



Estimation and Prediction for the Size-biased Exponential Distribution Based on Records

Received: 22/12/2025 Revised: 15/6/2026 Accepted and Published Online: 17/6/2026.

Fallah, A. 

Department of Statistics, University of Payame Noor, Tehran, Iran.

Corresponding author: A. Fallah, adelehfallah@pnu.ac.ir

Introduction

Weighted distributions arise when observations generated by a random process are not given equal chances of being recorded and are instead weighted by a weighting function. Suppose the random variable X has a probability density function $f(x; \theta)$. If the sampling mechanism is such that an observation x is recorded with probability proportional to a nonnegative function $w(x, \omega)$, then the recorded observation is a value of the weighted version of X , represented by X_ω . The probability density function X_ω is of the form $f_w(x; \theta, \omega) = \frac{w(x, \omega)f(x; \theta)}{E_\theta(w(X, \omega))}$ where $E_\theta(w(X, \omega))$ is the normalizing coefficient. The weighted distribution for $w(x, \omega) = x$ is called a size-biased distribution. If the weight function is constant, that is, $w(x, \omega) = k$, the original and weighted distributions are the same, and weighted sampling results in a random sample. The size-biased exponential distribution is a powerful tool for modeling and correcting for size-based sampling biases across a wide range of scientific disciplines. Its applications range from medicine, biostatistics, engineering, reliability engineering, economics, ecology, and epidemiology. In this paper, estimation and prediction for the size-biased exponential distribution are studied based on the upper records.

Material and Methods

Estimation and prediction for the size-biased exponential distribution are based on classical and Bayesian approaches. Bayesian estimation and prediction are based on the symmetric squared error loss function. Since the integrals required for Bayesian estimation do not have closed forms, the Metropolis-Hastings algorithm, Sampling of important points, and Lindley

approximation methods are applied to approximate these integrals. Asymptotic, pivotal, Maximum likelihood test, and Bayesian confidence intervals are presented. Also, prediction intervals of future records are investigated.

Results and Discussion

Comparing the Bayes estimators based on different prior distributions, as expected, the Bayes estimator based on the informative prior performs better than the Bayes estimator based on the non-informative prior. Approximate Bayes estimators obtained by the Lindley approximation method perform better than approximate Bayes estimators obtained by Metropolis-Hastings and sampling of important points methods. Comparing the average widths of the interval estimates, the Bayesian intervals with informative priors are superior to the asymptotic, pivotal, Maximum likelihood test confidence intervals. Among Bayesian and classical predictors, the Bayesian predictor with an informative prior distribution and the unbiased predictor, respectively, perform better than other predictors. Also, HCD prediction intervals and pivot prediction intervals have the lowest average prediction interval length compared to Bayesian prediction intervals, respectively.

Conclusion

Using Monte Carlo simulation, if accurate prior information about the parameter θ is available, the Bayes estimator and the Bayesian confidence recommended to use for point and interval estimation, respectively. When accurate prior information about θ is available, it is recommended to use the Bayesian predictor among different point predictors. Also, for interval prediction, we suggest using the HCD and pivot prediction intervals.

Keywords: Size-biased exponential distribution, Record upper statistics, Metropolis-Hastings algorithm.

Mathematics Subject Classification (2010): 62F10, 62F15.



©The Author(s). The Publisher is Iranian Statistical Society.

This is an open access article distributed under the terms and conditions of [CC BY-NC 4.0](https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/)

برآوردیابی و پیش‌بینی برای توزیع نمایی اندازه-اریب بر اساس رکوردها

عادله فلاح

گروه آمار، دانشگاه پیام نور، تهران

نویسنده مسئول: عادله فلاح، adelehfallah@pnu.ac.ir

تاریخ دریافت: ۱۴۰۴/۱۰/۱ تاریخ بازنگری: ۱۴۰۵/۳/۲۵ تاریخ پذیرش و انتشار: ۱۴۰۵/۳/۲۷

چکیده: در این مقاله، برآوردگری و پیش‌بینی برای توزیع نمایی اندازه-اریب بر اساس رکوردهای بالا مطالعه شده است. برآوردگری و پیش‌بینی برای رکوردهای آینده در چارچوب‌های کلاسیک و بیزی انجام گرفته است. برآوردهای ماکسیمم درست‌نمایی، گشتاوری و بیزی پارامتر توزیع، بر اساس تابع زیان متقارن مربع خطا محاسبه شده‌اند. از آنجا که انتگرال‌های مرتبط با برآوردها و پیش‌بینی‌کننده‌های بیزی دارای فرم بسته نیستند، از روش تقریب لیندلی، روش نمونه‌گیری نقاط مهم و روش مونت‌کارلو زنجیر مارکوف برای تقریب این انتگرال‌ها استفاده شده است. در ادامه، بازه‌های اطمینان مجانبی، محوری، آزمون نسبت ماکسیمم درست‌نمایی و بازه‌های پیش‌بینی بیزی ارائه شده‌اند. همچنین، یک مطالعه شبیه‌سازی مونت‌کارلو برای ارزیابی و مقایسه عملکرد روش‌های مختلف برآورد و پیش‌بینی انجام یافته و در پایان، برای تشریح بیشتر روش‌های معرفی‌شده، یک مثال واقعی ارائه شده است.

واژه‌های کلیدی: توزیع نمایی اندازه-اریب، آماره‌های رکوردی بالا، الگوریتم متروپلیس-هستینگز.
کد موضوع‌بندی ریاضی (۲۰۲۰): 62F10، 62F15.

۱ مقدمه

فرض کنید $\{X_m; m \geq 1\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع از جامعه‌ای با تابع توزیع $F(x; \theta)$ و تابع چگالی $f(x; \theta)$ هستند. مشاهده X_j را یک رکورد بالا گویند هرگاه از همه مشاهدات قبل خود بزرگتر باشد.

در این صورت، اگر دنباله زمان رکورد بالا به صورت $\{T_{U(m)}; m \geq 1\}$ نمایش داده شود، آن گاه

$$T_{U(1)} = 1, \quad T_{U(m)} = \min\{j : X_j > X_{T_{U(m-1)}}\},$$

و دنباله مقادیر رکورد بالا، $\{X_{U(m)}; m \geq 1\}$ به صورت $X_{U(m)} = X_{T_{U(m)}}$ تعریف می‌شود (آرنولد و همکاران، ۱۳۷۷). امروزه داده‌های رکوردی در اکثر شاخه‌های علمی نظیر اقتصاد، هواشناسی، زلزله‌نگاری، مهندسی، پزشکی، کنترل کیفیت، آب شناسی، قابلیت اطمینان، تحلیل داده‌های طول عمر، استخراج نفت و معادن، هوا و فضا و غیره کاربرد فراوانی دارند. اهمیت کاربردی رکوردها بیشتر به این خاطر است که با داشتن مقادیر رکوردی مشاهدات می‌توان به استنباط درباره پارامترهای توزیع مشاهدات و نیز پیش‌بینی زمان و مقدار رکورد بعدی اقدام نمود. محققان بسیاری به مسأله استنباط آماری و پیش‌بینی بر اساس رکوردها پرداخته‌اند (اصغرزاده و همکاران، ۱۳۹۷؛ سعادت و همکاران، ۱۴۰۲؛ فلاح، ۱۴۰۴؛ احسن‌الله، ۱۹۹۵).

در حالی که **نوروزی فیروز و همکاران (۱۴۰۵)** صرفاً به برآورد ماکسیمم درست‌نمایی، محاسبه گشتاورها، فواصل اطمینان مجانبی و پیش‌بینی ماکسیمم درست‌نمایی برای رکوردهای بالای توزیع لندلی-وایبول پرداخته‌اند، در این مقاله روش‌های برآوردیابی و پیش‌بینی بسیار جامع‌تری ارائه شده است. در بخش برآورد، روش‌های ماکسیمم درست‌نمایی، گشتاوری و بیزی (مبتنی بر MCMC نمونه‌گیری نقاط مهم و تقریب لندلی) به همراه انواع بازه‌های اطمینان مطرح و شبیه‌سازی شده‌اند. در بخش پیش‌بینی نیز، انواع پیش‌بینی‌کننده‌های نقطه‌ای و بازه‌ای کلاسیک و بیزی توسعه یافته و عملکرد آن‌ها ارزیابی شده است.

توزیع‌های وزنی زمانی ایجاد می‌شوند که به مشاهدات تولید شده از یک فرآیند تصادفی شانس برابری برای ثبت شدن داده نشود و آنها بر اساس یک تابع وزنی ثبت شوند. فرض کنید متغیر تصادفی X دارای تابع چگالی احتمال $f(x; \theta)$ است. اگر سازوکار نمونه‌گیری به‌گونه‌ای باشد که مشاهده x با احتمالی متناسب با یک تابع نامنفی $w(x, \omega)$ ثبت شود، در آن صورت مشاهده ثبت شده یک مقدار از نسخه موزون X است که با X_ω نمایش داده می‌شود. تابع چگالی احتمال X_ω به صورت $f_w(x; \theta, \omega) = \frac{w(x, \omega)f(x; \theta)}{E_\theta(w(X, \omega))}$ است که در آن $E_\theta(w(X, \omega)) = \int_{-\infty}^{\infty} w(x, \omega)f(x; \theta)dx$ ضریب نرمال ساز است. به توزیع X_ω توزیع موزون X تحت وزن $w(x, \omega)$ به سازوکار نمونه‌گیری، نمونه‌گیری موزون تحت وزن $w(x, \omega)$ گفته می‌شود (رائو، ۱۳۴۴). پارامتر w ، پارامتر وزن نام دارد. برای حالتی که تابع وزن ثابت است $w(x, \omega) = k$ ، توزیع‌های اصلی و موزون یکسان هستند و نمونه‌گیری موزون منجر به نمونه تصادفی می‌شود. برای حالتی که تابع وزن به صورت $w(x, \omega) = x^w$ است، توزیع موزون را توزیع اریب اندازه و نمونه‌گیری را اریب اندازه مرتبه w گویند. توزیع وزنی برای حالت $w(x, \omega) = x$ ، توزیع اندازه-اریب نامیده می‌شود.

متغیر تصادفی X دارای توزیع نمایی با پارامتر θ و تابع چگالی احتمال $f(x; \theta) = \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta}$ است. در آن صورت به ازای تابع وزن $w(x, \omega) = x$ ، تابع چگالی احتمال و تابع توزیع تجمعی توزیع نمایی اندازه-اریب

^۱(SBE) به ترتیب به صورت

$$f_X(x; \theta) = \frac{x}{\theta^\gamma} e^{-x/\theta} \quad x > 0, \quad \theta > 0, \quad (۱)$$

$$F_X(x; \theta) = 1 - e^{-x/\theta} - \frac{x}{\theta} e^{-x/\theta} \quad x > 0, \quad \theta > 0. \quad (۲)$$

به دست می‌آیند. توزیع نمایی اندازه-اریب ابزار قدرتمندی برای مدل‌سازی و تصحیح سوگیری‌های نمونه‌گیری مبتنی بر اندازه در طیف وسیعی از علوم است. کاربردهای آن از پزشکی، آمار زیستی (در مطالعاتی بیماری‌هایی که دوره نهفتگی دارند)، مهندسی، مهندسی قابلیت اطمینان (وقتی احتمال مشاهده یک جزء معیوب متناسب با طول عمر آن باشد)، اقتصاد (در نمونه‌گیری از مشاغل با مدت زمان متفاوت)، اکولوژی و اپیدمیولوژی (در بررسی طول دوره بیماری در موارد تشخیص داده شده) گسترده است. برای اطلاع بیشتر از تحقیقات انجام شده در زمینه توزیع‌هایی با اندازه-اریب می‌توان به **علوی و همکاران (۱۳۹۶)**، **کیاپور و نقی‌زاده قمی (۱۳۹۵)** و **لی (۱۴۰۳)** مراجعه کرد.

ساختار این مقاله به صورت زیر است. در بخش ۲، برآوردیابی با روش‌های ماکسیمم درستنمایی، گشتاوری و روش‌های بیزی بر اساس تابع زیان مربع خطا صورت می‌پذیرد. برای محاسبه برآوردهای بیزی از روش زنجیر مارکوف مونت کارلو ^۲ MCMC، روش نمونه‌گیری نقاط مهم و روش تقریب لیندلی استفاده شده است. در بخش ۳، بازه‌های اطمینان مختلفی برای پارامتر توزیع نمایی اندازه-اریب به دست آمده است. در بخش‌های ۴ و ۵ پیش‌بینی‌کننده‌های نقطه‌ای و بازه‌ای مختلفی برای رکورد بالای مشاهده نشده $Z = Y_n, n > m$ بر اساس مشاهدات رکوردی محاسبه شده است. در بخش ۶، یک شبیه‌سازی مونت کارلو برای مقایسه و بررسی رفتار برآوردها و پیش‌بینی‌کننده‌های نقطه‌ای و بازه‌ای ارائه شده است. در بخش ۷، یک مثال کاربردی برای تشریح روش‌های برآورد و پیش‌بینی استفاده شده ارائه شده است. در نهایت، بحث و نتیجه‌گیری به ترتیب در بخش ۸ آمده است.

۲ برآوردهای نقطه‌ای

۲.۱ برآورد ماکسیمم درستنمایی

فرض کنید $Y_1 = X_{U(1)} = y_1, \dots, Y_m = X_{U(m)} = y_m$ نخستین m رکورد بالا در نمونه تصادفی از جامعه با تابع توزیع $F(x; \theta)$ و تابع چگالی $f(x; \theta)$ هستند، آنگاه تابع درستنمایی به صورت

$$L(\mathbf{y}|\theta) = f(y_m; \theta) \prod_{i=1}^{m-1} \frac{f(y_i; \theta)}{1 - F(y_i; \theta)}, \quad y_1 < \dots < y_m, \quad (۳)$$

^۱Size Biased Exponential

^۲Markov Chain Monte Carlo

است (آرنولد و همکاران، ۱۳۷۷). با توجه به روابط (۱)، (۲) و (۳)، تابع درستنمایی به صورت

$$L(\mathbf{y}|\theta) = \frac{y_m e^{-y_m/\theta}}{\theta^{m+1}} \prod_{i=1}^{m-1} \frac{y_i}{\theta + y_i}, \quad (۴)$$

است، که در آن $y_1, \dots, y_m$ نمونه‌های رکوردی مشاهده شده هستند. با مشتق‌گیری از لگاریتم تابع درستنمایی نسبت به پارامتر θ ، معادله درستنمایی به صورت

$$\frac{\partial \ln L(\mathbf{y}|\theta)}{\partial \theta} = \frac{-\theta(m+1) + y_m}{\theta^2} - \sum_{i=1}^{m-1} \frac{1}{\theta + y_i} = 0. \quad (۵)$$

به دست آورده می‌شود. با حل معادله (۵) به روش‌های عددی مانند نیوتن رافسون و تکراری نقطه ثابت می‌توان برآورد ماکسیمم درستنمایی^۱ (MLE) پارامتر θ یعنی $\hat{\theta}$ ، را محاسبه کرد. در روش تکراری نقطه ثابت، $\psi(\theta)$ به صورت $\psi(\theta) = \frac{m+1}{\frac{y_m}{\theta} - \sum_{i=1}^{m-1} \frac{1}{\theta + y_i}}$ تعریف شده است. برای اینکه نشان دهیم برآورد ماکسیمم درستنمایی پارامتر θ وجود دارد توابع $\phi_1(\theta) = \psi(\theta)$ و $\phi_2(\theta) = \theta$ تعریف شده است. در این صورت

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \phi_1(\theta) = 0, \quad \lim_{\theta \rightarrow +\infty} \phi_1(\theta) = +\infty.$$

این به نوبه خود نشان داده است که $\phi_1(\theta)$ از صفر در صفر شروع و تا $+\infty$ افزایش می‌یابد. همچنین، برای θ های بزرگ تابع $\phi_2(\theta)$ مقادیر نامتناهی را می‌پذیرد و هنگامی که $\theta \rightarrow +\infty$ میل کند تابع $\phi_2(\theta)$ به ∞ میل خواهد کرد. بنابراین، معادله $\psi(\theta) = \theta$ دارای یک ریشه حقیقی است. برای حل معادله $\psi(\theta) = \theta$ ، ابتدا $\theta^{(0)}$ به عنوان مقدار اولیه برای پارامتر θ در نظر گرفته شده است تا تقریب‌های پی در پی برای پارامتر θ به صورت $\theta^{(1)} = \psi(\theta^{(0)}), \dots, \theta^{(j+1)} = \psi(\theta^{(j)})$ به دست آورده شود. اگر $|\theta^{(j+1)} - \theta^{(j)}| < \epsilon$ ، آنگاه فرآیند تکرار در مرحله j ام پایان می‌پذیرد که در آن ϵ مقدار بسیار کوچکی است. بعد از مرحله j ام برآورد ماکسیمم درستنمایی پارامتر θ به صورت $\hat{\theta} = \theta^{(j)}$ به دست آورده می‌شود. همچنین، با توجه به رابطه (۵)، اطلاع فشر به صورت زیر به دست می‌آید.

$$-\frac{\partial^2 \ln L(\mathbf{y}|\theta)}{\partial \theta^2} = \frac{-\theta(m+1) + 2y_m}{\theta^3} - \sum_{i=1}^{m-1} \frac{1}{(\theta + y_i)^2},$$

¹Maximum Likelihood Estimator

۲.۲ برآورد گشتاوری

فرض کنید $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_m)$ یک نمونه رکوردی بالا با تابع توزیع $F(\cdot)$ است. متغیر تصادفی V_i^* ، برای $i = 1, \dots, m$ به صورت $V_i^* = -\ln[1 - F(Y_i)]$ تعریف شده است. با توجه به اینکه $-\ln[1 - F(Y_i)]$ ، دارای توزیع نمایی استاندارد است. بنابراین، یک نمونه رکوردی بالا از توزیع نمایی استاندارد هستند. تحت تبدیلات

$$R_1 = V_1^*, \quad R_2 = V_2^* - V_1^*, \quad \dots \quad R_m = V_m^* - V_{m-1}^*$$

نشان داده می‌شود که $R_1, \dots, R_m$ متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع با توزیع نمایی استاندارد هستند. با توجه به رابطه (۲) متغیرهای V_i^* و $S(\theta; \mathbf{Y})$ به صورت $S(\theta; \mathbf{Y}) = \sum_{i=1}^m V_i^* = \sum_{i=1}^m \left\{ \frac{Y_i}{\theta} - \ln \left(1 + \frac{Y_i}{\theta} \right) \right\}$ تعریف شده است. آرنولد و همکاران (۱۳۷۷) نشان دادند که تابع $S = S(\theta; \mathbf{Y})$ را می‌توان به صورت مجموع وزنی R_i ، یعنی، $S = \sum_{i=1}^m (m - i + 1)R_i$ در نظر گرفت که در آن R_i ها متغیرهای مستقل و هم‌توزیع با توزیع نمایی استاندارد هستند. در نتیجه،

$$E(S) = \sum_{i=1}^m (m - i + 1) = \frac{m(m+1)}{2},$$

$$Var(S) = \sum_{i=1}^m (m - i + 1)^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}.$$

با استفاده از نامساوی مارکف، برای هر $\epsilon > 0$ و $m \rightarrow \infty$ داریم:

$$Pr\left(\left|\frac{S}{\frac{m(m+1)}{2}} - 1\right| > \epsilon\right) \leq \frac{1}{\epsilon^2} Var\left(\frac{S}{\frac{m(m+1)}{2}}\right) = \frac{2m+1}{m(m+1)\epsilon^2} \rightarrow 0,$$

لذا احتمال فوق، زمانی که m به سمت بینهایت میل می‌کند به صفر همگرا است. در نتیجه

$$\frac{S}{\frac{m(m+1)}{2}} = \frac{\sum_{i=1}^m \left\{ \frac{Y_i}{\theta} - \ln \left(1 + \frac{Y_i}{\theta} \right) \right\}}{\frac{m(m+1)}{2}} \xrightarrow{P} 1.$$

بر اساس تابع $S(\theta; \mathbf{Y})$ ، برآورد گشتاوری^۱ (MBE) پارامتر θ از حل معادله $S(\theta; \mathbf{Y}) = \frac{m(m+1)}{2}$ یا

$$\sum_{i=1}^m \left\{ \frac{Y_i}{\theta} - \ln \left(1 + \frac{Y_i}{\theta} \right) \right\} - \frac{m(m+1)}{2} = 0, \quad (6)$$

¹Moment-Based Estimation

به‌دست آورده می‌شود. توجه شود که

$$\frac{\partial S(\theta; \mathbf{Y})}{\partial \theta} = - \sum_{j=1}^m \frac{Y_j^2}{\theta^2(\theta + Y_j)} < 0,$$

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} S(\theta; \mathbf{Y}) = +\infty, \quad \lim_{\theta \rightarrow +\infty} S(\theta; \mathbf{Y}) = 0.$$

بنابراین $S(\theta; \mathbf{Y})$ تابعی پیوسته و اکیدا نزولی در بازه $(0, \infty)$ است. در نتیجه، برآوردی که از روش گشتاوری و حل معادله $S(\theta; \mathbf{Y}) = \frac{m(m+1)}{4}$ محاسبه می‌شود یکتا است. برای حل معادله غیر خطی از دستور `uniroot()` در نرم افزار R استفاده شده است.

۲.۳ برآورد بیزی

برای محاسبه برآورد بیزی از تابع زیان مربع خطا استفاده شده است. تابع زیان مربع خطا به‌صورت $L_1(\theta, \delta) = (\delta - \theta)^2$ است که در آن δ برآورد پارامتر θ است. تابع زیان مربع خطا یک تابع زیان متقارن است که بیش برآوردی و کم برآوردی را به یک اندازه نشان می‌دهد. برای انجام استنباط بیزی، توزیع پیشین مناسبی برای پارامتر مجهول در نظر گرفته شده است. فرض کنید که θ دارای توزیع پیشین گامای معکوس با پارامترهای α و β و تابع چگالی احتمال به‌صورت

$$\pi(\theta; \alpha, \beta) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \theta^{-\alpha-1} e^{-\beta/\theta}, \quad \theta > 0, \quad (7)$$

است که در آن α و β مقادیر ثابت و معلوم هستند. با استفاده از روابط (۴) و (۷)، تابع چگالی پسین به‌صورت

$$\pi(\theta | \mathbf{y}) = \frac{\theta^{-(\alpha+m+1)-1}}{K(\mathbf{y})} e^{-\frac{1}{\theta}(y_m+\beta)} \prod_{i=1}^{m-1} \frac{y_i}{\theta + y_i}, \quad (8)$$

محاسبه شده است، که در آن

$$K(\mathbf{y}) = \int_0^\infty \theta^{-(\alpha+m+1)-1} e^{-\frac{1}{\theta}(y_m+\beta)} \prod_{i=1}^{m-1} \frac{y_i}{\theta + y_i} d\theta.$$

برآورد بیزی پارامتر θ تحت تابع زیان مربع خطا به صورت

$$\hat{\theta}_{BES} = E(\theta|\mathbf{y}) = \frac{1}{K(\mathbf{y})} \int_0^{\infty} \theta^{-(\alpha+m+1)} e^{-\frac{1}{\theta}(y_m+\beta)} \prod_{i=1}^{m-1} \frac{y_i}{\theta + y_i} d\theta. \quad (9)$$

به دست می‌آید. با توجه به فرم تابع چگالی پسین، انتگرال داده شده در رابطه (۹) به صورت تحلیلی قابل محاسبه نیست. بنابراین، برای محاسبه برآورد بیزی، روش‌های مونت کارلو زنجیر مارکوف^۱ (MCMC)، نمونه‌گیری نقاط مهم و روش تقریب لیندلی ارائه شده است. روش مونت کارلو زنجیر مارکوف: در این روش از الگوریتم متروپلیس-هستینگز با توزیع پیشنهادی نرمال به منظور تولید نمونه از تابع چگالی پسین استفاده شده است. (رابرت و کسلا، ۱۳۸۳).

الگوریتم ۱. الگوریتم متروپلیس-هستینگز:

گام ۱- مقدار اولیه $\theta^{(0)}$ را برای پارامتر θ در نظر بگیرید. برای شروع الگوریتم، مقدار اولیه را می‌توان برآورد ماکسیم درست‌نمایی در نظر گرفت.

گام ۲- قرار دهید $j = 1$.

گام ۳- مقدار $\theta^{(j)}$ از $\pi(\theta^{(j-1)}|\mathbf{x})$ با توزیع پیشنهادی $N(\theta^{(j-1)}, S_{\theta}^2)$ تولید می‌شود، که در آن S_{θ}^2 واریانس واریانس فشر است.

گام ۴- قرار دهید $j = j + 1$.

گام ۵- گام‌های ۲ تا ۴ را N بار تکرار کنید تا زنجیر مارکوفی $\theta_1, \dots, \theta_N$ تولید شود.

برآورد بیز تقریبی θ به صورت $\hat{\theta}_{BES} = \frac{1}{N-M} \sum_{j=M+1}^N \theta_j$ به دست آورده می‌شود، که در آن M دوره داغیدن است. برای محاسبه برآورد بیزی از بسته MHadaptive (چیورس، ۱۳۹۱)، در نرم افزار R، استفاده شده است.

روش نمونه‌گیری نقاط مهم: تابع احتمال پسین پارامتر θ که در رابطه (۸) داده شده است را می‌توان به صورت

$$\pi(\theta|\mathbf{y}) \propto g(\theta|\mathbf{y})h(\theta, \mathbf{y}), \quad (10)$$

نوشت، که در آن $g(\theta|\mathbf{y})$ تابع چگالی توزیع گامای معکوس با پارامترهای $\alpha + m + 1$ و $y_m + \beta$ است و

$$h(\theta, \mathbf{y}) = \frac{\Gamma(\alpha + m + 1)}{K(\mathbf{y})(y_m + \beta)^{\alpha+m+1}} \prod_{i=1}^{m-1} \frac{y_i}{\theta + y_i}.$$

¹Markov chain Monte Carlo

۱۸۰ برآوردیابی و پیش‌بینی برای توزیع نمایی اندازه-اریب

الگوریتم ۲. تقریب برآوردهای بیز توسط روش نمونه‌گیری نقاط مهم (کامرون و تریودی، ۱۳۸۴):

گام ۱- ابتدا θ از توزیع گامای معکوس با پارامترهای $\alpha + m + 1$ و $y_m + \beta$ تولید شود.

گام ۲- گام اول N بار تکرار شود تا نمونه $\theta_1, \dots, \theta_N$ به‌دست آورده شود.

گام ۳- برآورد بیز تقریبی برای پارامتر θ تحت تابع زیان توان دوم خطا به‌صورت $\hat{\theta}_{SIS} = \sum_{i=1}^N \theta_i w_i$ می‌آید، به‌طوری که $w_j = \frac{h^*(\theta_j, \mathbf{y})}{\sum_{i=1}^N h^*(\theta_i, \mathbf{y})}$ که در آن $h^*(\theta, \mathbf{y}) = \prod_{i=1}^{m-1} \frac{y_i}{\theta + y_i}$.

روش تقریب لیندلی: لیندلی (۱۳۵۹) روشی را برای تقریب نسبت دو انتگرال پیشنهاد کرد که از آن برای محاسبه برآوردهای بیزی استفاده شده است. تقریب لیندلی در حالت تک پارامتری برای هر تابعی از پارامتر، مانند $U(\theta)$ به‌صورت

$$E(U(\theta)|\mathbf{y}) = U(\theta) + \frac{1}{\gamma} [U_1 + \gamma U_1 \rho_1] [\sigma(\theta)]^2 + \frac{1}{\gamma} \ell_2 U_1 [\sigma(\theta)]^4, \quad (11)$$

بیان شده است، که در آن $\ln L(\mathbf{y}|\theta)$ لگاریتم تابع درستنمایی، $\ell_2 = \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \ln L(\mathbf{y}|\theta)$ ، $\rho_1 = \frac{\partial}{\partial \theta} \ln \pi(\theta)$ و $[\sigma(\theta)]^2$ واریانس فیشر در نقطه برآورد ماکسیمم درستنمایی هستند. همچنین، تحت تابع زیان مربع خطا $U(\theta) = \theta$ و $U_j = \frac{\partial^j}{\partial \theta^j} U(\theta)$ برای $j = 1, 2$ است. با توجه به رابطه (۱۱)، برآورد تقریبی بیز به روش لیندلی برای پارامتر θ به‌صورت

$$\hat{\theta}_{BLS} = \hat{\theta} + \left(\frac{\alpha - 1}{\hat{\theta}} - \beta \right) \sigma^2(\hat{\theta}) + \frac{1}{\gamma} \ell_2(\hat{\theta}) \sigma^4(\hat{\theta}),$$

است، که در آن $\hat{\theta}$ برآورد ماکسیمم درستنمایی θ ، $\rho_1 = \frac{\partial}{\partial \theta} \ln \pi(\theta) = \frac{-(\alpha+1)}{\theta} + \frac{\beta}{\theta^2}$ و

$$\ell_2 = \frac{\partial^2 \ln L(\mathbf{y}|\theta)}{\partial \theta^2} = \frac{-2\theta(m+1) + \epsilon y_m}{\theta^4} - 2 \sum_{i=1}^{m-1} \frac{1}{(\theta + y_i)^3}.$$

۳ بازدهای اطمینان مختلف

۳.۱ بازدهای اطمینان مجانبی

برای به‌دست آوردن بازه اطمینان تقریبی برای پارامتر θ از خواص مجانبی برآوردهای ماکسیمم درستنمایی استفاده شده است. تحت شرایط نظم، برآوردهای ماکسیمم درستنمایی پارامتر θ یعنی $\hat{\theta}$ به‌طور مجانبی دارای توزیع نرمال با میانگین θ و واریانس $Var(\hat{\theta}) = \left[-\frac{\partial^2 \ln L(\mathbf{y}, \theta)}{\partial \theta^2} \Big|_{\theta=\hat{\theta}} \right]^{-1}$ است. بنابراین، تابع $(\hat{\theta} - \theta) / \sqrt{Var(\hat{\theta})}$ یک کمیت محوری و به‌طور مجانبی دارای توزیع نرمال استاندارد است. با استفاده از کمیت محوری فوق، بازه اطمینان

مجانبی $(1 - \gamma) 100\%$ برای پارامتر θ از رابطه

$$Pr(-z_{1-\frac{\gamma}{2}} < (\hat{\theta} - \theta) / \sqrt{\widehat{Var}(\hat{\theta})} < z_{1-\frac{\gamma}{2}}) = 1 - \gamma$$

به دست می آید، که در آن z_q ، چندک q -ام توزیع نرمال استاندارد است. کران بالا و پایین بازه اطمینان $(1 - \gamma) 100\%$ برای پارامتر θ از رابطه، $[\hat{\theta}_L, \hat{\theta}_U] = \hat{\theta} \pm z_{1-\frac{\gamma}{2}} \sqrt{\widehat{Var}(\hat{\theta})}$ به دست آورده می شوند.

۳.۲ بازه های اطمینان محوری

تابع $S(\theta; \mathbf{Y})$ به صورت، $S(\theta; \mathbf{Y}) = \sum_{i=1}^m \left\{ \frac{Y_i}{\theta} - \ln \left(1 + \frac{Y_i}{\theta} \right) \right\}$ ، روس (۱۳۸۹) نشان داده است که $S(\theta; \mathbf{Y})$ را می توان به صورت ترکیبی خطی از W_i به صورت $S = \sum_{i=1}^m W_i$ نوشت که در آن W_i متغیرهای تصادفی مستقل با پارامتر $\lambda_i = \frac{1}{m-i+1}$ و تابع چگالی احتمال $f_S(t) = \sum_{i=1}^m C_{i,m} \lambda_i e^{-\lambda_i t}$ هستند، که در آن $C_{i,m} = \prod_{j=1, j \neq i}^m \frac{\lambda_j}{\lambda_j - \lambda_i}$. بنابراین، $S(\theta; \mathbf{Y})$ یک کمیت محوری است و با استفاده از کمیت محوری فوق، بازه اطمینان $(1 - \gamma) 100\%$ برای پارامتر θ به صورت

$$Pr(S_{\gamma/2} < \sum_{i=1}^m \left(\frac{Y_i}{\theta} - \ln \left(1 + \frac{Y_i}{\theta} \right) \right) < S_{1-\gamma/2}) = 1 - \gamma,$$

به دست می آید. در نتیجه، کران پایین و کران بالای بازه اطمینان (θ_L, θ_U) ، به ترتیب از حل معادلات

$$\sum_{i=1}^m \left(\frac{Y_i}{\theta_L} - \ln \left(1 + \frac{Y_i}{\theta_L} \right) \right) = S_{1-\gamma/2}, \quad \sum_{i=1}^m \left(\frac{Y_i}{\theta_U} - \ln \left(1 + \frac{Y_i}{\theta_U} \right) \right) = S_{\gamma/2}.$$

به دست آورده می شوند، که در آن $S_{\gamma/2}$ و $S_{1-\gamma/2}$ به ترتیب چندک های بالا و پایین $\gamma/2$ درصدی از کمیت محوری $S(\theta; \mathbf{Y})$ هستند.

الگوریتم ۳. الگوریتم محاسبه نقاط درصدی :

گام ۱- m رکورد بالا از توزیع نمایی اندازه-اریب تولید نمایید.

گام ۲- کمیت محوری $S(\theta; \mathbf{Y})$ را برای m رکورد بالا محاسبه نمایید.

گام ۳- گام های اول و دوم را ۱۰۰۰۰ بار تکرار نمایید تا نمونه ها از کمیت محوری تولید شوند.

گام ۴- نمونه های به دست آمده را به صورت صعودی مرتب کنید تا چندک های بالا و پایین ۰/۲۵، ۰/۵، ۰/۹۵ و ۰/۹۷۵ درصدی به دست آید.

برای مقادیر مختلفی از m ، نقاط درصدی برای بازه های اطمینان ۹۰ و ۹۵ درصد محاسبه شده و نتایج این

محاسبات در جدول ۱ گزارش شده است.

جدول ۱. نقاط درصدی ۹۰ و ۹۵ درصد از کمیت محوری $S(\theta; \mathbf{Y})$ به ازای $\theta = ۲$.

m	%۲/۵	%۵	%۹۵	%۹۷/۵	m	%۲/۵	%۵	%۹۵	%۹۷/۵
۲	۰/۱۷۷۱	۰/۳۷۱۹	۶۹۳۳۵	۸۳۸۵۶	۵	۳/۰۵۴۹	۴/۵۸۸۰	۲۸۵۷۹۴	۳۲/۱۱۳۰
۳	۰/۷۹۴۶	۱/۳۱۵۷	۱۳۴۶۱۰	۱۵/۱۸۰۳	۶	۴/۸۹۱۰	۶/۹۹۸۹	۳۷/۵۹۱۴	۴۴/۳۲۳۱
۴	۱/۷۲۹۵	۲/۵۴۲۲	۲۱/۰۳۳۸	۲۳/۲۰۳۵	۷	۶/۳۷۸۰	۱۰/۱۳۲۵	۴۹/۹۱۸۹	۵۹/۶۸۶۶

۳.۳ بازه اطمینان بر اساس آزمون نسبت درستنمایی

آزمون فرضیه $H_0: \theta = \theta_0$ را در مقابل $H_a: \theta \neq \theta_0$ در نظر بگیرید. آماره آزمون نسبت درستنمایی^۱ (LRT) برای آزمون فرضیه فوق به صورت

$$\lambda(\mathbf{y}) = \frac{\sup_{\theta \in \Theta} L(\mathbf{y}|\theta)}{\sup_{\theta \in \Theta} L(\mathbf{y}|\theta)} = \frac{L(\mathbf{y}|\theta_0)}{L(\mathbf{y}|\hat{\theta})}, \quad (۱۲)$$

است، که در آن فضای پارامتر، $\hat{\theta}$ برآورد ماکسیم درستنمایی θ و Θ فضای پارامتر تحت فرض H_0 هستند. براساس روابط (۴) و (۱۲)، آماره آزمون نسبت درستنمایی به صورت

$$\lambda(\mathbf{y}) = \left(\frac{\hat{\theta}}{\theta_0}\right)^{m+1} e^{-y_m(\frac{1}{\theta_0} - \frac{1}{\hat{\theta}})} \prod_{i=1}^{m-1} \frac{\hat{\theta} + y_i}{\theta_0 + y_i},$$

به دست می‌آید، که در آن $y_1, \dots, y_m$ مقادیر مشاهده شده رکوردی هستند. بنابر خاصیت مجانبی آماره آزمون نسبت درستنمایی برای نمونه‌های بزرگ، تابع $-2 \ln \lambda(\mathbf{Y})$ در توزیع، همگرا به توزیع خی دو با یک درجه آزادی است (کسلا و برگر، ۱۳۸۱). در آزمون نسبت درستنمایی فرض H_0 در سطح معنی داری γ رد می‌شود هرگاه $-2 \ln \lambda(\mathbf{y}) > \chi^2_{1-\gamma}(1)$. بنابراین، بر اساس متمم ناحیه رد فرض H_0 بازه اطمینان $\% (1 - \gamma)$ به صورت زیر حاصل می‌شود.

$$\begin{aligned} \xi(\theta) &= \{\theta : -2 \ln \lambda(\mathbf{y}) \leq \chi^2_{1-\gamma}(1)\} \\ &= \{\theta : \ln L(\mathbf{y}|\theta_0) \geq \ln L(\mathbf{y}|\hat{\theta}) - \frac{1}{2} \chi^2_{1-\gamma}(1)\} \end{aligned}$$

¹Likelihood Ratio Test

۳.۴ بازه اطمینان بیزی به روش زنجیر مارکوف مونت کارلو

به کمک نمونه‌های تولید شده از الگوریتم متروپلیس-هستینگز $\theta_1, \dots, \theta_N$ ، می‌توان کوتاه‌ترین بازه‌های اطمینان^۱ (SCI) را به روش **چن و شائو** (۱۳۷۸) به‌دست آورد. فرض کنید $\theta_{(1)} < \dots < \theta_{(N-M)}$ نمونه مرتب شده از $\{\theta^{(j)}; j = M+1, \dots, N\}$ است که بعد از حذف M مشاهده سوخته حاصل شده است. آنگاه یک SCI، $(1-\gamma)100\%$ برای θ به‌صورت $(\theta_{(j)}, \theta_{(j+[(N-M)(1-\gamma)]])$ است. که در آن پهنای فاصله j ام به‌صورت

$$\theta_{(j+[(N-M)(1-\gamma)]]} - \theta_{(j)} = \min_{1 \leq s \leq k} \theta_{(s+[(N-M)(1-\gamma)]]} - \theta_{(s)}$$

انتخاب می‌شود، که در آن $k = N - M - [(N - M)(1 - \gamma)]$.

۳.۵ بازه اطمینان بیزی به روش نمونه‌گیری نقاط مهم

به کمک نمونه‌های تولید شده از الگوریتم نمونه‌گیری نقاط مهم می‌توان کوتاه‌ترین بازه‌های اطمینان را به روش **چن و شائو** (۱۳۷۸)، برای θ به‌دست آورد. توابع $\pi(\theta|\mathbf{y})$ و $\Pi(\theta|\mathbf{y})$ به‌ترتیب تابع چگالی پسین و تابع توزیع پسین برای پارامتر θ هستند. همچنین $\theta^{(\gamma)}$ چندک γ امین برای θ است به‌طوری‌که

$$\theta^{(\gamma)} = \inf\{\theta : \Pi(\theta|\mathbf{y}) \geq \gamma\}, \quad 0 < \gamma < 1.$$

برای یک مقدار θ^* داریم،

$$\Pi(\theta^*|\mathbf{y}) = E\{I_{\theta \leq \theta^*}(\theta)|\mathbf{y}\} = \frac{\int_0^\infty I_{\theta \leq \theta^*}(\theta) \pi(\theta|\mathbf{y}) d\theta}{\int_0^\infty \pi(\theta|\mathbf{y}) d\theta},$$

که در آن $I_{\theta \leq \theta^*}(\theta)$ تابع نشانگر است. بنابراین، برآورد تقریبی $\Pi(\theta^*|\mathbf{y})$ را می‌توان به‌صورت

$$\hat{\Pi}(\theta^*|\mathbf{y}) \approx \frac{\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N I_{\theta_j \leq \theta^*}(\theta) h(\theta_j, \mathbf{y})}{\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N h(\theta_j, \mathbf{y})},$$

¹Shortest Credible Interval

۱۸۴ برآوردیابی و پیش‌بینی برای توزیع نمایی اندازه-اریب

به‌دست آورد. بر اساس $\{\theta_j; j = 1, \dots, N\}$ نمونه تولید شده از الگوریتم نمونه‌گیری نقاط مهم و $\dots < \theta_{(1)}$ $\theta_{(N)}$ نمونه مرتب شده از نمونه‌های تولید شده، برآورد تقریبی $\Pi(\theta^*|\mathbf{y})$ به‌صورت

$$\hat{\Pi}(\theta^*|\mathbf{y}) = \begin{cases} \circ, & \theta^* < \theta_{(1)}, \\ \sum_{j=1}^i w_j, & \theta_{(i)} \leq \theta^* < \theta_{(i+1)}, \\ 1, & \theta^* \geq \theta_{(N)}. \end{cases}$$

است، که در آن $w_j = \frac{h^*(\theta_j, \mathbf{y})}{\sum_{j=1}^N h^*(\theta_j, \mathbf{y})}$. بنابراین

$$\hat{\theta}^{(\gamma)} = \begin{cases} \theta_{(1)}, & \gamma = \circ, \\ \theta_{(i)}, & \sum_{j=1}^{i-1} w_j < \gamma \leq \sum_{j=1}^i w_j. \end{cases}$$

فاصله اطمینان بیزی $(1-\gamma)\%$ برای θ به‌صورت $[\hat{\theta}^{(\frac{j}{N})}, \hat{\theta}^{(\frac{j+(\frac{1-\gamma}{N})N}{N})}]$ است، که در آن $j = 1, \dots, N-1$ با تکرار این روش می‌توان بازه‌های زیادی را برای θ به‌دست آورد. از بین بازه‌های اطمینان به‌دست آمده، آن بازه‌ای را که دارای کوتاه‌ترین طول باشد یک بازه اطمینان با بالاترین چگالی پسین^۱ (HPD) برای θ است.

۴ پیش‌بینی‌کننده‌های نقطه‌ای

۴.۱ پیش‌بینی‌کننده‌های کلاسیک

در این زیربخش، پیش‌بینی‌کننده‌های کلاسیک مختلفی از جمله پیش‌بینی‌کننده ماکسیم درست‌نمایی^۲ (MLP)، پیش‌بینی‌کننده نااریب^۳ (BUP) و پیش‌بینی‌کننده میانه شرطی^۴ (CMP) برای $Z = Y_n$ به‌دست آورده می‌شوند. پیش‌بینی‌کننده ماکسیم درست‌نمایی: بر اساس مشاهدات رکوردی $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_m)$ تابع درست‌نمایی پیش‌بینی‌کننده Z و θ برای $y_m \geq z$ به‌صورت

$$L^*(z, \theta; \mathbf{y}) = \frac{f(z; \theta) [\ln(1 - F(y_m; \theta)) - \ln(1 - F(z; \theta))]^{n-m-1}}{\Gamma(n-m)} \times \prod_{i=1}^m \frac{f(y_i; \theta)}{1 - F(y_i; \theta)}. \quad (13)$$

^۱Highest Posterior Density

^۲Maximum Likelihood Predictor

^۳Best Unbiased Predictor

^۴Conditional Median Predictor

است (بسک و بالاکریشن، ۱۳۸۲). با توجه به روابط (۱)، (۲) و (۱۳) تابع درستنمایی پیش‌بینی‌کننده Z و θ به صورت

$$L^*(z, \theta; \mathbf{y}) = \frac{ze^{-z/\theta}}{\theta^{m+2}} \frac{[\ln(\frac{\theta+y_m}{\theta+z}) + \frac{1}{\theta}(z-y_m)]^{n-m-1}}{\Gamma(n-m)} \prod_{i=1}^m \frac{y_i}{\theta+y_i},$$

محاسبه شده است. با مشتق‌گیری از لگاریتم تابع درستنمایی پیش‌بینی‌کننده نسبت به θ و Z ، معادلات درستنمایی پیش‌بینی‌کننده به صورت‌های

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln L^*(z, \theta; \mathbf{y})}{\partial \theta} &= \frac{-\theta(m+2) + z}{\theta^2} - \sum_{i=1}^m \frac{1}{\theta + y_i} + (n-m-1) \\ &\times \frac{(z-y_m)[\theta^2 - (\theta+y_m)(\theta+z)]}{\theta^2(\theta+y_m)(\theta+z) \{ \ln(\frac{\theta+y_m}{\theta+z}) + \frac{1}{\theta}(z-y_m) \}} = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

$$\frac{\partial \ln L^*(z, \theta; \mathbf{y})}{\partial z} = \frac{1}{z} - \frac{1}{\theta} + \frac{(n-m-1)z}{\theta(\theta+z) \{ \ln(\frac{\theta+y_m}{\theta+z}) + \frac{1}{\theta}(z-y_m) \}} = 0. \quad (15)$$

به دست آورده می‌شوند. با حل همزمان معادلات (۱۴) و (۱۵) به صورت عددی یا با ماکسیم کردن لگاریتم تابع درستنمایی پیش‌بینی‌کننده، می‌توان برآورد درستنمایی ماکسیم پیش‌گویانه^۱ (PMLE) پارامتر θ و پیش‌بینی‌کننده درستنمایی ماکسیم (MLP) را برای Z به دست آورد. برای حالت خاص $n = m + 1$ MLP از حل معادلات غیر خطی

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln L^*(z, \theta; \mathbf{y})}{\partial \theta} &= \frac{-\theta(m+2) + z}{\theta^2} - \sum_{i=1}^m \frac{1}{\theta + y_i} = 0, \\ \frac{\partial \ln L^*(z, \theta; \mathbf{y})}{\partial z} &= \frac{1}{z} - \frac{1}{\theta} = 0, \end{aligned}$$

به دست می‌آیند. برای انجام محاسبات از بسته نرم افزاری nleqslv (هیسلمن، ۱۳۹۷) و همچنین دستور optim() در نرم افزار R استفاده شده است.

پیش‌بینی‌کننده نااریب: بر اساس خاصیت مارکفی آماره‌های رکوردی تابع چگالی شرطی Z به شرط $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_m)$ برابر است با تابع چگالی Z به شرط Y_m (آرنولد و همکاران، ۱۳۷۷). تابع چگالی شرطی Z به

¹Predictive Maximum Likelihood Estimator

شرط Y_m برای $z \geq y_m$ به صورت

$$f_Z(z|y_m; \theta) = \frac{[\ln(1 - F(y_m; \theta)) - \ln(1 - F(z; \theta))]^{n-m-1}}{\Gamma(n-m)} \frac{f(z; \theta)}{1 - F(y_m; \theta)}, \quad (۱۶)$$

است. با توجه به روابط (۱)، (۲) و (۱۶) توزیع شرطی Z به شرط y_m به صورت

$$f_Z(z|y_m; \theta) = \frac{z e^{-\frac{1}{\theta}(z-y_m)} \left[\ln \left(\frac{\theta+y_m}{\theta+z} \right) + \frac{1}{\theta}(z-y_m) \right]^{n-m-1}}{\theta(\theta+y_m) \Gamma(n-m)}, \quad (۱۷)$$

محاسبه شده است. در نتیجه، پیش‌بینی‌کننده نااریب (BUP) از رابطه

$$\hat{Z}_{BUP} = E(Z|y_m) = \int_{y_m}^{\infty} z f_Z(z|y_m; \theta) dz,$$

حاصل می‌شود. برای حالت خاص $n = m + 1$ BUP به صورت

$$\hat{Z}_{BUP} = \frac{\theta^2}{(\theta + y_m) \Gamma(n-m)} \left\{ \frac{y_m^2}{\theta^2} + 2 \left(\frac{y_m}{\theta} + 1 \right) \right\},$$

به دست می‌آید. در صورت نامعلوم بودن پارامتر θ می‌توان از برآورد ماکسیمم درست‌نمایی استفاده کرد تا BUP تقریبی به دست آید.

پیش‌بینی‌کننده میانه شرطی : پیش‌بینی‌کننده میانه شرطی (CMP) از حل معادله

$$\hat{Z}_{CMP} = \int_{y_m}^{CMP} f_Z(z|y_m; \theta) dz = \frac{1}{2},$$

به دست می‌آید. با تغییر متغیر u و $\ln \left(\frac{\theta+y_m}{\theta+z} \right) + \frac{1}{\theta}(z-y_m) = u$ داریم $\left(\frac{\theta+y_m}{\theta+z} \right) e^{\frac{1}{\theta}(z-y_m)} = e^u$

$$\int_{y_m}^{CMP} f_Z(z|y_m; \theta) dz = \int_0^{\ln \left(\frac{\theta+y_m}{\theta+CMP} \right) + \frac{1}{\theta}(CMP-y_m)} \frac{u^{n-m-1}}{\Gamma(n-m)} e^{-u} du = \frac{1}{2}.$$

بنابراین، پیش‌بینی‌کننده CMP برای Z از حل معادله غیر خطی

$$\ln \left(\frac{\theta + y_m}{\theta + CMP} \right) + \frac{1}{\theta}(CMP - y_m) = M(n-m, 1),$$

به دست می آید، که در آن $M(n-m, 1)$ میانه توزیع گاما با پارامترهای $n-m$ و ۱ است. برای حالت خاص $n = m+1$ CMP به صورت

$$\frac{\theta \left[\frac{y_m}{\theta} + 1 - \left(\frac{CMP}{\theta} + 1 \right) e^{\frac{1}{\theta}(y_m - CMP)} \right]}{(\theta + y_m) \Gamma(n-m)} = \frac{1}{2},$$

به دست می آید. در صورت نامعلوم بودن پارامتر θ می توان از برآورد ماکسیم درستنمایی استفاده کرد تا CMP تقریبی به دست آید.

۴.۲ پیش بینی کننده بیزی

پیش بینی کننده بیزی به روش مونت کارلو زنجیر مارکوف: تابع چگالی پیش بینی کننده بیزی z به شرط y به صورت

$$f_1(z|\mathbf{y}) = \int_0^\infty f_Z(z|y_m; \theta) \pi(\theta|\mathbf{y}) d\theta. \quad (18)$$

است، که در آن $z \geq y_m$. با توجه به روابط (۸)، (۱۷) و (۱۸) تابع چگالی پیش بینی کننده بیزی به صورت

$$\begin{aligned} f_1(z|\mathbf{y}) &= \frac{z}{K(\mathbf{y}) \Gamma(n-m)} \int_0^\infty \frac{\theta^{-(\alpha+m)-1} e^{-\frac{1}{\theta}(z+\beta)}}{(\theta + y_m)} \prod_{i=1}^{m-1} \frac{y_i}{\theta + y_i} \\ &\times \left[\ln \left(\frac{\theta + y_m}{\theta + z} \right) + \frac{1}{\theta} (z - y_m) \right]^{n-m-1} d\theta. \end{aligned}$$

محاسبه شده است. پیش بینی کننده بیزی Z تحت تابع زیان مربع خطا به صورت $Z_{Bs} = \int_{y_m}^\infty z f_1(z|\mathbf{y}) dz$ محاسبه می آید. به دلیل پیچیدگی تابع چگالی پیش بینی کننده بیزی $f_1(z|\mathbf{y})$ ، پیش بینی کننده بیزی به صورت ساده و صریح به دست آورده نمی شوند. بنابراین، بر اساس نمونه های تولید شده از الگوریتم متروپلیس-هستینگز $\{\theta_j; j = 1, \dots, N\}$ برآورد تابع چگالی پیش بینی کننده بیزی $f_1(z|\mathbf{y})$ ، به صورت

$$\hat{f}_1(z|\mathbf{y}) = \frac{1}{N-M} \sum_{j=M+1}^N f_Z(z|y_m; \theta_j), \quad (19)$$

است. با توجه به روابط (۱۷) و (۱۹)، پیش‌بینی‌کننده بیز تقریبی برای Z تحت تابع زیان مربع خطا به صورت

$$\hat{Z}_{Bs} = \int_{y_m}^{\infty} z \hat{f}_1(z|\mathbf{y}) dz = \frac{1}{N-M} \sum_{j=M+1}^N \frac{e^{\frac{y_m}{\theta_j}}}{\theta_j(\theta_j + y_m)\Gamma(n-m)} I_1(y_m; \theta_j),$$

به دست می‌آید، که در آن

$$I_1(y_m; \theta) = \int_{y_m}^{\infty} z^{\nu} e^{-\frac{z}{\theta}} \left[\ln \left(\frac{\theta + y_m}{\theta + z} \right) + \frac{1}{\theta} (z - y_m) \right]^{n-m-1} dz.$$

برای حالت خاص $n = m + 1$ ، پیش‌بینی‌کننده بیزی برای Z تحت تابع زیان مربع خطا به صورت

$$\hat{Z}_{Bs} = \frac{1}{N-M} \sum_{j=M+1}^N \frac{y_m^{\nu} + \nu \theta_j y_m + \nu \theta_j^{\nu}}{(\theta_j + y_m)\Gamma(n-m)},$$

محاسبه شده است.

پیش‌بینی‌کننده بیزی به روش نمونه‌گیری نقاط مهم: تابع چگالی پیش‌بینی‌کننده بیزی z به شرط y را با توجه به رابطه (۱۰)، می‌توان به صورت

$$f_1(z|\mathbf{y}) = \int_0^{\infty} f_Z(z|y_m; \theta) \pi(\theta|\mathbf{y}) d\theta = \int_0^{\infty} f_Z(z|y_m; \theta) g(\theta|\mathbf{y}) h(\theta, \mathbf{y}) d\theta.$$

نوشت، که در آن $z \geq y_m$. به دلیل پیچیدگی تابع چگالی $f_1(z|\mathbf{y})$ ، پیش‌بینی‌کننده بیزی به صورت ساده و صریح به دست آورده نمی‌شوند. بنابراین، بر اساس نمونه‌های تولید شده از الگوریتم نمونه‌گیری نقاط مهم $\{\theta_j; j = 1, \dots, N\}$ ، برآورد تابع چگالی پیش‌بینی‌کننده بیزی $f_1(z|\mathbf{y})$ ، به صورت

$$\hat{f}_1(z|\mathbf{y}) = \frac{\sum_{j=1}^N f_Z(z|y_m; \theta_j) h(\theta_j, \mathbf{y})}{\sum_{j=1}^N h(\theta_j, \mathbf{y})}, \quad (20)$$

است. پیش‌بینی‌کننده بیز تقریبی برای Z تحت تابع زیان مربع خطا به صورت

$$\hat{Z}_{Bs} = \int_{y_m}^{\infty} z \hat{f}_1(z|\mathbf{y}) dz = \frac{\sum_{j=1}^N I_1(y_m; \theta_j) h(\theta_j, \mathbf{y})}{\sum_{j=1}^N h(\theta_j, \mathbf{y})},$$

به دست می‌آید، که در آن

$$I_2(y_m; \theta) = \frac{e^{\frac{y_m}{\theta}}}{\theta(\theta + y_m)\Gamma(n - m)} \int_{y_m}^{\infty} z^2 e^{\frac{-z}{\theta}} \left[\ln\left(\frac{\theta + y_m}{\theta + z}\right) + \frac{1}{\theta}(z - y_m) \right]^{n-m-1} dz.$$

برای حالت $n = m + 1$ ، $I_2(y_m; \theta)$ به صورت $I_2(y_m; \theta) = \frac{y_m^2 + 2\theta y_m + 2\theta^2}{(\theta + y_m)\Gamma(n - m)}$ حاصل می‌شود.

۵ بازه‌های پیش‌بینی

۵.۱ بازه پیش‌بینی با روش محوری

با توجه به تابع چگالی Z به شرط y_m رابطه (۱۷)، واضح است که متغیر تصادفی

$$U = \ln[1 - F(y_m; \theta)] - \ln[1 - F(Z; \theta)] = \ln\left(\frac{\theta + y_m}{\theta + Z}\right) + \frac{1}{\theta}(Z - y_m),$$

دارای توزیع گاما با پارامترهای $n - m$ و 1 و تابع چگالی $g_U(z) = \frac{1}{(n - m - 1)!} z^{n-m-1} e^{-z}$ است. لذا، $2U$ دارای توزیع کای دو با $2(n - m)$ درجه آزادی و یک کمیت محوری برای Z است. با استفاده از کمیت محوری فوق یک بازه پیش‌بینی $(1 - \gamma)100\%$ برای Z از رابطه

$$\Pr\left(\chi_{\gamma/2, 2(n-m)}^2 < 2U < \chi_{1-\gamma/2, 2(n-m)}^2 | Y_m = y_m\right) = 1 - \gamma,$$

به دست می‌آید، که L_1^* و U_1^* کران‌های پایین و بالای این بازه به ترتیب از حل معادلات زیر به دست می‌آیند.

$$2 \ln\left(\frac{\theta + y_m}{\theta + L_1^*}\right) + \frac{2}{\theta}(L_1^* - y_m) = \chi_{\gamma/2, 2(n-m)}^2,$$

$$2 \ln\left(\frac{\theta + y_m}{\theta + U_1^*}\right) + \frac{2}{\theta}(U_1^* - y_m) = \chi_{1-\gamma/2, 2(n-m)}^2.$$

۵.۲ بازه پیش‌بینی بالاترین چگالی شرطی

بازه $[w_1, w_2]$ یک بازه پیش‌بینی بالاترین چگالی شرطی^۱ (HCD) در سطح $(1 - \gamma)$ برای U با تابع چگالی $g_U(z) = \frac{1}{(n-m-1)!} z^{n-m-1} e^{-z}$ است هرگاه

$$[w_1, w_2] = \{w : w \in [0, \infty], g_U(w) \geq k\} \subset [0, \infty]; \quad (0 < \gamma < 1)$$

و برای بعضی $k > 0$ داشته باشیم $\int_{w_1}^{w_2} g_U(w) dw = 1 - \gamma$. اگر $n > m + 1$ باشد آنگاه تابع $g_U(w)$ یک تابع تک مدی است و حداکثر مقدار این تابع در $\nu = n - m - 1 \in (0, \infty)$ به دست می‌آید. بنابراین روش HCD، مستلزم یافتن دو نقطه $w_1 = w_{\gamma_1} \leq \nu \leq w_2 = w_{1-\gamma+\gamma_1}$ ، $(0 < \gamma, \gamma_1 < 1)$ تحت عنوان صدکهای (γ_1) درصد و $(1 - \gamma + \gamma_1)$ درصد هستند که در روابط

$$\int_{w_1}^{w_2} g_U(w) dw = 1 - \gamma, \quad g_U(w_1) = g_U(w_2). \quad (21)$$

صدق می‌کند (کسلا و برگر، ۱۳۸۱). همچنین، روابط (۲۱) را می‌توان به صورت

$$\gamma_{w_2}(n - m, 1) - \gamma_{w_1}(n - m, 1) = 1 - \gamma, \quad \left(\frac{w_1}{w_2}\right)^{n-m-1} = e^{-(w_2-w_1)}$$

باز نویسی کرده در آن $\Gamma(a, t) = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_t^\infty x^{a-1} e^{-x} dx$ تابع گامای ناقص است. فاصله پیش‌بینی $(1 - \gamma)\%$ برای Z بر اساس روش HCD، عبارت است از (L_γ^*, U_γ^*) ، که کران‌های پایین و بالای آن به ترتیب از حل معادلات زیر به دست آورده می‌شوند.

$$\frac{\theta + y_m}{\theta + L_\gamma^*} = e^{w_2 - \frac{1}{\theta}(L_\gamma^* - y_m)}, \quad \frac{\theta + y_m}{\theta + U_\gamma^*} = e^{w_1 - \frac{1}{\theta}(U_\gamma^* - y_m)}.$$

برای حالت خاص $n = m + 1$ ، با توجه به اینکه تابع $g_U(w)$ یک تابع کاهشی است و $g_U(0) = 1$ و $g_U(\infty) = 0$. بازه $[0, w_2]$ یک بازه پیش‌بینی HCD، در سطح $(1 - \gamma)$ است هرگاه $\int_0^{w_2} g_U(w) dw = 1 - \gamma$ و $w_2 = -\log(\gamma)$. بنابراین، بازه پیش‌بینی $(1 - \gamma)\%$ برای Z عبارت است از (L_γ^*, U_γ^*) که $L_\gamma^* = Y_m$ و U_γ^* از حل معادله

$$\frac{\theta + y_m}{\theta + U_\gamma^*} = \frac{e^{-\frac{1}{\theta}(U_\gamma^* - y_m)}}{\gamma},$$

¹Highest Posterior Density

به دست آورده می شود. در صورت نامعلوم بودن پارامتر θ می توان از برآورد ماکسیم درستنمایی به جای آن استفاده نمود تا بازه پیش بینی تقریبی برای Z به دست آید.

۵.۳ فاصله پیش بینی بیزی

بازه پیش بینی بیزی $\gamma(1 - \gamma) ۱۰۰\%$ برای Z عبارت است از $(L_{\gamma}^*, U_{\gamma}^*)$ که مقادیر L_{γ}^* و U_{γ}^* کران های پایین و بالای بازه پیش بینی بیزی به ترتیب از حل معادلات زیر به دست آورده می شوند.

$$\begin{aligned}\Pr(Z > L_{\gamma}^* | y_m) &= \int_{L_{\gamma}^*}^{\infty} f_{\gamma}(z | \mathbf{y}) dz = \int_{L_{\gamma}^*}^{\infty} \hat{f}_{\gamma}(z | \mathbf{y}) dz = 1 - \frac{\gamma}{2}, \\ \Pr(Z > U_{\gamma}^* | y_m) &= \int_{U_{\gamma}^*}^{\infty} f_{\gamma}(z | \mathbf{y}) dz = \int_{U_{\gamma}^*}^{\infty} \hat{f}_{\gamma}(z | \mathbf{y}) dz = \frac{\gamma}{2}.\end{aligned}$$

بازه پیش بینی بیزی به روش مونت کارلو زنجیر مارکوف : با استفاده از نمونه های تولید شده توسط الگوریتم متروپلیس-هستینگز و برآورد تابع چگالی پیش بینی بیزی $\hat{f}_{\gamma}(z | \mathbf{y})$ رابطه (۱۹)، کران های پایین و بالای بازه پیش بینی به ترتیب از حل معادلات

$$\begin{aligned}1 - \frac{\gamma}{2} &= \frac{1}{N - M} \sum_{j=M+1}^N \frac{e^{\frac{y_m}{\theta_j}}}{\theta_j(\theta_j + y_m)\Gamma(n - m)} K_{\gamma}(L_{\gamma}^*; \theta_j), \\ \frac{\gamma}{2} &= \frac{1}{N - M} \sum_{j=M+1}^N \frac{e^{\frac{y_m}{\theta_j}}}{\theta_j(\theta_j + y_m)\Gamma(n - m)} K_{\gamma}(U_{\gamma}^*; \theta_j),\end{aligned}$$

به دست آورده می شوند، که در آن

$$K_{\gamma}(Len; \theta) = \int_{Len}^{\infty} z e^{\frac{-z}{\theta}} \left[\ln \left(\frac{\theta + y_m}{\theta + z} \right) + \frac{1}{\theta} (z - y_m) \right]^{n-m-1} dz.$$

برای حالت خاص $n = m + 1$ ، کران های پایین و بالای بازه پیش بینی به ترتیب از حل معادلات زیر به دست می آیند.

$$\begin{aligned}1 - \frac{\gamma}{2} &= \frac{1}{N - M} \sum_{j=M+1}^N \frac{(L_{\gamma}^* + \theta_j) e^{\frac{1}{\theta_j} [y_m - L_{\gamma}^*]}}{(\theta_j + y_m)\Gamma(n - m)}, \\ \frac{\gamma}{2} &= \frac{1}{N - M} \sum_{j=M+1}^N \frac{(U_{\gamma}^* + \theta_j) e^{\frac{1}{\theta_j} [y_m - U_{\gamma}^*]}}{(\theta_j + y_m)\Gamma(n - m)}.\end{aligned}$$

بازه پیش‌بینی بیزی به روش نمونه‌گیری نقاط مهم : با استفاده از نمونه‌های تولید شده توسط الگوریتم نمونه‌گیری نقاط مهم و برآورد تابع چگالی پیش‌بینی بیزی $\hat{f}_1(z|y)$ ، رابطه (۲۰)، کران‌های پایین و بالای بازه پیش‌بینی به ترتیب از حل معادلات

$$1 - \frac{\gamma}{2} = \frac{\sum_{j=1}^N K_{\gamma}(L_{\gamma}^*; \theta_j) h(\theta_j, y)}{\sum_{j=1}^N h(\theta_j, y)},$$

$$\frac{\gamma}{2} = \frac{\sum_{j=1}^N K_{\gamma}(U_{\gamma}^*; \theta_j) h(\theta_j, y)}{\sum_{j=1}^N h(\theta_j, y)},$$

به دست آورده می‌شوند، که در آن

$$K_{\gamma}(Len; \theta) = \frac{e^{\frac{ym}{\theta}}}{\theta(\theta + y_m)\Gamma(n-m)} \int_{Len}^{\infty} z e^{-\frac{z}{\theta}} \left[\ln\left(\frac{\theta + y_m}{\theta + z}\right) + \frac{1}{\theta}(z - y_m) \right]^{n-m-1} dz.$$

برای حالت خاص $n = m + 1$ $K_{\gamma}(Len; \theta) = \frac{(Len + \theta)e^{\frac{1}{\theta}(y_m - Len)}}{(\theta + y_m)\Gamma(n-m)}$ است.

۶ مطالعه شبیه‌سازی

در این بخش، یک مطالعه شبیه‌سازی، به منظور مقایسه و بررسی عملکرد برآوردگرها و پیش‌بینی‌کننده‌های نقطه‌ای و بازه‌ای پیشنهاد شده در این مقاله ارائه شده است. در این شبیه‌سازی $\theta = 2$ برای مقدار واقعی پارامتر در نظر گرفته شده است. تعداد رکوردهای بالا نیز $m = 3, 4, 5, 6, 7$ در نظر گرفته شده‌اند. در راستای برآوردیابی و پیش‌بینی بیزی دو توزیع پیشین به صورت توزیع پیشین ناآگاهی‌بخش (توزیع پیشین ۱) با پارامترهای $\alpha = \beta = 0.0001$ و توزیع پیشین ناآگاهی‌بخش (توزیع پیشین ۲) با پارامترهای $\alpha = 2$ و $\beta = 4$ در نظر گرفته شده‌اند. الگوریتم شبیه‌سازی به صورت زیر بیان شده است:

۱. m رکورد بالا از توزیع نمایی اندازه-اریب تولید می‌شوند.
۲. برآورد ماکسیمم درست‌نمایی، برآورد گشتاوری و برآورد بیز تقریبی برای پارامتر تحت تابع زیان مربع خطا به کمک روش‌های متروپلیس-هستینگز، نمونه‌گیری نقاط مهم و تقریب لیندلی به دست می‌آیند.
۳. پیش‌بینی‌کننده‌های بیز تقریبی و کلاسیک برای رکورد n -ام یعنی $(Z = Y_n, n > m)$ تحت تابع زیان مربع خطا به کمک روش‌های متروپلیس-هستینگز، نمونه‌گیری نقاط مهم و تقریب لیندلی محاسبه می‌شوند.
۴. فواصل اطمینان ۹۵ درصد برای پارامتر و بازه‌های پیش‌بینی ۹۵ درصد برای رکورد n -ام یعنی Z به دست می‌آیند.
۵. گام‌های اول تا چهارم را $N^* = 1000$ بار تکرار می‌کنیم تا ریسک برآورد شده برآوردگرها و پیش‌بینی‌کننده‌های

نقطه‌ای تحت تابع زیان مربع خطا به دست آیند. همچنین، احتمال پوشش^۱ (CP) و متوسط‌های طول فاصله^۲ (AW) برای بازه‌های اطمینان و بازه‌های پیش‌بینی به دست می‌آیند.

ریسک برآورد شده^۳ (ER_S) برآوردگرها تحت توابع زیان توان دوم خطا

$$ER_S(\hat{\theta}) = \frac{1}{N^*} \sum_{i=1}^{N^*} (\hat{\theta}_i - \theta)^2,$$

محاسبه می‌شوند که در آن $\hat{\theta}_i$ برآورد به دست آمده برای θ ، در تکرار i امین شبیه‌سازی است. به طور مشابه ER_S ها برای پیش‌بینی‌کننده‌های نقطه‌ای نیز محاسبه می‌شود. نتایج عددی شبیه‌سازی برای برآوردگرهای نقطه‌ای در جدول ۲ ارائه شده است. نتایج عددی برای بازه‌های اطمینان پارامتر در جدول ۳ گزارش شده است. جدول‌های ۴ و ۵ در بردارنده نتایج به ترتیب برای پیش‌بینی‌کننده‌های نقطه‌ای و بازه‌ای هستند.

در جدول ۲ مشاهده می‌شود که ER_S های برآوردگرهای نقطه‌ای بیز تقریبی به دست آمده توسط سه روش تحت توزیع پیشین ۲ کمتر از ER_S های متناظر با برآوردگرهای نقطه‌ای بیز تقریبی به دست آمده از توزیع پیشین ۱ است. برآوردگرهای نقطه‌ای بیز تقریبی به دست آمده توسط روش تقریب لیندلی و روش متروپولیس-هستینگز به ترتیب تحت توزیع پیشین ۱ و توزیع پیشین ۲، عملکرد بهتری نسبت به برآوردگرهای نقطه‌ای بیز تقریبی به دست آمده توسط روش نمونه‌گیری نقاط مهم دارند. اما مواردی هستند ER_S های برآوردگرهای نقطه‌ای بیز تقریبی در روش‌های متروپولیس-هستینگز و نمونه‌گیری نقاط مهم به یکدیگر نزدیک هستند. در جدول ۲ ملاحظه می‌شود که در همه موارد برآوردگرهای بیز تقریبی تحت توزیع پیشین ۲ بهتر از برآوردگرهای ماکسیمم درستنمایی و برآوردگرهای گشتاوری متناظرشان عمل کرده‌اند زیرا برآوردگرهای بیز تقریبی تحت توزیع پیشین ۲، ER_S های کوچک‌تری دارند. همچنین، ER_S های برآوردگرهای بیز تقریبی تحت توزیع پیشین ۱ بیشتر از ER_S های برآوردگرهای ماکسیمم درستنمایی و برآوردگرهای گشتاوری هستند. در همه موارد ER_S های برآوردگرهای ماکسیمم درستنمایی کمتر از ER_S های متناظر با برآوردگرهای گشتاوری هستند و این نشان می‌دهد که برآوردگرهای ماکسیمم درستنمایی بهتر از برآوردگرهای گشتاوری متناظرشان عمل کرده‌اند.

با توجه به جدول ۳ و با مقایسه بازه‌های اطمینان مختلف، ملاحظه می‌شود که با افزایش تعداد رکوردها میانگین طول بازه‌های اطمینان کاهش می‌یابد. میانگین طول بازه‌های اطمینان بیزی به دست آمده از توزیع پیشین ۲ کمتر از میانگین طول بازه‌های اطمینان بیزی به دست آمده از توزیع پیشین ۱ است. میانگین طول بازه‌های اطمینان بیزی به دست آمده توسط روش نمونه‌گیری نقاط مهم کمتر از میانگین طول بازه‌های اطمینان بیزی به دست آمده توسط روش متروپولیس-هستینگز هستند. میانگین طول بازه‌های اطمینان بیزی به دست آمده توسط روش نمونه‌گیری نقاط مهم تحت توزیع پیشین ۲ کمتر از میانگین طول بازه‌های اطمینان مجانبی، بازه‌های اطمینان بر اساس آزمون نسبت

¹Coverage Probability

²Average Width

³Estimated Risk

درست‌نمایی و بازه‌های اطمینان محوری است. بازه‌های اطمینان بیزی تحت توزیع پیشین ۲ و بازه‌های اطمینان بر اساس توزیع مجانبی برآورد ماکسیمم درست‌نمایی کمترین میانگین طول بازه‌های اطمینان را دارا هستند. با توجه به جدول ۴ ملاحظه می‌شود که ER_S های پیش‌بینی‌کننده‌های بیز تقریبی در روش‌های متروپولیس-هستینگز و نمونه‌گیری نقاط مهم تحت توزیع پیشین ۲ کمتر از ER_S های متناظر با پیش‌بینی‌کننده‌های بیز تقریبی تحت توزیع پیشین ۱ هستند. پیش‌بینی‌کننده‌های بیز تقریبی به‌دست آمده توسط روش متروپولیس-هستینگز عملکرد بهتری نسبت به پیش‌بینی‌کننده‌های بیز تقریبی به‌دست آمده توسط روش نمونه‌گیری نقاط مهم دارند. با مقایسه پیش‌بینی‌کننده‌های کلاسیک و بیز تقریبی مشاهده می‌شود که پیش‌بینی‌کننده‌های بیز تقریبی تحت توزیع پیشین ۲ و پیش‌بینی‌کننده نااریب به‌ترتیب نسبت به پیش‌بینی‌کننده‌های دیگر عملکرد بهتری دارند. پیش‌بینی‌کننده‌های ماکسیمم درست‌نمایی در همه موارد نسبت به پیش‌بینی‌کننده‌های کلاسیک دیگر عملکرد خوبی ندارد. با توجه به جدول ۵ و با مقایسه بازه‌های پیش‌بینی مختلف، ملاحظه می‌شود که با افزایش تعداد رکوردها، میانگین طول بازه‌های پیش‌بینی کاهش می‌یابد. میانگین طول بازه‌های پیش‌بینی بیزی به‌دست آمده از توزیع پیشین ۲ کمتر از میانگین طول بازه‌های پیش‌بینی بیزی به‌دست آمده از توزیع پیشین ۱ هستند. میانگین طول بازه‌های پیش‌بینی به‌دست آمده توسط روش متروپولیس-هستینگز کمتر از میانگین طول بازه‌های پیش‌بینی بیزی به‌دست آمده توسط روش نمونه‌گیری نقاط مهم هستند. بازه‌های پیش‌بینی HCD و بازه‌های پیش‌بینی محوری به‌ترتیب کمترین میانگین طول بازه‌های پیش‌بینی را نسبت به بازه‌های پیش‌بینی بیزی دارا هستند.

جدول ۲. میانگین اریبی و ER_S های برآوردگرهای نقطه‌ای بر اساس مقدارهای رکوردی بالا

m	MLE	MBE	تقریب لیندلی				MCMC		رهیافت بیزی	
			پیشین ۱	پیشین ۲	پیشین ۱	پیشین ۲	پیشین ۱	پیشین ۲	پیشین ۱	پیشین ۲
۳	Bias	۰/۴۷	۰/۴۳۲	۰/۴۱۵	۰/۵۰۸	۰/۳۵۱	۰/۵۱۲	۰/۳۵۱	۰/۳۵۱	۰/۳۵۱
	ER_S	۰/۸۱۹	۱/۳۳۸	۰/۶۸۲	۱/۵۳۲	۰/۷۰۸	۱/۵۳۹	۰/۷۰۸	۰/۷۱۲	۰/۷۱۲
۴	Bias	۰/۳۰	۰/۳۳۱	۰/۳۲۱	۰/۳۸۱	۰/۲۸۴	۰/۳۸۳	۰/۲۸۴	۰/۲۸۶	۰/۲۸۶
	ER_S	۰/۶۵۶	۰/۹۷۳	۰/۵۵۸	۱/۰۲۰	۰/۵۶۴	۱/۰۲۴	۰/۵۶۴	۰/۵۶۵	۰/۵۶۵
۵	Bias	۰/۲۷	۰/۲۴۴	۰/۲۴۴	۰/۲۷۰	۰/۲۱۶	۰/۲۷۳	۰/۲۱۶	۰/۲۱۵	۰/۲۱۵
	ER_S	۰/۵۲۴	۰/۷۱۹	۰/۴۴۸	۰/۸۳۱	۰/۵۰۳	۰/۸۳۵	۰/۵۰۳	۰/۵۰۳	۰/۵۰۳
۶	Bias	۰/۰۴	۰/۲۱۴	۰/۲۱۴	۰/۲۳۱	۰/۱۸۹	۰/۲۳۵	۰/۱۸۹	۰/۱۹۱	۰/۱۹۱
	ER_S	۰/۴۶۶	۰/۶۱۶	۰/۴۰۷	۰/۶۳۳	۰/۴۱۰	۰/۶۳۹	۰/۴۱۰	۰/۴۱۲	۰/۴۱۲
۷	Bias	۰/۰۱	۰/۱۹۳	۰/۱۹۲	۰/۱۹۲	۰/۱۶۱	۰/۱۹۳	۰/۱۶۱	۰/۱۶۱	۰/۱۶۱
	ER_S	۰/۴۱۳	۰/۴۸۲	۰/۳۳۰	۰/۴۹۳	۰/۳۳۵	۰/۴۹۳	۰/۳۳۵	۰/۳۳۵	۰/۳۳۵

۷ مثال کاربردی

مثال ۱. داده‌ها میزان بارندگی فصلی (بر حسب اینچ) از سال ۲۰۰۶ تا ۲۰۲۴ است که در مرکز مدنی لسن آنجلس ثبت شده و از طریق وب‌سایت www.laallmanac.com/weather/we08aa.phd قابل دسترس است. داده‌ها

جدول ۳. میانگین طول (AW) و درصد پوشش (CP) بازه‌های اطمینان ۹۵٪ برای θ .

رهیافت بیزی									
MCMC					Pivot	LRT	MLE	AW	CP
نمونه‌گیری نقاط مهم									
۲	پیشین ۱	پیشین ۲	پیشین ۱						m
۳	۳/۳۹۵	۴/۲۴۵	۳/۲۹۵	۴/۳۲۲	۵/۳۳۱	۴/۵۳۲	۳/۴۹۵	AW	۳
	۰/۹۸۷	۰/۹۴۸	۰/۹۸۲	۰/۹۴۸	۰/۹۴۰	۰/۹۵۱	۰/۸۷۴	CP	
۴	۳/۰۲۸	۳/۵۹۰	۳/۳۲۶	۴/۰۵۲	۴/۱۶۶	۳/۷۹۴	۳/۱۰۷	AW	۴
	۰/۹۷۲	۰/۹۴۴	۰/۹۷۸	۰/۹۴۰	۰/۹۴۱	۰/۹۴۳	۰/۸۸۳	CP	
۵	۲/۷۸۲	۳/۲۰۲	۳/۰۳۴	۳/۵۵۰	۳/۴۵۰	۳/۳۷۱	۲/۸۵۸	AW	۵
	۰/۹۷۰	۰/۹۴۱	۰/۹۷۶	۰/۹۴۳	۰/۹۲۸	۰/۹۴۷	۰/۸۹۴	CP	
۶	۲/۵۸۱	۲/۹۰۶	۲/۷۷۹	۳/۱۸۰	۳/۴۱۹	۳/۰۴۴	۲/۶۴۵	AW	۶
	۰/۹۷۰	۰/۹۴۱	۰/۹۶۵	۰/۹۳۹	۰/۹۲۸۵۰	۰/۹۴۱	۰/۸۹۵	CP	
۷	۲/۴۲۷	۲/۶۹۱	۲/۵۸۶	۲/۹۰۲	۳/۲۱۷	۲/۸۰۰	۲/۴۷۶	AW	۷
	۰/۹۷۲	۰/۹۵۲	۰/۹۶۲	۰/۹۴۵	۰/۹۵۹	۰/۹۴۴	۰/۹۱۱	CP	

جدول ۴. ERs پیش‌بینی‌کننده‌های نقطه‌ای کلاسیک و بیزی برای $Z = Y_n$.

پیش‌بینی‌کننده‌های بیزی										
MCMC										
نمونه‌گیری نقاط مهم										
		پیشین توزیع ۱		پیشین توزیع ۲		پیشین توزیع ۳		پیشین توزیع ۴		
		CMP		BUP		MLP		n		m
۰/۲۸۸	۰/۴۹۸	۰/۲۸۳	۰/۴۴۷	۰/۸۸۰	۰/۲۰۹	۰/۴۸۸	۴	۳		
۵۸۸۲	۷/۶۸۸	۵۸۲۲	۷/۲۹۱	۶/۶۹۲	۶/۶۷۰	۷/۴۹۴				
۰/۱۳۰	۰/۳۴۲	۰/۱۲۶	۰/۳۶۳	۰/۴۳	۰/۳۴۹	۰/۷۰۴	۵			
۶۸۳۸	۸/۶۵۸	۶۸۲۲	۸/۴۷۴	۷/۶۶۹	۷/۶۱۴	۹/۹۵۰				
۰/۲۲۲	۰/۱۵۷	۰/۲۴۶	۰/۱۲۲	۰/۵۰۲	۰/۰۳۶	۰/۵۷۴	۶	۵		
۳/۶۳۵	۳/۹۵۷	۳/۶۲۸	۳/۹۴۵	۳/۷۶۴	۳/۷۴۵	۵/۲۳۴				
۰/۳۹۵	۰/۴۳۱	۰/۳۹۰	۰/۴۱۵	۰/۵۲۴	۰/۰۸۵	۰/۹۴۱	۷			
۴/۵۵۷	۵/۸۴۷	۴/۵۲۹	۵/۸۰۳	۴/۷۵۸	۴/۶۵۸	۸/۰۸۲				
۰/۷۲۰	۰/۷۰۸	۰/۷۲۵	۰/۷۱۳	۰/۱۳۵	۰/۴۶۸	۰/۵۲۴	۸	۷		
۲/۳۶۳	۳/۸۷۸	۲/۲۳۷	۳/۵۴۱	۳/۶۸۱	۳/۶۶۶	۴/۰۲۰				
۰/۰۵۵	۰/۱۶۲	۰/۰۲۵	۰/۱۴۱	۰/۹۰۷	۰/۱۴۳	۰/۶۶۳	۹			
۳/۴۳۲	۳/۹۱۵	۳/۳۳۶	۳/۸۱۰	۳/۷۴۴	۳/۷۳۷	۴/۳۸۸				

عبارتند از:

۹/۶۵	۸/۵۲	۶/۰۸	۵/۸۵	۸/۶۹	۲۰/۲۰	۱۶/۳۶	۹/۰۸	۱۳/۵۳	۳/۲۱
۷/۷۴	۲۵/۱۹	۲۸/۴۰	۱۲/۴۰	۵/۸۲	۱۴/۸۶	۱۸/۸۲	۴/۷۹	۱۹	

برای داده‌های فوق، مقدار ریشه میانگین مربعات خطا^۱ (RMSE)، مقادیر معیار اطلاعات آکایک^۲ (AIC)، معیار

^۱Root Mean Square Error

^۲Akaike information criterion

جدول ۵. میانگین طول (AW) و درصد پوشش (CP) بازه‌های پیش‌بینی ۹۵٪ برای $Z = Y_n$.

بازه‌های پیش‌بینی بیزی				HCD	pivot	n	m
MCMC							
نمونه‌گیری نقاط مهم							
پیشین توزیع ۱	پیشین توزیع ۲	پیشین توزیع ۳	پیشین توزیع ۴				
۱۱,۸۴۰ ۰.۹۸۰	۱۳,۱۰۵ ۰.۹۶۰	۱۱,۷۲۳ ۰.۹۸۰	۱۲,۹۵۶ ۰.۹۸۰	۷۰.۴۸ ۰.۹۴۰	۸۵۳۹ ۰.۹۶۰	AW CP	۴
۱۲,۴۳۳ ۰.۹۴۰	۱۳,۲۸۲ ۰.۹۴۰	۱۲,۱۵۰ ۰.۹۵۰	۱۳,۲۰۸ ۰.۹۴۰	۸۹۷۳ ۰.۹۵۰	۹,۱۲۰ ۰.۹۵۰	AW CP	۵
۶,۵۵۶ ۰.۹۴۰	۷,۳۸۱ ۰.۹۲۰	۶,۵۲۰ ۰.۹۶۰	۷,۲۲۷ ۰.۹۶۰	۵,۷۳۰ ۰.۹۶۰	۶,۱۹۰ ۰.۹۶۰	AW CP	۶
۷,۱۳۴ ۰.۹۹۰	۷,۷۵۴ ۰.۹۵۰	۷,۲۵۷ ۰.۹۹۰	۷,۵۱۳ ۰.۹۵۰	۶,۵۹۲ ۰.۹۵۰	۶,۸۹۱ ۰.۹۵۰	AW CP	۷
۵,۵۱۶ ۰.۹۶۰	۵,۸۹۶ ۰.۹۶۰	۵,۵۰۹ ۰.۹۶۰	۵,۸۲۴ ۰.۹۶۰	۴,۶۸۶ ۰.۹۷۰	۵,۰۲۷ ۰.۹۷۰	AW CP	۸
۵,۷۰۸ ۰.۹۰۰	۵,۹۶۷ ۰.۹۰۰	۵,۶۷۸ ۰.۹۵۰	۵,۹۰۲ ۰.۹۰۰	۵,۲۸۸ ۰.۹۵۰	۵,۵۸۶ ۰.۹۰۰	AW CP	۹

اطلاعات بیزی^۱ (BIC)، مقادیر آماره کلموگروف-اسمیرنوف^۲ (K-S) و مقادیر p مربوطه به آن برای توزیع‌های نمایی و نمایی اندازه-اریب محاسبه شده است. همچنین، پارامترهای مجهول مدل‌های مربوطه را با روش حداکثر درستنمایی تخمین زده و خطای استاندارد آنها نیز به دست آمده است. نتایج در جدول ۶ نشان داده شده است. جدول

جدول ۶. مقادیر برآورد شده، $-\log L$ ، AIC، BIC، آماره K-S و p -مقدار برای داده‌های مثال ۱

توزیع‌ها	θ و (RMSE) برآوردها	$-\log L$	AIC	BIC	K-S	p -مقدار
نمایی	۱۲۵۳۶ (۰/۱۱۲)	۶۷۰۴۳	۱۳۶۰۸۷	۱۳۷۰۳۲	۰/۲۶۶۱	۰/۱۱۱۹
نمایی اندازه-اریب	۶۲۶۸ (۰/۰۴۲)	۶۲۷۸۴	۱۲۷۵۶	۱۲۸۵۱۴	۰/۱۳۲۶	۰/۸۴۸۷

۶ نشان می‌دهد که مقادیر RMSE، $-\log L$ ، AIC، BIC و آماره K-S برای توزیع نمایی اندازه-اریب نسبت به توزیع نمایی کمترین مقدار به دست آمده است. همچنین، p -مقدار برای توزیع نمایی اندازه-اریب نسبت به توزیع نمایی بیشترین مقدار محاسبه شده است. بنابراین، توزیع نمایی اندازه-اریب نسبت به توزیع نمایی انعطاف‌پذیری بهتری دارد. همچنین نمودارهای TTT، احتمال-احتمال، تابع توزیع برازش داده شده در مقابل تابع توزیع تجربی و بافت‌نگار برای داده‌های فوق و برای توزیع‌های نمایی و نمایی اندازه-اریب در شکل ۱ نمایش داده شده‌اند که برازش مناسب توزیع نمایی اندازه-اریب بر داده‌ها را تأیید می‌کنند. با توجه به جدول ۶، مقدار برآورد ماکسیمم درستنمایی برای پارامتر توزیع نمایی اندازه-اریب $\hat{\theta} = ۶/۴۶۸۱$ است. همچنین، مقدار آماره آزمون کلموگروف-اسمیرنوف و p -مقدار برای توزیع نمایی اندازه-اریب به ترتیب ۰/۱۳۲۶ و ۰/۸۴۸۷ هستند. از اینرو، توزیع $LBE(\hat{\theta})$ برازش خوبی برای داده‌های

^۱Bayesian Information Criterion

^۲Kolmogrov-Smirnov

فوق می‌دهد. مقدارهای رکوردهای بالای مستخرج از داده‌ها عبارتند از: $\{۳/۲۱, ۱۳/۵۳, ۱۶/۳۶, ۲۰/۲۰, ۲۸/۴۰\}$. برای این مشاهدات، برآورد ماکسیمم درستنمایی $\hat{\theta}_{MLE} = ۳۸۷۷۲$ و برآورد گشتاوری $\hat{\theta}_{MBE} = ۳۵۴۵۷$ محاسبه شده است. برای محاسبه برآورد بیز از توزیع پیشین تقریباً ناآگاهی‌بخش $\alpha = \beta = ۰/۰۰۰۱$ استفاده شده است. در الگوریتم متروپلیس-هستینگز مقدار اولیه برآورد ماکسیمم درستنمایی $\theta^{(۰)} = ۳۸۷۷۲$ و واریانس توزیع پیشنهادی معکوس اطلاع فیش $S_{\theta}^2 = ۲۸۴۲۷$ در نظر گرفته شده است. با استفاده از الگوریتم فوق نمونه‌ای به حجم $N = ۵۰۰۰۰$ از θ ها با درصد پذیرش ۶۳% تولید شده است. برای از بین بردن اثر نقاط آغازین، $M = ۵۰۰۰$ نمونه اولیه حذف شده است. برآورد بیز بر اساس روش MCMC، روش نمونه‌گیری نقاط مهم و تقریب لیندلی به ترتیب $\hat{\theta}_{BES} = ۴۴۹۹۶$ ، $\hat{\theta}_{SIS} = ۴۴۹۹۶$ و $\hat{\theta}_{BLS} = ۴۴۵۱۹$ به دست می‌آیند. برآورد بازه‌ای برای پارامتر θ بر اساس توزیع مجانبی MLE، بر اساس کمیت محوری و بر اساس آزمون نسبت ماکسیمم درستنمایی به ترتیب به صورت $(۱/۱۹۶۴, ۶/۷۵۸۰)$ ، $(۱/۱۵۷, ۸/۴۹۰۸)$ و $(۲/۱۱۱۵, ۸/۶۴۱۰)$ به دست می‌آیند. بازه‌های اطمینان بیزی بر اساس روش MCMC و روش نمونه‌گیری نقاط مهم به ترتیب $(۲/۱۴۷۰, ۹/۴۹۱۷)$ و $(۱/۸۴۸۶, ۸/۰۵۷۷)$ محاسبه شده‌اند. پیش‌بینی‌کننده‌های نقطه‌ای و بازه‌ای مختلفی برای رکورد بالای مشاهده نشده $Z = Y_n$ به دست آمده است. نتایج در جداول ۷ و ۸ گزارش شده است. بافت‌نگار زنجیره دنباله θ های به دست آمده از الگوریتم متروپلیس-هستینگز از توزیع پیشین تقریباً ناآگاهی‌بخش در شکل ۲ ارائه شده است. این نمودار نشان می‌دهد که انتخاب توزیع نرمال به عنوان تقریبی از تابع چگالی پسین و توزیع پیشنهادی انتخابی کاملاً مناسب است. برای بررسی همگرایی زنجیره‌های تولید شده در الگوریتم از نمودار اثر استفاده شده است. این نمودار نشان می‌دهد که مقادیر θ های تولید شده در الگوریتم متروپلیس-هستینگز به طور تصادفی در اطراف میانگین پراکنده شده‌اند. این نمودار همگرایی در الگوریتم را نشان می‌دهد. توجه شود در مثال فوق، برای بررسی وجودیت و یکتایی برآورد ماکسیمم درستنمایی پارامتر θ ، نمودار تابع لگاریتم ماکسیمم درستنمایی $L(y|\theta)$ رسم شده است. شکل ۳ نشان می‌دهد که تابع لگاریتم ماکسیمم درستنمایی در بازه $(۰, \infty)$ یک تابع صعودی است و لذا برآورد ماکسیمم درستنمایی وجود دارد و یکتاست. همچنین برای اثبات وجودیت برآوردگر گشتاوری (MBE) معادله (۶) را برابر با $\varphi(\theta)$ در نظر گرفته و برای مثال فوق، نمودار تابع $\varphi(\theta)$ رسم شده است. شکل ۳ نیز نشان می‌دهد که تابع $\varphi(\theta)$ در بازه $(۰, \infty)$ یک تابع نزولی است. لذا برآوردگر گشتاوری که از حل معادله $\varphi(\theta) = ۰$ بدست می‌آید، وجود دارد و یکتاست. برای اثبات وجودیت جواب‌های معادله (۱۳)، نمودار تابع $\xi(\theta)$ برای مثال فوق رسم شده است. شکل ۳ نیز نشان می‌دهد که تابع $\xi(\theta)$ در بازه $(۰, \infty)$ یک تابع نزولی است. لذا جواب تابع $\xi(\theta)$ وجود دارد و یکتاست.

۸ بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله، مسئله برآوردیابی و پیش‌بینی رکوردهای آینده برای توزیع نمایی اندازه-اریب، در دو چارچوب کلاسیک و بیزی بررسی شد. در بخش برآوردیابی نقطه‌ای، روش‌های ماکسیمم درستنمایی، گشتاوری و بیزی (تحت تابع زیان مربع خطا با استفاده از الگوهای لیندلی، زنجیر مارکوف مونت کارلو و نمونه‌گیری نقاط مهم) به کار گرفته شدند.

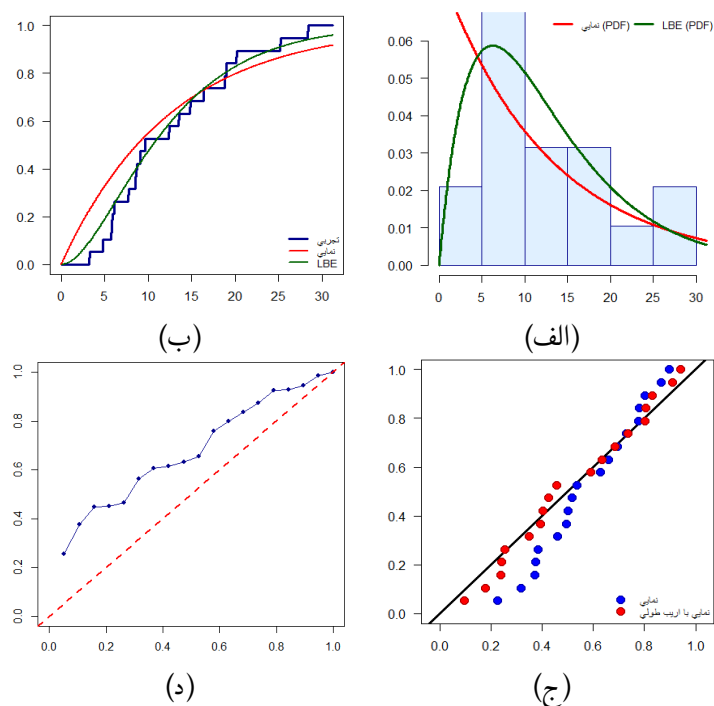
جدول ۷. پیش‌بینی‌کننده‌های نقطه‌ای برای رکورد بالای مشاهده نشده $Z = Y_n$

n	$PMLE$	MLP	BUP	CMP	رهیافت بیزی	
					نمونه‌گیری نقاط مهم	متروپولیس-هستینگز
۶	۳,۴۹۰	۳۲,۳۳۹	۳۲,۸۶۵	۳۱,۵۲۳	۳۳,۵۹۲	۳۳,۶۱۷
۷	۳,۴۹۸	۳۶,۲۲۹	۳۷,۲۷۷	۳۵,۹۰۴	۳۸,۶۴۵	۳۸,۶۱۹
۸	۳,۵۰۳	۴۰,۰۸۱	۴۱,۶۴۵	۴۰,۲۷۸	۴۳,۶۸۷	۴۳,۸۰۵
۹	۳,۵۰۵	۴۳,۹۰۰	۴۵,۹۷۸	۴۴,۶۱۹	۴۸,۶۷۷	۴۸,۸۰۲
۱۰	۳,۵۱۰	۴۷,۷۱۳	۵۰,۲۸۰	۴۸,۹۳۰	۵۳,۵۹۱	۵۳,۴۲۲
۱۱	۳,۵۱۲	۵۱,۴۸۸	۵۴,۵۵۸	۵۳,۲۱۴	۵۸,۴۷۶	۵۸,۸۰۷
۱۲	۳,۵۱۲	۵۵,۲۳۳	۵۸,۸۱۴	۵۷,۴۷۵	۶۳,۳۳۹	۶۳,۵۶۱

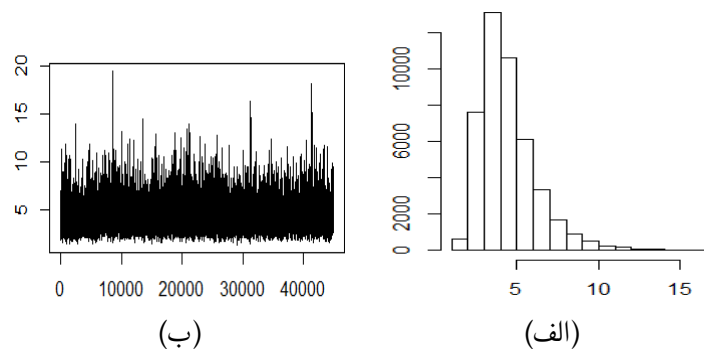
جدول ۸. بازه‌های پیش‌بینی برای رکورد بالای مشاهده نشده $Z = Y_n$

n	روش محوری	HCD	رهیافت بیزی	
			نمونه‌گیری نقاط مهم	متروپولیس-هستینگز
۶	(۲۸,۵۱۴, ۴۴,۶۹۲)	(۲۸,۴۰۰, ۴۱,۶۸۱)	(۲۸,۵۱۳, ۴۹,۸۸۳)	(۲۸,۵۱۲, ۴۹,۶۸۴)
۷	(۲۹,۴۹۶, ۵۲,۷۹۳)	(۲۸,۵۹۱, ۴۹,۲۹۶)	(۲۹,۴۲۱, ۶۲,۲۶۴)	(۲۹,۴۲۷, ۶۲,۶۷۶)
۸	(۳۱,۱۸۹, ۵۹,۸۳۲)	(۲۹,۷۷۲, ۵۶,۳۳۳)	(۳۰,۹۰۶, ۷۳,۶۵۰)	(۳۰,۸۹۱, ۷۳,۹۸۳)
۹	(۳۳,۲۹۴, ۶۶,۳۵۴)	(۳۱,۶۰۹, ۶۲,۸۹۶)	(۳۲,۶۵۷, ۸۴,۲۹۴)	(۳۲,۶۵۳, ۸۵,۶۰۳)
۱۰	(۳۵,۶۶۱, ۷۲,۵۵۴)	(۳۳,۸۱۵, ۶۹,۱۴۶)	(۳۴,۵۸۶, ۹۴,۹۰۸)	(۳۴,۵۶۹, ۹۴,۵۱۰)
۱۱	(۳۸,۲۱۰, ۷۸,۵۲۸)	(۳۶,۲۵۵, ۷۵,۱۶۵)	(۳۶,۶۳۷, ۱۰۵,۳۱۲)	(۳۶,۵۶۵, ۱۰۳,۹۴۵)
۱۲	(۴۰,۸۹۱, ۸۴,۳۳۱)	(۳۸,۸۶۰, ۸۱,۰۰۸)	(۳۸,۶۳۵, ۱۱۵,۲۳۹)	(۳۸,۶۰۰, ۱۱۳,۶۹۱)

همچنین بازه‌های اطمینان مجانبی، محوری، بیزی و بازه‌های مبتنی بر آزمون نسبت درستنمایی محاسبه گردیدند. در بخش پیش‌بینی نیز پیش‌بینی‌کننده‌های نقطه‌ای و بازه‌ای مختلفی برای رکورد بالای مشاهده‌نشده $Z = Y_n$ ارائه شد. نتایج شبیه‌سازی نشان می‌دهد که در برآوردیابی نقطه‌ای بیز تقریبی، روش لیندلی عملکرد بهتری نسبت به روش‌های متروپولیس-هستینگز و نمونه‌گیری نقاط مهم دارد. به‌طور کلی، در صورت وجود اطلاعات پیشین آگاهی‌بخش درباره پارامتر θ ، استفاده از برآوردگر بیزی و در غیر این صورت، استفاده از برآوردگر ماکسیم درستنمایی توصیه می‌شود. در بحث برآوردیابی بازه‌ای نیز بازه‌های بیزی (با پیشین آگاهی‌بخش) و بازه‌های مجانبی عملکرد مطلوب‌تری داشتند. در حوزه پیش‌بینی، پیش‌بینی‌کننده‌های بیز تقریبی (تحت پیشین آگاهی‌بخش) و پیش‌بینی‌کننده نااریب برتری خود را نشان دادند. افزون بر این، بازه‌های پیش‌بینی HCD و محوری، به‌ترتیب کمترین میانگین طول بازه را به خود اختصاص دادند. در نهایت، تمامی محاسبات این پژوهش با استفاده از نرم‌افزار R (نسخه 3.5.3) انجام شده است.



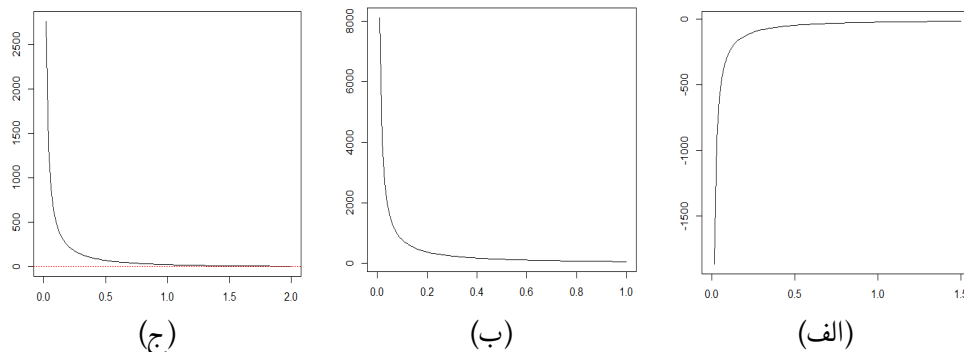
شکل ۱. الف- نمودار بافت‌نگار داده‌ها هم‌زمان با تابع احتمال برازش داده شده ب- تابع توزیع برازش داده شده در مقابل تابع توزیع تجربی ج- نمودار احتمال-احتمال د- نمودار TTT



شکل ۲. الف- نمودار هیستوگرام، ب- نمودار اثر مربوط به الگوریتم متروپولیس

تقدیر و تشکر

نویسنده مقاله از سردبیر محترم، داوران گرامی، هیئت تحریریه و ویراستار محترم مجله بابت ارائه نظرات ارزنده که باعث بهبود کیفیت نتایج و نحوه ارائه مقاله گردید کمال تشکر و امتنان را دارد.



شکل ۳. الف- نمودار تابع لگاریتم درستنامی $L(y|\theta)$ ب- نمودار $\varphi(\theta)$ ج- نمودار $\xi(\theta)$

مراجع

باستان، ف. و میرمصطفائی، م. (۱۴۰۰)، برآوردیابی و پیش‌بینی برای توزیع پواسن-نمایی بر اساس رکوردها و زمان‌های بین رکورد: یک مطالعه مقایسه‌ای، *مجله علوم آماری*، ۱۵، ۳۸۱-۴۰۵.

علوی، س.م. ر. علی‌بابایی، ص. و چینی‌پرداز، ر. (۱۳۹۶)، توزیع بتای اریب اندازه آماشیده، *مجله علوم آماری*، ۱۱، ۲۸۵-۲۹۵.

فلاح، ع. (۱۴۰۴)، برآوردیابی و پیش‌بینی برای توزیع لیندلی اصلاح شده بر اساس داده‌های رکوردی، *مجله مدل‌سازی پیشرفته*، ۱۵، ۴۱-۶۲.

کیاپور، آ. و نقی‌زاده قمی، م. (۱۳۹۵)، یک بازه تحمل تقریبی برای متغیر تصادفی پواسن-لیندلی اندازه-اریب، *مجله علوم آماری*، ۱۰، ۲۹۹-۳۱۶.

نوروزی فیروز، م. جباری خامنه‌ای، ح. و حیدری، ع. ا. (۱۴۰۵)، برآوردیابی و پیش‌بینی در توزیع لیندلی-وایبول براساس داده‌های رکوردی، *مجله علوم آماری*، ۲۰(۱)، انتشار بر خط.

Ahsanullah, M. (1995), *Record Statistics*, Commack, New York: Nova Science Publishers, Inc.

Arnold, B. C., Balakrishnan, N. and Nagaraja, H. N. (1998), *Records*, New York: John Wiley & Sons.

Asgharzadeh, A., Fallah, A., Raqab, M. Z. and Valiollahi, R. (2018), Statistical Inference Based on Lindley Record Data, *Statistical Papers*, **59**(3), 759-779.

- Basak, P. and Balakrishnan, N. (2003), Maximum Likelihood Prediction of Future Record Statistic, *Mathematical and Statistical Methods in Reliability*, In: B. H. Lindquist and K. A. Doksum (Eds.), Series on Quality, Reliability and Engineering Statistics, World Scientific, **7**, 159-175.
- Cameron, A. C. and Trivedi, P. K. (2005), *Microeconometrics: Methods and Applications*, Cambridge: Cambridge University Press.
- Casella, G. and Berger, R. L. (2002), *Statistical Inference*, 2nd Edition, California: Duxbury.
- Chen, M. H. and Shao, Q. M. (1999), Monte Carlo Estimation of Bayesian Credible and HPD Intervals, *Journal of Computational and Graphical Statistics*, **8**(1), 69-92.
- Chivers, C. (2012), MHadaptive: General Markov Chain Monte Carlo for Bayesian Inference Using Adaptive Metropolis-Hastings Sampling, R Package Version 1.1-8, Available at: <http://CRAN.R-project.org/package=MHadaptive>.
- Hasselman, B. (2018), nleqslv: Solve Systems of Nonlinear Equations, R Package Version 3.3.2, Available at: <https://CRAN.R-project.org/package=nleqslv>.
- Lee, K. (2024), Estimation of Length Biased Exponential Distribution Based on Progressive Hybrid Censoring, *Communications for Statistical Applications and Methods*, **31**(6), 661-675.
- Lindley, D. V. (1980), Approximate Bayesian Methods, *Trabajos de Estadística Y de Investigación Operativa*, **31**(1), 223-237.
- Rao, C. R. (1965), On Discrete Distribution Arising out of Methods of Ascertainment: Classical and Contagious Distribution, In: G. P. Patil (Ed.), *Classical and Contagious Discrete Distributions*, Calcutta: Statistical Publishing Society, 320-332.
- Robert, C. P. and Casella, G. (2004), *Monte Carlo Statistical Methods*, 2nd Edition, New York: Springer-Verlag.

Ross, S. M. (2010), *Introduction to Probability Models*, 10th Edition, Amsterdam: Academic Press.

Saadati Nik, A., Asgharzadeh, A. and Baklizi, A. (2023), Inference Based on New Pareto-Type Records with Applications to Precipitation and Covid-19 Data, *Statistics, Optimization & Information Computing*, **11**(1), 243-257.