مجله علوم آماری، بهار و تابستان ۱۳۹۶
جلد ۱۱، شماره ۱، ص ۳۷-۵۵
DOI: 10.18869/acadpub.jss.11.1.37

طرح D-بهینه برای مدل رگرسیونی بتا با اثر تصادفی

حبیب جعفری، سمیرا امیربیگی، پریسا پارسا مرام
گروه آمار، دانشگاه رازی کرمانشاه

تاریخ دریافت: ۱۳۹۴/۹/۷ تاریخ آخرین بازنگری: ۱۳۹۵/۷/۲۷

چکیده: عمده تحقیقات بهینه‌سازی طرح بر روی مدل‌های خطی و خطی تعمیم‌یافته صورت گرفته است. در مطالعات کاربردی در زمینه کشاورزی و علوم اجتماعی و ... معمولا در کنار اثرات ثابت حداقل یک اثر تصادفی نیز در مدل وجود دارد. این مدل‌ها تحت عنوان مدل‌های آمیخته شهرت دارند. در این مقاله مدل رگرسیون بتا با یک عرض از مبدا تصادفی به عنوان یک مدل آمیخته، مورد توجه است و طرح D-بهینه موضعی برای دو حالت ساده و درجه دو از این مدل محاسبه می‌شود و روند تغییرات نقاط طرح بهینه به ازای مقادیر پارامترهای مختلف بررسی خواهد شد. در مدل ساده به ازای پارامترهای مختلف یک طرح D-بهینه موضعی دو نقطه‌ای بدست آمده است و در مدل درجه دو یک طرح D-بهینه موضعی سه نقطه‌ای حاصل شد که موقعیت و وزن این نقاط به تفصیل در مقاله ارائه می‌شود. همچنین بر اساس معیار کارایی این طرح‌های D-بهینه موضعی با طرح‌های مشابه وقتی اثر تصادفی در مدل در نظر گرفته نمی‌شود، از کارایی طرح بهینه وقتی اثر تصادفی در مدل در نظر گرفته نشود پایین‌تر است.
واژه‌های کلیدی: طرح D-بهینه، اثر تصادفی، شبه‌درستنمایی، مدل رگرسیون بتا، ماتریس شبه‌اطلاع فیشر.

۱ مقدمه

اساس نظریه طرح‌های بهینه توسط اسمیت (۱۹۱۸) معرفی شد. در نیمه دوم قرن بیستم این مبحث به طور جدی‌تری دنبال گردید. پیش از نیمه دوم، طرح‌های بهینه برای مدل رگرسیون خطی مورد بحث و

آدرس الکترونیکی نویسنده مسئول مقاله: حبیب جعفری، jafari_habib@yahoo.com
کد موضوع‌بندی ریاضی (۲۰۱۰): 62J12، 62K05

بررسی قرار گرفته بود. در بهینه سازی طرح آزمایش‌ها هدف یافتن سطوحی از متغیر توضیحی بر اساس یک ملاک بهینگی مناسب است. این ملاک‌ها معمولا توابعی از ماتریس اطلاع فیشر هستند. در مدل‌های غیر خطی و خطی تعمیم‌یافته ماتریس اطلاع به پارامترهای مدل بستگی دارد. این وابستگی یک چالش در بدست آوردن طرح‌های بهینه است. از یک طرف برای پیدا کردن طرح آزمایش بهینه باید مقادیر پارامتر را بدانیم و از طرف دیگر برای دانستن مقادیر پارامتر نیاز به دانستن طرح آزمایش است. چرنوف (۱۹۵۳) طرح بهینه موضعی را برای حل این مشکل پیشنهاد داد. در این روش برای پارامتر مجهول یک مقدار اولیه در نظر گرفته و سپس طرح بهینه به‌دست آورده می‌شود. همچنین طرح‌های بهینه موضعی توسط هینز (۱۹۹۵)، جیا و ام یرز (۲۰۰۱)، ابرین (۲۰۰۵)، دت و همکاران (۲۰۰۵)، لی و مجومدار (۲۰۰۸) و جعفری و همکاران (۲۰۱۴) برای برخی از مدل‌های رگرسیون خطی تعمیم‌یافته و غیرخطی به دست آمده و مورد تحلیل و بررسی قرار گرفت.

سیلوی (۱۹۸۰) به نظریه طرح‌های بهینه، ابتدا برای مدل‌های خطی و سپس برای مدل‌های غیرخطی پرداخته است. او ادبیات موضوع را به طور مختصر بیان کرد و برخی را مورد بحث قرار داد. فدروف (۱۹۹۷) روش به دست آوردن طرح‌های بهینه برای انواع مدل های رگرسیون با و بدون اثر تصادفی را بیان کرد که یک دید کلی در چگونگی به دست آوردن طرح بهینه برای انواع مدل‌ها را به خواننده داد. چون در برخی از مدل‌های آمیخته خطی فرم بسته‌ای برای تابع درستنمایی به دست نمی‌آید، روش شبه‌درستنمایی مورد استفاده قرار می‌گیرد. این روش به طور کامل در ودربرن (۱۹۷۴) تشریح شده‌است. در مقاله حاضر، مدل رگرسیونی بتا (جزء مدل‌های خطی تعمیم‌یافته) در نظر گرفته شده است. فرری و نیتو (۲۰۰۴) پارامتربندی جدیدی را برای توزیع بتا در نظر گرفتند و براساس آن یک مدل رگرسیونی تعریف کردند.

مدل رگرسیونی بتا کاربردهای فراوانی در علوم مختلف از جمله علوم پزشکی و علوم سیاسی دارد؛ پائولینو (۲۰۰۱) داده‌های نسبتی را در علوم سیاسی (انتخابات، نظام اداری و ...) مورد بحث قرار داد و برای آن‌ها مدل رگرسیون بتا را در نظر گرفت. همچنین از روش شبیه‌سازی مونت کارلو برای نشان دادن دقت برآورد ماکسیمم درستنمایی داده‌ها استفاده کرد. گالویس و همکاران (۲۰۱۴) مدل رگرسیون آمیخته بتا را به داده‌های دهان و دندان برازش دادند. در این مطالعه، ۲۹۰ نفر به عنوان نمونه در نظر گرفته شدند و برای هر بیمار نسبت دندان-سایت‌های بیمار[۱] (متغیر پاسخ)، در چهار نوع دندان پیشین، دندان نیش، دندان پیش آسیا و دندان آسیا اندازه‌گیری شده است. این نسبت در بازه صفر تا یک قرار دارد. آن‌ها میزان تاثیر سن را با استفاده از این مدل بررسی نمودند. ناگفته نماند که اثر تصادفی در این مثال بیماران هستند.

[1] The proportion of diseased tooth-sites

در این مقاله، برای به دست آوردن طرح بهینه معیار پرکاربرد D-بهینگی (اتکینسون،۲۰۰۷) برای مدل رگرسیون بتا با عرض از مبدا تصادفی در دو حالت ساده و مرتبه دو، با شبه‌درستنمایی محاسبه شده است. وو و همکاران (۲۰۰۵) طرح D-بهینه را بر اساس مینیم‌سازی واریانس تعمیم‌یافته براوردهای ماکسیمم درستنمایی برای مجموعه‌ای از مدل‌های رگرسیون بتا به دست آوردند. همچنین لطیف و ظفر یاب (۲۰۱۵) طرح D-بهینه را برای مدل رگرسیون بتا با یک متغیر توضیحی مورد بحث قرار دادند و کارایی طرح‌های بهینه به دست آمده را مقایسه کردند.

در مقاله حاضر، در بخش ۲ به تعریف مدل پرداخته و ساختار کواریانس آن بدست آورده می‌شود. در بخش ۳ ملاک D-بهینگی تعریف شده است. روش شبه‌درستنمایی در بخش ۴ تشریح و با استفاده از آن ماتریس شبه اطلاع محاسبه می‌شود. در بخش های ۵ و ۶ طرح D-بهینه برای دو حالت از مدل محاسبه شده و در بخش ۷ بر اساس معیار کارایی طرح بهینه بدون اثر تصادفی و با اثر تصادفی مقایسه شده‌اند و در آخر، بحث و نتیجه‌گیری در بخش ۸ آورده شده است.

۲ مشخصات مدل

در این مقاله متغیر تصادفی وابسته Y_{ijk} به شرط اثر تصادفی b_i، دارای توزیع بتا با پارامتر مزاحم و معلوم ϕ به صورت

$$Y_{ijk} \mid b_i \sim Beta(\phi(\mu_{ij}^{(b_i)}), \phi(1-\mu_{ij}^{(b_i)})); \begin{cases} i = 1, ..., s \\ j = 1, ..., t_i \\ k = 1, ..., m_{ij} \end{cases} , \sum_j m_{ij} = m_i, \sum_i m_i = n, \tag{1}$$

در نظر گرفته شده است، که در آن تابع چگالی به صورت

$$f(y_{ijk}|b_i, \beta)) = \frac{\Gamma(\phi)}{\Gamma(\mu_{ij}^{(b_i)}\phi)\Gamma(\phi - \mu_{ij}^{(b_i)}\phi)} y_{ijk}^{\mu_{ij}^{(b_i)}\phi - 1}(1 - y_{ijk})^{\phi(1-\mu_{ij}^{(b_i)})-1} , \tag{2}$$

و میانگین و واریانس شرطی Y_{ijk} به ترتیب عبارتند از:

$$E(Y_{ijk}|b_i) = \frac{\mu_{ij}^{(b_i)}\phi}{\mu_{ij}^{(b_i)}\phi + \phi(1-\mu_{ij}^{(b_i)})} = \mu_{ij}^{(b_i)} \quad (۳)$$

$$Var(Y_{ijk}|b_i) = \mu_{ij}^{(b_i)}(1-\mu_{ij}^{(b_i)})(\frac{1}{\phi+1}) \quad (۴)$$

حال با توجه به توزیع Y_{ijk} در رابطه (۲) امید ریاضی آن بین صفر و یک خواهد بود و در این مقاله با استفاده از تابع ربط لوجیت، فرض می‌شود $E(Y_{ijk}|b_i) = \mu_{ij}^{(b_i)} = \frac{\exp(b_i+\mathbf{f}^T(x_{ij})\boldsymbol{\beta})}{1+\exp(b_i+\mathbf{f}^T(x_{ij})\boldsymbol{\beta})}$، که در آن Y_{ijk} بیان‌گر k امین تکرار متغیر وابسته برای (i,j) امین واحد بر اساس x_{ij} (مقدار x، در واحد (i,j) ام) از ناحیه طرح و m_{ij} نشان دهنده تعداد تکرارهای این واحد است. $\mathbf{f}(.) = (1, f_1(.), ..., f_{p-1}(.))^T$ بردار رگرسیون، شامل توابعی معلوم از x ، $\boldsymbol{\beta} = (\beta_0, \beta_1, ..., \beta_{p-1})^T$ بردار p-بعدی از پارامترهای مجهول و b_i اثر تصادفی مدل است که با توجه به تکیه‌گاه آن و مدل مورد نظر، می‌توان توزیع پیشین مناسبی برای آن در نظر گرفت. در این مقاله، با فرض مثبت بودن b_i برای آن توزیع نمایی با پارامتر یک در نظر گرفته شده است. برای مثال، فرض کنید قصد داریم بر روی بیماران کلینیک‌های دندانپزشکی شهر تهران (مشابه گالویس و همکاران، ۲۰۱۴) آزمایشی انجام دهیم و نسبت دندان-سایت‌های بیماران را برای نوع پیشین از دندان اندازه‌گیری نماییم. این نسبت (Y متغیر پاسخ) بین اعداد صفر و یک قرار دارد. به همین منظور می‌توان برای این مشاهدات توزیع بتا فرض کرد. در این مثال، میزان فشار خون را می‌توان در سه سطح پایین، عادی، بالا ($j = 1, 2, 3$) و کلینیک‌های دندانپزشکی را به عنوان اثر تصادفی در نظر گرفت ($i = 1, ..., s$). در این حالت، Y_{ijk} معرف نسبت دندان-سایت‌های شخص k ام با فشار خون سطح j ام در کلینیک i ام در نظر گرفته شده است که دارای سن x_{ij} خواهند بود. مشابه نیاپرست و مهر منصور (۲۰۱۲) فرض کنید برای واحدهای مختلف اثرهای تصادفی ناهمبسته‌اند یا به عبارتی به ازای هر $i \neq i'$ ، $Cov(b_i, b_{i'}) = 0$.

همچنین با توجه به روابط (۳) و (۴) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} E(Y_{ijk}) &= E(E(Y_{ijk}|b_i)) = E(\mu_{ij}^{(b_i)}) \\ Var(Y_{ijk}) &= Var(E(Y_{ijk}|b_i)) + E(Var(Y_{ijk}|b_i)) \quad (۵) \\ &= Var(\mu_{ij}^{(b_i)}) + E(\mu_{ij}^{(b_i)}(1-\mu_{ij}^{(b_i)})(\frac{1}{\phi+1})) \quad (۶) \end{aligned}$$

همچنین برای محاسبه کواریانس دو مشاهده از یک واحد آزمایش خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} Cov(Y_{ijk}, Y_{ij'k'}) &= Cov(E(Y_{ijk}|b_i), E(Y_{ij'k'}|b_i)) + E(Cov(Y_{ijk}, Y_{ij'k'}|b_i)) \\ &= Cov(E(Y_{ijk}|b_i), E(Y_{ij'k'}|b_i)); (j,k) \neq (j',k') \end{aligned} \quad (۷)$$

و

$$Cov(Y_{ijk}, Y_{ijk'}) = Var(Y_{ijk}) \; ; \; k = k' \quad (۸)$$

و برای $i \neq i'$

$$Cov(Y_{ijk}, Y_{i'j'k'}) = ۰$$

در این مقاله دو حالت خاص از مدل مورد بحث، در نظر گرفته می‌شود.

۱-مدل رگرسیون بتا ساده با عرض از مبدا تصادفی [۲] (SBRM) که در آن

$$\mu_{ij}^{(b_i)} = \frac{\exp(b_i + \beta_۰ + \beta_۱ x_{ij})}{۱ + \exp(b_i + \beta_۰ + \beta_۱ x_{ij})} \quad ; \boldsymbol{\beta} = (\beta_۰, \beta_۱)^T, \mathbf{f}(x_{ij}) = (۱, x_{ij})^T$$

۲-مدل رگرسیونی بتا درجه دو با عرض از مبدا تصادفی[۳] (QBRM) که در آن

$$\mu_{ij}^{(b_i)} = \frac{\exp(b_i + \beta_۰ + \beta_۱ x_{ij} + \beta_۲ x_{ij}^۲)}{۱ + \exp(b_i + \beta_۰ + \beta_۱ x_{ij} + \beta_۲ x_{ij}^۲)}; \boldsymbol{\beta} = (\beta_۰, \beta_۱, \beta_۲)^T, \mathbf{f}(x_{ij}) = (۱, x_{ij}, x_{ij}^۲)^T$$

برای محاسبه روابط (۵) تا (۸) نیاز به محاسبه روابط زیر داریم.

$$E(\mu_{ij}^{(b_i)}) = \int_۰^\infty \frac{c_{ij}\exp(b_i)}{۱ + c_{ij}\exp(b_i)} \exp(-b_i) db_i$$
$$E(\mu_{ij}^{(b_i)۲}) = \int_۰^\infty \frac{c_{ij}^۲ \exp(۲b_i)}{(۱ + c_{ij}\exp(b_i))^۲} \exp(-b_i) db_i$$
$$E(\mu_{ij}^{(b_i)}(۱ - \mu_{ij}^{(b_i)})) = \int_۰^\infty \frac{c_{ij}\exp(b_i)}{(۱ + c_{ij}\exp(b_i))^۲} \exp(-b_i) db_i$$

---
[۲] Simpel Beta Regression Model
[۳] Quadratic Beta Regression Model

$$E(\mu_{ij}^{(b_i)}\mu_{ij'}^{(b_i)}) = \int_0^\infty \frac{c_{ij}c_{ij'}\exp(2b_i)}{(1+c_{ij}\exp(b_i))(1+c_{ij'}\exp(b_i))}\exp(-b_i)db_i$$

که در آن c_{ij} در مدل SBRM برابر $\frac{\exp(\beta_0+\beta_1 x_{ij})}{1+\exp(\beta_0+\beta_1 x_{ij})}$ و در مدل QBRM برابر $\frac{\exp(b_i+\beta_0+\beta_1 x_{ij}+\beta_2 x_{ij}^2)}{1+\exp(b_i+\beta_0+\beta_1 x_{ij}+\beta_2 x_{ij}^2)}$ است. مشابه (پارسامرام و جعفری، ۲۰۱۵) با حل انتگرال‌های فوق روابط زیر به دست خواهند آمد:

$$\begin{aligned}
&E(\mu_{ij}^{(b_i)}) = -c_{ij}\ln(\frac{c_{ij}}{1+c_{ij}}) \\
&E(\mu_{ij}^{(b_i)2}) = \frac{c_{ij}}{1+c_{ij}} \\
&E(\mu_{ij}^{(b_i)}(1-\mu_{ij}^{(b_i)})) = -\frac{c_{ij}}{1+c_{ij}} - c_{ij}\ln(\frac{c_{ij}}{1+c_{ij}}) \\
&E(\mu_{ij}^{(b_i)}\mu_{ij'}^{(b_i)}) = \frac{c_{ij'}c_{ij}}{c_{ij'}-c_{ij}}[\ln(\frac{c_{ij'}}{1+c_{ij'}}) - \ln(\frac{c_{ij}}{1+c_{ij}})]
\end{aligned} \tag{9}$$

۳ معیارD-بهینگی

یکی از معیارهای بهینه‌سازی طرح، معیار D-بهینگی است که تابعی براساس دترمینان ماتریس اطلاع است (سیلوی، ۱۹۸۰). در این حالت ξ^* را یک طرح D-بهینه گویند اگر برای هر ξ در فضای تمام طرح‌ها

$$\det[M(\xi^*,\theta)] = \max_{\xi\in\Xi}\det(M(\xi,\theta))$$

برقرار باشد. پس برای بدست آوردن طرح بهینه نیاز به محاسبه ماتریس اطلاع فیشر است. در این حالت خاص تابع درستنمایی به صورت

$$L(\boldsymbol{\beta};\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{s}\log\int_0^\infty \prod_{j=1}^{t_i}\prod_{k=1}^{m_{ij}} \frac{\Gamma(\phi)}{\Gamma(\mu_{ij}^{(b_i)}\phi)\Gamma(\phi-\mu_{ij}^{(b_i)}\phi)} y_{ijk}^{\mu_{ij}^{(b_i)}\phi-1}(1-y_{ijk})^{\phi(1-\mu_{ij}^{(b_i)})-1}\exp(-b_i)db_i$$

خواهد بود که شامل انتگرال‌گیری بر اساس اثرات تصادفی b_i است. این انتگرال فرم بسته ندارد بنابراین قادر به محاسبه ماتریس اطلاع فیشر به روش معمول نخواهیم بود. یکی از راه‌حل‌های ارائه شده، استفاده از تابع شبه‌درستنمایی است، که در بخش ۴ توضیح داده خواهد شد.

۴ تابع شبه‌درستنمایی

فرض کنید $\boldsymbol{Y} = (Y_1, ..., Y_n)^T$ بردار متغیرهای پاسخ باشد که Y_iها دارای میانگین μ_i و واریانس $V_i = \upsilon(\mu_i)$ هستند. برای هر مشاهده تابع شبه‌درستنمایی، $Q(y_i, \mu_i)$، طبق ودربرن (۱۹۷۴) به صورت

$$U(y_i, \mu_i) = \frac{\partial Q(y_i, \mu_i)}{\partial \mu_i} = \frac{y_i - \mu_i}{\upsilon(\mu_i)}$$

تعریف می‌شود. به‌طور معادل، در صورت وجود

$$Q(y_i, \mu_i) = \int_{y_i}^{\mu_i} \frac{y_i - t}{\upsilon(t)} dt + h(y_i)$$

که در آن $h(y_i)$ تابعی تنها از مشاهدات است. معادلات شبه‌درستنمایی برای بردار پارامتر β به صورت:

$$U(\boldsymbol{\beta}) = \boldsymbol{D}^T \boldsymbol{V}^{-1} (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\beta}))$$

است که در آن $U_{\boldsymbol{\beta}}$ تابع شبه‌امتیاز[۴] نامیده می‌شود، $\boldsymbol{D}$ ماتریس $n \times p$ با عناصر $d_{ij} = \frac{\partial \mu_i}{\partial \beta_j}$ و $\boldsymbol{V} = diag\{V_1, ..., V_n\}$ است. برآورد ماکسیمم شبه‌درستنمایی $\boldsymbol{\beta}$ با برابر صفر قرار دادن $U(\boldsymbol{\beta})$ به‌دست خواهد آمد. تابع شبه‌امتیاز $U_{\boldsymbol{\beta}}$ میانگین صفر و ماتریس واریانس کواریانس $\mathfrak{M}_{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{D}^T \boldsymbol{V}^{-1} \boldsymbol{D}$ دارد، که در آن $\mathfrak{M}_{\boldsymbol{\beta}}$ ماتریس امید مشتق دوم از تابع شبه‌درستنمایی است. حال با استفاده از روش شبه‌درستنمایی، ماتریس شبه‌اطلاع مربوط به مدل (۲) را محاسبه می‌نماییم.

برای این منظور باید ماتریس‌های $\boldsymbol{D}$ و $\boldsymbol{V}$ برای مدل (۲) محاسبه شوند. در این مدل $\boldsymbol{\mu} = E(\boldsymbol{Y})$، که در آن $\boldsymbol{Y} = (\boldsymbol{Y}_1, \ldots, \boldsymbol{Y}_s)^T$ ، $\boldsymbol{Y}_i = (\boldsymbol{Y}_{i1}, \ldots, \boldsymbol{Y}_{it})^T$ و $\boldsymbol{Y}_{ij} = (Y_{ij1}, \ldots, Y_{ijm_{ij}})^T$. همچنین $\boldsymbol{V} = Var(\boldsymbol{Y})$و مشتق $\boldsymbol{\mu}$ نسبت به $\boldsymbol{\beta}$ با $\boldsymbol{D} = (\boldsymbol{D}_1, \ldots, \boldsymbol{D}_s)^T$ نشان داده می‌شود، به طوری‌که $\boldsymbol{D}_i$ یک ماتریس $m_i \times p$ است. بنابراین $\boldsymbol{D}$ یک ماتریس $n \times p$ خواهد بود. با این فرضیات ماتریس شبه اطلاع برای iامین واحد عبارت خواهدبود از:

$$M_i = \boldsymbol{D}_i^T [V_i(\boldsymbol{\mu})]^{-1} \boldsymbol{D}_i \;\; ; \; i = 1, ..., s \qquad (۱۰)$$

[۴] Quasi-score function

که در آن

$$V_i(\boldsymbol{\mu}) = \begin{pmatrix} V_i(\boldsymbol{\mu})^{(۱۱)} & V_i(\boldsymbol{\mu})^{(۱۲)} & \cdots & V_i(\boldsymbol{\mu})^{(۱t_i)} \\ V_i(\boldsymbol{\mu})^{(۲۱)} & V_i(\boldsymbol{\mu})^{(۲۲)} & \cdots & V_i(\boldsymbol{\mu})^{(۲t_i)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ V_i(\boldsymbol{\mu})^{(t_i۱)} & V_i(\boldsymbol{\mu})^{(t_i۲)} & \cdots & V_i(\boldsymbol{\mu})^{(t_it_i)} \end{pmatrix}$$

هر $V_i(\boldsymbol{\mu})^{(jj')}$ یک ماتریس به فرم

$$V_i(\boldsymbol{\mu})^{(jj')} = \begin{pmatrix} Cov(Y_{ij۱}, Y_{ij'۱}) & Cov(Y_{ij۱}, Y_{ij'۲}) & \cdots & Cov(Y_{ij۱}, Y_{ij'm_{ij'}}) \\ Cov(Y_{ij۲}, Y_{ij'۱}) & Cov(Y_{ij۲}, Y_{ij'۲}) & \cdots & Cov(Y_{ij۲}, Y_{ij'm_{ij'}}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Cov(Y_{ijm_{ij}}, Y_{ij'۱}) & Cov(Y_{ijm_{ij}}, Y_{ij'۲}) & \cdots & Cov(Y_{ijm_{ij}}, Y_{ij'm_{ij'}}) \end{pmatrix}$$

است، که هر یک از مولفه‌های آن از روابط (۶) تا (۸) محاسبه می‌شوند. مولفه‌های ماتریس $\boldsymbol{D}_i$ نیز به فرم

$$\boldsymbol{D}_i = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial\beta_۰}E[\mu_{i۱}^{(b_i)}] & \frac{\partial}{\partial\beta_۱}E[\mu_{i۱}^{(b_i)}] & \cdots & \frac{\partial}{\partial\beta_{p-۱}}E[\mu_{i۱}^{(b_i)}] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial\beta_۰}E[\mu_{i۱}^{(b_i)}] & \frac{\partial}{\partial\beta_۱}E[\mu_{i۱}^{(b_i)}] & \cdots & \frac{\partial}{\partial\beta_{p-۱}}E[\mu_{i۱}^{(b_i)}] \\ \frac{\partial}{\partial\beta_۰}E[\mu_{i۲}^{(b_i)}] & \frac{\partial}{\partial\beta_۱}E[\mu_{i۲}^{(b_i)}] & \cdots & \frac{\partial}{\partial\beta_{p-۱}}E[\mu_{i۲}^{(b_i)}] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial\beta_۰}E[\mu_{i۲}^{(b_i)}] & \frac{\partial}{\partial\beta_۱}E[\mu_{i۲}^{(b_i)}] & \cdots & \frac{\partial}{\partial\beta_{p-۱}}E[\mu_{i۲}^{(b_i)}] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial\beta_۰}E[\mu_{it_i}^{(b_i)}] & \frac{\partial}{\partial\beta_۱}E[\mu_{it_i}^{(b_i)}] & \cdots & \frac{\partial}{\partial\beta_{p-۱}}E[\mu_{it_i}^{(b_i)}] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial\beta_۰}E[\mu_{it_i}^{(b_i)}] & \frac{\partial}{\partial\beta_۱}E[\mu_{it_i}^{(b_i)}] & \cdots & \frac{\partial}{\partial\beta_{p-۱}}E[\mu_{it_i}^{(b_i)}] \end{pmatrix}$$

هستند، که هر کدام به تعداد m_{ij} بار تکرار می‌شوند. چون $\sum_{j=۱}^{t_i} m_{ij} = m_i$ است، بنابراین $\boldsymbol{D}_i$

یک ماتریس $m_i \times p$ است. هر یک از مولفه‌های ماتریس بالا از مشتق رابطه (۹) نسبت به بردار $\boldsymbol{\beta} = (\beta_0, \ldots, \beta_{p-1})^T$ محاسبه خواهند شد. چون ممکن است به ازای برخی از واحدهای i طرح‌های متفاوت وجود داشته باشد، طرح جامعه را به صورت

$$\eta = \begin{pmatrix} \xi_1 \cdots \xi_r \\ q_1 \cdots q_r \end{pmatrix}$$

معرفی می‌شود، که در آن $\sum_{i=1}^{r} q_i = 1$ و $(r \leq s)$ تعداد طرح‌های متفاوتی است که در مجموعه کل داده‌ها مشاهده شده است و q_i نسبت تعداد آزمایش‌هایی است که تحت طرح ξ_i انجام شده است. با توجه به اشملتر (۲۰۰۷) می‌توان تحت شرایطی نشان داد که اگر ξ^* طرح بهینه برای i امین واحد باشد، سپس همه واحدهای مختلف، تحت این طرح بهینه هستند. پس کافی است برای یک واحد، طرح بهینه بدست آورده شود و طرح بهینه جامعه به صورت $\eta = (\xi^* \ , \ 1)^T$ خواهد بود. فرضیه‌های اشملتر (۲۰۰۷) عبارتند از:

۱. معیار $\Phi : \mathcal{M} \to (-\infty, +\infty]$ یک تابع محدب روی $\mathcal{M}$ است. که در آن $\mathcal{M}$ کلاس ماتریس‌های متقارن نیمه معین مثبت p بعدی است.

۲. Φ نسبت به ترتیب جزئی لوئنر روی فضای $\mathcal{M}$ یکنوا است، یعنی برای هر $M_1, M_2 \in \mathcal{M}$ اگر $M_1 > M_2$ باشد آنگاه $\Phi(M_1) < \Phi(M_2)$ است.

۳. برای هر i، $m_i = m$ است.

ماتریس شبه‌اطلاع نقش ماتریس اطلاع فیشر را در تابع درستنمایی ایفا می‌کند. ماتریس شبه‌اطلاع M_i در رابطه (۱۰) متقارن و نیمه معین مثبت است، زیرا ماتریس واریانس-کواریانس $V_i(\boldsymbol{\mu})$ نیمه معین مثبت است. معیار D-بهینگی دارای خاصیت یکنوایی است (فدروف، ۱۹۹۷). برای برقراری فرض سوم، در این مقاله محققین تعداد تکرارها در هر گروه را، برابر در نظر گرفته‌اند. پس فرضیات بالا بر اساس مدل مطرح شده برقرار هستند و کافی ست طرح بهینه به ازای i امین واحد بدست آورده شود. نیاپرست و شوابه (۲۰۱۳) از این روش برای بدست آوردن طرح بهینه برای مدل رگرسیونی پواسن استفاده کردند.

جدول ۱. طرح D-بهینه در مدل SBRM با اثر تصادفی

β_0	β_1	ϕ: ۵۰		ϕ: ۱۰۰		ϕ: ۲۰۰	
۱	$-$۵	۰/۳۴	۰	۰/۲۹	۰	۰/۲۵	۰
		۰/۵	۰/۵	۰/۵	۰/۵	۰/۵	۰/۵
۱	$-$۴	۰/۴۳	۰	۰/۳۷	۰	۰/۳۱	۰
		۰/۵	۰/۵	۰/۵	۰/۵	۰/۵	۰/۵
۱	$-$۳	۰/۵۷	۰	۰/۴۹	۰	۰/۴۱	۰
		۰/۵	۰/۵	۰/۵	۰/۵	۰/۵	۰/۵
۱	$-$۲	۰/۸۵	۰	۰/۷۳	۰	۰/۶۲	۰
		۰/۵	۰/۵	۰/۵	۰/۵	۰/۵	۰/۵
۱	$-$۱	۱	۰	۱	۰	۱	۰
		۰/۵	۰/۵	۰/۵	۰/۵	۰/۵	۰/۵
۱	۱	۱	۰	۱	۰	۱	۰
		۰/۵	۰/۵	۰/۵	۰/۵	۰/۵	۰/۵
۱	۲	۱	۰	۱	۰	۱	۰
		۰/۵	۰/۵	۰/۵	۰/۵	۰/۵	۰/۵
۱	۳	۰/۷۸	۰	۰/۷۹	۰	۰/۸	۰
		۰/۵	۰/۵	۰/۵	۰/۵	۰/۵	۰/۵
۱	۴	۰/۵۷	۰	۰/۵۹	۰	۰/۶	۰
		۰/۵	۰/۵	۰/۵	۰/۵	۰/۵	۰/۵
۱	۵	۰/۴۷	۰	۰/۴۷	۰	۰/۴۷	۰
		۰/۵	۰/۵	۰/۵	۰/۵	۰/۵	۰/۵

۵ طرح D-بهینه موضعی برای مدل SBRM

با توجه به آنچه که بیان شد و با استفاده از نرم افزار R طرح بهینه به ازای مقادیر مختلف $\boldsymbol{\beta} = (\beta_0, \beta_1)^T$ با استفاده از بسته نرم افزاری $Rsolnp$ محاسبه و مقایسه شده‌اند. در این محاسبات $m_{ij} \in \{1, ..., 21\}$ و $x_{ij} \in [0, 1]$ در نظر گرفته شده است. با دقت در جداول ۱ تا ۳ برای این مدل، طرح بهینه همیشه یک طرح دو نقطه‌ای است. جدول ۱ نشان می‌دهد که با ثابت بودن مقدار β_0 و ϕ وقتی که β_1 افزایش پیدا می‌کند، نقطه اول ثابت، اما نقطه دوم تا جایی که $\beta_1 = 2$ افزایش و برای مقادیر بیشتر از ۲ نزول خواهد کرد. در این جدول با توجه به معلوم بودن ϕ، طرح بهینه برای مقادیر ۵۰، ۱۰۰و ۲۰۰ محاسبه گردیده است که با فرض معلوم بودن مقادیر β_0 و β_1 مشخص می‌شود که یک نقطه بهینه طرح صفر و دیگر نقطه دارای روند نزولی است تا زمانی که β_1 برابر۲ می‌شود. پس از آن روند عکس خواهد شد.

جدول ۲. طرح D-بهینه در مدل SBRM با اثر تصادفی

β_0	β_1	ϕ					
		۵۰		۱۰۰		۲۰۰	
−۵	−۲	۰/۳۹	۰	۰/۳۳	۰	۰/۲۶	۰
		۰/۵	۰/۵	۰/۵	۰/۵	۰/۵	۰/۵
−۴	−۲	۰/۳۹	۰	۰/۳۲	۰	۰/۲۶	۰
		۰/۵	۰/۵	۰/۵	۰/۵	۰/۵	۰/۵
−۳	−۲	۰/۴۱	۰	۰/۳۳	۰	۰/۲۶	۰
		۰/۵	۰/۵	۰/۵	۰/۵	۰/۵	۰/۵
−۲	−۲	۰/۴۳	۰	۰/۳۵	۰	۰/۲۸	۰
		۰/۵	۰/۵	۰/۵	۰/۵	۰/۵	۰/۵
−۱	−۲	۰/۴۸	۰	۰/۴	۰	۰/۳۲	۰
		۰/۵	۰/۵	۰/۵	۰/۵	۰/۵	۰/۵
۰	−۲	۰/۶۱	۰	۰/۵۱	۰	۰/۴۲	۰
		۰/۵	۰/۵	۰/۵	۰/۵	۰/۵	۰/۵
۱	−۲	۰/۸۵	۰	۰/۷۳	۰	۰/۶۲	۰
		۰/۵	۰/۵	۰/۵	۰/۵	۰/۵	۰/۵
۲	−۲	۱	۰	۱	۰	۱	۰/۹۶
		۰/۵	۰/۵	۰/۵	۰/۵	۰/۵	۰/۵
۳	−۲	۱	۰	۱	۰	۱	۰
		۰/۵	۰/۵	۰/۵	۰/۵	۰/۵	۰/۵
۴	−۲	۱	۰	۱	۰	۱	۰
		۰/۵	۰/۵	۰/۵	۰/۵	۰/۵	۰/۵
۵	−۲	۱	۰	۱	۰۵	۱	۰
		۰/۵	۰/۵	۰/۵	۰/۵	۰/۵	۰/۵
۶	−۲	۱	۰	۱	۰	۱	۰
		۰/۵	۰/۵	۰/۵	۰/۵	۰/۵	۰/۵

جدول ۲ نشان می‌دهد که با ثابت بودن مقدار β_1 و ϕ وقتی که β_0 افزایش پیدا می‌کند یک نقطه مقدار صفر و نقطه دیگر به سمت انتهای بازه فضای طرح صعود می‌کند. این روند تا زمانی که β_0 برابر ۲ می‌شود، ادامه دارد و پس از آن ثابت می‌ماند.

همچنین با ثابت در نظر گرفتن β_0 و β_1 و با افزایش ϕ نقطه اول بدون تغییر و نقطه دوم کاهش پیدا می‌کند. در جدول ۳ مقدار β_0 را ثابت و برابر ۳− در نظر گرفته و β_1 بین۷− و ۶ تغییر می‌کند. با افزایش مقدار β_1 ابتدا x_{i1} بدون تغییر ولی نقطه x_{i2} به سمت انتهای بازه حرکت می‌کند. با تغییر علامت β_1، نقطه x_{i1} هم تغییر می‌کند و به تدریج از صفر فاصله می‌گیرد و روند افزایشی دارد. اما این روند در

نقطه $\beta_1 = ۵$ متوقف می‌شود و پس از آن هم x_{i1} و هم x_{i2} کاهش پیدا می‌کنند. با افزایش ϕ این روند مشابه را داریم و فقط به ازای افزایش ϕ طرح به سمت چپ منتقل می‌شود.

جدول ۳. طرح D-بهینه در مدل SBRM با اثر تصادفی

β_0	β_1	ϕ					
		۵۰		۱۰۰		۲۰۰	
−۳	−۷	۰/۱۱	۰	۰/۰۹	۰	۰/۰۷	۰
		۰/۵	۰/۵	۰/۵	۰/۵	۰/۵	۰/۵
−۳	−۶	۰/۱۳	۰	۰/۱۱	۰	۰/۰۹	۰
		۰/۵	۰/۵	۰/۵	۰/۵	۰/۵	۰/۵
−۳	−۵	۰/۱۶	۰	۰/۱۳	۰	۰/۱	۰
		۰/۵	۰/۵	۰/۵	۰/۵	۰/۵	۰/۵
−۳	−۴	۰/۲	۰	۰/۱۶	۰	۰/۱۳	۰
		۰/۵	۰/۵	۰/۵	۰/۵	۰/۵	۰/۵
−۳	−۳	۰/۲۷	۰	۰/۲۲	۰	۰/۱۷	۰
		۰/۵	۰/۵	۰/۵	۰/۵	۰/۵	۰/۵
−۳	−۲	۰/۴	۰	۰/۳۳	۰	۰/۲۶	۰
		۰/۵	۰/۵	۰/۵	۰/۵	۰/۵	۰/۵
−۳	−۱	۰/۸	۰	۰/۶۵	۰	۰/۵۲	۰
		۰/۵	۰/۵	۰/۵	۰/۵	۰/۵	۰/۵
−۳	۱	۱	۰/۱۴	۱	۰/۳۱	۱	۰/۴۴
		۰/۵	۰/۵	۰/۵	۰/۵	۰/۵	۰/۵
−۳	۲	۱	۰/۵۱	۱	۰/۶	۱	۰/۶۸
		۰/۵	۰/۵	۰/۵	۰/۵	۰/۵	۰/۵
−۳	۳	۱	۰/۵۹	۱	۰/۶۵	۱	۰/۷۲
		۰/۵	۰/۵	۰/۵	۰/۵	۰/۵	۰/۵
−۳	۴	۱	۰/۵۷	۱	۰/۶۳	۱	۰/۶۹
		۰/۵	۰/۵	۰/۵	۰/۵	۰/۵	۰/۵
−۳	۵	۱	۰/۵۱	۱	۰/۵۶	۱	۰/۶۱
		۰/۵	۰/۵	۰/۵	۰/۵	۰/۵	۰/۵
−۳	۶	۱	۰/۴۳	۰/۹۷	۰/۴۷	۱	۰/۵۳
		۰/۵	۰/۵	۰/۵	۰/۵	۰/۵	۰/۵

۶ طرح D-بهینه موضعی برای مدل QBRM

در این بخش مشابه بخش قبل طرح D-بهینه برای مدل QBRM محاسبه شده است. در این محاسبات $m_{ij} \in \{۱, ..., ۳۵\}$ و $x_{ij} \in [۰, ۱]$ در نظر گرفته شده است. با دقت در جداول ۶ ، ۷ و ۸ دیده می‌شود که برای این مدل طرح بهینه یک طرح سه نقطه‌ای است. همچنین نقاط طرح، نسبت به تغییرات ϕ حساس نبوده و تغییرات آن‌ها ناچیز است.

جدول ۴. طرح D-بهینه در مدل QBRM با اثر تصادفی

			ϕ								
$\beta_۰$	$\beta_۱$	$\beta_۲$	۵۰			۱۰۰			۲۰۰		
۲	−۱	−۲	۱	۰/۷۴	۰/۰۴	۱	۰/۷۴	۰/۰۴	۱	۰/۷۴	۰/۰۴۳
			۰/۳۳	۰/۳۳	۰/۳۳	۰/۳۳	۰/۳۳	۰/۳۳	۰/۳۳	۰/۳۳	۰/۳۳
۲	−۲	−۲	۱	۰/۸۵	۰/۴۱	۱	۰/۸۵۸	۰/۴۱	۱	۰/۸۵	۰/۴۱۳
			۰/۳۳	۰/۳۳	۰/۳۳	۰/۳۳	۰/۳۳	۰/۳۳	۰/۳۳	۰/۳۳	۰/۳۳
۲	−۳	−۲	۱	۰/۸۴	۰/۴۵	۱	۰/۸۴	۰/۴۵	۱	۰/۸۴	۰/۴۵
			۰/۳۳	۰/۳۳	۰/۳۳	۰/۳۳	۰/۳۳	۰/۳۳	۰/۳۳	۰/۳۳	۰/۳۳
۲	−۴	−۲	۱	۰/۸۴	۰/۴۳	۱	۰/۸۴	۰/۴۳	۱	۰/۸۴	۰/۴۳
			۰/۳۳	۰/۳۳	۰/۳۳	۰/۳۳	۰/۳۳	۰/۳۳	۰/۳۳	۰/۳۳	۰/۳۳
۲	−۵	−۲	۱	۰/۸۴	۰/۴۳	۱	۰/۸۴	۰/۴۳	۱	۰/۸۷	۰/۴۹
			۰/۳۳	۰/۳۳	۰/۳۳	۰/۳۳	۰/۳۳	۰/۳۳	۰/۳۳	۰/۳۳	۰/۳۳

جدول ۵. طرح D-بهینه در مدل QBRM با اثر تصادفی

			ϕ								
$\beta_۰$	$\beta_۱$	$\beta_۲$	۵۰			۱۰۰			۲۰۰		
−۵	۷	−۴	۱	۰/۱۶	۰	۱	۰/۱۵	۰	۱	۰/۱۵	۰
			۰/۳۳	۰/۳۳	۰/۳۳	۰/۳۳	۰/۳۳	۰/۳۳	۰/۳۳	۰/۳۳	۰/۳۳
−۵	۸	−۴	۱	۰/۱۹	۰	۱	۰/۱۹	۰	۱	۰/۱۸	۰
			۰/۳۳	۰/۳۳	۰/۳۳	۰/۳۳	۰/۳۳	۰/۳۳	۰/۳۳	۰/۳۳	۰/۳۳
−۵	۹	−۴	۱	۰/۱۹	۰	۱	۰/۱۹	۰	۱	۰/۱۹	۰
			۰/۳۳	۰/۳۳	۰/۳۳	۰/۳۳	۰/۳۳	۰/۳۳	۰/۳۳	۰/۳۳	۰/۳۳
−۵	۱۰	−۴	۱	۰/۱۸	۰/۰۱	۱	۰/۱۸	۰/۰۱	۱	۰/۱۸	۰/۰۱
			۰/۳۳	۰/۳۳	۰/۳۳	۰/۳۳	۰/۳۳	۰/۳۳	۰/۳۳	۰/۳۳	۰/۳۳
−۵	۱۱	−۴	۱	۰/۱۶	۰/۰۱۲	۱	۰/۱۵	۰/۰۱	۱	۰/۱۶	۰/۰۱۳
			۰/۳۳	۰/۳۳	۰/۳۳	۰/۳۳	۰/۳۳	۰/۳۳	۰/۳۳	۰/۳۳	۰/۳۳

جدول ۶. طرح D-بهینه در مدل QBRM با اثر تصادفی

β_0	β_1	β_2	ϕ = ۵۰			ϕ = ۱۰۰			ϕ = ۲۰۰		
۲	−۲	−۱	۱	۰/۸۳	۰/۳۶	۱	۰/۸۳	۰/۳۶	۱	۰/۸۳	۰/۳۶
			۰/۳۳	۰/۳۳	۰/۳۳	۰/۳۳	۰/۳۳	۰/۳۳	۰/۳۳	۰/۳۳	۰/۳۳
۲	−۲	−۲	۱	۰/۸۵	۰/۴۱	۱	۰/۸۵	۰/۴۱	۱	۰/۸۵	۰/۴۱
			۰/۳۳	۰/۳۳	۰/۳۳	۰/۳۳	۰/۳۳	۰/۳۳	۰/۳۳	۰/۳۳	۰/۳۳
۲	−۲	−۳	۱	۰/۸۶	۰/۴۷	۱	۰/۸۷	۰/۴۷	۱	۰/۸۶	۰/۴۶
			۰/۳۳	۰/۳۳	۰/۳۳	۰/۳۳	۰/۳۳	۰/۳۳	۰/۳۳	۰/۳۳	۰/۳۳
۲	−۲	−۴	۱	۰/۸۸	۰/۵	۱	۰/۸۸	۰/۵	۱	۰/۸۸	۰/۵
			۰/۳۳	۰/۳۳	۰/۳۳	۰/۳۳	۰/۳۳	۰/۳۳	۰/۳۳	۰/۳۳	۰/۳۳
۲	−۲	−۵	۱	۰/۹۱	۰/۵	۱	۰/۹	۰/۵	۱	۰/۹	۰/۵
			۰/۳۳	۰/۳۳	۰/۳۳	۰/۳۳	۰/۳۳	۰/۳۳	۰/۳۳	۰/۳۳	۰/۳۳

جدول ۷. طرح D-بهینه در مدل QBRM با اثر تصادفی

β_0	β_1	β_2	ϕ = ۵۰			ϕ = ۱۰۰			ϕ = ۲۰۰		
۲	−۱	−۲	۱	۰/۷۴	۰/۰۴	۱	۰/۷۴	۰/۰۴	۱	۰/۷۴	۰/۰۴۳
			۰/۳۳	۰/۳۳	۰/۳۳	۰/۳۳	۰/۳۳	۰/۳۳	۰/۳۳	۰/۳۳	۰/۳۳
۲	−۲	−۲	۱	۰/۸۵	۰/۴۱	۱	۰/۸۵۸	۰/۴۱	۱	۰/۸۵	۰/۴۱۳
			۰/۳۳	۰/۳۳	۰/۳۳	۰/۳۳	۰/۳۳	۰/۳۳	۰/۳۳	۰/۳۳	۰/۳۳
۲	−۳	−۲	۱	۰/۸۴	۰/۴۵	۱	۰/۸۴	۰/۴۵	۱	۰/۸۴	۰/۴۵
			۰/۳۳	۰/۳۳	۰/۳۳	۰/۳۳	۰/۳۳	۰/۳۳	۰/۳۳	۰/۳۳	۰/۳۳
۲	−۴	−۲	۱	۰/۸۴	۰/۴۳	۱	۰/۸۴	۰/۴۳	۱	۰/۸۴	۰/۴۳
			۰/۳۳	۰/۳۳	۰/۳۳	۰/۳۳	۰/۳۳	۰/۳۳	۰/۳۳	۰/۳۳	۰/۳۳
۲	−۵	−۲	۱	۰/۸۴	۰/۴۳	۱	۰/۸۴	۰/۴۳	۱	۰/۸۷	۰/۴۹
			۰/۳۳	۰/۳۳	۰/۳۳	۰/۳۳	۰/۳۳	۰/۳۳	۰/۳۳	۰/۳۳	۰/۳۳

در جدول ۶ مقادیر β_0 و β_1 ثابت و مقدار β_2 بین ۱− تا ۵− تغییر کرده است. نقطه x_{i3} بدون تغییر باقی مانده است. اما x_{i2} با کاهش β_2 روند افزایشی دارد و به انتهای بازه میل می‌کند. این روند در مورد x_{i1} نیز صادق است. همچنین طرح نسبت به افزایش ϕ حساس نیست.

در جدول ۷ مقدار β_0 و β_2 ثابت و مقدار β_1 بین ۱− تا ۵− تغییر می‌کند. نقطه x_{i3} بدون تغییر باقی می‌ماند اما نقطه x_{i1} به سمت ۰/۵ گرایش دارد، و x_{i2} با شدت کمتر به سمت ۱ میل می‌کند. به ازای این انتخاب از پارامترها هم، طرح نسبت به تغییرات ϕ حساس نیست.

در جدول ۸ مقادیر β_0 و β_2 ثابت و با علامت منفی در نظر گرفته شده است، و مقدار β_1 از ۸+ تا

جدول ۸. طرح D-بهینه در مدل QBRM با اثر تصادفی

β_0	β_1	β_2	ϕ = ۵۰	ϕ = ۱۰۰	ϕ = ۲۰۰
۵−	۷	۴−	۱ ۰/۱۶ ۰ ۰/۳۳ ۰/۳۳ ۰/۳۳	۱ ۰/۱۵ ۰ ۰/۳۳ ۰/۳۳ ۰/۳۳	۱ ۰/۱۵ ۰ ۰/۳۳ ۰/۳۳ ۰/۳۳
۵−	۸	۴−	۱ ۰/۱۹ ۰ ۰/۳۳ ۰/۳۳ ۰/۳۳	۱ ۰/۱۹ ۰ ۰/۳۳ ۰/۳۳ ۰/۳۳	۱ ۰/۱۸ ۰ ۰/۳۳ ۰/۳۳ ۰/۳۳
۵−	۹	۴−	۱ ۰/۱۹ ۰ ۰/۳۳ ۰/۳۳ ۰/۳۳	۱ ۰/۱۹ ۰ ۰/۳۳ ۰/۳۳ ۰/۳۳	۱ ۰/۱۹ ۰ ۰/۳۳ ۰/۳۳ ۰/۳۳
۵−	۱۰	۴−	۱ ۰/۱۸ ۰/۰۱ ۰/۳۳ ۰/۳۳ ۰/۳۳	۱ ۰/۱۸ ۰/۰۱ ۰/۳۳ ۰/۳۳ ۰/۳۳	۱ ۰/۱۸ ۰/۰۱ ۰/۳۳ ۰/۳۳ ۰/۳۳
۵−	۱۱	۴−	۱ ۰/۱۶ ۰/۰۱۲ ۰/۳۳ ۰/۳۳ ۰/۳۳	۱ ۰/۱۵ ۰/۰۱ ۰/۳۳ ۰/۳۳ ۰/۳۳	۱ ۰/۱۶ ۰/۰۱۳ ۰/۳۳ ۰/۳۳ ۰/۳۳

۱۱+ تغییر می‌کند. نقطه x_{i1} با روند خیلی ضعیفی از صفر دور می‌شود. نقطهx_{i2} هم تغییرات جزئی، و ابتدا روند صعودی و سپس روند نزولی پیدا می‌کند. x_{i3} نیز بدون تغییر همان مقدار ۱ را خواهد داشت. در مجموع می‌توان نتیجه گرفت که طرح نسبت به این انتخاب از پارامترها حساس نیست. زیرا وزن نقاط یکسان و میزان تغییرات دو نقطه‌ی x_{i1} و x_{i2} بسیار ناچیز است.

۷ کارایی طرح

کارایی برای مقایسه دو طرح استفاده می شود. تفسیر کارایی طرح ها بدین معنی است که اگر طرح اول r بار کاراتر از طرح دوم باشد آنگاه $\frac{1}{r}$ بار تکرار لازم است تا به میزان طرح دوم اطلاعات در اختیار آزمایشگر قراردهد. البته بدیهی است که هر دو طرح باید بر اساس ملاک بهینگی یکسانی حاصل شده باشند.

تعریف ۱: (ملاس، ۲۰۰۴) D-کارایی طرح ξ_1 نسبت به ξ_2 به صورت :

$$D - eff(\xi_1, \xi_2) = (\frac{\det \boldsymbol{M}(\xi_1)}{\det \boldsymbol{M}(\xi_2)})^{\frac{1}{p}} \qquad (۱۱)$$

تعریف می شود که در آن p تعداد پارامترهای مدل است.

در این مقاله کارایی طرح بهینه موضعی با در نظرگرفتن عامل تصادفی برای مدل نسبت به طرح بهینه بدون حضور عامل تصادفی محاسبه شده است. یعنی در صورت کسر، ماتریس اطلاع مدل با اثر تصادفی

و در مخرج، ماتریس اطلاع بدون اثر تصادفی لحاظ شده است. این کارایی به ازای تعدادی از مقادیر انتخابی برای پارامترهای مدل محاسبه و نتایج آن به ترتیب برای مدل SBRM و QBRM در جداول ۹ و ۱۰ آورده شده است. همان طور که ملاحظه می‌شود مقدار کارایی طرح‌ها کم و همواره کمتر از یک است. بدین معنی که اگر یک مدل دارای اثر تصادفی باشد و این اثر نادیده گرفته شود و طرح بهینه بدون این اثر تصادفی محاسبه گردد، طرح بهینه حاصل از کارای کمتری نسبت به حالت مشابه با اثر تصادفی برخوردار است.

جدول ۹. D-کارایی در مدل SBRM

ϕ	β_0	β_1	D-کارایی
۵۰	۱	−۵	۰/۵۷۸
	۱	−۲	۰/۲۹۷
۱۰۰	۳	−۲	۰/۵۰۷
	−۴	−۲	۰/۷۱۸
۲۰۰	−۳	۱	۰/۵۲۳
	−۳	۴	۰/۶۰۹

جدول ۱۰. D-کارایی در مدل QBRM

ϕ	β_0	β_1	β_2	D-کارایی
۵۰	−۱	−۲	−۱	۰/۶۴۳
	۱	−۲	−۴	۰/۳۴۶
۱۰۰	۲	−۳	−۲	۰/۶۰۱
	۲	−۵	−۲	۰/۵۲۴
۲۰۰	−۵	۷	−۴	۰/۳۴۵
	−۵	۸	−۴	۰/۴۸۵

بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله طرح D-بهینه موضعی برای دو حالت خاص از مدل رگرسیون بتا با در نظر گرفتن عرض از مبدا تصادفی برای مدل، محاسبه شده است. چون تابع درستنمایی فرم بسته‌ای ندارد از روش شبه‌درستنمایی برای محاسبه ماتریس شبه‌اطلاع استفاده شد، که برای محاسبه عناصر این ماتریس ساختار امید و کواریانس شرطی برای مدل بدست آمد. برای محاسبه طرح‌های بهینه موضعی، به مقادیر پارامترهای مجهول در مدل یک مقدار اولیه داده می‌شود. در این مقاله سعی شده است برای یک پارامتر مقدار ثابتی در نظر گرفته شود و پارامتر دیگر در یک بازه مشخص تغییر کند و تغییرات طرح بهینه به ازای این مقادیر مختلف از پارامتر بررسی شود. در مدل SBRM طرح D-بهینه موضعی یک طرح دو نقطه‌ای بدست آمده که از این نظر مشابه طرح بدون اثر تصادفی است، اما از نظر موقعیت نقاط و وزن‌ها متفاوت است. در این مدل طرح بهینه به ازای سه حالت از انتخاب مقادیر پارامترها محاسبه گردید، که به طور مفصل در بخش ۵ به آن پرداخته شده است.

برای مدل QBRM طرح D-بهینه موضعی با اثر تصادفی یک طرح سه نقطه‌ای است که از نظر موقعیت نقاط و وزن ها با مدل مشابه اما بدون اثر تصادفی متفاوت هستند و مشابه بحث بخش ۵ در بخش ۶ تقریبا مفصل و در سه حالت با توجه به مقادیر مختلف از پارامترها، طرح‌های بهینه موضعی متناسب محاسبه وتحلیل شده‌اند. در مقاله حاضر کارایی طرح های ارائه شده با طرح‌های مشابه ارائه شده توسط لطیف شریف و ظفریاب (۲۰۱۵) مقایسه شده و این نتیجه حاصل شد که، اگر یک اثر تصادفی در مدل باشد و نادیده گرفته شود در این حالت طرح بهینه کارایی پایین‌تری نسبت به حالتی دارد که اثر تصادفی در مدل در نظر گرفته می‌شود.

مراجع

Atkinson, A. C., Donev, A. N. and Tobias, R. D.(2007), *Optimum Experimental Designs, With SAS*, Oxford University Press, New york.

Chernoff, H. (1953), Locally Optimal Designs for Estimating Parameters, *The Annals of Mathematical Statistics*, **26**, 586-602.

Dette1, H. Viatcheslav, B. Melas and Pepelyshev, A. (2005), Optimal Design for a Class of Nonlinear Regression Models, *Journal of the Annals of Statistics*, **32**, 2142-2167.

Fedorov, V. V. Hackl, P. (1997), *Model-Oriented Design of Experiments*, Springer-Verlag.

Ferrari, SLP. Cribari-Neto, F. (2004), Beta Regression for Modelling Rates and Proportions. *Journal of Applied Statistics*, **31**, 799-815.

Galvis, DM. Bandyopadhyay D. Lachos, VH. (2014), Augmented Mixed Beta Regression Mmodels for Periodontal Proportion Data, *Statistics in Medicine*, **33**, 3759-3771.

Haines , L. (1995), A Geometric Approach to Optimal Design for One-parameter Non-linear Models, *Journal of the Royal Statistical Society: Series B*, **57**, 575-598.

Jafari, H. Khazai, S. Khaki, Y. and Jafari, T. (2014), D-Optimal Design for Logistic Regression Model with Three Independent Variables, *Journal of Scientific- Asian Research*, **4**, 120-124.

Jia Y. and Myers (2001), Optimal Experimental Designs for Two-variable Logistic Regression Model, Technical Report, VPI and SU.

Latif, S. Zafar Yab, M. (2015), D-optimal Designs for Beta Regression Model with Single Predictor, *Journal of Statistical Computation and Simulation*, **85**, 1709-1724.

Li, G. Majumdar, D. (2008), D-optimal Designs for Logistic Models with Three and Four Parameters, *Journal of Statistical Planning and Inference* , **138**, 1950-1959.

Melas, V.B. (2004), *On a Functional Approach to Locally Optimal Designs*, Spring Science + Business Media, Inc. 233 Spring Street NewYork, NY 10013, USA.

Niaparast, M. Mehrmansor, S. (2012), D-efficiency of D-optimal Designs for Poisson Model with Random Intercept, *Journal of Statistical Sciences*, **4**, 89-102.

Niaparast, M. Schwabe, R. (2013), Optimal Designs for Quasi-Likelihood Estimation in Poisson Regression with Random Coefficients, *Journal of Statistical Planning and Inference*, **143**, 296-306.

O'Brien, T. E. (2005), Designing for Parameter Subsets in Gaussian Non-linear Regression Models, *Journal of Data Science*, **3**, 179-197.

Paolino, P. (2001), Maximum likelihood Estimation of Models with Beta-Distributed Dependent Variables, *Political Analysis*, **9**, 246-325.

Parsamaram, P. Jafari, H. (2015), Bayesian D-optimal Design for the Logistic Regression Model with Exponential Distribution for Random Intercept, *Journal of Statistical Computation and Simulation*, **86**, 1856-1868.

Schmelter, T. (2007), The Optimality of Single-group Designs for Certain Mixed Models, *Metrika*, **65**, 193-194.

Silvey, S.D. (1980), *Optimal Design*, Chapman Hall, London.

Smith, K. (1918), On the Standard Deviations of Adjusted and Interpolated Values of an Observed Polynomial Function and its Constants and the Guidance They GiveTowards a Proper Choice of the Distribution of Observations, *Biometrika*, **12**, 1-85.

Wu, Y. Fedorov, VV. Propert, KJ. (2005), Optimal Design for Dose Response Using Beta Distributed Responses, *Journal of Biopharmaceutical Statistics*, **15**, 753-771.

Wedderburn, R.W.M (1974), Quasi-Likelihood Functions, Generalized Linear Models and the Gauss-Newton Method , *Biometrika*, **61**, 439-447.