



Autoregressive Spatial Regression Model and Second-Order Moving Average for Generalized Skew-Laplace Random Field

Saber, M. M.¹, Mohammadzadeh, M.²

¹Department of Statistics, Higher Education Center of Eghlid, Eghlid, Iran.

²Department of Statistics, Tarbiat Modares University, Tehran, Iran.

Corresponding author: M. M. Saber, mmsaber@eghlid.ac.ir

Received: 17/5/2024 Revised: 14/11/2024 Accepted and Published Online: 18/11/2024.

Introduction

The spatial regression model is essential in scientific fields such as Geology, Biology, Agriculture, etc. The first studies on this matter supposed data have Gaussian distribution. However, some spatial data in the application do not have Gaussian distribution. In other words, these data are skewed and have heavier tails from the Gaussian distribution. Some works have used skew and heavy tail distributions in spatial regression. For instance, Karimi and Mohammadzadeh (2012) used a spatial regression model with the closed skew-normal random field (RF) for skew data. Saber et al. (2021) used an extended version of the multivariate generalized asymmetric Laplace (GAL) distribution to define EGAL RF. They applied this RF to a spatial autoregressive and moving average (SARMA) regression model of order one and provided Bayesian estimates of the model parameters.

Material and Methods

In this paper, we use the RF defined by Saber et al. (2021) for a SARMA regression model of order two. Using the Kolbeck-Leibler divergence criterion, we estimate the parameters by maximum likelihood and maximum spacing methods. Based on Kolmogorov's existence theorem, some skew multivariate distributions used for defining an RF have a consistency problem. Saber et al. (2019) proved that EGAL distribution has no consistency problem so that a valid RF can be determined based on this distribution. To compare

our model with other alternative skew models, we use the Extended Skew t-student (EST) distribution to distribute innovations in the SARMA model. This distribution has a consistency problem when defining a valid RF. Therefore, we cannot define a valid RF based on multivariate EST distribution. However, to obtain accurate results by considering this RF, we apply our recommended model to this RF.

Results and Discussion

A simulation study demonstrates the efficiency of the recommended model based on EGAL RF. The bias and mean square error (MSE) values in parameter estimation for EGAL RF are low. Also, bias and MSE for EST RF have been computed, and both criteria are more significant than their corresponding values in EGAL RF. This shows that the EGAL model has exacter estimations than the EST model. An actual data set of 743 data in Kaftar Lake, located in Eghlid city of Fars, has been analyzed. The prediction of magnesium metal in this lake using observation is made using the recommended model in this paper.

Conclusion

The simulation results showed that the EGAL model was more accurate than the Gaussian and EST models. An actual data set that had an EGAL distribution was also investigated. The goodness-of-fit tests for Gaussian and EST assumptions were rejected for this data. Although the proposed model is of the second order, it is only related to the data in the left and bottom part of the data. The study of this model using all the data located in a fixed place up to the second order can be more flexible and usable for more data. Although such a model has many parameters involving a more significant number of observations, it can be the subject of future studies.

Keywords: Multivariate generalized skew-Laplace distribution, Autoregressive spatial regression and moving average, Kulbeck-Leibler criterion.

Mathematics Subject Classification (2010): 62M10, 62M30.



©The Author(s). The Publisher is Iranian Statistical Society.

This is an open access article distributed under the terms and conditions of [\(CC BY-NC 4.0\)](https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/)

مدل رگرسیون فضایی خودبازگشتی و میانگین متحرک مرتبه دو برای میدان تصادفی چوله-لاپلاس تعمیم یافته

محمد مهدی صابر^۱، محسن محمدزاده^۲

آگروه آمار، مرکز آموزش عالی اقلید

آگروه آمار، دانشگاه تربیت مدرس

نویسنده مسئول: محمد مهدی صابر، mmsaber@eghlid.ac.ir

تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۲/۲۸ تاریخ بازنگری: ۱۴۰۳/۸/۲۴ تاریخ پذیرش و انتشار: ۱۴۰۳/۸/۲۸

چکیده: توزیع لاپلاس چندمتغیره مدلی است که عدم تقارن و دم‌های سنگین‌تر از توزیع گاوسی را به حساب می‌آورد. در این مقاله، مدل رگرسیون فضایی خودبازگشتی و میانگین متحرک مرتبه دو برای مدل‌بندی برآمدهای یک میدان تصادفی فضایی که از توزیع چوله-لاپلاس تعمیم یافته چندمتغیره پیروی می‌کنند ارائه خواهد شد. پارامترهای مدل با روش‌های ماکسیمم درستنمایی و حداکثر فاصله و استفاده از معیار واگرایی کولبک-لایبلر برآورد می‌شوند. آنگاه براساس مدل ارائه شده پیشگوی فضایی بهینه ارایه خواهد شد. سپس یک مطالعه شبیه‌سازی برای ارزیابی عملکرد مدل پیشنهادی انجام می‌شود. آنگاه نحوه کاربست این مدل در تحلیل مجموعه داده‌های واقعی زمین‌شناسی نشان داده می‌شود. **واژه‌های کلیدی:** توزیع چوله-لاپلاس تعمیم یافته چندمتغیره، رگرسیون فضایی خود بازگشتی و میانگین متحرک، معیار کولبک-لایبلر. **کد موضوع بندی ریاضی (۲۰۱۰):** 62M30، 62M10.

۱ مقدمه

تحلیل رگرسیونی داده‌های فضایی که بر حسب موقعیت مکانی در فضای مورد مطالعه وابسته هستند در حوزه‌های علمی مختلف مانند زمین‌شناسی، کشاورزی، زیست‌شناسی، پزشکی و غیره کاربرد دارد. برخی از روش‌ها برای معرفی



©نویسندگان). ناشر انجمن آمار ایران است.
این مقاله با دسترسی آزاد تحت شرایط و ضوابط (CC BY-NC 4.0) توزیع شده است.

ساختار فضایی در مدل‌های رگرسیونی توسط آنسلین (۱۹۸۸، ۱۹۹۰) ارائه شده است. بوستوس و همکاران (۲۰۰۹) کاربرد این مدل برای فیلتر کردن یک تصویر را بررسی کرده‌اند. روش‌های ماکسیمم درستنمایی و بیزی برای برآورد پارامترها و پیشگویی مشاهدات گمشده در این نوع مدل‌ها توسط شین و سرکار (۱۹۹۴) و او و همکاران (۲۰۰۲) به ترتیب اعمال شده است. در تحلیل رگرسیونی داده‌های فضایی معمولاً فرض بر این است که داده‌ها برآمدهایی از یک میدان تصادفی گاوسی هستند، در حالی که در عمل اغلب داده‌ها بیان‌گر ناگوسی بودن میدان تصادفی هستند. کریمی و محمدزاده (۲۰۱۲) از میدان تصادفی چوله-نرمال بسته برای تحلیل مدل رگرسیون فضایی استفاده کردند، که در آن توزیع داده‌ها دارای شباهت‌هایی با توزیع نرمال است اما نامتقارن است. توزیع‌های دیگری نیز می‌تواند برای این شرایط استفاده شود، هر چند صابر و همکاران (۲۰۱۸) نشان دادند که بسیاری از این توزیع‌ها از جمله توزیع چوله-نرمال بسته مشکلاتی برای تعریف میدان تصادفی دارند. در واقع بعضی از این توزیع‌ها، شرط سازگاری در قضیه وجودی کلموگروف را ندارند. این شرط بیان می‌کند که توزیع حاشیه‌ای هر زیر مجموعه از یک بردار تصادفی نباید به پارامترهای متمم این زیر مجموعه بستگی داشته باشند. محمودیان (۲۰۱۸) نیز با برشمردن این مشکل در میدان‌های تصادفی قبلی، جایگزین‌های مناسبی برای این میدان‌ها معرفی کرده است. یکی از این توزیع‌ها، خانواده توزیع چوله-تی توسعه‌یافته^۱ چند متغیره (آزلانو واله و جنتون، ۲۰۱۰) است که با تنظیم پارامترهای آن می‌توان به توزیع‌های نرمال، تی، کوشی، چوله-تی، چوله-نرمال و چوله-کوشی چند متغیره دست یافت.

یک انتخاب مناسب برای مدل‌سازی داده‌های چوله و دم سنگین، توزیع لاپلاس نامتقارن تعمیم‌یافته چندمتغیره است که توسط کوزوبوفسکی و همکاران (۲۰۱۳) معرفی شد. صابر و همکاران (۲۰۱۸) از این توزیع برای تعریف یک میدان تصادفی چوله-لاپلاس تعمیم‌یافته استفاده کرده و نشان دادند برای این میدان مشکل شرط سازگاری وجود ندارد. آنگاه صابر و همکاران (۲۰۲۱) با استفاده از این میدان، یک مدل رگرسیون فضایی خود بازگشتی و میانگین متحرک مرتبه اول را بکار بردند. از آنجا که این مدل فقط برای داده‌هایی که تنها به یک داده مجاور خود وابسته هستند قابل کاربرد است، در این مقاله یک مدل رگرسیون فضایی خود بازگشتی و میانگین متحرک مرتبه دو را در یک میدان تصادفی چوله-لاپلاس تعمیم‌یافته توسعه‌یافته بکار خواهیم بست، که از انعطاف‌پذیری بیشتری در مدل‌بندی داده‌ها برخوردار است. صابر و همکاران (۲۰۱۸) برای برآورد پارامترهای مدل رهیافت بیزی را بکار بردند که به دلیل نداشتن فرم بسته توزیع‌های پسین، پیچیده و زمان بر بوده است. از این رو در این مقاله روش‌های ماکسیمم درستنمایی و حداکثر فاصله استفاده شده و در مطالعات شبیه‌سازی نشان داده می‌شود زمان کمتری در برآورد پارامترها صرف می‌شود. برای مقایسه مدل چوله-لاپلاس با مدل‌های چوله دیگر که در مورد خوش تعریفی میدان تصادفی بعضی از آنها تردیدی وجود دارد، مدل رگرسیونی تعریف شده در این مقاله تحت خطاها با توزیع EST نیز مطالعه خواهد شد. آنگاه پارامترهای مدل را با روش ماکسیمم درستنمایی و معیار واگرایی کولبک-لایبلر برآورد خواهیم کرد.

در ادامه، بخش ۳ به معرفی توزیع چوله-لاپلاس تعمیم‌یافته توسعه‌یافته و خواص اصلی آن اختصاص دارد. در بخش ۳ یک مدل رگرسیون فضایی خود بازگشتی و میانگین متحرک مرتبه دو معرفی خواهد شد، سپس به برآورد پارامترهای مدل و پیش‌گویی مقادیر گمشده پرداخته می‌شود. آنگاه توزیع چوله-تی توسعه‌یافته چندمتغیره در بخش

¹Extended Skew-t

۴ معرفی می‌شود. یک مطالعه شبیه‌سازی برای ارزیابی مدل در بخش ۵ انجام می‌شود. در پایان نحوه کاربست مدل برای تحلیل یک مجموعه داده واقعی در بخش ۶ نشان داده خواهد شد.

۲ توزیع چوله-لاپلاس تعمیم‌یافته توسعه‌یافته

صابر و همکاران (۲۰۲۱) توزیع لاپلاس تعمیم‌یافته نامتقارن^۱ (GAL) چندمتغیره ارائه شده توسط کوزوبوفسکی و همکاران (۲۰۱۳) توسعه داده و آنرا توزیع چوله-لاپلاس تعمیم‌یافته توسعه‌یافته^۲ (EGSL) نامیدند. بردار تصادفی p -بعدی X دارای توزیع $EGSL_p(\mu, \Sigma, q, v)$ است، اگر دارای تابع چگالی احتمال به صورت

$$f_X(x) = \frac{2 \exp[\mu^T \Sigma^{-1}(x - v)]}{(2\pi)^{\frac{p}{2}} \Gamma(q) |\Sigma|^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{Q(x - v, \Sigma)}{\Psi(\mu, \Sigma)} \right)^{q - \frac{p}{2}} \times K_{q - \frac{p}{2}}(Q(x - v, \Sigma) \Psi(\mu, \Sigma)), \quad (1)$$

باشد، که در آن $\mu \in \mathbb{R}^p$ ، $q > 0$ پارامتر کنترل‌کننده مکان و چولگی توزیع، Σ ماتریس $p \times p$ کواریانس، v پارامتر مکان خالص، $K_u(\cdot)$ تابع بسل ترمیم شده نوع سه از مرتبه u ، $Q(x, \Sigma) = \sqrt{x^T \Sigma^{-1} x}$ و $\Psi(\mu, \Sigma) = \sqrt{2 + \mu^T \Sigma^{-1} \mu}$ است.

گزاره ۱. اگر $X \sim EGSL_p(\mu, \Sigma, q, v)$ ، یک ماتریس حقیقی $\ell \times p$ و B یک بردار حقیقی باشد، آنگاه $AX + B \sim EGSL_\ell(A\mu, A\Sigma A^T, q, Av + B)$.

گزاره ۲. اگر $X \sim EGSL_p(\mu, \Sigma, q, v)$ و افراز $X^T = (X_1^T, X_2^T)$ در نظر گرفته شود، که در آن $\dim(X_2) = p_2$ ، $\dim(X_1) = p_1$ به طوری که $p_1 + p_2 = p$ ، چنانچه برای پارامترهای (μ, Σ, v) نیز افرازهای معادل در نظر گرفته شود، آنگاه $X_1 \sim EGSL_{p_1}(\mu_1, \Sigma_{11}, q, v_1)$ و

$$E(X_2 | X_1) = v_2 + \Sigma_{21} \Sigma_{11}^{-1} (X_1 - v_1) + (\mu_2 - \Sigma_{21} \Sigma_{11}^{-1} \mu_1) \times \frac{Q(X_1 - v_1, \Sigma_{11})}{\Psi(\mu_1, \Sigma_{11})} R_{1 - \frac{p_1}{2}}(\Psi(\mu_1, \Sigma_{11}) Q(X_1 - v_1, \Sigma_{11})), \quad (2)$$

¹ Generalized Asymmetric Laplas

² Extended Generalized Skew Laplas

۳۰۴ مدل رگرسیون فضایی خود بازگشتی و میانگین متحرک مرتبه دو

$$\begin{aligned} \text{Var}(X_{\tau}|X_{\tau}) &= \frac{Q(X_{\tau} - v_{\tau}, \Sigma_{\tau\tau})}{\Psi(\mu_{\tau}, \Sigma_{\tau\tau})} (\Sigma_{\tau\tau} - \Sigma_{\tau\tau} \Sigma_{\tau\tau}^{-1} \Sigma_{\tau\tau}) \\ &\times R_{\tau - \frac{p_{\tau}}{\tau}} (\Psi(\mu_{\tau}, \Sigma_{\tau\tau}) Q(x_{\tau} - v_{\tau}, \Sigma_{\tau\tau})) (\mu_{\tau} - \Sigma_{\tau\tau} \Sigma_{\tau\tau}^{-1} \mu_{\tau})^T \\ &\times \left(\frac{Q(x_{\tau} - v_{\tau}, \Sigma_{\tau\tau})}{\Psi(\mu_{\tau}, \Sigma_{\tau\tau})} \right)^{\tau} G(x_{\tau} - v_{\tau}, \mu_{\tau}, \Sigma_{\tau\tau}, p_{\tau}), \end{aligned} \quad (۳)$$

که در آن ها $R_{\zeta}(x) = \frac{K_{\zeta+1}(x)}{K_{\zeta}(x)}$ و

$$\begin{aligned} G(x_{\tau}, \mu_{\tau}, \Sigma_{\tau\tau}, p_{\tau}) &= R_{\tau - \frac{p_{\tau}}{\tau}} (\Psi(\mu_{\tau}, \Sigma_{\tau\tau}) Q(x_{\tau}, \Sigma_{\tau\tau})) R_{\tau - \frac{p_{\tau}}{\tau}} (\Psi(\mu_{\tau}, \Sigma_{\tau\tau}) Q(x_{\tau}, \Sigma_{\tau\tau})) \\ &- \left(R_{\tau - \frac{p_{\tau}}{\tau}} (\Psi(\mu_{\tau}, \Sigma_{\tau\tau}) Q(x_{\tau}, \Sigma_{\tau\tau})) \right)^{\tau}. \end{aligned}$$

۳ مدل رگرسیون فضایی پیشنهادی

تعریف ۱. (صابر و همکاران، ۲۰۲۱) میدان تصادفی $\{Z(s) : s \in D \subseteq \mathbb{R}^d\}$ چول-لاپلاس تعمیم یافته توسعه یافته نامیده می شود، اگر برای همه تنظیمات $(s_1, \dots, s_n) \in D \times \dots \times D$ و همه $n \in \mathbb{N}$ و $Z = (Z(s_1), \dots, Z(s_n)) \sim EGSL_n(\mu, \Sigma, q, v)$ و $\Sigma = \frac{1}{q} \text{Var}(Z) - \mu\mu^T$ و $v + q\mu = E(Z)$ که در آن

مشابه با کار باسو و راینسل (۱۹۹۴) مدل رگرسیون فضایی را روی یک شبکه منظم دو بعدی $\{(i, j) : i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n\}$ به صورت

$$y_{ij} = x_{ij}^T \beta + z_{ij}, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n, \quad (۴)$$

تعریف می کنیم، که در آن y_{ij} متغیر پاسخ، x_{ij} بردار r بعدی متغیرهای تبیینی، $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_r)$ بردار ضرایب رگرسیون، و متغیرهای تصادفی z_{ij} از مدل خود بازگشتی و میانگین متحرک مرتبه دو $SARMA(2, 1)$ پیروی می کنند. بر اساس ترتیب طرح یک چهارم، یک شبکه دو بعدی برای z_{ij} به صورت

$$\begin{aligned} z_{ij} &= \theta_1 z_{i-1, j} + \theta_2 z_{i, j-1} + \theta_3 z_{i-1, j-1} + \theta_4 z_{i-2, j} + \theta_5 z_{i, j-2} + \theta_6 z_{i-2, j-1} \\ &+ \theta_7 z_{i-1, j-2} + \theta_8 z_{i-2, j-2} + \phi_1 \varepsilon_{i-1, j} + \phi_2 \varepsilon_{i, j-1} + \phi_3 \varepsilon_{i-1, j-1} + \varepsilon_{ij}, \end{aligned} \quad (۵)$$

در نظر می گیریم، که در آن $j = 1, \dots, n, i = 1, \dots, m$ و

$$|\theta_t| < 1, \quad |\phi_k| < 1, \quad t = 1, \dots, 8, \quad k = 1, 2, 3.$$

روابط (۴) و (۵) را می‌توان به صورت ماتریسی

$$Y = X\beta + z, \quad z = B_1 z + A_1 z_0 + B_2 \epsilon + A_2 \epsilon_0 + \epsilon, \quad (6)$$

نوشت، که در آن

$$\begin{aligned} Y &= (y_{11}, y_{12}, \dots, y_{mn})^T, & X &= (x_{11}, x_{12}, \dots, x_{mn})^T, \\ z &= (z_{11}, z_{12}, \dots, z_{mn})^T, & z_0 &= (z_{00}, z_{01}, \dots, z_{m0})^T, \\ \epsilon &= (\epsilon_{11}, \epsilon_{12}, \dots, \epsilon_{mn})^T, & \epsilon_0 &= (\epsilon_{00}, \epsilon_{01}, \dots, \epsilon_{m0})^T. \end{aligned}$$

z_0 بردار مقادیر اولیه مشاهده نشده z_{ij} ، B_1 ماتریس $mn \times mn$ پایین مثلثی، A_1 ماتریس بالا مثلثی $mn \times mn$ با اعضای صفر و توابعی از θ_t ، ϵ_0 بردار مقادیر اولیه مشاهده نشده ϵ_{ij} ، B_2 ماتریس $mn \times mn$ پایین مثلثی، A_2 ماتریس بالا مثلثی $mn \times (m+n+1)$ با اعضای صفر و توابعی از ϕ_k ، $k = 1, 2, 3$ هستند. به منظور برآورد پارامترها و پیشبینی مقادیر گمشده در میدان تصادفی پیشنهاد شده به توزیع Y نیاز داریم.

قضیه ۱. فرض کنید برای مدل رگرسیونی (۴) با خطاهای خود همبسته (۵)، $\epsilon^* = (\epsilon^T, \epsilon_0^T)^T$ باشد، که در آن $\epsilon^* \sim GAL_{mn+m+n+1}(\mu, \Sigma, q)$ با قرار دادن $W = (I - B_1)^{-1}$ و $D = [I + B_2 | A_2]$ داریم

$$Y \sim EGSLmn(WD\mu, WDS\Delta D^T W^T, q, X\beta + WA_1 z_0), \quad (7)$$

برهان: با توجه به مدل (۶) داریم $(I - B_1)z = A_1 z_0 + (I + B_2)\epsilon + A_2 \epsilon_0$ و $z = WA_1 z_0 + WD\epsilon^*$ اکنون از (۶) و گزاره ۱ نتیجه حاصل و اثبات کامل است.

برای سادگی محاسبات، فرض می‌کنیم $\mu = \mu J$ ، که در آن J برداری به طول $mn+m+n+1$ از عدد ۱ است. همچنین ساختار همبستگی فضایی بصورت $\Sigma = C = (C_{ij})_{i,j=1}^n$ است، که در آن $C_{ij} = C(|s_i - s_j|)$ ، $C(h) = \sigma^2 \rho(h, \lambda)$ ، $\rho(\cdot, \lambda)$ یک تابع همبستگی با فرم معلوم و پارامترهای $(\sigma^2, \lambda) \in (0, \infty)^2$ است به طوری که λ پارامتر همبستگی فضایی و σ^2 واریانس فضایی است. تحت مفروضات بالا داریم:

$$Y \sim EGSLmn(\mu WDJ, WDCD^T W^T, q, X\beta + WA_1 z_0), \quad (8)$$

چنانچه قرار داده شود $\theta^T = (\theta_1, \dots, \theta_8)$ و $\phi^T = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$ ، آنگاه بردار پارامترهای مدل به صورت

$\eta = (\beta^T, \mu, \sigma^2, \lambda, \theta^T, \phi^T)^T$ خواهد بود و لگاریتم تابع درستنمایی پارامتر η به صورت

$$\begin{aligned} \ell(\eta) = & \mu \mathbf{J}^T \mathbf{D}^T \mathbf{W}^T (\mathbf{W} \mathbf{D} \mathbf{C} \mathbf{D}^T \mathbf{W}^T)^{-1} (\mathbf{y} - \mathbf{X} \beta - \mathbf{W} \mathbf{A}_1 \mathbf{z}_0) \\ & - \frac{1}{2} \ln(|\mathbf{W} \mathbf{D} \mathbf{C} \mathbf{D}^T \mathbf{W}^T|) + (q - \frac{mn}{2}) \\ & \times [\ln(Q(\mathbf{y} - \mathbf{X} \beta - \mathbf{W} \mathbf{A}_1 \mathbf{z}_0, \mathbf{W} \mathbf{D} \mathbf{C} \mathbf{D}^T \mathbf{W}^T)) \\ & - \ln(\Psi(\mathbf{W} \mathbf{D} \mu, \mathbf{W} \mathbf{D} \mathbf{C} \mathbf{D}^T \mathbf{W}^T))] \\ & + \ln(K_{q-\frac{mn}{2}}(Q(\mathbf{y} - \mathbf{X} \beta + \mathbf{W} \mathbf{A}_1 \mathbf{z}_0, \mathbf{W} \mathbf{D} \mathbf{C} \mathbf{D}^T \mathbf{W}^T) \\ & \times \Psi(\mathbf{W} \mathbf{D} \mu, \mathbf{W} \mathbf{D} \mathbf{C} \mathbf{D}^T \mathbf{W}^T))) \end{aligned} \quad (9)$$

حاصل می شود. با توجه به فرم پیچیده این تابع برآوردهای ماکسیم درستنمایی فرم بسته ای ندارند و لازم است با روش های عددی محاسبه شود. [ارسلان و اونجل \(۲۰۱۷\)](#) روش برآورد حداکثر فاصله^۱ (MSP) را بر اساس تقریبی از واگرایی کولبک-لایبلر پیشنهاد دادند. فرض کنید $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_{mn})$ بردار مشاهدات و $Y_{(1)}, \dots, Y_{(mn)}$ مشاهدات مرتب شده باشند. اگر $F_i(y, \eta)$ نشان دهنده تابع توزیع تجمعی Y_i باشد، آنگاه MSP برآوردگری است که از ماکسیم کردن

$$Q(\eta) = \sum_{i=1}^{mn-1} \ln(F_i(Y_{(i)}, \eta) - F_{i-1}(Y_{(i-1)}, \eta)) \quad (10)$$

به دست می آید، در واقع فاصله واگرایی کولبک-لایبلر میان $F_i(y, \eta)$ و تابع توزیع تجمعی واقعی Y_i را مینیم می کند. تابع $F_i(y, \eta)$ در اینجا فرم بسته ندارد و بصورت $F_i(y, \eta) = \int_{-\infty}^y f_i(x, \eta) dx$ خواهد بود، که در آن تابع چگالی $f_i(x, \eta)$ با استفاده از گزاره ۲ از توزیع (۸) به صورت

$$Y_i \sim EGAL_1(\mu \ell_i \mathbf{W} \mathbf{D} \mathbf{J}, \ell_i \mathbf{W} \mathbf{D} \mathbf{C} \mathbf{D}^T \mathbf{W}^T \ell_i^T, q, \ell_i \mathbf{X} \beta + \ell_i \mathbf{W} \mathbf{A}_1 \mathbf{z}_0) \quad (11)$$

به دست خواهد آمد، که در آن ℓ_i یک بردار صفر به طول mn است که فقط عضو i ام آن ۱ است. با توجه به روابط

¹ Maximum Spacing Method

(۱) و (۱۱) داریم

$$\begin{aligned}
 f_i(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) &= f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}) \\
 &= \frac{\exp[\mu \mathbf{J}^T \mathbf{D}^T \mathbf{W}^T \ell_i^T (\ell_i \mathbf{W} \mathbf{D} \mathbf{C} \mathbf{D}^T \mathbf{W}^T \ell_i^T)^{-1} (\mathbf{x} - \ell_i \mathbf{X} \boldsymbol{\beta} - \ell_i \mathbf{W} \mathbf{A}_1 \mathbf{z}_*)]}{\sqrt{\pi} \Gamma(q) |\ell_i \mathbf{W} \mathbf{D} \mathbf{C} \mathbf{D}^T \mathbf{W}^T \ell_i^T|^{1/2}} \\
 &\times \left(\frac{Q(\mathbf{x} - \ell_i \mathbf{X} \boldsymbol{\beta} - \ell_i \mathbf{W} \mathbf{A}_1 \mathbf{z}_*, \ell_i \mathbf{W} \mathbf{D} \mathbf{C} \mathbf{D}^T \mathbf{W}^T \ell_i^T)}{\Psi(\mu \ell_i \mathbf{W} \mathbf{D} \mathbf{J}, \ell_i \mathbf{W} \mathbf{D} \mathbf{C} \mathbf{D}^T \mathbf{W}^T \ell_i^T)} \right)^{q-1/2} \\
 &\times K_{q-1/2}(Q(\mathbf{x} - \ell_i \mathbf{X} \boldsymbol{\beta} - \ell_i \mathbf{W} \mathbf{A}_1 \mathbf{z}_*, \ell_i \mathbf{W} \mathbf{D} \mathbf{C} \mathbf{D}^T \mathbf{W}^T \ell_i^T)) \\
 &\times \Psi(\mu \ell_i \mathbf{W} \mathbf{D} \mathbf{J}, \ell_i \mathbf{W} \mathbf{D} \mathbf{C} \mathbf{D}^T \mathbf{W}^T \ell_i^T), \tag{۱۲}
 \end{aligned}$$

با استفاده از (۱۲) در (۱۰) و ماکسیم کردن آن با روش‌های عددی، برآورد MSP پارامترها بدست آورده می‌شود. برای پیشگویی مقادیر گمشده $\mathbf{Y}_{\text{mis}}$ براساس مشاهدات $\mathbf{Y}_{\text{obs}}$ و تابع زیان توان دوم باید $E(\mathbf{Y}_{\text{mis}} | \mathbf{Y}_{\text{obs}})$ محاسبه شود. فرض کنید $\mathbf{Y}^* = (\mathbf{Y}_{\text{obs}}^T, \mathbf{Y}_{\text{mis}}^T)^T = \mathbf{Q} \mathbf{Y}$ که در آن $\mathbf{Q}$ یک ماتریس متعامد مناسب است. با در نظر گرفتن $\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{Y}} = \mathbf{W} \mathbf{D} \boldsymbol{\mu}$ و $\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{Y}} = \mathbf{W} \mathbf{D} \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{D}^T \mathbf{W}^T$ ، $\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{Y}} = \mathbf{W} \mathbf{D} \boldsymbol{\mu}$ و $\mathbf{v}_{\mathbf{Y}} = \mathbf{X} \boldsymbol{\beta} + \mathbf{W} \mathbf{A}_1 \mathbf{z}_*$ و استفاده از گزاره ۱، داریم $\mathbf{Y}^* \sim EGS_{Lmn}(\mathbf{Q} \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{Y}}, \mathbf{Q} \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{Y}} \mathbf{Q}^T, q, \mathbf{Q} \mathbf{v}_{\mathbf{Y}})$ که در آن

$$\mathbf{Q} \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{Y}} = (\boldsymbol{\mu}_{\text{obs}}^T, \boldsymbol{\mu}_{\text{mis}}^T)^T, \quad \mathbf{Q} \mathbf{v}_{\mathbf{Y}} = (\mathbf{v}_{\text{obs}}^T, \mathbf{v}_{\text{mis}}^T)^T, \quad \mathbf{Q} \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{Y}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{oo} & \boldsymbol{\Sigma}_{om} \\ \boldsymbol{\Sigma}_{mo} & \boldsymbol{\Sigma}_{mm} \end{bmatrix}.$$

برای مورد $q = 1$ با گزاره ۲ داریم:

$$\begin{aligned}
 \hat{\mathbf{Y}}_{\text{mis}} &= \mathbf{v}_{\text{mis}} + \boldsymbol{\Sigma}_{mo} \boldsymbol{\Sigma}_{oo}^{-1} (\mathbf{Y}_{\text{obs}} - \mathbf{v}_{\text{obs}}) + (\boldsymbol{\mu}_{\text{mis}} - \boldsymbol{\Sigma}_{mo} \boldsymbol{\Sigma}_{oo}^{-1} \boldsymbol{\mu}_{\text{obs}}) \\
 &\times \frac{Q(\mathbf{Y}_{\text{obs}} - \mathbf{v}_{\text{obs}}, \boldsymbol{\Sigma}_{oo})}{\Psi(\boldsymbol{\mu}_{\text{obs}}, \boldsymbol{\Sigma}_{oo})} R_{1 - \frac{N_{\text{obs}}}{\dagger}}(\Psi(\boldsymbol{\mu}_{\text{obs}}, \boldsymbol{\Sigma}_{oo}) Q(\mathbf{Y}_{\text{obs}} - \mathbf{v}_{\text{obs}}, \boldsymbol{\Sigma}_{oo})), \tag{۱۳}
 \end{aligned}$$

واریانس این پیشگویی نیز به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned}
 \text{Var}(\hat{\mathbf{Y}}_{\text{mis}}) &= \frac{Q(\mathbf{Y}_{\text{obs}} - \mathbf{v}_{\text{obs}}, \boldsymbol{\Sigma}_{oo})}{\Psi(\boldsymbol{\mu}_{\text{obs}}, \boldsymbol{\Sigma}_{oo})} (\boldsymbol{\Sigma}_{mm} - \boldsymbol{\Sigma}_{mo} \boldsymbol{\Sigma}_{oo}^{-1} \boldsymbol{\Sigma}_{om}) \\
 &\times R_{1 - N_{\text{obs}}/\dagger}(\Psi(\boldsymbol{\mu}_{\text{obs}}, \boldsymbol{\Sigma}_{oo}) Q(\mathbf{Y}_{\text{obs}} - \mathbf{v}_{\text{obs}}, \boldsymbol{\Sigma}_{oo})) \\
 &+ (\boldsymbol{\mu}_{\text{mis}} - \boldsymbol{\Sigma}_{mo} \boldsymbol{\Sigma}_{oo}^{-1} \boldsymbol{\mu}_{\text{obs}})(\boldsymbol{\mu}_{\text{mis}} - \boldsymbol{\Sigma}_{mo} \boldsymbol{\Sigma}_{oo}^{-1} \boldsymbol{\mu}_{\text{obs}})^T \\
 &\times \left(\frac{Q(\mathbf{Y}_{\text{obs}}, \boldsymbol{\Sigma}_{oo})}{\Psi(\boldsymbol{\mu}_{\text{obs}}, \boldsymbol{\Sigma}_{oo})} \right)^{\dagger} G(\mathbf{Y}_{\text{obs}} - \mathbf{v}_{\text{obs}}, \boldsymbol{\mu}_{\text{obs}}, \boldsymbol{\Sigma}_{oo}, N_{\text{obs}}), \tag{۱۴}
 \end{aligned}$$

۴ توزیع چوله-تی توسعه یافته چندمتغیره

بردار تصادفی X دارای توزیع چوله-تی توسعه یافته $(\mu, \Sigma, \lambda, \nu, \tau)$ است، اگر تابع چگالی آن برای $x \in R^p$ به صورت

$$f_X(x) = \frac{1}{T_1\left(\frac{\tau}{\sqrt{1+\lambda'\Sigma\lambda}}; \nu\right)} t_p(x; \mu, \Sigma, \nu) T_1((\lambda'z + \tau)\left(\frac{\nu+p}{\nu+Q(z)}\right)^{\frac{1}{2}}; \nu+p),$$

باشد، که در آن $Q(z) = z'\bar{\Sigma}^{-1}z$ ، $\omega = \text{diag}(\Sigma)^{\frac{1}{2}}$ ، $\bar{\Sigma} = \omega^{-1}\Sigma\omega^{-1}$ ، $z = \omega^{-1}(x - \mu)$ ، $T_1(\cdot; \nu)$ توزیع تجمعی تی یک متغیره با ν درجه آزادی و $t_p(x; \mu, \Sigma, \nu)$ تابع چگالی توزیع تی p بعدی با پارامترهای مکانی μ و مقیاس Σ و درجه آزادی ν است.

گزاره ۳. اگر $X \sim EST_p(\mu, \Sigma, \lambda, \nu, \tau)$ و A و B مشابه گزاره ۲ تعریف شوند، آنگاه

$$AX + B \sim EST_\ell(A\mu + B, A\Sigma A^T, \lambda_A, \nu, \tau_A)$$

که در آن $\Sigma_A = A\Sigma A^T$ ، $\tau_A = \gamma_A^{-1}\tau$ ، $\bar{\lambda}_A = \bar{\Sigma}_A^{-1}W_A^{-1}AW\bar{\Sigma}\lambda$ ، $\lambda_A = \gamma_A^{-1}\bar{\lambda}_A$ و $\gamma_A^{-1} = \frac{1}{\sqrt{1+\lambda^T\bar{\Sigma}\lambda - \bar{\lambda}_A^T\bar{\Sigma}_A\bar{\lambda}_A}}$

قضیه ۲. در مدل رگرسیون (۴) با فرض آنکه $\epsilon^* \sim EST_{mn+m+n+1}(\mu, \Sigma, \lambda, \nu, \tau)$ آنگاه $\bar{\lambda}_* = \Sigma^* = W D \Sigma D^T W^T$ به طوری که $Y \sim EST_{mn}(W A_1 z_* + W D \mu, \Sigma^*, \lambda^*, \nu, \tau^*)$ و $\Sigma^* = W D \Sigma D^T W^T$ ، $\lambda^* = \frac{\bar{\lambda}_*}{\sqrt{1+\lambda^T\bar{\Sigma}\lambda - \bar{\lambda}_*^T\bar{\Sigma}^*\bar{\lambda}_*}}$ ، $\bar{\Sigma}^{*-1}w^{*-1}W D w \bar{\Sigma} \lambda$ و $\tau^* = \frac{\tau}{\sqrt{1+\lambda^T\bar{\Sigma}\lambda - \bar{\lambda}_*^T\bar{\Sigma}^*\bar{\lambda}_*}}$ ، $\bar{\lambda}_* = \bar{\Sigma}^{*-1}w^{*-1}W D w \bar{\Sigma} \lambda$

برهان: اثبات این قضیه مشابه با قضیه ۲ و با استفاده از گزاره ۳ انجام می شود.

۵ مطالعه شبیه سازی

به منظور بررسی عملکرد مدل پیشنهادی، یک مطالعه شبیه سازی انجام می شود. مقادیر پارامترها به صورت

$$m = n = 10, \quad q = 1, \quad \beta_1 = 6, \quad \beta_2 = 3N, \quad \theta_1 = 0.4, \quad \theta_2 = 0.8, \quad \theta_3 = 0.5,$$

$$\theta_4 = 0.1, \quad \theta_5 = 0.05, \quad \theta_6 = 0.3, \quad \theta_7 = 0.25, \quad \theta_8 = 0.2, \quad \phi_1 = 0.4, \quad \phi_2 = 0.5,$$

$$\phi_3 = 0.2, \quad x_{ij}^T = (1, (i^2 + 1)/i), \quad \mu = 2.25, \quad \sigma^2 = 2, \quad \lambda = 3.$$

در نظر گرفته شده‌اند. همچنین z یک نمونه تصادفی $1 + n + m$ تایی از توزیع نرمال استاندارد است. حال بردار 100 تایی مشاهدات Y را توسط رابطه (۸) تولید می‌کنیم. نمودارهای بافت‌نگار و $Q-Q$ داده‌های تولید شده در شکل ۱ و p -مقدارهای کمتر از 0.05 آزمون‌های کولموگروف-اسمیرنوف و شاپیرو-ویلکس نشان می‌دهند که توزیع داده‌های تولید شده ناگوسی است. مقادیر چولگی و ضرایب کشیدگی به ترتیب 0.75 و 0.96 است.

پارامترها با روش‌های ماکسیمم درستنمایی و MSP برآورد شدند. یکبار با مقادیر اولیه دلخواه و روش ماکسیمم درستنمایی پارامترها برآورد شدند و برآوردهای حاصل بعنوان مقادیر اولیه در روش MSP مورد استفاده قرار گرفتند. بار دیگر ابتدا با مقادیر اولیه دلخواه و روش MSP پارامترها برآورد شدند، سپس این برآوردها بعنوان مقادیر اولیه در روش ماکسیمم درستنمایی مورد استفاده قرار گرفتند. نتایج نشان داد که روش اول بهتر از روش دوم است از این رو نتایج برآوردیابی با این روش ارائه شده است.

پارامترهای σ^2 و λ با برآورد تغییرنگار و تابع eyefit برآورد اولیه شدند. سپس با روش حداقل توان دوم برآورد نهایی آن‌ها به‌دست آورده شد. بقیه پارامترها با روش ماکسیمم درستنمایی برآورد شده و بعنوان مقدار اولیه در روش MSP استفاده شدند. روش‌های ماکسیمم درستنمایی و MSP به ترتیب با مینیم کردن توابع $Q(\eta)$ و $-\ell(\eta)$ در (۹) و (۱۰) توسط تابع optim در نرم‌افزار R انجام شده‌اند. این عمل 10000 بار تکرار شده و مقادیر پارامترهای برآورد شده به روش MSP بعنوان برآورد پارامتر مورد نظر در نظر گرفته شده است. مقادیر برآورد پارامترها، اریبی و میانگین توان دوم خطای برآوردگرها در جدول ۱ ارائه شده‌اند. براساس داده‌های تولید شده از توزیع چوله-گاوسی، با فرض آنکه دارای توزیع چوله-تی هستند پارامترها با استفاده از قضیه ۱ برآورد شدند. مقادیر اریبی کمی بیشتر از مقادیر اریبی در جدول ۱ بودند اما مقادیر MSE حداقل سه مرتبه بزرگتر از مقادیر متناظر آن بودند.

جدول ۱. مقادیر برآورد پارامترها، اریبی و میانگین توان دوم خطای برآوردگرها

پارامتر	برآورد	اریبی	MSE	پارامتر	برآورد	اریبی	MSE
β_1	۵۹۸	۰/۰۱۱۰	۰/۰۰۴۸	θ_7	۰/۲۵	۰/۰۰۳۴	۰/۰۰۱۱
β_2	۳۷۸	۰/۰۰۸۷	۰/۰۰۲۷	θ_8	۰/۲۱	۰/۰۰۲۲	۰/۰۰۱۴
θ_1	۰/۴۱	۰/۰۰۵۸	۰/۰۰۲۴	ϕ_1	۰/۷۳	۰/۰۰۲۳	۰/۰۰۳۴
θ_2	۰/۷۸	۰/۰۰۳۸	۰/۰۰۱۳	ϕ_2	۰/۵۲	۰/۰۰۱۳	۰/۰۰۴۱
θ_3	۰/۴۹	۰/۰۰۳۱	۰/۰۰۱۱	ϕ_3	۰/۱۹	۰/۰۰۳۱	۰/۰۰۱۱
θ_4	۰/۱۰	۰/۰۱۴۶	۰/۰۰۴۵	μ	۲/۲۴	۰/۰۰۱۴	۰/۰۰۳۴
θ_5	۰/۰۵	۰/۰۱۳۸	۰/۰۰۴۵	σ^2	۱/۹۸	۰/۰۱۴۶	۰/۰۰۳۷
θ_6	۰/۳۲	۰/۰۰۵۲	۰/۰۰۱۲	λ	۳/۱۱	۰/۰۰۲۲	۰/۰۰۱۳

برای پیش‌گویی مقادیر گمشده، ۶ مکان بطور تصادفی از بین ۱۰۰ مکان انتخاب شده است. این کار ۵۰۰۰ بار تکرار می‌شود و هر بار ۶ مکان بطور تصادفی به‌عنوان مکان‌های گمشده انتخاب می‌شوند. پیش‌گویی مقادیر گمشده توسط دو مدل چوله-لاپلاس و گاوسی پس از ۵۰۰۰ بار تکرار، به‌دست آورده شده است. واریانس پیش‌گویی‌ها با

۳۱۰ مدل رگرسیون فضایی خود بازگشتی و میانگین متحرک مرتبه دو

استفاده از رابطه (۱۴)، به همراه اریبی و میانگین مربعات خطاهای پیش‌گویی (PREMS) با استفاده از روابط

$$\text{Bias}(\hat{Y}_{\text{mis}}) = \frac{\sum_{i=1}^{N_{\text{mis}}} (\hat{Y}_{\text{mis},i} - Y_{\text{mis},i})}{N_{\text{mis}}},$$

$$\text{PREMS}(\hat{Y}_{\text{mis}}) = \frac{\sum_{i=1}^{N_{\text{mis}}} (\hat{Y}_{\text{mis},i} - Y_{\text{mis},i})^2}{N_{\text{mis}}},$$

محاسبه شده است. نتایج در جدول ۲ نشان می‌دهد که مدل چوله-لاپلاس کارآمدتر از مدل‌های چوله-تی و گاوسی است. نتایج ارایه شده در مطالعه شبیه‌سازی تنها یکی از مواردی است که بررسی شده است، اما بدلیل تشابه نتایج

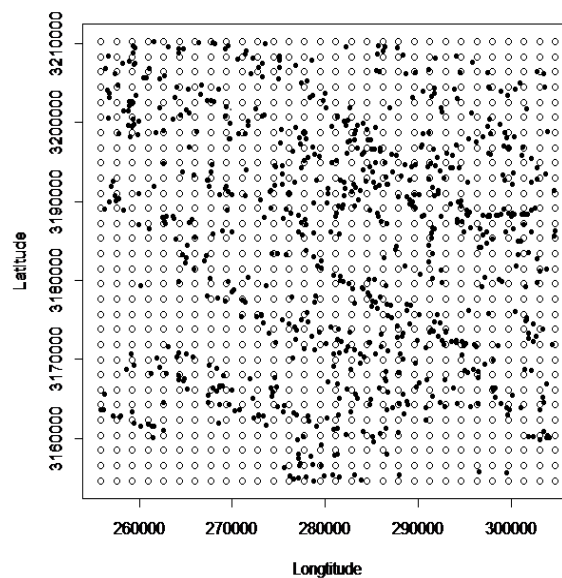
جدول ۲. نتایج پیش‌گویی با سه مدل چوله-لاپلاس، گاوسی و چوله-تی

مدل چوله-لاپلاس			مدل گاوسی			مدل چوله-تی		
اریانس	اریبی	PREMS	اریانس	اریبی	PREMS	اریانس	اریبی	PREMS
۰/۲۲	۰/۰۲	۰/۲۴	۰/۹۷	۰/۱۱	۱/۰۷	۱/۱۴	۰/۰۷	۱/۵۷

و حجم بالای آنها تنها یک مورد گزارش شده است. در واقع برای تعداد داده‌های مختلف و پارامترهای متفاوت شبیه‌سازی انجام شده است و نتایج برای تعداد داده‌های ثابت و پارامترهای مختلف بسیار به هم نزدیک بودند. برای مطالعه شبیه‌سازی با ۳۷۰۰ داده و تکرار ۱۰۰۰۰ بار نیز انجام شد که نتایج تقریباً مشابه شبیه‌سازی اول بودند. بعبارت دیگر برتری مدل چوله-لاپلاس بر مدل‌های چوله-تی و گاوسی با استفاده از داده‌های بزرگ نیز تایید شد.

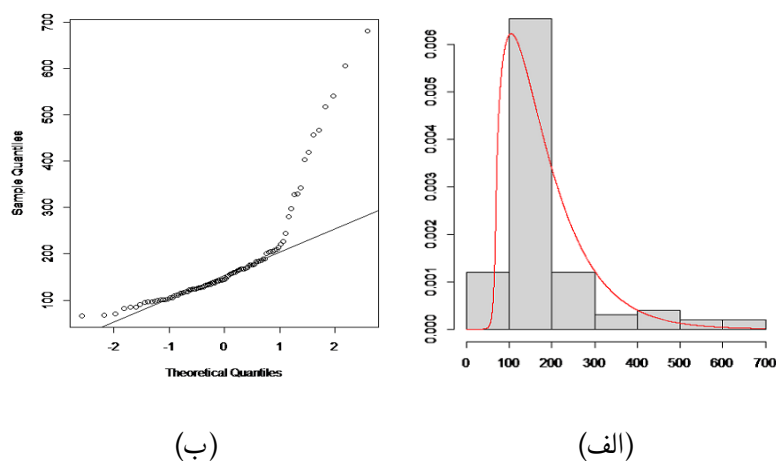
۶ تحلیل داده‌های زمین‌شناسی

در این بخش، مجموعه داده‌های واقعی زمین‌شناسی، شامل میزان منیزیم (mg) که در ۷۴۳ موقعیت مکانی دریاچه کافت‌واقع در شهرستان اقلید، استان فارس اندازه‌گیری شده‌اند با مدل ارائه شده در این مقاله مورد تحلیل آماری قرار می‌گیرند. لازم به ذکر است که در زمان جمع‌آوری داده‌ها این دریاچه خشک شده بود. موقعیت مکانی این داده‌ها بر روی یک شبکه در شکل ۱ نشان داده شده است. مقادیر چولگی و کشیدگی این داده‌ها به ترتیب برابر با ۱/۳۸ و ۱/۸۱ است. نمودارهای بافت‌نگار و نمودار Q-Q داده‌ها در شکل ۲، چولگی، دم سنگینی و رفتار غیر گاوسی داده‌ها را نشان می‌دهند. مقادیر بسیار کوچک p -مقدار آزمون کولموگروف-اسمیرنوف و آزمون شاپیرو-ویلک ناگوسی بودن داده‌ها را تایید می‌کند. نمودار بافت‌نگار نشان می‌دهد که تابع چگالی چوله-لاپلاس برازش خوبی به توزیع داده‌ها دارد، که در آن پارامترها با روش ماکسیمم درست‌نمایی برآورد شده‌اند. به عبارتی توزیع $(\gamma_3/17, 554/04, 1/15, 7/05)$ $EGSL_1$ برآورد شده است. بنابراین توزیع داده‌ها شباهت‌های قابل توجهی با توزیع $EGSL$ دارند. آزمون کولموگروف-اسمیرنوف با p -مقدار ۰/۲۷ فرضیه چوله-لاپلاس بودن داده‌ها را تایید می‌کند. اما همین آزمون با p -مقدار ۰/۴۱



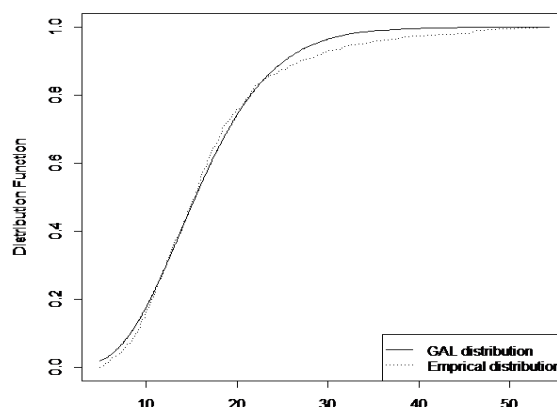
شکل ۱. نمودار موقعیت مکانی داده‌ها روی مشبک

فرضیه چوله-تی بودن توزیع داده‌ها را رد می‌کند.



شکل ۲. نمودار الف-بافت‌نگار و ب-Q-داده‌ها

برای پیش‌گویی این عنصر در کل منطقه، یک مشبک منظم 30×30 بر روی منطقه در نظر گرفته شده است. از آنجا که مقدار q به یک نزدیک است، پیش‌گویی با استفاده از رابطه (۲) انجام شده است. نمودارهای رویه و کانتور



شکل ۳. تابع توزیع تجربی داده‌ها و تابع توزیع تجمعی چوله-لاپلاس

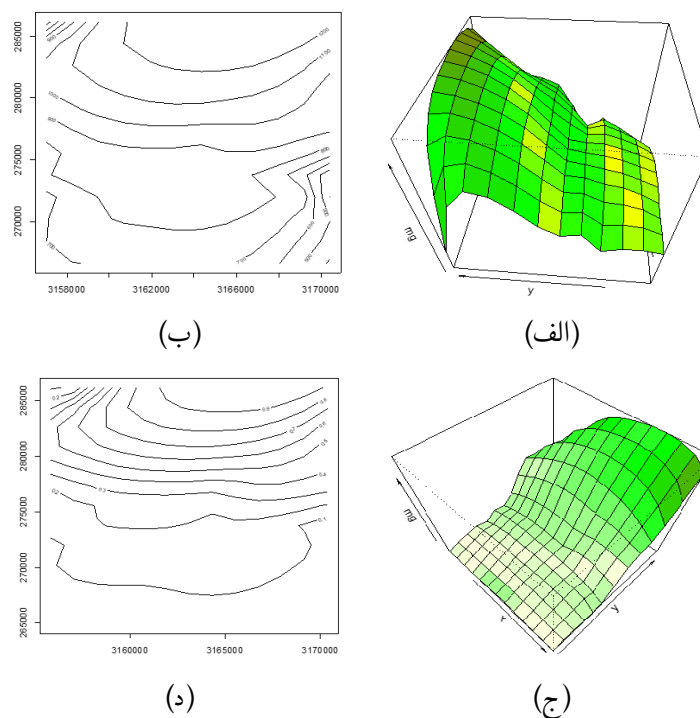
پیش‌گویی mg و واریانس آن در شکل ۴ بیانگر وابستگی مکانی مقادیر پیش‌گویی شده است و خطاهای پیش‌گویی کمی نیز برای مکان‌های پیش‌گویی شده مشاهده می‌شود.

۷ بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله یک مدل رگرسیون فضایی تحت خطاهای چوله-لاپلاس، چوله-تی و گاوسی مطالعه شد. نتایج شبیه‌سازی نشان داد که مدل چوله-لاپلاس کاراتر از مدل گاوسی و چوله-تی بوده است. یک مجموعه داده واقعی که دارای توزیع چوله-لاپلاس بودند، اما در آزمون نیکویی برازش فرض گاوسی و چوله-تی بودن آنها رد شد نیز مورد بررسی قرار گرفت. مدل پیشنهادی هر چند از مرتبه دو است، اما تنها به داده‌هایی که در قسمت چپ و پایین داده‌ها هستند مرتبط است. مطالعه این مدل با استفاده از تمامی داده‌هایی که تا مرتبه دو در مکان ثابتی قرار دارند می‌تواند منعطف‌تر و قابل استفاده برای داده‌های بیشتر باشد. هر چند چنین مدلی با توجه به درگیر کردن تعداد بیشتری از مشاهدات دارای تعداد بسیار زیادی پارامتر است می‌تواند موضوع مطالعات آتی قرار گیرد.

تقدیر و تشکر

نویسندگان از نظرات و پیشنهادهای داوران، سردبیر، هیئت تحریریه و ویراستار محترم مجله که در ارتقا و ارائه بهتر مقاله موثر بود کمال تشکر را دارند.



شکل ۴. نمودار الف-رویه و ب- کانتور پیشگویی و نمودار ج-رویه و د- کانتور واریانس پیشگو

مراجع

- Anselin, L. (1988), *Spatial Econometrics: Methods and Models*. Kluwer, Dordrecht.
- Anselin, L. (1990), Spatial Dependence and Spatial Structural Instability in Applied Regression Analysis, *Journal of Regional Science*, **30**, 185-207.
- Arellano-Valle, R. B., and Genton, M. G. (2010). Multivariate Extended Skew-t Distributions and Related Families, *Metron*, **68**, 201-234.
- Arslan, G., and Oncel, S. Y. (2017), Parameter Estimation of Some Kumaraswamy-G type Distributions, *Mathematical Sciences*, **11**(2), 131-138.
- Basu, S. and Reinsel, G. C. (1994), Regression Models with Spatially Correlated Errors, *Journal of the American Statistical Association*, **89**, 88-99.

- Bustos, O., Ojeda, S., and Vallejos, R. (2009), Spatial ARMA Models and Its Applications to Image Filtering, *Brazilian Journal of Probability and Statistics*, **23**(2), 141–165.
- Karimi, O., and Mohammadzadeh, M. (2012), Bayesian Spatial Regression Models with CSN Correlated Errors and Missing Observations, *Statistical Papers*, **53**, 205–218.
- Kozubowski, T. J., Podgórski, K., and Rychlik, I. (2013), Multivariate Generalized Laplace Distributions and Related Random Fields, *Journal of Multivariate Analysis*, **113**, 59–72.
- Mahmoudian, B. (2018). On the Existence of Some Skew-Gaussian Random Field Models, *Statistical and Probability Letters*, **137**, 331–335.
- Oh, M., Shin, D. W., and Kim, H. J. (2002), Bayesian Analysis of Regression Models with Spatially Correlated Errors and Missing Observations, *Computational Statistics and Data Analysis*, **39**, 387–400.
- Saber, M. M., Nematollahi, A. R., and Mohammadzadeh, M. (2018), Generalized Asymmetric Laplace Random Fields: Existence and Application. *Journal of Data Science*, **18**, 51–68.
- Saber, M. M., Nematollahi, A. R. and Mohammadzadeh, M. (2021), *Extended Generalized Skew Laplace Random Field: Spatial Autoregressive and Moving Average Model for Prediction of Missing Data in Skew and Heavy Tailed Data*, Journal of Sciences, Islamic Republic of Iran **32**(2): 169 - 178.
- Shin, D. W., and Sarkar, S. (1994), Parameter Estimation in Regression Models with Auto-correlated Errors Using Irregular Data. *Communication in Statistics-Theory and Methods*, **23**, 3567–3580.