمیت محوری $(\hat{\theta} - \theta) / \sqrt{\widehat{Var}(\hat{\theta})}$ به طور مجانبی دارای توزیع نرمال استاندارد است، که با استفاده از آن فاصله اطمینان مجانبی $100(1 - \gamma)\%$ برای θ به صورت $\hat{\theta} \pm z_{1-\frac{\gamma}{2}} \sqrt{\widehat{Var}(\hat{\theta})}$ به دست آورده می‌شوند، که در آن z_q ، چندک q -ام توزیع نرمال استاندارد است. ممکن است که فاصله اطمینان به دست آمده برای θ در فضای پارامتر قرار نگیرد. بنابراین یک فاصله اطمینان تقریبی بر اساس تبدیل لگاریتمی برآورد ماکسیم درستنمایی، $\hat{\theta}$ در نظر گرفته شده است. میکرو اسکوبار (۱۹۹۸) نشان دادند که $\frac{\ln(\hat{\theta}) - \ln(\theta)}{\sqrt{\widehat{Var}(\ln(\hat{\theta}))}}$ به طور مجانبی دارای توزیع نرمال استاندارد است. واریانس $\ln(\hat{\theta})$ به طور تقریبی از رابطه $\widehat{Var}(\ln(\hat{\theta})) = \frac{\widehat{Var}(\hat{\theta})}{\hat{\theta}^2}$ محاسبه می‌شود. بنابراین، فاصله اطمینان تقریبی $100(1 - \gamma)\%$ برای θ عبارتست از

$$\left[\hat{\theta} \exp \left(-\frac{z_{1-\frac{\gamma}{2}} \sqrt{\widehat{Var}(\hat{\theta})}}{\hat{\theta}} \right), \hat{\theta} \exp \left(\frac{z_{1-\frac{\gamma}{2}} \sqrt{\widehat{Var}(\hat{\theta})}}{\hat{\theta}} \right) \right].$$

۳.۲ فاصله اطمینان محوری

کمیت محوری $Q(\theta) = -2 \sum_{i=1}^m (1 + R_i) \ln \left[\left(1 + \frac{\theta X_i}{1+\theta} e^{-\theta X_i} \right) e^{-\theta X_i} \right]$ دارای توزیع خی دو با $2m$ درجه آزادی است. بنابراین، یک فاصله اطمینان $100(1 - \gamma)\%$ برای θ به صورت

$$\Pr \left(\chi_{\gamma/2, 2m}^2 < Q(\theta) < \chi_{1-\gamma/2, 2m}^2 \right) = 1 - \gamma,$$

به دست آورده می‌شود، که در آن $\chi_{\gamma/2, 2m}^2$ و $\chi_{1-\gamma/2, 2m}^2$ به ترتیب چندک‌های بالا و پایین $\gamma/2$ دزدی از توزیع خی دو با $2m$ درجه آزادی هستند. با توجه به اینکه کمیت محوری $Q(\theta)$ تابعی صعودی از θ است. بنابراین، فاصله اطمینان $100(1 - \gamma)\%$ برای θ را می‌توان به صورت

$$\left[Q^{-1}(\chi_{\gamma/2}^2(2m)), Q^{-1}(\chi_{1-\gamma/2}^2(2m)) \right],$$

نوشت، به طوری که $Q^{-1}(t)$ جوابی از θ برای معادله $Q(\theta) = t$ است. در نتیجه، کران پایین و کران بالای فاصله اطمینان (θ_L, θ_U) ، به ترتیب از حل معادلات زیر به دست آورده می‌شوند.

$$-2 \sum_{i=1}^m (1 + R_i) \ln \left[\left(\frac{1 + \theta_L + \theta_L X_i e^{-\theta_L X_i}}{1 + \theta_L} \right) e^{-\theta_L X_i} \right] = \chi_{\gamma/2}^2(2m),$$

$$-2 \sum_{i=1}^m (1 + R_i) \ln \left[\left(\frac{1 + \theta_U + \theta_U X_i e^{-\theta_U X_i}}{1 + \theta_U} \right) e^{-\theta_U X_i} \right] = \chi_{1-\gamma/2}^2(2m).$$

۳.۳ فاصله اطمینان بر اساس نسبت درستنمایی

فاصله اطمینان بر اساس آزمون نسبت درستنمایی، اولین بار توسط لاولس (۲۰۰۳) برای به دست آوردن فاصله اطمینان پارامترهای توزیع گاما به کار گرفته شده است. آزمون فرضیه $H_0: \theta = \theta_0$ را در مقابل $H_a: \theta \neq \theta_0$ در نظر بگیرید. آماره آزمون نسبت درستنمایی برای آزمون فرضیه فوق به صورت

$$\lambda(\mathbf{x}) = \frac{\sup_{\theta \in \Theta} L(\theta|\mathbf{x})}{\sup_{\theta \in \Theta} L(\theta|\mathbf{x})} = \frac{L(\theta_0|\mathbf{x})}{L(\hat{\theta}|\mathbf{x})},$$

است، که در آن Θ فضای پارامتر، $\hat{\theta}$ برآورد ماکسیمم درستنمایی θ ، Θ فضای پارامتر تحت فرض H_0 هستند. بنابراین براساس رابطه (۴) آماره آزمون نسبت درستنمایی به صورت

$$\lambda(\mathbf{x}) = \left(\frac{\theta_0(1 + \hat{\theta})}{\hat{\theta}(1 + \theta_0)} \right)^m e^{(\hat{\theta} - \theta_0) \sum_{i=1}^m x_i (2 + R_i)} \prod_{i=1}^m \frac{(1 + \theta_0) e^{\theta_0 x_i} + 2\theta_0 x_i - 1}{(1 + \hat{\theta}) e^{\hat{\theta} x_i} + 2\hat{\theta} x_i - 1}$$

$$\times \prod_{i=1}^m \left(\frac{1 + \hat{\theta}}{1 + \theta_0} \right)^{R_i} \prod_{i=1}^m \left(\frac{1 + \theta_0 + \theta_0 x_i e^{-\theta_0 x_i}}{1 + \hat{\theta} + \hat{\theta} x_i e^{-\hat{\theta} x_i}} \right)^{R_i}.$$

به دست می‌آید، که در آن x_1, \dots, x_m نمونه‌های سانسور شده فزاینده نوع دو مشاهده شده با طرح سانسور R_1, \dots, R_m هستند. بنابر خاصیت مجانبی آماره آزمون نسبت درستنمایی برای نمونه‌های بزرگ، تابع $-2 \ln \lambda(\mathbf{x})$ در توزیع، همگرا به توزیع خی دو با یک درجه آزادی است (کسلا و برگر، ۲۰۰۲). در آزمون نسبت درستنمایی فرض

H_0 در سطح معنی داری γ رد می‌شود هرگاه $\chi^2_{1-\gamma}(1) > -2 \ln \lambda(\mathbf{x})$. بنابراین، بر اساس متمم ناحیه رد فرض H_0 فاصله اطمینان $(1 - \gamma)\%$ به صورت

$$\begin{aligned} K(\theta) &= \{\theta : -2 \ln \lambda(\mathbf{x}) \leq \chi^2_{1-\gamma}(1)\} \\ &= \{\theta : L(\theta_0 | \mathbf{x}) \geq L(\hat{\theta} | \mathbf{x}) - \frac{1}{\gamma} \chi^2_{1-\gamma}(1)\} \end{aligned}$$

حاصل می‌شود. از آنجایی که $L(\theta | \mathbf{x})$ تابعی تک مدی است، در نتیجه به ازای هر γ مشخص، $K(\hat{\theta})$ یک فاصله اطمینان یکتا خواهد بود.

۳.۴ فاصله اطمینان بوت استرپ

فاصله اطمینان به دست آمده از خواص محاسبی برآوردگر ماکسیمم درستنمایی، برای نمونه‌های با حجم کوچک چندان خوب عمل نخواهد کرد و نسبتاً دارای احتمال پوشش پایین هستند. برای این منظور، هنگامی که توزیع آماره‌ای نامشخص یا پیچیده و یا حجم نمونه کوچک هستند، روش بوت استرپ روشی ساده برای به دست آوردن فاصله اطمینان است. این روش نخستین بار توسط **افرون (۱۹۷۹)** پیشنهاد شده است. در این بخش دو روش بوت استرپ مورد استفاده قرار گرفته است.

۳.۴.۱ بوت استرپ درصدی

- الگوریتم ۲. الگوریتم فاصله اطمینان بوت استرپ درصدی^۱:
- گام ۱- برآورد ماکسیمم درستنمایی پارامتر θ یعنی $\hat{\theta}$ ، محاسبه می‌شود.
 - گام ۲- با استفاده از $\hat{\theta}$ و R_1, \dots, R_m نمونه‌های بوت استرپ X_1^*, \dots, X_m^* را تولید نموده و با استفاده از نمونه‌های تولید شده، برآورد بوت استرپ θ یعنی، $\hat{\theta}^*$ به دست آورده می‌شود.
 - گام ۳- گام دوم را B مرتبه تکرار می‌کنیم تا $\hat{\theta}_1^*, \dots, \hat{\theta}_B^*$ به دست آید.
 - گام ۴- $\hat{\theta}_1^*, \dots, \hat{\theta}_B^*$ به صورت $(\hat{\theta}_{(1)}^*, \dots, \hat{\theta}_{(B)}^*)$ مرتب می‌شود. بنابراین، فاصله اطمینان $(1 - \gamma)\%$ برای θ به صورت $(\hat{\theta}_{Boot-p(1-\frac{\gamma}{2})}^*, \hat{\theta}_{Boot-p(\frac{\gamma}{2})}^*)$ به دست می‌آید، که در آن $\hat{\theta}_{Boot-p(\frac{\gamma}{2})}^*$ صدک $\frac{\gamma}{2}$ ام در نمونه بوت استرپ درصدی است.

¹Boot-p

۳.۴.۲ بوت استرپ روش تی

- الگوریتم ۳. الگوریتم فاصله اطمینان بوت استرپ روش تی^۱ :
- گام ۱- برآورد ماکسیمم درستنمایی پارامتر θ یعنی $\hat{\theta}$ ، محاسبه می‌شود.
 - گام ۲- با استفاده از $\hat{\theta}$ و R_1, \dots, R_m نمونه‌های بوت استرپ X_1^*, \dots, X_m^* را تولید نموده و با استفاده از نمونه‌های تولید شده، برآورد بوت استرپ θ یعنی $\hat{\theta}^*$ به دست آورده می‌شود.
 - گام ۳- واریانس $\hat{V}(\hat{\theta}^*) = \frac{\hat{\theta}^{*2}}{V}$ محاسبه می‌شود، که در آن V از رابطه (۸) به دست می‌آید.
 - گام ۴- آماره $T^* = \frac{(\hat{\theta}^* - \hat{\theta})}{\sqrt{\hat{V}(\hat{\theta}^*)}}$ تعریف می‌شود.
 - گام ۵- گام‌های ۲ و ۳ را B مرتبه تکرار می‌کنیم تا T_1^*, \dots, T_B^* بدست آید.
 - گام ۶- T_1^*, \dots, T_B^* به صورت صعودی $T_{(1)}^*, \dots, T_{(B)}^*$ مرتب می‌شود. فاصله اطمینان دو طرفه برای θ به صورت $(\hat{\theta} + T_{[Boot-t(\frac{\gamma}{2})]}^* \sqrt{\frac{\hat{\theta}^2}{V}}, \hat{\theta} + T_{[Boot-t(\frac{1-\gamma}{2})]}^* \sqrt{\frac{\hat{\theta}^2}{V}})$ است.

۳.۵ فاصله اطمینان بیزی

به کمک نمونه‌های تولید شده از الگوریتم متروپلیس-هستینگز $\theta_1, \dots, \theta_N$ ، می‌توان کوتاه‌ترین بازه‌های اطمینان را به روش چن وشائو^۲ (CSS CrI) به دست آورد. فرض کنید $\theta_{(1)} < \dots < \theta_{(N-M)}$ نمونه مرتب شده از $\{\theta^{(j)}; j = M+1, \dots, N\}$ است که بعد از حذف M مشاهده سوخته حاصل شده است. آنگاه یک CSS CrI $100(1-\gamma)\%$ برای θ به صورت $(\theta_{(j)}, \theta_{(j+[(N-M)(1-\gamma)])})$ است. که در آن پهنای فاصله j ام به صورت $\theta_{(j+[(N-M)(1-\gamma)])} - \theta_{(j)} = \min_{1 \leq s \leq k} \theta_{(s+[(N-M)(1-\gamma)])} - \theta_{(s)}$ آن $k = N - M - [(N - M)(1 - \gamma)]$ است.

۴ مطالعه شبیه‌سازی

در این بخش، یک مطالعه شبیه‌سازی به منظور مقایسه و بررسی عملکرد برآوردهای مختلف پیشنهاد شده در این مقاله ارائه شده است. با استفاده از الگوریتم معرفی شده در **بالاکریشنان و آگاروالا (۲۰۰۰)** و با استفاده از مقادیر n, m, R_1, \dots, R_m نمونه‌های سانسور فزاینده نوع دو از توزیع لیندلی اصلاح شده $\theta = 0.5$ تولید می‌شود. در این مطالعه شبیه‌سازی، برای مقادیر مختلف n و m ، چهار طرح سانسور فزاینده به صورت زیر در نظر گرفته شده است.

- طرح ۱: $R_m = n - m$ و $R_i = 0$ برای $i \neq m$
- طرح ۲: $R_1 = n - m$ و $R_i = 0$ برای $i \neq 1$

¹Boot-t

²Chen and Shao shortest credible interval

طرح ۳: $R_1 = R_m = \frac{n-m}{2}$ و $R_i = 0$ برای $i \neq 1, m$

طرح ۴: $R_{m/2} = n - m$ و $R_i = 0$ برای $i \neq \frac{m}{2}$

برای محاسبه برآوردگرهای بیز دو توزیع پیشین، اولی به ازای $\alpha = \beta = 0.0001$ و دومی به ازای $\alpha = 2$ و $\beta = 4$ ، در نظر گرفته شده است. همانطور که ملاحظه می‌شود اولین توزیع پیشین ناآگاهی بخش و دومین توزیع پیشین ناآگاهی بخش است. در هر مورد شبیه‌سازی ۱۰۰۰ بار تکرار شده است و عملکرد برآوردگرها بر اساس میانگین اریبی و میانگین توان دوم خطا (MSE) مقایسه شده است. نتایج این شبیه‌سازی در جدول ۱ گزارش شده است. همچنین، فواصل اطمینان به دست آمده با استفاده از میانگین طول فواصل اطمینان (AW) و احتمال پوشش فاصله‌ها (CP) مورد مقایسه قرار گرفته است. نتایج این شبیه‌سازی در جدول ۲ گزارش شده است.

از جدول ۱ مشاهده شده است که با افزایش n و m مقادیر MSE و اریبی کاهش می‌یابند. در مقایسه برآوردگرهای بیزی بر اساس توزیع پیشین‌های مختلف، همانطور که انتظار می‌رود برآوردگر بیز بر اساس توزیع پیشین ناآگاهی بخش از نظر نااریبی و هم از نظر MSE نسبت به برآوردگر بیز با توزیع پیشین ناآگاهی بخش عملکرد بهتری دارد. همچنین، با مقایسه برآوردگرهای بیز به دست آمده از روش‌های تقریب لیندلی و MCMC مشاهده شده است که برای توزیع پیشین ناآگاهی بخش، برآوردگر بیز به روش لیندلی بهتر از روش MCMC است. همچنین، زمانی که توزیع پیشین ناآگاهی بخش است برآوردگر بیز به روش MCMC بهتر از روش لیندلی عمل می‌کند. برآوردگرهای بیزی بر اساس توزیع پیشین ناآگاهی بخش در هر دو روش نسبت به برآوردگرهای MLE و محوری از نظر MSE، عملکرد بهتری دارند.

از جدول ۲ مشاهده شده است که با افزایش n و m میانگین طول فواصل اطمینان کاهش می‌یابد. با مقایسه میانگین طول فواصل اطمینان مشاهده شده است که فواصل اطمینان بیزی بر اساس پیشین‌های مختلف نسبت به فواصل اطمینان مجانبی و بوت استرپ برتری دارند. میانگین طول فواصل اطمینان بیزی بر اساس توزیع پیشین ناآگاهی بخش نسبت به فواصل اطمینان مجانبی و بوت استرپ، برتری دارند. همچنین، میانگین طول فواصل اطمینان بیزی بر اساس توزیع پیشین ناآگاهی بخش کمتر است. میانگین طول فواصل اطمینان بر اساس کمیت محوری کوچکتر از میانگین طول فواصل اطمینان مربوط به فواصل اطمینان بوت استرپ، فواصل اطمینان بر اساس آزمون نسبت درست‌نمایی، فواصل اطمینان بر اساس توزیع مجانبی MLE و فواصل بر اساس توزیع مجانبی لگاریتم MLE است.

۵ مثال کاربردی

مثال ۱. مجموعه داده مربوط به طول عمر شکستگی ناشی از کولار ۳۷۳ اپوکسی خاص است که تا زمانی که همه از کار بیفتند تحت فشار ثابت قرار دارند. این مجموعه داده از اندروز و هرزیبرگ (۱۹۸۵) و بارلو و همکاران (۱۹۸۴) به دست آمده است.

جدول ۰۱. میانگین اریبی و میانگین توان دوم خطای برای برآوردهای مختلف.

تقریب لیندلی		MCMC		Pivotal	MLE	Bias	m	n
پیشین ۱	پیشین ۲	پیشین ۱	پیشین ۲					
۰/۱۷۲	۰/۲۶۵	۰/۱۹۴	۰/۲۳۲	۰/۲۳۳	۰/۲۰۰	Bias	۱۴	۲۰
۰/۰۷۷	۰/۱۳۶	۰/۱۰۳	۰/۱۲۸	۰/۱۲۸	۰/۱۲۴	MSE		
۰/۱۷۲	۰/۲۷۸	۰/۲۰۷	۰/۲۵۴	۰/۲۴۸	۰/۲۱۲	Bias		
۰/۰۹۰	۰/۱۶۱	۰/۱۲۰	۰/۱۵۲	۰/۱۵۳	۰/۱۴۸	MSE		
۰/۱۵۶	۰/۲۵۵	۰/۱۸۵	۰/۲۲۴	۰/۲۲۲	۰/۱۹۱	Bias		
۰/۰۸۰	۰/۱۵۱	۰/۱۱۲	۰/۱۴۱	۰/۱۴۴	۰/۱۳۸	MSE		
۰/۱۶۳	۰/۲۵۳	۰/۱۸۸	۰/۲۲۹	۰/۲۳۱	۰/۱۸۹	Bias		
۰/۰۸۱	۰/۱۳۷	۰/۱۰۵	۰/۱۳۰	۰/۱۳۲	۰/۱۲۶	MSE		
۰/۱۳۶	۰/۱۵۸	۰/۱۳۳	۰/۱۴۵	۰/۱۴۹	۰/۱۲۹	Bias	۲۸	۴۰
۰/۰۴۴	۰/۰۵۴	۰/۰۴۸	۰/۰۵۳	۰/۰۵۳	۰/۰۵۲	MSE		
۰/۱۲۱	۰/۱۴۵	۰/۱۲۵	۰/۱۳۵	۰/۱۳۰	۰/۱۱۵	Bias		
۰/۰۵۵	۰/۰۶۸	۰/۰۶۰	۰/۰۶۶	۰/۰۶۷	۰/۰۶۵	MSE		
۰/۱۱۱	۰/۱۳۳	۰/۱۰۹	۰/۱۲۰	۰/۱۱۷	۰/۱۰۴	Bias		
۰/۰۵۱	۰/۰۶۴	۰/۰۵۶	۰/۰۶۲	۰/۰۶۳	۰/۰۶۱	MSE		
۰/۱۰۱	۰/۱۲۰	۰/۱۰۳	۰/۱۱۱	۰/۱۱۲	۰/۰۹۱	Bias		
۰/۰۴۴	۰/۰۵۴	۰/۰۴۹	۰/۰۵۳	۰/۰۵۵	۰/۰۵۲	MSE		

۰/۵۶۵۰	۰/۴۷۶۳	۰/۳۵۴۱	۰/۳۱۱۳	۰/۲۵۰۱	۰/۰۸۹۱	۰/۰۸۸۶	۰/۰۲۵۱
۰/۸۳۹۱	۰/۸۳۷۵	۰/۷۶۹۶	۰/۶۷۵۳	۰/۶۷۵۱	۰/۶۷۴۸	۰/۶۵۶۶	۰/۵۷۶۱
۱/۰۵۹۶	۱/۰۴۸۳	۰/۹۸۳۶	۰/۹۱۲۰	۰/۹۱۱۳	۰/۸۸۵۱	۰/۸۶۴۵	۰/۸۴۲۵
۱/۳۵۵۱	۱/۳۵۰۳	۱/۳۲۱۱	۱/۲۹۸۵	۱/۲۷۶۶	۱/۲۵۷۰	۱/۱۷۳۳	۱/۰۷۷۳
۱/۷۶۳۰	۱/۷۴۶۰	۱/۷۲۶۳	۱/۷۰۸۳	۱/۵۷۳۳	۱/۵۷۲۸	۱/۴۸۸۰	۱/۴۵۹۵
۱/۹۳۱۶	۱/۸۸۸۱	۱/۸۸۷۸	۱/۸۸۰۸	۱/۸۵۰۳	۱/۸۳۷۵	۱/۸۲۷۵	۱/۷۷۴۶
۲/۲۴۶۰	۲/۲۱۰۰	۲/۱۳۳۰	۲/۱۰۹۳	۲/۰۹۰۳	۲/۰۴۰۸	۲/۰۰۴۸	۱/۹۵۵۸
۳/۰۲۵۶	۲/۹۹۱۱	۲/۵۲۶۰	۲/۴۹۵۱	۲/۳۵۱۳	۲/۳۴۷۰	۲/۳۲۰۳	۲/۲۸۷۸
۵/۴۰۰۵	۴/۸۰۷۳	۳/۹۱۴۳	۳/۷۴۵۵	۳/۷۴۳۳	۳/۴۸۴۶	۳/۴۰۴۵	۳/۲۶۷۸
				۹/۰۹۶۰	۶/۵۵۴۱	۵/۵۲۹۵	۵/۴۴۳۵

برای داده‌های فوق، مقادیر معیار اطلاعات آکایک^۱ (AIC)، معیار اطلاعات بیزی^۲ (BIC)، مقادیر آماره کلموگروف-اسمیرنوف^۳ (K-S) و مقادیر p مربوطه به آن برای توزیع‌های لیندلی اصلاح شده، لیندلی، نمایی محاسبه شده است. همچنین، پارامترهای مجهول مدل‌های مربوطه را با روش حداکثر درست‌نمایی تخمین زده و خطای استاندارد آنها نیز به دست آمده است. نتایج در جدول ۳ نشان داده شده است. جدول ۳ نشان می‌دهد که مقادیر AIC ، $-\log L$ ،

¹Akaike information criterion

²Bayesian Information Criterion

³Kolmogrov-Smirnov

جدول ۲. میانگین طول (AW) و درصد پوشش (CP) فواصل پیش‌بینی ۹۵٪ برای θ .

رهیافت بیزی		Boot-t	Boot-p	Pivot	LRT	Log MLE	MLE	m	n
پیشین ۱	پیشین ۲								
۰٫۳۸۴	۰٫۴۰۰	۰٫۴۳۵	۰٫۴۳۶	۰٫۴۰۷	۰٫۴۰۹	۰٫۶۳۰	۰٫۵۹۶	۱۴	۲۰
۰٫۹۷۰	۰٫۹۶۰	۰٫۹۷۰	۰٫۹۵۰	۰٫۹۸۰	۰٫۹۷۰	۰٫۹۸۹	۰٫۹۸۹		CP
۰٫۴۱۳	۰٫۴۳۷	۰٫۴۷۵	۰٫۴۷۸	۰٫۴۴۶	۰٫۴۴۵	۰٫۶۴۵	۰٫۶۱۰		AW
۰٫۹۴۰	۰٫۹۳۰	۰٫۹۳۰	۰٫۹۲۰	۰٫۹۴۰	۰٫۹۴۰	۰٫۹۹۰	۰٫۹۸۰		CP
۰٫۴۱۰	۰٫۴۲۲	۰٫۴۵۷	۰٫۴۵۶	۰٫۴۲۹	۰٫۴۲۹	۰٫۶۴۶	۰٫۶۱۱		AW
۰٫۹۴۰	۰٫۹۶۰	۰٫۹۴۰	۰٫۹۴۰	۰٫۹۴۰	۰٫۹۷۰	۰٫۹۹۸	۰٫۹۹۵		CP
۰٫۳۹۷	۰٫۴۱۹	۰٫۴۶۵	۰٫۴۶۴	۰٫۴۳۱	۰٫۴۳۰	۰٫۶۴۶	۰٫۶۱۱		AW
۰٫۹۰۰	۰٫۹۲۰	۰٫۹۲۰	۰٫۹۲۰	۰٫۹۰۰	۰٫۹۱۰	۰٫۹۹۰	۰٫۹۷۰		CP
۰٫۲۷۳	۰٫۲۸۰	۰٫۲۹۱	۰٫۲۹۱	۰٫۲۸۴	۰٫۲۸۳	۰٫۴۲۶	۰٫۴۱۴	۲۸	۴۰
۰٫۹۶۰	۰٫۹۵۰	۰٫۹۵۰	۰٫۹۵۰	۰٫۹۶۰	۰٫۹۷۰	۰٫۹۵۵	۰٫۹۹۵		CP
۰٫۲۸۷	۰٫۳۰۲	۰٫۳۱۲	۰٫۳۱۳	۰٫۳۰۶	۰٫۳۰۴	۰٫۴۲۷	۰٫۴۱۵		AW
۰٫۹۷۰	۰٫۹۴۰	۰٫۹۷۰	۰٫۹۶۰	۰٫۹۶۰	۰٫۹۷۰	۰٫۹۷۵	۰٫۹۷۵		CP
۰٫۲۸۲	۰٫۲۹۰	۰٫۳۰۲	۰٫۳۰۴	۰٫۲۹۵	۰٫۲۹۴	۰٫۴۳۰	۰٫۴۱۹		AW
۰٫۹۵۰	۰٫۹۳۰	۰٫۹۱۰	۰٫۹۴۰	۰٫۹۷۰	۰٫۹۴۰	۰٫۹۹۰	۰٫۹۹۰		CP
۰٫۲۸۵	۰٫۲۸۸	۰٫۳۰۴	۰٫۳۰۴	۰٫۲۹۸	۰٫۲۹۵	۰٫۴۳۰	۰٫۴۱۹		AW
۰٫۹۶۰	۰٫۹۴۰	۰٫۹۵۰	۰٫۹۵۰	۰٫۹۶۰	۰٫۹۶۰	۰٫۹۹۰	۰٫۹۹۰		CP

جدول ۳. مقادیر برآورد شده $-\log L$ ، AIC، BIC، آماره K-S و p -مقدار برای داده‌های مثال ۱

توزیع‌ها	$\hat{\theta}$ و (SE) برآوردها	$-\log L$	AIC	BIC	K-S	p -مقدار
لیندلی اصلاح شده	۰٫۵۸۵۸ (۰٫۰۵۳۹)	۱۲۲۰۳۹۱	۲۴۶۰۷۸۲	۲۴۸۴۰۸	۰٫۰۹۷۰	۰٫۴۴۴۶
لیندلی	۰٫۷۹۸۴ (۰٫۰۶۷۸)	۱۲۳۶۷۵۱	۲۴۹۳۵۳۰	۲۵۱۶۸۱	۰٫۱۱۵۶	۰٫۲۴۲۳
نمایی	۰٫۵۱۰۴ (۰٫۰۵۸۵)	۱۲۷۱۱۴۳	۲۵۶۲۲۸	۲۵۸۵۵۹۴	۰٫۱۶۶۳	۰٫۰۲۶۳

BIC و آماره K-S برای توزیع لیندلی اصلاح شده نسبت به توزیع‌های لیندلی و نمایی کمترین مقدار به دست آمده است. همچنین، p -مقدار برای توزیع لیندلی اصلاح شده نسبت به توزیع‌های لیندلی و نمایی بیشترین مقدار محاسبه شده است. بنابراین، توزیع لیندلی اصلاح شده نسبت به توزیع‌های لیندلی و نمایی بهتر می‌کند. با توجه به جدول ۳، مقدار برآورد ماکسیمم درست‌نمایی برای پارامتر توزیع لیندلی اصلاح شده $\hat{\theta} = ۰٫۰۵۳۹$ است. همچنین، مقدار آماره آزمون کلموگروف-اسمیرنوف و p -مقدار برای توزیع لیندلی اصلاح شده به ترتیب $۰٫۰۹۷۰$ و $۰٫۴۴۴۶$ هستند. از اینرو، توزیع لیندلی اصلاح شده برازش خوبی برای داده‌های فوق می‌دهد. برای مشاهدات فوق، با استفاده از طرح $(۰, \dots, ۰, ۱) = (R_1, \dots, R_m)$ اولین $m = ۶۶$ مشاهده اول را در نظر گرفته و بر اساس داده‌های سانسور شده، برآورد ماکسیمم درست‌نمایی $\hat{\theta}_{MLE} = ۰٫۵۹۰۴$ و برآورد براساس کمیت محوری $\hat{\theta}_{Pivot} = ۰٫۰۶۰۳۲$ محاسبه شده است. برای محاسبه برآورد بیز از توزیع پیشین ناآگاهی بخش، $\alpha = \beta = ۰$ استفاده شده است. در الگوریتم

متروپلیس-هستینگز مقدار اولیه $\theta^{(0)}$ برآورد ماکسیمم درستمایی و واریانس توزیع پیشنهادی $S_{\theta}^2 = 0.03$ معکوس اطلاع فیشر در نظر گرفته شده است. با استفاده الگوریتم فوق نمونه‌ای به حجم $N = 50000$ از θ ها با درصد پذیرش 71% تولید شده است. برای از بین بردن اثر نقاط آغازین، $M = 5000$ نمونه اولیه حذف شده و برآورد بیز بر اساس روش MCMC و تقریب لیندلی به ترتیب $\hat{\theta}_{BS} = 0.5907$ و $\hat{\theta}_{BLS} = 0.5916$ به دست می‌آیند. برآورد فاصله‌ای برای پارامتر θ بر اساس توزیع مجانبی MLE و لگاریتم MLE و براساس آزمون نسبت ماکسیمم درستمایی به ترتیب به صورت $(0.4351, 0.7457)$ ، $(0.4528, 0.7680)$ و $(0.4877, 3.5370)$ به دست می‌آیند. بازه های اطمینان به دست آمده به روش بوت استرپ درصدی و تی به ترتیب $(0.4970, 0.7204)$ و $(0.4917, 0.7186)$ هستند. همچنین، فاصله اطمینان محوری و فاصله اطمینان بیزی به ترتیب به صورت $(0.4958, 0.7227)$ و $(0.4879, 0.7031)$ به دست می‌آیند.

مثال ۲. داده‌های زیر زمان بقای 45 بیماری است که در یک سال تحت درمان، شیمی درمانی قرار گرفته‌اند. که توسط بکر و همکاران (2000) گزارش شده است. این داده‌ها عبارتند از:

0.260	0.203	0.197	0.164	0.132	0.121	0.115	0.047
0.507	0.501	0.466	0.458	0.395	0.334	0.296	0.282
0.863	0.841	0.696	0.644	0.641	0.540	0.534	0.529
1.581	1.553	1.485	1.447	1.326	1.271	1.219	1.099
3.578	2.830	2.825	2.444	2.416	2.343	2.178	1.589
			4.033	4.003	3.978	3.743	3.658

جدول ۴. مقادیر برآورد شده $-\log L$ ، AIC، BIC، آماره K-S و p-مقدار برای داده‌های مثال ۲

توزیع‌ها	$\hat{\theta}$ و (SE) برآوردها	$-\log L$	AIC	BIC	K-S	p-مقدار
لیندلی اصلاح شده	0.8589 (0.1039)	55.8323	117.6647	118.250	0.0661	0.9819
لیندلی	1.1004 (0.1249)	58.5231	119.0461	119.1391	0.1304	0.3964
نمایی	0.9412 (0.1919)	58.5784	120.9568	121.2425	0.1196	0.2026

با توجه به جدول ۴، مقدار برآورد ماکسیمم درستمایی برای پارامتر توزیع لیندلی اصلاح شده $\hat{\theta} = 0.8589$ است. همچنین، مقدار آماره آزمون کلموگروف-اسمیرنف و p - مقدار برای توزیع لیندلی اصلاح شده به ترتیب 0.0661 و 0.9819 هستند. از اینرو، توزیع لیندلی اصلاح شده برازش خوبی برای داده‌های فوق می‌دهد و نسبت به توزیع‌های لیندلی و نمایی بهتر عمل می‌کند. برای طرح سانسور فزاینده

$$R = (0, 0, 2, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 3, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 3, 0, 0, 0, 5)$$

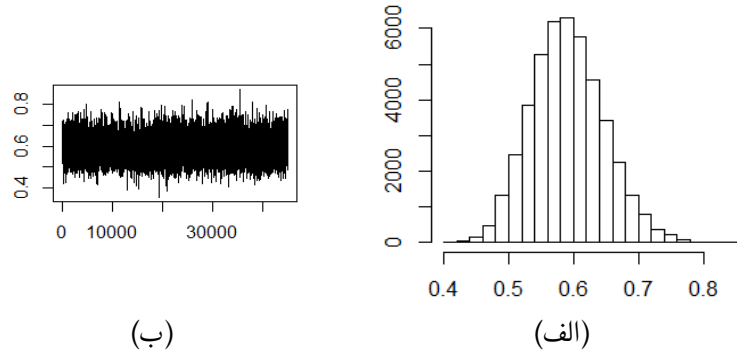
مشاهدات به صورت

۰٫۲۶۰	۰٫۲۰۳	۰٫۱۹۷	۰٫۱۶۴	۰٫۱۳۲	۰٫۱۲۱	۰٫۱۱۵	۰٫۰۴۷
۰٫۵۲۹	۰٫۵۰۷	۰٫۴۶۶	۰٫۴۵۸	۰٫۳۹۵	۰٫۳۳۴	۰٫۲۹۶	۰٫۲۸۲
۱٫۴۸۵	۱٫۴۴۷	۱٫۲۱۹	۰٫۸۶۳	۰٫۸۴۱	۰٫۶۴۱	۰٫۵۴۰	۰٫۵۳۴
				۲٫۴۴۴	۲٫۳۴۳	۱٫۵۸۹	۱٫۵۵۳

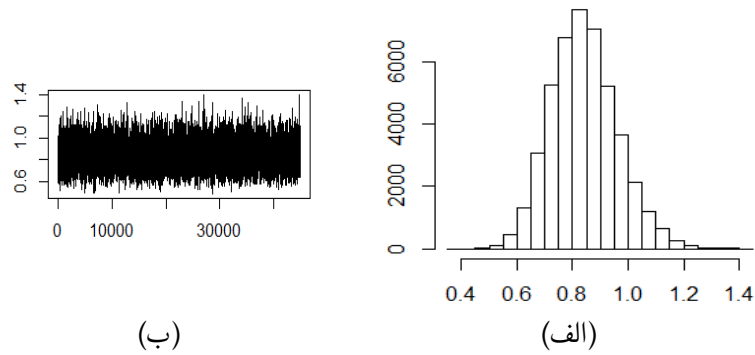
هستند. با استفاده از داده‌های فوق، برآورد ماکسیمم درست‌نمایی برای پارامتر θ ، $\hat{\theta}_{MLE} = ۰٫۸۶۳۹$ و براساس کمیت محوری $\hat{\theta}_{Pivot} = ۰٫۸۳۱۴$ هستند. برای محاسبه برآورد بیز از توزیع پیشین آگاهی بخش، $\alpha = ۲$ و $\beta = ۴$ استفاده شده است. با استفاده الگوریتم فوق نمونه‌ای به حجم $N = ۵۰۰۰۰$ از θ با $S'_\theta = ۰٫۰۱۴۸$ و درصد پذیرش ۷۰% تولید شده است. برآورد بیز بر اساس روش MCMC و تقریب لیندلی به ترتیب $\hat{\theta}_{BS} = ۰٫۸۳۷۵$ و $\hat{\theta}_{BLS} = ۰٫۸۰۸۶$ محاسبه شده است. برآورد فاصله‌ای برای پارامتر θ براساس توزیع مجانبی MLE و لگاریتم MLE و براساس آزمون نسبت ماکسیمم درست‌نمایی به ترتیب به صورت $(۰٫۴۶۸۴, ۱٫۲۵۹۳)$ ، $(۰٫۵۴۶۶, ۱٫۳۶۵۴)$ و $(۰٫۶۴۱۸, ۱٫۱۴۲۵)$ به دست می‌آیند. بازه های اطمینان به دست آمده به روش بوت استرپ درصدی و تی به ترتیب $(۰٫۶۶۹۸, ۱٫۱۸۹۳)$ و $(۰٫۶۵۹۰, ۱٫۱۶۹۷)$ هستند. همچنین فاصله اطمینان محوری و فاصله اطمینان بیزی به ترتیب به صورت $(۰٫۶۰۸۰, ۱٫۰۹۵۷)$ و $(۰٫۶۱۹۷, ۱٫۰۹۰۸)$ به دست می‌آیند. هیستوگرام‌های زنجیره دنباله θ های به دست آمده از الگوریتم متروپلیس-هستینگز از توزیع پیشین آگاهی بخش و توزیع پیشین ناآگاهی بخش در شکل‌های ۱ و ۲ ارائه شده‌اند. این نمودارها نشان می‌دهند که انتخاب توزیع نرمال به عنوان تقریبی از تابع چگالی پسین و توزیع پیشنهادی انتخابی کاملاً مناسب است. برای بررسی همگرایی زنجیره‌های تولید شده در الگوریتم از نمودارهای اثر استفاده شده است. این نمودارها نشان می‌دهند که مقادیر θ های تولید شده در الگوریتم متروپلیس-هستینگز به طور تصادفی در اطراف میانگین پراکنده شده‌اند. این نمودارها همگرایی در الگوریتم را نشان می‌دهند. همچنین، درصد پذیرش برای هر دو توزیع پیشین مشابه یکدیگر است. توجه شود در مثال‌های فوق، برای بررسی وجودیت و یکتایی برآورد ماکسیمم درست‌نمایی پارامتر θ ، نمودار تابع لگاریتم ماکسیمم درست‌نمایی $L(\theta)$ رسم شده است. شکل ۳ نشان می‌دهد که تابع لگاریتم ماکسیمم درست‌نمایی در بازه $(۰, \infty)$ یک تابع تک مدی است و لذا برآورد ماکسیمم درست‌نمایی وجود دارد و یکتاست.

۶ بحث و نتیجه‌گیری

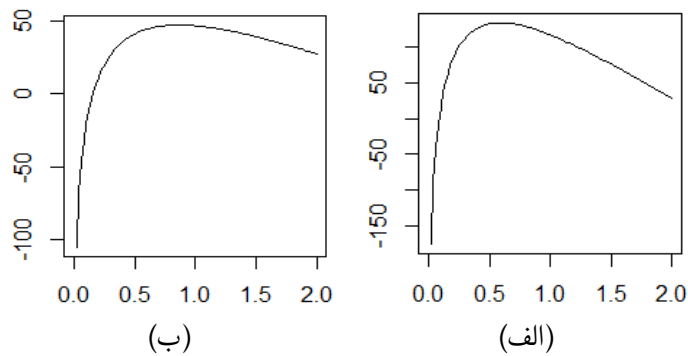
در این مقاله، یک توزیع یک پارامتری به عنوان توزیع لیندلی اصلاح شده، معرفی شده است که دیدگاه جدیدی از نظر مدل‌سازی طول عمر ارائه می‌دهد. توزیع لیندلی اصلاح شده در مدل‌سازی داده‌های طول عمر بهتر از توزیع‌های نمایی و لیندلی عمل می‌کند. تابع احتمال این توزیع ترکیبی از توزیع نمایی و توزیع گاما است. برآوردیابی برای پارامتر توزیع لیندلی اصلاح شده بر اساس داده‌های سانسور شده فزاینده نوع دو مورد مطالعه قرار گرفته است. برآوردگرهای نقطه‌ای مختلفی از جمله، برآورد درست‌نمایی ماکزیمم، برآورد به روش محوری، برآورد بیزی تحت تابع زیان مربع خطا محاسبه شده است. برای محاسبه برآورد بیز، روش زنجیر مارکوف مونت کارلو و روش تقریب لیندلی ارائه شده است. فواصل



شکل ۱. الف- هیستوگرام، ب- نمودار اثر الگوریتم متروپولیس با توزیع پیشین ناآگاهی بخش در مثال ۱



شکل ۲. الف- هیستوگرام، ب- نمودار اثر الگوریتم متروپولیس با توزیع پیشین ناآگاهی بخش در مثال ۲



شکل ۳. الف- نمودار تابع لگاریتم ماکسیمم درستنمایی $L(\theta)$ در مثال ۱، ب- نمودار نمودار تابع لگاریتم ماکسیمم درستنمایی $L(\theta)$ در مثال ۲

اطمینان مجانبی، فواصل اطمینان بر اساس آزمون نسبت درستنمایی ماکزیمم، فواصل اطمینان محوری، فواصل اطمینان بوت استرپ و فاصله اطمینان بیزی با استفاده از روش زنجیر مارکوف مونت کارلو محاسبه شده است. بر اساس نتایج شبیه‌سازی، زمانی که توزیع پیشین آگاهی بخش است و اطلاعات در مورد پارامتر θ در دسترس است توصیه می‌شود در میان برآوردهای مختلف نقطه‌ای از برآورد بیز استفاده شود. همچنین، زمانی که توزیع پیشین ناآگاهی بخش است و اطلاعات در مورد پارامتر θ در دسترس نیست توصیه می‌شود در میان برآوردهای مختلف نقطه‌ای از برآورد درستنمایی ماکزیمم استفاده شود. در بخش برآوردهای مختلف فاصله‌ای توصیه می‌شود که از فواصل اطمینان بیزی استفاده شود.

تقدیر و تشکر

نویسنده از نظرات و پیشنهادهای داوران، سردبیر، هیئت تحریریه و ویراستار محترم مجله در ارتقای علمی و ارائه بهتر مقاله قدردانی و تشکر می‌کند.

مراجع

قهرمانی، م.، شرفی، م. و هاشمی، ر. (۱۴۰۱)، استنباط آماری توزیع وایبل دو پارامتری تحت سانسور فزاینده نوع دو با برداشتهای تصادفی، مجله علوم آماری، ۱۶، ۲۰۹-۲۳۸.

محمودی، ع. و ابوالحسینی، س. (۱۳۹۵)، توزیع لیندلی- لگاریتمی: مدل و ویژگی‌ها، مجله علوم آماری، ۱۰، ۱۳۹-۱۵۸.

نابد، ح. و ترابی، ح. (۱۳۹۸)، آزمون نیکویی برازش برای خانواده توزیع‌های مکان-مقیاس تحت سانسور فزاینده نوع دو، مجله علوم آماری، ۱۳، ۱۹۷-۲۱۶.

Asgharzadeh, A. Fallah, A. Raqab, M. Z. and Valiollahi, R. (2018), Statistical Inference Based on Lindley Record Data, *Statistical Papers*, **59**, 759-779.

Andrews, D.F. and Herzberg, A.M. (1985), *Data: A Collection of Problems from Many Fields for the Student and Research Worker*, Springer Series in Statistics, New York.

Balakrishnan, N. and Aggarwala, R. (2000), *Progressive Censoring: Theory Methods and Applications*, Boston: Birkhäuser.

- Balakrishnan, N. and Cramer, E. (2014), *The Art of Progressive Censoring, Applications to Reliability and Quality*, New York: Birkhauser.
- Barlow, R.E Toland, R.H. and Freeman, T. (1984), A Bayesian Analysis of Stress-Rupture Life of 49/ Epoxy Spherical Pressure Vessels, In: Proceedings of Canadian Conference Applied Statistics, Marcel Dekker, New York.
- Bekker, A. Roux, J. and Mostert, P. (2000), A Generalization of the Compound Rayleigh Distribution: Using a Bayesian Methods on Cancer Survival Times, *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **29**, 1419-1433.
- Casella, G. and Berger, R. L. (2002), *Statistical Inference*, 2nd edition, Duxbury, California.
- Chesneau, C. Tomy, L. and Gillariose, J. (2021), A New Modified Lindely Distribution with Properties and Applications, *Journal of Statistics and Management Systems*, **24**, 1383-1403.
- Chesneau, C. Tomy, L. Gillariose, J. and Jamal, F. (2020), The Inverted Modified Lindely Distribution, *Journal of Statistics Theory and Practice*, **46**, 1-17.
- Chesneau, C. Tomy, L. and Jose, M. (2022), Power modified Lindley distribution: Theory and applications, *Journal of Mathematical Extension*, **16**, 1-32.
- Chivers, C. (2012), MHadaptive: General Markov Chain Monte Carlo for Bayesian Inference using adaptive Metropolis-Hastings sampling, R Package Version 1, 1-8. <http://CRAN.R-project.org/package=MHadaptive>.
- Efron, B. (1979), Bootstrap methods: Another Look at the Jackknife, *The Annals of Statistics*, **7**, 1-26.
- Ghitany, M.E. Atieh, B. and Nadarajah, S. (2008), Lindley Distribution and Its Applications, *Journal of Mathematical Computation and Simulation*, **78**, 493-506.

- Kharazmi, O. Kumar, D. and Dey, S. (2023), Power Modified Lindley Distribution: Properties, Classical and Bayesian Estimation and Regression Model with Applications, *Austrian Journal of Statistics*, **52**, 71-95.
- Krishna, H. and Kumar, K. (2011), Reliability Estimation in Lindely Distribution with Progressively Type II Right Censored Sample, *Journal of Mathematical Computation and Simulation*, **82**, 281-294.
- Lawless, J. L. (2003), *Statistical Models and Methods for Lifetime Data*, 2nd edition, John Wiley and Sons, New York.
- Lindley, D.V. (1958), Fiducial Distribution and Bayes Theorem, *Journal of the Royal Statistical Society*, **20**, 102-107.
- Lindley, D. V. (1980), Approximate Bayesian Methods, *Trabajos de Estadística Y de Investigación Operativa*, **31**, 223-237.
- Meeker, W. Q. and Escobar, L. A. (1998), *Statistical Methods for Reliability Data*, Wiley, New York.
- Robert, C. and Casella, G. (2004), *Monte Carlo Statistical Methods*, 2nd ed. New York: Springer.
- Tiku, M. L. Akkaya, A. D. (2004), *Robust Estimation and Hypothesis Testing*, New Age International, New Delhi.
- Zakerzadeh, H. and Dolati, A. (2009), Generalized Lindely Distribution, *Journal of Mathematical Extension*, **3**, 13-25.