



Dynamic Version of Weighted Cumulative Residual Extropy and Its Applications

Hashempour, M.¹, Mohammadi, M.²

¹Department of Statistics, University of Hormozgan, Bandar Abbas , Iran.

²Department of Statistics, University of Zabol, Zabol, Iran.

Corresponding author: M. Hashempour, ma.hashempour@hormozgan.ac.ir

Received: 8/1/2024 Revised: 22/7/2024 Accepted and Published Online: 25/7/2024.

Introduction

In the realm of statistical analysis, the concept of extropy has attracted considerable interest. However, existing approaches often overlook the dynamic nature of real-world phenomena. In the ever-evolving landscape of information theory and reliability analysis, we introduce a novel criterion—the dynamic variant of weighted cumulative residual extropy. This unique criterion extends the familiar cumulative residual extropy and delves into the dynamic version, offering a fresh perspective that accounts for temporal variations. By integrating this dynamic viewpoint, we aim to enhance our understanding of complex systems, explore practical applications, and make significant theoretical advancements that can guide practical decision-making. Throughout this paper, we unveil the mathematical foundations, present empirical evidence, and discuss the implications of this novel dynamic extension.

Material and Methods

In this study, we investigate the dynamic behavior of weighted cumulative residual extropy. Our methodology combines theoretical groundwork with empirical rigor. First, we establish the mathematical framework for this dynamic extension, emphasizing its remarkable adaptability to evolving contexts. Next, we employ non-parametric estimators based on empirical methods, carefully assessing their asymptotic properties. Results of simulation studies and real data analysis enhance our understanding of the application of the weighted dynamic cumulative residual extropy.

Results and Discussion

Our exploration of the dynamic weighted cumulative residual extropy criterion reveals a wealth of practical insights. We establish its connections with well-known reliability measures, shedding light on its potential applications in weighted mean residual lifetime, hazard rate functions, and second-order conditional moments. The characterization properties, such as upper and lower bounds, inequalities, and stochastic orders, vividly depict its behavior across diverse scenarios. Moreover, we unveil the impact of linear transformations on this dynamic extropy, highlighting its robustness. Most importantly, our real-world application demonstrates how dynamic weighted cumulative residual extropy can aid in selecting appropriate data distributions, thereby enhancing its practical relevance.

Conclusion

We've bridged theory and practice in exploring dynamic weighted cumulative residual extropy. Our findings illuminate its connections to established reliability criteria, revealing its versatility across diverse contexts and making it a powerful tool for researchers. The characterization properties, bounds, and stochastic orders provide a comprehensive understanding. Moreover, our non-parametric estimator equips researchers with powerful tools.

Keywords: Extropy, Cumulative Residual Extropy, Conditional Moments, Weighted Mean Residual Lifetime.

Mathematics Subject Classification (2010): 62N05, 62F10.



©The Author(s). The Publisher is Iranian Statistical Society.

This is an open access article distributed under the terms and conditions of [\(CC BY-NC 4.0\)](https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/)

نسخه پویای اکستروپی باقیمانده تجمعی موزون و کاربردهای آن

مجید هاشمپور^۱، مرتضی محمدی^۲

گروه آمار، دانشگاه هرمزگان

گروه آمار، دانشگاه زابل

نویسنده مسئول: مجید هاشمپور، ma.hashempour@hormozgan.ac.ir

تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۱۰/۱۸ تاریخ بازنگری: ۱۴۰۳/۵/۱ تاریخ پذیرش و انتشار: ۱۴۰۳/۵/۴

چکیده: در این مقاله، معیار اکستروپی باقیمانده تجمعی موزون پویا به عنوان تعمیمی از معیار اکستروپی باقیمانده تجمعی موزون معرفی می‌شود. ارتباط معیار پیشنهادی با معیارهای قابلیت اعتماد از قبیل میانگین باقیمانده عمر موزون، تابع نرخ خطر و گشتاور شرطی مرتبه دوم مورد مطالعه قرار می‌گیرد. همچنین، خواص مشخصه‌سازی، کران‌های بالا و پایین، نامساوی‌ها و ترتیب‌های تصادفی براساس اکستروپی باقیمانده تجمعی موزون پویا و تاثیر تبدیل خطی بر آن ارائه خواهد شد. سپس، یک برآوردگر ناپارامتری به روش تجربی برای معیار معرفی شده ارائه و خواص مجانبی آن مطالعه می‌گردد. در انتها، به ارائه کاربردی از اکستروپی باقیمانده تجمعی موزون پویا در انتخاب توزیع مناسب داده‌ها توسط یک مجموعه داده واقعی پرداخته می‌شود.

واژه‌های کلیدی: اکستروپی، اکستروپی باقیمانده تجمعی، گشتاور شرطی، میانگین باقیمانده عمر موزون. کد موضوع بندی ریاضی (۲۰۱۰): 62F10، 62E10.

۱ مقدمه

شانون (۱۹۴۸) مفهوم آنتروپی را به عنوان یک معیار عدم حتمیت معرفی کرد. در نظریه اطلاع، معیار آنتروپی یک ابزار پایه‌ای است که جایگاه خود را در بین علوم مختلف از جمله فیزیک، مهندسی، آمار و احتمال تثبیت کرده است.

فرض کنید متغیر تصادفی X ، مطلقاً پیوسته و نامنفی با تابع چگالی $f(x)$ باشد، آنگاه آنتروپی شانون به صورت

$$H(X) = - \int_0^{\infty} f(x) \log f(x) dx. \quad (۱)$$

تعریف می‌شود. محققان تعمیم‌های بسیاری از آنتروپی شانون را با جایگذاری تابع توزیع تجمعی $F(x)$ و تابع بقا $\bar{F}(x)$ به جای تابع چگالی در رابطه (۱) ارائه دادند که در ادامه به اختصار مرور خواهد شد. رانو و همکاران (۲۰۰۴) آنتروپی باقیمانده تجمعی را به صورت

$$\text{CRE}(X) = - \int_0^{\infty} \bar{F}(x) \log \bar{F}(x) dx.$$

تعریف کردند. سپس آنتروپی باقیمانده تجمعی پویا توسط اسدی و زهره‌وند (۲۰۰۷) به صورت

$$\text{DCRE}(X; t) = - \int_t^{\infty} \frac{\bar{F}(x)}{\bar{F}(t)} \log \frac{\bar{F}(x)}{\bar{F}(t)} dx. \quad (۲)$$

معرفی شد. از آن‌جا که آنتروپی شانون برای وقوع هر پیشامد اهمیت یکسانی قائل است، آنتروپی موزون توسط دی‌کرشنزو و لونگوباردی (۲۰۰۶) به عنوان جایگزین آنتروپی کلاسیک شانون معرفی شد. آنگاه کایال و محارنا (۲۰۱۷) آنتروپی باقیمانده تجمعی موزون و نسخه پویای آن را به ترتیب به صورت

$$\text{WCRE}(X) = - \int_0^{\infty} x \bar{F}(x) \log \bar{F}(x) dx, \quad (۳)$$

$$\text{WDCRE}(X) = - \int_t^{\infty} x \frac{\bar{F}(x)}{\bar{F}(t)} \log \frac{\bar{F}(x)}{\bar{F}(t)} dx. \quad (۴)$$

ارائه کردند. از طرف دیگر، اکستروپی به عنوان یک اندازه مکمل برای آنتروپی توسط لاد و همکاران (۲۰۱۵) برای متغیر تصادفی پیوسته و نامنفی X با تابع چگالی $f(x)$ به صورت

$$J(X) = -\frac{1}{\gamma} \int_0^{\infty} f^{\gamma}(x) dx = -\frac{1}{\gamma} \int_0^1 f(F^{-1}(u)) du, \quad (۵)$$

معرفی شد، که در آن $0 < u < 1$ و $F^{-1}(u) = \inf\{t; F(t) \geq u\}$ ، تابع چنک است. مفاهیم آنتروپی و اکستروپی مانند تصاویر سیاه و سفید در یک فیلم عکاسی به یکدیگر مرتبط هستند و با هم به توصیف اطلاعات در مورد توزیع داده‌ها کمک می‌کنند. اکستروپی، مقایسه عدم قطعیت دو متغیر تصادفی را تسهیل می‌کند و کاربردهای مختلفی در زمینه‌های تجاری و علمی از قبیل علم نجوم، دینامیک سیالات، پردازش تصاویر دارد. این شاخص همواره

مقادیر منفی را اختیار می‌کند و برای مقایسه عدم حتمیت دو متغیر تصادفی نیز مورد استفاده قرار می‌گیرد. اخیراً، نسخه‌های تعمیم‌یافته از اکستروپی به دلیل کاربردهای این شاخص در علوم مختلف توسط محققین ارائه شده است. ابتدا، **کیو و جیا** (۲۰۱۸) مفهوم اکستروپی باقیمانده ارائه نمودند، سپس **بالاکریشن و همکاران** (۲۰۲۲) مفهوم اکستروپی باقیمانده موزون پویا را به صورت

$$RJ^w(X; t) = -\frac{1}{\gamma} \int_t^\infty x \left(\frac{f(x)}{\bar{F}(t)} \right)^\gamma dx \quad (۶)$$

معرفی کردند. همچنین، مفهوم اکستروپی باقیمانده تجمعی توسط **جهانشاهی و همکاران** (۲۰۲۰) پیشنهاد گردید و اخیراً **هاشم‌پور و همکاران** (۲۰۲۲) معیار اکستروپی باقیمانده تجمعی موزون را به صورت

$$\mathcal{E}J^w(X) = -\frac{1}{\gamma} \int_0^\infty x \bar{F}^\gamma(x) dx. \quad (۷)$$

معرفی کرده‌اند. برای مطالعه بیشتر در مورد تعمیم‌های اکستروپی می‌توان به **هاشم‌پور و محمدی** (۲۰۲۲، ۲۰۲۴)، **محمدی و هاشم‌پور** (۲۰۲۲، ۲۰۲۳) و **اکبری و همکاران** (۱۴۰۲) مراجعه کرد. پس از معرفی معیار اکستروپی به عنوان مکمل معیار عدم قطعیت آنتروپی، تعمیم‌هایی از آن با جایگذاری توابع توزیع تجمعی و بقاء به جای تابع چگالی ارائه گردید. سپس، این نیاز احساس شد که با توجه به یکسان نبودن احتمال رخداد پیشامدها می‌بایست کمیت وزن را نیز به این معیارهای اطلاع اضافه نمود. به مرور مشخص شد که بسیاری از پیشامدها به واحد زمان بستگی دارند و زمان بر کارکرد و نتیجه این پیشامدها و وقایع اثرگذار است. از این رو، نسخه پویای معیارهای تعمیم‌یافته اکستروپی که می‌تواند درک عمیق تر و دقت بالاتری در تجزیه و تحلیل داده‌ها ارائه کند، توسط محققین مورد مطالعه قرار گرفت. اخیراً، نسخه پویای معیار آنتروپی باقیمانده تجمعی موزون توسط **میرعلی و براتپور** (۲۰۱۷) مطالعه شده است. در این مقاله با هدف ادامه این پژوهش‌ها، نسخه پویای معیار اکستروپی باقیمانده تجمعی موزون معرفی و مطالعه می‌گردد. در بخش دوم مقاله، معیار اکستروپی باقیمانده تجمعی موزون پویا معرفی خواهد شد. بخش سوم به بررسی نامساوی‌ها و کران‌های مرتبط با معیار معرفی شده اختصاص یافته است. در بخش چهارم، کاربرد ترتیب‌های تصادفی براساس معیار پیشنهادی مطالعه می‌شود. در بخش پنجم، برآوردهای ناپارامتری و خواص مجانبی ارائه شده است و در انتها، کاربردی از معیار اکستروپی باقیمانده تجمعی موزون پویا در تحلیل داده‌های واقعی بررسی می‌گردد.

۲ اکستروپی باقیمانده تجمعی موزون پویا

در این بخش، به معرفی و بررسی اکستروپی باقیمانده تجمعی موزون پویا و ارتباط این شاخص با گشتاورهای مرتبه اول و دوم شرطی پرداخته می‌شود.

۴۴۰ اکستروپی باقیمانده تجمعی موزون پویا

تعریف ۱. فرض کنید متغیر تصادفی پیوسته و نامنفی X دارای تابع بقاء $\bar{F}(x)$ باشد. نسخه پویای اکستروپی باقیمانده تجمعی موزون بدین صورت تعریف می‌شود:

$$\mathcal{E}J^w(X; t) = -\frac{1}{\gamma} \int_t^\infty x \left(\frac{\bar{F}(x)}{\bar{F}(t)} \right)^\gamma dx, \quad (8)$$

معیار (۸) برابر با اکستروپی باقیمانده تجمعی موزون برای متغیر تصادفی $[X - t \mid X \geq t]$ است و اگر t به سمت صفر میل کند، آنگاه رابطه (۸) به رابطه (۷) تبدیل می‌شود.

گزاره ۱. اگر X یک متغیر تصادفی نامنفی و پیوسته با تابع بقاء $\bar{F}(x)$ باشد، آنگاه

$$\mathcal{E}J^w(X; t) = b_1(t)\mathcal{E}J^w(X) + b_2(t),$$

$$b_2(t) = \frac{1}{\gamma} \int_0^t x \left[\frac{\bar{F}(x)}{\bar{F}(t)} \right]^\gamma dx \text{ و } b_1(t) = [\bar{F}^\gamma(t)]^{-1}$$

برهان: با توجه به (۷) و (۸) داریم

$$\begin{aligned} \mathcal{E}J^w(X; t) &= -\frac{1}{\gamma \bar{F}^\gamma(t)} \left[\int_0^\infty x \bar{F}^\gamma(x) dx - \int_0^t x \bar{F}^\gamma(x) dx \right] \\ &= \frac{1}{\bar{F}^\gamma(t)} \mathcal{E}J^w(X) + \frac{1}{\gamma} \int_0^t x \left[\frac{\bar{F}(x)}{\bar{F}(t)} \right]^\gamma dx \\ &= b_1(t)\mathcal{E}J^w(X) + b_2(t). \end{aligned}$$

قضیه ۱. اگر به ازای $p > 2$ ، $E(X^p) < \infty$ باشد، آنگاه $\mathcal{E}J^w(X; t)$ متناهی خواهد بود.

برهان: با استفاده از نامساوی مارکوف و این‌که $\bar{F}^\gamma(x) \leq \bar{F}(x)$ داریم

$$\begin{aligned} \int_t^\infty x \bar{F}^\gamma(x) dx &\leq \int_0^\infty x \bar{F}(x) dx \\ &= \int_0^1 x \bar{F}(x) dx + \int_1^\infty x \bar{F}(x) dx \\ &\leq \int_0^1 x dx + \int_1^\infty x \frac{E(X^p)}{x^p} dx \\ &= \frac{1}{2} + E(X^p) \int_1^\infty x^{1-p} dx. \end{aligned} \quad (9)$$

انتگرال در رابطه (۹) متناهی خواهد بود، اگر $p > 2$ باشد. در نتیجه، با ضرب طرفین رابطه (۹) در $\bar{F}^{-\gamma}(t)$ ، اثبات کامل می‌شود.

فرع ۱. با توجه به قضیه ۱، کران پایین برای اکستروپی باقیمانده تجمعی موزون پویا به صورت $\mathcal{E}J^w(X; t) \geq -\frac{1}{F^*(t)} \left(\frac{1}{2} + \frac{E(X^p)}{p-2} \right)$ حاصل می‌شود.

قضیه ۲. تابع توزیع متغیر تصادفی X دارای اکستروپی باقیمانده تجمعی موزون پویا ثابت است اگر و تنها اگر X دارای توزیع رایی باشد.

برهان: از آنجایی که توزیع رایی دارای تابع توزیع $F(x) = 1 - e^{-\lambda x^2}$, $x > 0$ است، با توجه به رابطه (۸)، اکستروپی باقیمانده تجمعی موزون پویا در توزیع رایی عبارت است از

$$\mathcal{E}J^w(X; t) = -\frac{1}{2} \int_t^\infty x e^{-2\lambda(x^2-t^2)} dx = -\frac{1}{4\lambda}, \quad (10)$$

در نتیجه اکستروپی باقیمانده تجمعی موزون پویا در توزیع رایی مستقل از زمان و ثابت است. در ادامه، اثبات شرط کافی بودن ارائه می‌شود. با مشتق‌گیری از رابطه (۸) نسبت به t داریم

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{E}J^w(X; t) &= -\frac{1}{2} \left(\frac{-t\bar{F}^*(t)\bar{F}^*(t) + 2f(t)\bar{F}(t) \int_t^\infty x\bar{F}^*(x)dx}{\bar{F}^*(t)} \right) \\ &= \frac{t}{2} + 2r_F(t)\mathcal{E}J^w(X; t). \end{aligned}$$

فرض کنید $\mathcal{E}J^w(X; t) = -C$ ، چون مشتق آن صفر است، در نتیجه $\mathcal{E}J^w(X; t) = \frac{-t}{2r_F(t)}$ ، بنابراین $r_F(t) = \frac{t}{4C}$. با در نظر گرفتن $C^* = 4C$ می‌توان نتیجه گرفت $r_F(t) = \frac{t}{C^*}$ ، که تابع نرخ خطر مربوط به توزیع رایی است.

قضیه ۳. فرض کنید X و Y متغیرهای تصادفی پیوسته و نامنفی به ترتیب با توابع بقاء $\bar{F}_X$ و $\bar{F}_Y$ باشند. اگر $Y = cX + d$ و $c > 0$ و $d \in \mathbb{R}$ باشد، آنگاه

$$\mathcal{E}J^w(Y; t) = c^2 \mathcal{E}J^w(X; \frac{t-d}{c}) + dc \mathcal{E}J(X; \frac{t-d}{c}), \quad t \geq d.$$

برهان: با توجه به $\bar{F}_Y(y) = \bar{F}_X(\frac{y-d}{c})$ و رابطه (۸) داریم

$$\begin{aligned}\mathcal{E}J^w(Y; t) &= -\frac{1}{c} \int_t^\infty y \left[\frac{\bar{F}_Y(y)}{\bar{F}_Y(t)} \right]^{\gamma} dy \\ &= -\frac{1}{c} \int_t^\infty y \left[\frac{\bar{F}_X(\frac{y-d}{c})}{\bar{F}_X(\frac{t-d}{c})} \right]^{\gamma} dy \\ &= -\frac{1}{c} \int_{\frac{t-d}{c}}^\infty (cx+d) \left[\frac{\bar{F}_X(x)}{\bar{F}_X(\frac{t-d}{c})} \right]^{\gamma} c dx \\ &= -\frac{c^{\gamma}}{c} \int_{\frac{t-d}{c}}^\infty x \left[\frac{\bar{F}_X(x)}{\bar{F}_X(\frac{t-d}{c})} \right]^{\gamma} dx - \frac{dc}{c} \int_{\frac{t-d}{c}}^\infty \left[\frac{\bar{F}_X(x)}{\bar{F}_X(\frac{t-d}{c})} \right]^{\gamma} dx \\ &= c^{\gamma} \mathcal{E}J^w(X; \frac{t-d}{c}) + dc \mathcal{E}J(X; \frac{t-d}{c}).\end{aligned}$$

فرع ۲. به ازای $t = d$ در قضیه ۳ داریم $\mathcal{E}J^w(Y; t) = c^{\gamma} \mathcal{E}J^w(X) + cd \mathcal{E}J(X)$.

تعریف ۲. اگر متغیر تصادفی X پیوسته و نامنفی باشد. گشتاور مرتبه دوم متغیر تصادفی $[X | X \geq t]$ به صورت

$$\vartheta_X(t) = \gamma \mu_X(t) + t^{\gamma} = E[X^{\gamma} | X \geq t]. \quad (11)$$

است، که در آن $\mu_X(t) = \int_t^\infty x \frac{\bar{F}(x)}{\bar{F}(t)} dx$ میانگین باقیمانده عمر موزون است.

گزاره ۲. اگر X یک متغیر تصادفی نامنفی و پیوسته با تابع بقاء $\bar{F}(x)$ و میانگین متناهی باشد، آنگاه $\mu_X(t) = \int_0^t x \frac{\bar{F}(x)}{\bar{F}(t)} dx$ و $a_1(t) = [\gamma \bar{F}(t)]^{-1}$ ، که در آن $a_1(t)E(X^{\gamma}) - a_2(t)$.

۳ نامساوی‌ها

در این بخش، کران‌های پایینی برای شاخص (۸) برحسب میانگین باقیمانده عمر موزون، تابع نرخ خطر، اکستروپی باقیمانده تجمعی و گشتاور مرتبه دوم ارائه می‌شود.

گزاره ۳. اگر X متغیر تصادفی پیوسته و نامنفی با تابع بقاء $\bar{F}(x)$ باشد، آنگاه کران پایین اکستروپی باقیمانده تجمعی موزون پویا بر اساس میانگین باقیمانده عمر موزون عبارت است از

$$\mathcal{E}J^w(X; t) \geq -\frac{1}{c} \mu_X(t). \quad (12)$$

برهان: برای هر $x \leq t$ ، $\bar{F}(x) \leq \bar{F}(t)$ و در نتیجه $\left(\frac{\bar{F}(x)}{\bar{F}(t)}\right)^{\gamma} \leq \frac{\bar{F}(x)}{\bar{F}(t)}$ است. بنابراین

$$-\frac{1}{\gamma} \int_t^{\infty} x \left(\frac{\bar{F}(x)}{\bar{F}(t)}\right)^{\gamma} dx \geq -\frac{1}{\gamma} \int_t^{\infty} x \frac{\bar{F}(x)}{\bar{F}(t)} dx$$

و اثبات کامل می‌شود. در صورتی که $x = t$ باشد، شرط تساوی در رابطه (۱۲) برقرار خواهد بود.

قضیه ۴. فرض کنید X متغیر تصادفی نامنفی و پیوسته با تابع توزیع $F(x)$ باشد. اکستروپی باقیمانده تجمعی موزون پویا افزایشی (کاهشی) است اگر و تنها اگر

$$\mathcal{E}J^w(X; t) \geq (\leq) -\frac{t}{\gamma} \left[-\left(\frac{d}{dt} \log \vartheta_X(t)\right)^{-1} + t^{\gamma} \frac{d}{dt} \vartheta_X(t) \right].$$

گزاره ۴. فرض کنید X یک متغیر تصادفی نامنفی و پیوسته با تابع بقا $\bar{F}(x)$ باشد. $\mu_X(t)$ نسبت به t افزایشی (کاهشی) است اگر و تنها اگر

$$\mu_X(t) \geq (\leq) \frac{t}{r_F(t)}, \quad (13)$$

که در آن شرط تساوی برقرار خواهد بود اگر $\mu_X(t)$ نسبت به t ثابت باشد.

گزاره ۵. فرض کنید X متغیر تصادفی پیوسته و نامنفی با تابع بقا $\bar{F}(x)$ و اکستروپی باقیمانده تجمعی موزون پویای آن متناهی باشد. در این صورت برای $S(x, t) = -\int_t^x u \frac{\bar{F}(u)}{\bar{F}(t)} du$ داریم

$$\mathcal{E}J^w(X; t) = \frac{1}{\gamma} E[S(X, t) | X \geq t]. \quad (14)$$

برهان: با استفاده از قضیه فوبینی و رابطه (۸) اثبات کامل می‌شود.

قضیه ۵. اگر X متغیر تصادفی مطلقاً پیوسته و نامنفی با تابع بقا $\bar{F}(x)$ باشد، آنگاه:

$$E[\vartheta_X(t) | X \geq t] > \gamma \mathcal{E}J^w(X; t) + \vartheta_X(t). \quad (15)$$

برهان: اگر $t \leq s$ باشد، آنگاه $\bar{F}(s) \leq \bar{F}(t)$ و در نتیجه $\log \frac{\bar{F}(s)}{\bar{F}(t)} < \frac{\bar{F}(s)}{\bar{F}(t)}$ است. با استفاده از قضیه

فوبینی و رابطه (۱۱) داریم:

$$\begin{aligned} E[\vartheta_X(t) \mid X \geq t] &= \int_t^\infty \left[\int_x^\infty u \frac{\bar{F}(u)}{\bar{F}(x)} \frac{f(x)}{\bar{F}(t)} du \right] dx + \vartheta_X(t) \\ &= \int_t^\infty \left[\int_t^u u \frac{\bar{F}(u)}{\bar{F}(x)} f(x) dx \right] du + \vartheta_X(t) \\ &= - \int_t^\infty u \frac{\bar{F}(u)}{\bar{F}(t)} \log \frac{\bar{F}(u)}{\bar{F}(t)} du + \vartheta_X(t) \\ &> - \int_t^\infty u \left[\frac{\bar{F}(u)}{\bar{F}(t)} \right]^\gamma du + \vartheta_X(t) \\ &= \mathcal{E}J^w(X; t) + \vartheta_X(t). \end{aligned}$$

فرع ۳. اگر X متغیر تصادفی مطلقاً پیوسته و نامنفی باشد، آنگاه

$$E(\vartheta_X(X)) \geq \mathcal{E}J^w(X) + E(X^\gamma).$$

گزاره ۶. فرض کنید X متغیر تصادفی پیوسته و نامنفی با تابع بقاء $\bar{F}_X(x)$ باشد. کران پایین برای اکستروپی باقیمانده تجمعی موزون پویا عبارت است از

$$\mathcal{E}J^w(X; t) \geq -\frac{1}{\gamma} [\vartheta_X(t) - t^\gamma] \quad (۱۶)$$

برهان: برای $x, t \leq 1$, $\frac{\bar{F}(x)}{\bar{F}(t)} \leq 1$ است و با استفاده از تعریف ۲ داریم

$$-\frac{1}{\gamma} \int_t^\infty x \left(\frac{\bar{F}(x)}{\bar{F}(t)} \right)^\gamma dx \geq -\frac{1}{\gamma} \int_t^\infty x \frac{\bar{F}(x)}{\bar{F}(t)} dx.$$

از طرفی، با استفاده از تعریف ۱ می‌توان نوشت

$$\mathcal{E}J^w(X; t) \geq -\frac{1}{\gamma} \int_t^\infty x \frac{\bar{F}(x)}{\bar{F}(t)} dx - \frac{t^\gamma}{\gamma} + \frac{t^\gamma}{\gamma},$$

و با توجه به رابطه (۱۱) داریم $\mathcal{E}J^w(X; t) \geq -\frac{1}{\gamma} [\vartheta_X(t) - t^\gamma]$ اگر $x = t$ باشد، شرط تساوی در رابطه (۱۶) برقرار است.

قضیه ۶. اکستروپی باقیمانده تجمعی موزون پویا، غیرکاهشی (غیرافزایشی) است اگر و تنها اگر

$$\mathcal{E}J^w(X; t) \geq (\leq) -\frac{t}{4} r_F^{-1}(t). \quad (17)$$

برهان: با مشتق‌گیری از رابطه (۸) نسبت به t و طبق تعریف تابع نرخ خطر می‌توان نوشت $\frac{\partial \mathcal{E}J^w(X; t)}{\partial t} = \frac{t}{4} + 2r_F(t)\mathcal{E}J^w(X; t)$. وقتی $\frac{\partial \mathcal{E}J^w(X; t)}{\partial t}$ بزرگ‌تر (کوچک‌تر) از صفر باشد، آنگاه $\mathcal{E}J^w(X; t)$ غیرنزولی (غیرصعودی) خواهد بود و اثبات کامل می‌شود. اگر $\mathcal{E}J^w(X; t)$ نسبت به t ثابت باشد، شرط تساوی در رابطه (۱۳) برقرار می‌شود.

تذکر ۱. اگر X متغیر تصادفی نامنفی و پیوسته با تابع بقاء $\bar{F}_X(x)$ باشد، آنگاه کران بالا برای میانگین باقیمانده موزون به صورت $\mu_X(t) < [\bar{F}(t)]^{-1} E(X^2)$ است.

گزاره ۷. اگر X متغیر تصادفی مطلقاً پیوسته با تابع توزیع $F(x)$ باشد، آنگاه $\mathcal{E}J^w(X; t)$ افزایشی (کاهشی) است اگر $r_F(t)$ افزایشی (کاهشی) نسبت به t باشد.

تذکر ۲. اگر متغیر تصادفی نامنفی و پیوسته X با تابع نرخ خطر $r_F(t)$ باشد، آنگاه

$$r_F(t) = \vartheta'_X(t) [\vartheta_X(t) - t^2]^{-1}. \quad (18)$$

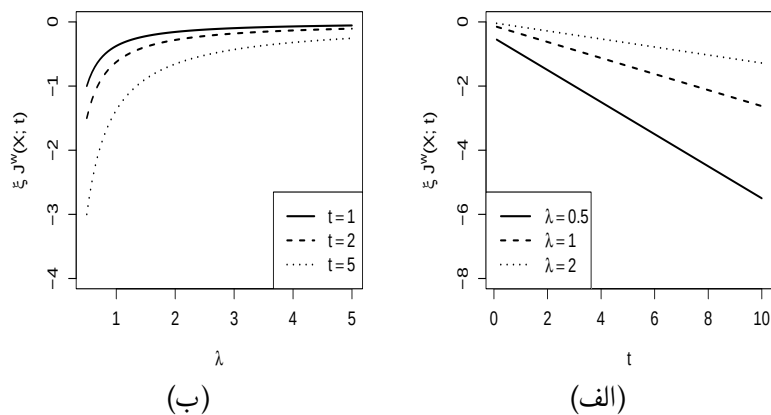
مثال ۱. اگر X دارای توزیع نمایی با میانگین λ^{-1} باشد، آنگاه $\mathcal{E}J^w(X; t) = -\frac{1}{4\lambda} (t + \frac{1}{\lambda})$ در شکل ۱ رفتار تابع $\mathcal{E}J^w(X; t)$ نسبت به پارامترهای t و λ مشخص شده است. اکستروپی باقیمانده تجمعی موزون پویا در توزیع نمایی نسبت به پارامتر t غیرافزایشی و خطی و نسبت به پارامتر λ غیرنزولی است.

مثال ۲. فرض کنید متغیر تصادفی X از توزیع توانی به صورت $0 \leq x \leq b, c > 0, F(x) = (\frac{x}{b})^c$ باشد. با توجه به رابطه (۸) داریم $\mathcal{E}J^w(X; t) = \frac{t^{c+2} - b^{c+2}}{(2c+4)t^c}$. در شکل ۲ رفتار تابع $\mathcal{E}J^w(X; t)$ نسبت به پارامترهای t, b و c نمایش داده می‌شود. اکستروپی باقیمانده تجمعی موزون پویا در توزیع توانی نسبت به پارامتر t غیرکاهشی و نسبت به پارامترهای b و c غیرافزایشی است.

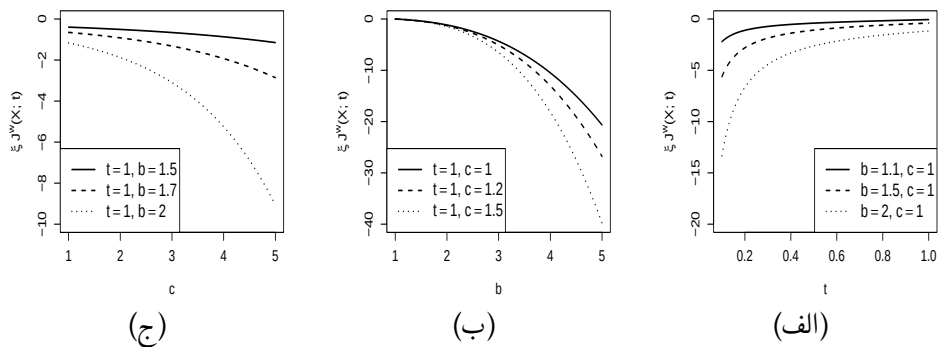
مثال ۳. اگر متغیر تصادفی پیوسته و نامنفی X دارای توزیع پارتو با پارامترهای α و β و تابع بقاء

$$\bar{F}_X(x) = \left(\frac{\beta}{x}\right)^\alpha, \quad x \geq \beta \quad \beta > 0, \quad \alpha > 0,$$

باشد. در این صورت $\mathcal{E}J^w(X; t) = -\frac{t^2}{4(\alpha-1)}$ است. بدیهی است که $\lim_{\alpha \rightarrow 1} \mathcal{E}J^w(X; t) = -\infty$ و هنگامی که $0 < \alpha < 1$ باشد، امیدریاضی توزیع پارتو متناهی نیست و در



شکل ۱. رفتار اکستروپی باقیمانده تجمعی موزون پویا نسبت به پارامتر t (الف) و پارامتر λ (ب) برای توزیع نمایی با میانگین λ^{-1}

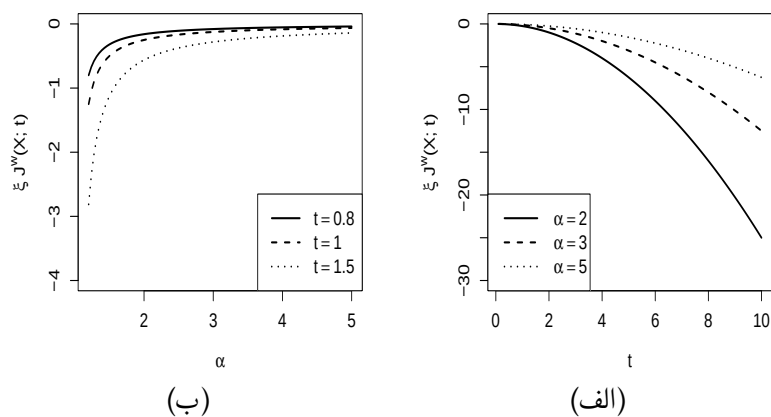


شکل ۲. رفتار اکستروپی باقیمانده تجمعی موزون پویا نسبت به پارامتر t (الف)، پارامتر b (ب) و پارامتر c (ج) برای توزیع توانی در مثال ۲

نتیجه اکستروپی باقیمانده تجمعی موزون پویا در این حالت تعرف نشده است. در شکل ۳ رفتار تابع $\mathcal{E}J^w(X; t)$ نسبت به پارامترهای t و α رسم شده است. اکستروپی باقیمانده تجمعی موزون پویا در توزیع پارتو نسبت به پارامتر t غیرافزایشی و نسبت به پارامتر α غیرکاهشی است.

مثال ۴. اگر متغیر تصادفی پیوسته و نامنفی X دارای توزیع بتا با تابع توزیع

$$F(x) = 1 - (1 - x)^a, \quad 0 < x < 1, \quad a > 1,$$

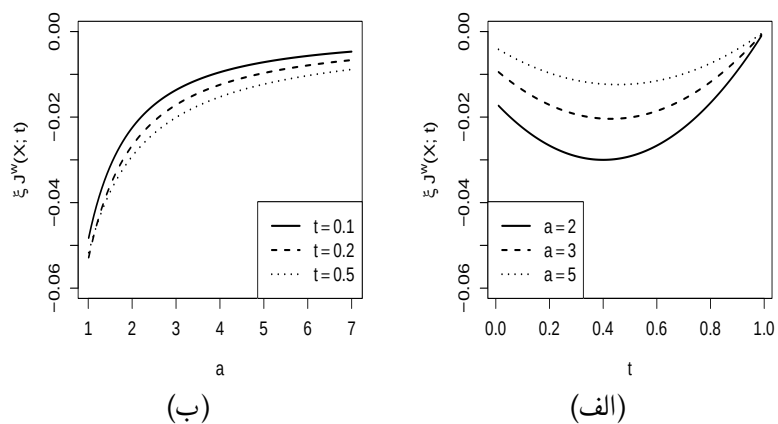


شکل ۳. رفتار اکستروپی باقیمانده تجمعی موزون پویا نسبت به پارامتر t (الف) و پارامتر α (ب) برای توزیع پارتو در مثال ۳

باشد. آنگاه اکستروپی باقیمانده تجمعی موزون پویای توزیع بتا برابر است با

$$\mathcal{E}J^w(X; t) = \frac{(t-1)((2a+1)t+1)}{4(a+1)(2a+1)},$$

در شکل ۴ رفتار تابع $\mathcal{E}J^w(X; t)$ نسبت به پارامترهای a و t رسم شده است. اکستروپی باقیمانده تجمعی موزون پویا در توزیع بتا نسبت به پارامتر t غیرکاهشی و نسبت به پارامتر a غیریکنوا است.



شکل ۴. رفتار اکستروپی باقیمانده تجمعی موزون پویا نسبت به پارامتر t (الف) و پارامتر a (ب) برای توزیع بتا در مثال ۴

۴ ترتیب‌های تصادفی

در سال‌های اخیر، مفهوم و کاربرد ترتیب‌های تصادفی مورد توجه بسیاری از محققان قرار گرفته است و در برخی از زمینه‌های آمار و احتمال از جمله نظریه قابلیت اعتماد، تحلیل بقاء، اقتصاد، بیمه و علم مدیریت مورد استفاده قرار گرفته است. در شرایطی که مقایسه جوامع با ابزاری مانند شاخص‌های مرکزی و پراکندگی امکان‌پذیر نباشد، یکی از روش‌های پیشنهادی برای مقایسه جوامع، استفاده از ترتیب‌های تصادفی است. در ادامه به ارائه کاربردهایی از ترتیب‌های تصادفی براساس اکستروپی باقیمانده تجمعی موزون پویا پرداخته می‌شود. ترتیب‌های تصادفی معمولی و ترتیب تصادفی نرخ خطر از جمله مهمترین ترتیب‌های تصادفی هستند که بدین صورت تعریف می‌شوند. اگر X و Y متغیرهای تصادفی با توابع توزیع به ترتیب $F_X(\cdot)$ و $F_Y(\cdot)$ باشند، آنگاه

الف- در ترتیب تصادفی معمولی $X \leq_{st} Y$ است، اگر $\bar{F}_X(x) \leq \bar{F}_Y(x)$ باشد.

ب- در ترتیب تصادفی نرخ خطر $X \leq_{hr} Y$ است، اگر $r_X(x) \geq r_Y(x)$ که $r_X(x) = \frac{f(x)}{\bar{F}(x)}$ تابع نرخ خطر متغیر تصادفی X است.

برای مطالعه ویژگی‌های ترتیب‌های تصادفی و ارتباط آن‌ها با یکدیگر می‌توان به **مارشال و اولکین (۱۹۷۹)** و **شیکد و شانتیکومار (۲۰۰۷)** مراجعه کرد. در ادامه، ارتباط بین ترتیب‌های تصادفی با میانگین باقیمانده عمر موزون، گشتاور مرتبه دوم و اکستروپی باقیمانده تجمعی موزون پویا بررسی می‌شود.

قضیه ۷. اگر $X \leq_{hr} Y$ باشد، آنگاه به ازای هر $t \geq 0$ ، $\mu_X(t) \leq \mu_Y(t)$ است.

برهان: با توجه به رابطه (۱۱) داریم،

$$\mu_X(t) = \int_t^\infty x \frac{\bar{F}(x)}{\bar{F}(t)} dx = \int_t^\infty x e^{-\int_t^x r_X(u) du} dx. \quad (۱۹)$$

از طرفی، با استفاده از تعریف ترتیب تصادفی نرخ خطر برای $X \leq_{hr} Y$ ، $r_Y(u) \leq r_X(u)$ است و در نتیجه $\int_t^x r_Y(u) du \leq \int_t^x r_X(u) du$ بنابراین

$$e^{-\int_t^x r_Y(u) du} \geq e^{-\int_t^x r_X(u) du}, \quad (۲۰)$$

و با استفاده از رابطه (۱۹) اثبات کامل می‌شود.

فرع ۴. با توجه به قضیه ۷ اگر $X \leq_{hr} Y$ باشد، آنگاه به ازای هر $t \geq 0$ ، $\vartheta_X(t) \leq \vartheta_Y(t)$ است.

قضیه ۸. فرض کنید X و Y متغیرهای تصادفی نامنفی مطلقاً پیوسته با توابع بقاء $\bar{F}_X(x)$ و $\bar{F}_Y(y)$ و نرخ خطر $r_X(t)$ و $r_Y(t)$ باشند. اگر $Y \leq_{hr} X$ و $r_X(t)$ نسبت به t افزایشی باشد، آنگاه $\mathcal{E}J^w(X; t) \leq \mathcal{E}J^w(Y; t)$.

برهان: با توجه به روابط (۸) و (۱۹) داریم

$$\mathcal{E}J^w(X; t) = -\frac{1}{\gamma} \int_t^\infty x [e^{-\int_t^x r_X(u) du}]^\gamma dx,$$

از آنجایی که $Y \leq_{hr} X$ است، می‌توان نتیجه گرفت که $r_X(u) \leq r_Y(u)$ می‌شود. بنابراین

$$-\frac{1}{\gamma} \int_t^\infty x [\frac{1}{e^{\int_t^x r_X(u) du}}]^\gamma dx \leq -\frac{1}{\gamma} \int_t^\infty y [\frac{1}{e^{\int_t^y r_Y(u) du}}]^\gamma dy.$$

مثال ۵. فرض کنید نمونه تصادفی $X_1, \dots, X_m$ دارای توزیع بتا با تابع بقاء

$$\bar{F}(t) = (1-t)^a, \quad 0 < t < 1, a > 0,$$

باشد و X_i ها نشان‌دهنده طول عمر m مؤلفه مستقل و هم توزیع در یک سیستم سری باشند. بدیهی است که طول عمر سیستم $Z = \min\{X_1, \dots, X_m\}$ با تابع بقاء

$$\bar{F}(t) = (1-t)^{ma}, \quad 0 < t < 1, a > 0,$$

است. در نظر بگیرید که $r_F(t)$ تابع نرخ خطر مؤلفه‌ها و $r_m(t)$ تابع نرخ خطر سیستم هستند. از این رو

$$r_m(t) = \frac{ma}{1-t} \geq \frac{a}{1-t} = r_F(t),$$

و $r_F(t)$ تابع غیرنزولی از t است. بنا به رابطه (۸) داریم

$$\mathcal{E}J^w(Z; t) = \frac{(t-1)((\gamma am + 1)t + 1)}{\gamma(am + 1)(\gamma am + 1)},$$

براساس مقدار $\mathcal{E}J^w(X; t)$ در مثال ۴ و طبق قضیه ۸ داریم $\mathcal{E}J^w(X; t) \leq \mathcal{E}J^w(Z; t)$.

مثال ۶. فرض کنید نمونه تصادفی $X_i, i = 1, \dots, m$ نشان‌دهنده طول عمر m مؤلفه مستقل و هم توزیع در یک سیستم سری باشند که دارای توزیع نمایی با تابع بقاء $\bar{F}(t) = e^{-\lambda t}, t \geq 0, \lambda > 0$ باشد. طول عمر سیستم $Y = \min\{X_1, \dots, X_m\}$ دارای تابع بقاء $\bar{F}(t) = e^{-m\lambda t}, t \geq 0, \lambda \geq 0$ است. بدیهی است که $r_m(t) = m\lambda \geq \lambda = r_F(t)$ و $r_F(t)$ تابع غیرنزولی از t است و بنا به رابطه (۸) می‌توان نشان داد که $\mathcal{E}J^w(Y; t) = -\frac{1}{\gamma m\lambda} (t + \frac{1}{\gamma m\lambda})$. بنابراین، براساس مقدار $\mathcal{E}J^w(X; t)$ در مثال ۱ و طبق قضیه ۸

خواهیم داشت $\mathcal{E}J^w(X; t) \leq \mathcal{E}J^w(Y; t)$ و اثبات کامل می‌شود.

۵ برآوردگر ناپارامتری

فرض کنید $X_1, \dots, X_n$ یک نمونه تصادفی از توزیع $F(\cdot)$ باشد. برآوردگر تجربی معیار پیشنهادی به صورت

$$\widehat{\mathcal{E}J}^w(X; t) = -\frac{1}{2} \int_t^\infty x \left[\frac{\widehat{F}(x)}{\widehat{F}(t)} \right]^2 dx, \quad (21)$$

است، که در آن $\widehat{F}(x) = 1 - \widehat{F}(x)$ برآورد تابع بقاء و $\widehat{F}(x)$ برآورد تابع توزیع است. با جایگذاری برآورد تابع توزیع به روش تجربی در رابطه (۲۱)، برآوردگر تجربی اکستروپی باقیمانده تجمعی موزون پویا حاصل می‌شود. اگر نمونه مرتب شده به صورت $X_{(1)} \leq \dots \leq X_{(n)}$ در نظر گرفته شود، آنگاه برآورد تجربی تابع توزیع برابر با $F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I(X_i \leq x)$ خواهد بود. برای نمونه‌های بزرگتر از t به صورت $X_{(j)} \leq \dots \leq X_{(n)}$ مقدار $\widehat{\mathcal{E}J}^w(X; t)$ به صورت

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{E}J}_n^w(X; t) &= -\frac{1}{2} \int_t^\infty x \left(\frac{1 - F_n(x)}{1 - F_n(t)} \right)^2 dx \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{i=j}^{n-1} \int_{X_{(i)}}^{X_{(i+1)}} x \left(\frac{1 - F_n(x)}{1 - F_n(t)} \right)^2 dx \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{i=j}^{n-1} U_{(i)} \left(\frac{n-i}{n-j+1} \right)^2, \end{aligned} \quad (22)$$

حاصل می‌شود، که در آن $1, \dots, n-j, \dots, n-1$ ، $i = j, \dots, n-1$ ، $U(i) = \frac{1}{2}(X_{(i+1)}^2 - X_{(i)}^2)$ است.

قضیه ۹. فرض کنید برای متغیر تصادفی نامنفی X به ازای $p > 2$ ، $E(X^p) < \infty$ باشد. اگر $n \rightarrow \infty$ ، آنگاه $\widehat{\mathcal{E}J}_n^w(X; t) \xrightarrow{a.s.} \mathcal{E}J_n^w(X; t)$ به طور قریب به یقین (*a.s.*) به $\mathcal{E}J_n^w(X; t)$ همگرا است؛ به عبارت دیگر $\widehat{\mathcal{E}J}_n^w(X; t) \xrightarrow{a.s.} \mathcal{E}J_n^w(X; t)$.

برهان: براساس رابطه (۲۲) می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} -2\widehat{\mathcal{E}J}_n^w(X; t) &= \int_t^\infty x \left(\frac{1 - F_n(x)}{1 - F_n(t)} \right)^2 dx \\ &= \frac{1}{(1 - F_n(t))^2} \left[\int_0^\infty x(1 - F_n(x))^2 dx - \int_0^t x(1 - F_n(x))^2 dx \right]. \end{aligned}$$

با توجه به قضیه گلیونکو-کانتلی^۱ و قضیه همگرایی غالب^۲ برای انتگرال در بازه متناهی $[0, t]$ می‌توان نتیجه گرفت که

$$\int_0^t x(1 - F_n(x))^{\frac{1}{p}} dx \xrightarrow{a.s.} \int_0^t x(1 - F(x))^{\frac{1}{p}} dx, \quad n \rightarrow \infty. \quad (23)$$

از طرفی، بنا به قانون قوی اعداد بزرگ داریم $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{a.s.} E(X_1)$ ، علاوه براین،

$$x(1 - F_n(x))^{\frac{1}{p}} = \frac{x}{n} \sum_{i=1}^n I_{(X_i > x)} \leq \frac{1}{nx^{p-1}} \sum_{i=1}^n X_i^p \leq \frac{\alpha}{x^{p-1}},$$

که در آن $\alpha = \sup_n \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^p \right\} < \infty$ است. در نتیجه با استفاده از قضیه همگرایی غالب می‌توان نوشت

$$\int_0^\infty x(1 - F_n(x))^{\frac{1}{p}} dx \xrightarrow{a.s.} \int_0^\infty x(1 - F(x))^{\frac{1}{p}} dx, \quad n \rightarrow \infty. \quad (24)$$

بنابراین، با استفاده از روابط (۲۳) و (۲۴) اثبات کامل می‌شود.

مثال ۷. فرض کنید $X_1, \dots, X_n$ نمونه‌ای تصادفی از توزیع رابلی $F(x) = 1 - e^{-\lambda x^{\frac{1}{\lambda}}}$ ، $x > 0$ باشد. در این صورت، متغیر تصادفی $Y = X^{\frac{1}{\lambda}}$ دارای توزیع نمایی با میانگین $\frac{1}{\lambda}$ و در نتیجه نمونه‌های $X_{(i+1)}^{\frac{1}{\lambda}} - X_{(i)}^{\frac{1}{\lambda}}$ ، $i = 1, \dots, n-1$ مستقل از هم و دارای توزیع نمایی با میانگین $\frac{1}{\lambda(n-i)}$ خواهند بود. بنابراین، مقادیر امیدریاضی و واریانس برآورد اکستروپی باقیمانده تجمعی موزون پویا طبق رابطه (۲۲) برای توزیع رابلی به صورت

$$E(\widehat{\mathcal{E}J}_n^w(X; t)) = -\frac{1}{\lambda} \sum_{i=j}^{n-1} \frac{n-i}{(n-j+1)^2},$$

$$Var(\widehat{\mathcal{E}J}_n^w(X; t)) = \frac{1}{\lambda^2} \sum_{i=j}^{n-1} \frac{(n-i)^2}{(n-j+1)^4}.$$

حاصل می‌شود. از طرفی، با توجه به رابطه (۱۰)، مقدار اکستروپی باقیمانده تجمعی موزون پویا برای توزیع رابلی مستقل از زمان و برابر با $-\frac{1}{\lambda\lambda}$ است. در شکل ۵، برآورد قدرمطلق اربیی^۳ (AB) و میانگین مربعات خطا^۴ (MSE) برای برآورد اکستروپی باقیمانده تجمعی موزون پویا در مقابل حجم‌های نمونه (n) و به ازای مقادیر مختلف پارامتر λ رسم شده است. مشاهده می‌شود که با افزایش حجم نمونه مقادیر برآورد قدرمطلق اربیی و میانگین

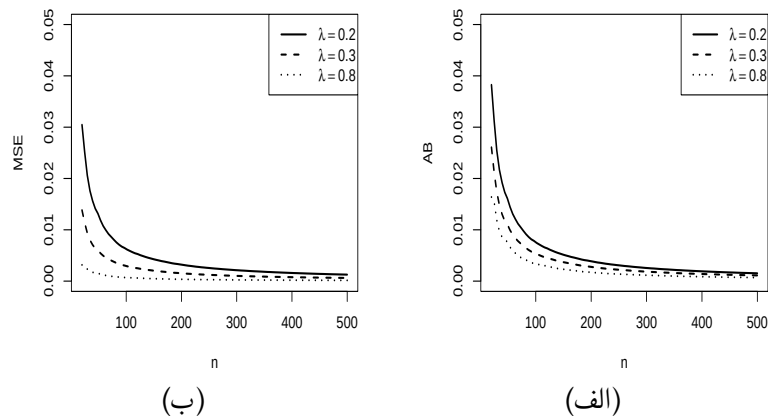
^۱Glivenko-Cantelli Theorem

^۲Dominated Convergence Theorem

^۳Absolute Bias

^۴Mean Squared Error

مربعات خطا کاهش می‌یابند. همچنین، با افزایش مقدار پارامتر λ سرعت میل کردن قدرمطلق ارببی و میانگین مربعات خطا به سمت صفر افزایش پیدا می‌کند.



شکل ۵. برآورد قدرمطلق ارببی (الف) و میانگین مربعات خطا (ب) برای برآورد اکستروپی باقیمانده تجمعی موزون پویا در توزیع رابلی

مثال ۸. داده‌های مربوط به زمان تعمیر فعال (برحسب ساعت) برای یک فرستنده و گیرنده ارتباطی هواپرد به صورت $۱/۱, ۱/۰, ۱/۰, ۱/۰, ۱/۰, ۰/۸, ۰/۸, ۰/۷, ۰/۷, ۰/۶, ۰/۶, ۰/۵, ۰/۵, ۰/۵, ۰/۳, ۰/۲, ۱/۳, ۱/۵, ۱/۵, ۱/۵, ۱/۵, ۱/۵, ۲/۰, ۲/۲, ۲/۵, ۲/۷, ۳/۰, ۳/۰, ۳/۳, ۳/۳, ۴/۰, ۴/۵, ۴/۷, ۵/۰, ۵/۴, ۵/۴, ۵/۷, ۷/۵, ۸/۸, ۹/۰, ۱۰/۳, ۲۲/۰, ۲۴/۵$. است که توسط **بالاکریشنان و همکاران (۲۰۰۹)** گزارش شده‌اند. مقادیر لگاریتم درست‌نمایی^۱، معیار اطلاعاتی آکائیک^۲ (AIC) و معیار اطلاعاتی بی‌بی^۳ (BIC) و همچنین نتایج آزمون نیکویی برازش کلموگروف-اسمیرنوف^۴ ($K-S$) و مقدار احتمال مربوط به آن برای انتخاب مناسب‌ترین توزیع داده‌ها در بین توزیع‌های نمایی، وایبل، لگ-نرمال و گاما در جدول ۱ ارائه شده است. نتایج این جدول نشان می‌دهد که توزیع لگ-نرمال با برآورد پارامترهای مکان $۰/۶۵۸$ و مقیاس $۱/۱۰۲$ به روش حداکثر درست‌نمایی، بهترین برازش را به داده‌های زمان تعمیر فعال دارد. در نمودار ۶، مقادیر $\widehat{\mathcal{E}}^w(X; t)$ برای داده‌های واقعی در مقایسه با توزیع‌های نمایی، وایبل، لگ-نرمال و گاما به ازای مقادیر مختلف t رسم شده است. در این نمودار می‌توان مشاهده کرد که فاصله بین مقدار $\widehat{\mathcal{E}}^w(X; t)$ با توزیع لگ-نرمال کمتر از سایر توزیع‌های در نظر گرفته شده است و در نتیجه توزیع لگ-نرمال را به عنوان مناسب‌ترین توزیع براساس معیار پیشنهادی در نظر گرفت.

^۱Log-Likelihood

^۲Akaike Information Criterion

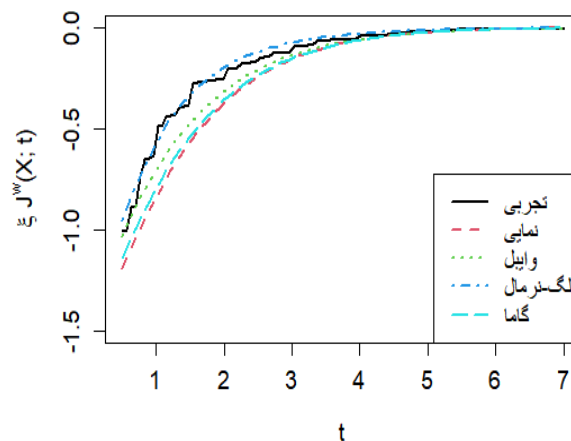
^۳Bayesian Information Criterion

^۴Kolmogorov-Smirnov

علاوه براین، یک شاخص برای انتخاب بهترین توزیع براساس اکستروپی باقیمانده تجمعی موزون پویا به صورت $\eta_F = \sup_t |\widehat{\mathcal{E}J_n^w}(X; t) - \mathcal{E}J^w(X; t)|$ پیشنهاد می‌شود، که در آن مقدار اکستروپی باقیمانده تجمعی موزون پویا براساس توزیع مدنظر است. توزیعی که دارای کمترین مقدار شاخص η_F باشد، برازش بهتری به داده‌ها دارد. مقادیر شاخص η_F برای توزیع‌های نمایی، وایبل، لگ-نرمال و گاما در جدول ۱ گزارش شده است. مشاهده می‌شود که مقدار این شاخص برای توزیع لگ-نرمال (۰/۱۲۴) کمتر از سایر توزیع‌ها است و در نتیجه این توزیع مناسب توزیع برای برازش به داده‌های زمان تعمیر فعال است که منطبق با سایر شاخص‌های برازش در این جدول می‌شود.

جدول ۱. نتایج برازش توزیع‌ها برای داده‌های زمان تعمیر فعال (برحسب ساعت)

توزیع	لگاریتم درست‌نمایی	AIC	BIC	K - S	مقدار احتمال	η_F
نمایی	-۱۰۵/۰۰۶	۲۱۲/۰۱۲	۲۱۳/۸۴۱	۰/۱۶۰	۰/۱۹۱	۰/۲۷۷
وایبل	-۱۰۴/۴۷	۲۱۲/۹۳۹	۲۱۶/۵۹۷	۰/۱۲۰	۰/۵۱۷	۰/۱۶۱
لگ-نرمال	-۱۰۰/۰۱۶	۲۰۴/۰۳۳	۲۰۷/۶۹۰	۰/۰۹۵	۰/۸۰۶	۰/۱۲۴
گاما	-۱۰۴/۹۳۱	۲۱۳/۸۶۲	۲۱۷/۵۱۹	۰/۱۴۵	۰/۲۸۵	۰/۲۴۲



شکل ۶. برآورد اکستروپی باقیمانده تجمعی موزون پویا برای داده‌های زمان تعمیر فعال (برحسب ساعت)

به طور کلی، انتخاب توزیع مناسب داده‌ها براساس معیارهای اطلاع رویکردی جامع‌تر نسبت به روش کلموگروف-اسمیرنوف ارائه می‌کند، زیرا این معیارها نحوه پراکندگی و تغییرپذیری داده‌ها را در انتخاب توزیع مناسب داده‌ها در نظر می‌گیرند. همچنین، در استفاده از معیارهای اطلاع هیچ فرضیه قبلی در مورد توزیع داده‌ها وجود ندارد و در نتیجه می‌توانند در طیف گسترده‌ای از کاربردها مفید باشند. یکی از دیگر از مزایای انتخاب توزیع مناسب

داده‌ها براساس معیارهای اطلاع، استفاده از این معیارها در تحلیل داده‌های چند متغیره است که نسبت به روش کلموگروف-اسمیرنوف یا به طور کلی روش‌هایی که بر تطابق توزیع داده‌ها با توزیع نظری تمرکز دارند، پیچیدگی کمتری دارد. استفاده از معیارهای اطلاع در انتخاب توزیع مناسب داده‌ها ممکن است حساسیت بیشتری در کل توزیع، از جمله دم‌ها، نسبت به روش کلموگروف-اسمیرنوف که در محل میانه توزیع نسبت به دم‌ها حساس‌تر است (لوپز، ۲۰۱۱)، داشته باشد. این موضوعات در تحقیقات آینده مورد بررسی و مطالعه قرار خواهند گرفت.

بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله، معیار اکستروپی باقیمانده تجمعی موزون پویا معرفی و ارتباط آن با تابع نرخ خطر، میانگین طول عمر باقیمانده و گشتاور مرتبه دوم بررسی گردید. اکستروپی باقیمانده تجمعی موزون پویا برای توزیع رایلی مستقل از زمان بود و مشخصه‌سازی براساس معیار معرفی‌شده برای این توزیع ارائه شد. کران‌های بالا و پایین، نامساوی‌ها و ترتیب‌های تصادفی براساس اکستروپی باقیمانده تجمعی موزون پویا و تاثیر تبدیل خطی بر آن ارائه شد. یک برآوردگر تجربی برای اکستروپی باقیمانده تجمعی موزون پویا ارائه و خواص مجانبی آن مطالعه گردید. در پایان، کاربردی از معیار معرفی شده در انتخاب توزیع مناسب داده‌ها توسط یک مجموعه داده واقعی ارائه گردید که نتایج آن با نتایج حاصل از معیارهای لگاریتم درست‌نمایی، AIC و BIC برای انتخاب مناسب‌ترین مدل منطبق بود. در ادامه این پژوهش، می‌توان نسخه‌های گذشته و باقیمانده معیار اکستروپی موزون را در صورتی که متغیر تصادفی از بالا و پایین بریده شده باشد، مورد بررسی و مطالعه قرار داد. همچنین، توسعه کاربردهای معیار اکستروپی باقیمانده تجمعی موزون پویا در نظریه قابلیت اطمینان و بررسی خصوصیات آن در سیستم‌های پیچیده‌تر مانند سیستم‌های منسجم و آمیخته را می‌توان به عنوان آینده این پژوهش در نظر گرفت.

تقدیر و تشکر

نویسندگان از پیشنهادات سردبیر، داوران و ویراستار محترم مجله که باعث بهبود سطح کیفی و ارائه مقاله شده است، کمال تشکر و قدردانی را دارند.

مراجع

اکبری، م، کثیری، ع. و احمدی، ک. (۱۴۰۲)، کاربرد اکستروپی در مشخص سازی برخی از توزیع های پیوسته، مجله علوم آماری، ۱۷، ۱۹-۱.

- Asadi, M. and Zohrevand, Y. (2007), On the Dynamic Cumulative Residual Entropy, *Journal of Statistical Planning and Inference*, **137**, 1931-1941.
- Balakrishnan, N., Buono, F. and Longobardi, M. (2022), On Weighted Extropies, *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **51**, 6250-6267.
- Balakrishnan, N., Leiva, V., Sanhueza, A. and Cabrera, E. (2009), Mixture Inverse Gaussian Distributions and Its Transformations, Moments and Aapplications, *Statistics*, **43**, 91-104.
- Belis, M. and Guiasu, S. (1968), A Quantitative-Qualitative Measure of Information in Cybernetic Systems, *IEEE Transactions on Information Theory*, **14**, 593-594.
- Cover, T. M. and Thomas J. A. (2006), *Elements of Information Theory*, 2nd ed Hoboken NJ Wiley.
- Di Crescenzo, A. and Longobardi, M. (2006), On Weighted Residual and Past Entropies, *Scientiae Mathematicae Japonicae*, **64**, 255-266.
- Guiasu, S. (1986), Grouping Data by Using the Weighted Entropy, *Journal of Statistical Planning and Inference*, **15**, 63-69.
- Jahanshahi, S. M. A., Zarei, H. and Khammar, A. H. (2020), On Cumulative Residual Extropy, *Probability in the Engineering and Informational Sciences*, **34**, 605-625.
- Hashempour, M., Kazemi, M. R. and Tahmasebi, S. (2022), On Weighted Cumulative Residual Extropy: Characterization, Estimation and Testing, *Statistics*, **56**, 681-698.
- Hashempour, M. and Mohammadi, M. (2022), On Dynamic Cumulative Past Inaccuracy Measure Based on Extropy, *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **53**, 1294-1311.
- Hashempour, M. and Mohammadi, M. (2024), A New Measure of Inaccuracy for Record Statistics Based on Extropy, *Probability in the Engineering and Informational Sciences*, **38**, 207-225.

- Kamari, O. and Buono, F. (2021), On Extropy of Past Lifetime Distribution, *Ricerche di Matematica*, **70**, 505-515.
- Kayal, S. and Moharana, R. (2017), On Weighted Cumulative Residual Entropy, *Journal of Statistics and Management Systems*, **20**, 153-173.
- Lad, F., Sanfilippo, G. and Agro, G. (2015), Extropy: Complementary Dual of eEntropy, *Statistical Science*, **30**, 40-58.
- Lopes, R. H. (2011), Kolmogorov-Smirnov Test, *International Encyclopedia of Statistical Science*, **1**, 718-720.
- Marshall, A. W. and Olkin, I. (1979), *Inequalities: Theory of Memorization and Its Applications*, Academic Press, New York.
- Mirali, M., and Baratpour, S. (2017), *Dynamic Version of Weighted Cumulative Residual Entropy*, Communications in Statistics-Theory and Methods, **46**, 11047-11059.
- Mohammadi, M. and Hashempour, M. (2022), On Interval Weighted Cumulative Residual and Past Extropies, *Statistics*, **56**, 1029-1047.
- Mohammadi, M. and Hashempour, M. (2023), Extropy Based Inaccuracy Measure in Order Statistics, *Statistics*, **57**, 1490-1510.
- Qiu, G. and Jia, K. (2018), The Residual Extropy of Order Statistics, *Statistics and Probability Letters*, **133**, 15-22.
- Rao, M., Chen, Y., Vemuri, B. C. and Wang, F. (2004), Cumulative Residual Entropy: a New measure of Information, *IEEE Transactions on Information Theory*, **50**, 1220-1228.
- Shaked, M. and Shanthikumar, J. G. (2007), *Stochastic Orders*, Springer New York.
- Shannon, C. E. (1948), A mathematical Theory of Communication, *The Bell System Technical Journal*, **27**, 379-432.