



Response Surface Method in the Presence of Uncontrollable Factors

Kiani, M. 

Department of Statistics, Payam-e-Noor University, Tehran, Iran.

Corresponding author: M. Kiani, m_kiani@pnu.ac.ir

Received: 24/4/2022 Revised: 27/1/2023 Accepted and Published Online: 3/2/2023.

Introduction

An important goal of quality improvement in manufacturing is the reduction of variability in product characteristics. Reduction in output variation can be accomplished using response surface methodology (RSM) and robust parameter design (RPD). RSM consists of a group of statistical techniques for empirical model building and model exploitation. By careful design and analysis of experiments, it seeks to relate a response variable to the levels of some explanatory variables that affect it. The main idea of RSM is to use a sequence of designed experiments to gain an optimal response. RSM contributes to the design of products or processes that may be sensitive to uncontrollable or noise factors. For example, variables such as temperature, humidity, and some raw material properties may greatly affect the performance of a process and are not necessarily controllable when production is moved from the laboratory or pilot plant to full-scale manufacturing.

Material and Methods

Each level combination in the control array is crossed with all the noise array levels. A cross array then consists of all the level combinations between the control array and those in the noise array. In mathematical terms, a cross array is a product between a control array and a noise array. An alternative is to use a combined array for both the control and noise factors. When controllable and noise factors are included in the same design matrix, the resulting design is usually called a combined array. The constructed example will clarify the ideas of this paper to illustrate the application of the proposed method.

Results and Discussion

A suitable format of this two suggested arrays for the location-dispersion modeling strategy is a cross-array format since this format is based on the replicated experiments of the same noise factor setting for each control factor combination. In response modeling, both cross-array and combined array can be utilized. In the response modeling approach to solve RPD problems, a designed experiment enables one to model the relationship between the control and noise factors and the response mean and variance. In this approach, the answer is modeled as a control and noise factors function instead of computing the variance over the noise replications. The analysis then consists of two parts. With all the consideration that RPD has received in the existing literature, minimal effort has been made in estimating the parameters in the introduced model and determining an optimal design for such model. Presenting unbiased estimators of these parameters could be of great interest in RPD approach. It can be recommended that if we are in the first stage of planning the experiments applying a central composite design is preferable; otherwise, if there exists an origin non-orthogonal design performing the MGS method to improve the design is suitable. When we use a design that is non-orthogonal, MGS or D-optimal design, applying the unbiased estimators proposed is superior to the biased estimators to minimize the bias and the variance of the estimators.

Conclusion

To estimate the parameters of the response model unbiased estimators have been presented. Optimal design is used to minimize these estimators' bias and variance. The contours of constant mean and variance are overlaid to provide the active region of controllable factors with desirable mean and variance of the response. Consequently, the unbiasedness and robustness of future experiments in full-scale manufacturing will be significantly improved.

Keywords: Response Surface, Robust Parameter Design, Optimal Designs.

Mathematics Subject Classification (2010): 62K20, 62K25.



©The Author(s). The Publisher is Iranian Statistical Society.

This is an open access article distributed under the terms and conditions of [CC BY-NC 4.0](https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/)

روش رویه پاسخ در حضور عوامل غیرقابل کنترل

مهدی کیانی

گروه آمار، دانشگاه پیام نور

نویسنده مسئول: مهدی کیانی، m_kiani@pnu.ac.ir

تاریخ دریافت: ۱۴۰۱/۲/۴ تاریخ بازنگری: ۱۴۰۱/۱۱/۷ تاریخ پذیرش و انتشار: ۱۴۰۱/۱۱/۱۴

چکیده: در دهه ۱۹۸۰، چنیچی تاگوچی یک مشاور کنترل کیفیت ژاپنی، خاطر نشان کرد که بسیاری از تغییرات مرتبط با پاسخ را می‌توان به وجود مجموعه‌ای از عوامل به نام عوامل غیرقابل کنترل (نوفه) نسبت داد. به هر حال، در برخی موارد کاربردی، پیشنهاد مدل‌سازی او منجر به بهبود کیفیت با تعداد زیادی اجرا در یک آرایه متقاطع می‌شود. از این رو، بسیاری از محققین جنبه‌های مهم روش رویه پاسخ را توأم با روش طراحی پارامتر استوار به عنوان جایگزینی مناسب برای روش تاگوچی پذیرفته‌اند. این روش‌های جایگزین، میانگین و واریانس پاسخ مربوط به ترکیب عوامل کنترل و نوفه را در یک آرایه ترکیبی برای انجام یک فرآیند یا تولید استوار مدل‌سازی می‌کنند. در واقع، استفاده از روش‌های رویه پاسخ با طراحی پارامتر استوار برای به حداقل رساندن تأثیر عوامل نوفه در فرآیندهای مونتاژ یا تولید استفاده می‌شود. هدف این مقاله توسعه بیشتر مدل‌سازی پاسخ و واریانس پیش‌بینی‌شده در حضور عوامل نوفه بر اساس برآوردهای ناریب و استوار است. بعلاوه، هدف دیگر طراحی آزمایش‌ها بر اساس طرح‌های بهینه برای بهبود همزمان درستی و دقت این برآوردها است.

واژه‌های کلیدی: روش رویه پاسخ، طرح پارامتر استوار، طرح‌های بهینه.

کد موضوع بندی ریاضی (۲۰۱۰): 62K25 ، 62K20.

۱ مقدمه

یک هدف مهم از بهبود کیفیت در صنعت کاهش تغییرپذیری در مشخصه‌های محصول است. تولید محصول با تغییرات کمتر عملکرد تولید را بهبود داده و هزینه تولید را کاهش خواهد داد. کاهش تغییرپذیری در خروجی تولید می‌تواند با بکارگیری روش رویه پاسخ^۱ (RSM)، و طرح پارامتر استوار^۲ (RPD)، حاصل شود. شرح مختصری در مورد RDP در بخش ۳ ارائه می‌شود. RSM شامل یک گروه از تکنیک‌های آماری برای ساخت و بهره‌برداری از مدل‌های تجربی است. با طراحی و تحلیل دقیق آزمایش‌ها، این روش بدنبال مرتبط کردن یک متغیر پاسخ با سطوحی از یک تعداد متغیرهای تبیینی است که روی آن موثر هستند. ایده اصلی RSM استفاده از دنباله‌ای از آزمایش‌های طراحی شده برای به دست آوردن پاسخ بهینه است. این روش توسط **باکس و ویلسون** (۱۹۵۱) معرفی شد و بحث کاملی برای آن از سال ۱۹۶۶ تا ۱۹۸۸ در مقاله مروری توسط **مایرز و همکاران** (۱۹۸۹) ارائه شد. RSM در طراحی محصولات یا فرآیندها که ممکن است به عوامل غیرقابل کنترل یا نطفه حساس باشند کمک می‌کند. به عنوان مثال، متغیرهایی مانند دما، رطوبت، و برخی از خواص مواد خام ممکن است به شدت بر عملکرد یک فرآیند تأثیر گذار باشند. زمانی که تولید از آزمایشگاه یا کارگاه آزمایشی به تولید در مقیاس کامل منتقل می‌شود، بسیاری از چنین متغیرهایی قابل کنترل نیستند. در نتیجه، در نظر گرفتن متغیرهای نطفه در مرحله طراحی فرآیند بسیار مهم است. در مرحله طراحی، فرض بر این است که عوامل نطفه برای اهداف آزمایشی قابل کنترل هستند.

با توسعه مدلی که هم متغیرهای نطفه و هم متغیرهای قابل کنترل را در بر می‌گیرد، ترکیبی از تنظیمات متغیر قابل کنترل را می‌توان به گونه‌ای تعیین کرد که پاسخ به تغییرات منتقل شده توسط متغیرهای نطفه استوار یا غیرحساس باشد. برای محاسبه چنین ترکیباتی، معمولاً از روش جینیچی تاگوچی برای توسعه فرآیندهای استوار استفاده می‌شود. شرح جامعی از RDP توسط **تاگوچی** (۱۹۸۷) و **وو و هامادا** (۲۰۲۱)، **آزورا** (۲۰۱۷)، **موننگومری** (۲۰۲۰) ارائه شده است. از طرفی، مجادلات پیرامون روش تاگوچی، محققان را به بررسی دقیق روش‌های جایگزین RDP با استفاده از تکنیک‌های آماری معتبر، مانند طراحی آزمایش‌ها و RSM سوق داده است. دو تا از اولین تلاش‌ها برای ایجاد جایگزینی برتر برای روش RDP مربوط به تاگوچی، ادغام RSM با روش RDP است که به عنوان رویکرد مدل‌سازی مکان-پراکندگی و رویکرد مدل‌سازی پاسخ هستند. این روش‌های جایگزین توسط **وینینگ و مایرز** (۱۹۹۰)، **دل کاستیو و موننگومری** (۱۹۹۳)، **لین و تو** (۱۹۹۵)، **کوپلند و نلسون** (۱۹۹۶)، **بورور و همکاران** (۲۰۰۲)، **میرو-کوئسادا و دل کاستیو** (۲۰۰۴) و **رودریگز و همکاران** (۲۰۰۹) توسعه یافته‌اند.

در این مقاله، هدف ارائه روش‌های جایگزین برای روش تاگوچی در RDP است. روش تاگوچی و جایگزین‌های آن بر اساس آرایه‌های متقابل و آرایه‌های ترکیبی هستند (به بخش ۲ مراجعه کنید). نظریه RDP شامل روش‌های تاگوچی، مدل‌سازی مکان-پراکندگی و مدل‌سازی پاسخ در بخش ۳ آورده شده است. روش پیشنهادی که مبتنی بر روش مدل‌سازی پاسخ و طراحی‌های بهینه برای بهبود برآوردگر پارامترهای مدل پاسخ است، در بخش ۴ بررسی

¹Response Surface Methodology²Robust Parameter Design

می‌شود. برای شرح ایده‌های ارائه شده بخش ۴ در نظر گرفته شده که شامل یک مثال عددی و نتایج به دست آمده از آزمایش‌های عددی گسترده است.

۲ آرایه‌های متقاطع و آرایه‌های ترکیبی

به طور کلی، یک آرایه کنترل به یک ماتریس طراحی برای عوامل کنترل و یک آرایه نوفه به یک ماتریس طراحی برای عوامل نوفه اشاره دارد. هر ترکیب سطح در آرایه کنترل با تمام ترکیبات سطوح در آرایه نوفه تلاقی داده می‌شود. به این ترتیب، یک آرایه متقاطع شامل تمام ترکیبات سطح بین سطح‌های آرایه کنترل و آرایه نوفه است. اگر N_1 و N_2 به ترتیب اندازه اجرای آرایه‌های کنترل و نوفه را نشان دهد، آنگاه $N = N_1 N_2$ اندازه اجرا برای آرایه متقاطع است. در مباحث تاگوچی، آرایه متقاطع آرایه درونی-بیرونی نامیده می‌شود. اگر N بزرگ باشد و هزینه اجرای آزمایش متناسب با N ، سپس ایجاد آرایه متقاطع ممکن است بسیار پرهزینه باشد. از سوی دیگر، هیچ یک از اثرات متقابل کنترل-با-کنترل در آرایه متقاطع مشخص نیست. در کتاب **مونته‌گومری** (۲۰۲۰) توضیحات جامعی در خصوص آرایه‌های متقاطع بیان شده است. برای رفع این مسئله، یک جایگزین مناسب استفاده از یک آرایه ترکیبی برای هر دو عامل کنترل و نوفه می‌باشد. زمانی که هم عوامل قابل کنترل و هم عوامل نوفه در یک ماتریس طراحی گنجانده شوند، طرح حاصل آرایه ترکیبی نامیده می‌شود (**ولش و همکاران**، ۱۹۹۰؛ **مایرز و همکاران**، ۱۹۹۲). اندازه اجرای مورد نیاز در قالب آرایه ترکیبی می‌تواند بسیار کوچک‌تر از آرایه متقاطع باشد. زیرا با استفاده از این فرمت، آزمایش کنندگان می‌توانند در ساخت طرح آزمایشی سطح بالاتری از تجزیه و کسر^۱ را بکار گیرند، بدون اینکه خود را از برآورد تمام اثرات اصلی و همچنین تمام اثرات متقابل دو-عامله و مرتبه‌های بالاتر بی‌نصیب کنند. با این حال، یک ساختار قابل اجرا از این دو آرایه اشاره شده برای روش مدل‌سازی مکان-پراکندگی یک ساختار آرایه متقاطع است، چون این ساختار بر اساس آزمایش‌های تکراری از تنظیم عامل نوفه یکسان با هر ترکیب عامل کنترل بنا می‌شود. در مدل‌سازی پاسخ، می‌توان از آرایه متقاطع و آرایه ترکیبی استفاده کرد (**وو و ژو**، ۲۰۰۳؛ **وو و هامادا**، ۲۰۲۱). در بخش بعد، روش تاگوچی، مدل‌سازی مکان-پراکندگی و روش مدل‌سازی پاسخ در مسئله RDP توضیح داده می‌شود.

۳ طراحی پارامتر استوار

طراحی پارامتر استوار یک روش آماری است که هدف آن کاهش تغییرات عملکرد تولید یا فرآیند بوده بطوریکه با انتخاب عوامل کنترلی تحت شرایطی که حساسیت آنها نسبت به تغییرات ناشی از عوامل نوفه کمتر شود. عوامل کنترل متغیرهایی هستند که پس از انتخاب، مقادیر آنها ثابت می‌ماند. از طرفی، عوامل نوفه متغیرهایی هستند که کنترل آن‌ها در طول فرآیند آزمایشی یا شرایط تولید در مقیاس کامل دشوار است.

چندین روش برای کاهش تغییرات پاسخ توسط **مک‌کی و اشتاینر** (۱۹۹۷) مورد بحث قرار گرفته است. این روش‌ها

¹Resolution and Fraction

عبارتند از: بازرسی نمونه، نمودار کنترل و نظارت بر فرآیند، حساسیت‌زدایی از پاسخ به تغییرات عوامل نوفه (یا روش RDP)، تنظیم کواریانس و کاهش تغییرات در عوامل نوفه. هر روش در شرایط خاص مزایا و معایبی دارد. در این متن بر تغییرات پاسخ به دلیل عوامل نوفه تمرکز کرده‌ایم. در استراتژی کاهش تغییرات عوامل نوفه، اکثر اقدامات مقابله‌ای جهت رسیدن به این هدف به طور قابل توجهی گران هستند. در RDP به جای کاهش تغییرات پاسخ توسط کاهش تغییرات در عوامل نوفه، کاهش بر اساس تغییر تنظیمات عوامل کنترل است به طوری که آن‌ها حساسیت کمتری نسبت به تغییرات عوامل نوفه داشته باشند. بهره‌برداری از تعامل بین عوامل کنترل و نوفه باعث کاهش تغییرات پاسخ می‌شود. از آنجایی که تغییر عوامل کنترلی معمولاً بسیار آسان‌تر است، این رویکرد مقرون به صرفه‌تر و معقول‌تر از کاهش مستقیم تغییرات نوفه است.

۳.۱ روش تاگوچی

طرح‌های آزمایشی ارائه شده توسط تاگوچی غالباً به عنوان آرایه‌های متعامد شناخته می‌شوند. آرایه متعامد فرم خاصی از یک آرایه متقاطع است که از تلاقی یک طرح متعامد شامل عوامل کنترل (آرایه کنترل) با یک طرح متعامد شامل عوامل نوفه (آرایه نوفه) ایجاد می‌شوند. فرض کنید برای انجام آزمایش از آرایه‌های متعامد استفاده شود. در روش تاگوچی، برآورد نمونه‌ای برای پارامتر $\eta = \ln(\mu^2/\sigma^2)$ بصورت $\hat{\eta} = \ln(\bar{y}^2/s^2)$ بوده که نسبت سیگنال به نوفه^۱ (نسبت SN) نامیده می‌شود و برای تنظیم عوامل کنترل داده شده در نظر گرفته شده است. در اینجا، $\bar{y}$ و s^2 بترتیب میانگین و واریانس نمونه‌ای هستند. روش دو مرحله‌ای زیر برای مسئله اسمی-بهترین^۲ در روش تاگوچی تعریف می‌شود:

- ۱- سطوح عوامل کنترل قابل توجه در نسبت برای ماکزیم کردن را انتخاب کنید.
 - ۲- سطح یک عامل کنترل را که در ۱ نمایان نمی‌شود انتخاب کنید تا مکان را روی هدف قرار دهید.
- روش تاگوچی معمولاً مستلزم آن است که سیستم یک سیستم ورودی-خروجی خطی باشد به طوری که واریانس و توان دوم میانگین به نسبت مشابه افزایش یا کاهش یابند. چندین انتقاد به روش تاگوچی قابل ذکر است که آنها برای استفاده از RSM در طراحی استوار ایجاد انگیزه می‌کنند. استفاده از روش تاگوچی تضمین نمی‌کند که محقق بتواند آن دسته از عوامل کنترلی را که بر میانگین و آن عوامل کنترلی که بر واریانس تأثیر می‌گذارند را تفکیک کند. یک روش مناسب‌تر، روشی است که بتواند آن عوامل مؤثر بر میانگین و تأثیرگذار بر واریانس را از هم جدا کند. روش تاگوچی فقط به ارتباط مدلی بین اثرات اصلی عوامل کنترل روی میانگین یا واریانس توجه دارد. تاگوچی به ندرت اثرات متقابل بین عوامل کنترل را مورد نظر قرار می‌دهد. این مطلب در عدم قابلیت برآورد اثرات متقابل در بسیاری از طرح‌های آرایه متقاطع ارائه شده توسط تاگوچی مشهود است. از سوی دیگر، بسیاری از انتقادات به روش تاگوچی بر مدل‌سازی میانگین و واریانس متمرکز هستند. مفهوم ساختاری مدل خود را به استفاده از RSM به عنوان یک روش مطلوب همراه با مسئله طراحی استوار سوق می‌دهد (تاگوچی، ۱۹۸۶؛ باکس، ۱۹۸۸).

¹Signal-to-Noise Ratio

²Nominal-the-Best Problem

۳.۲ مدل سازی مکان-پراکندگی

یک جایگزین مطلوب برای مدیریت عوامل نوفه در روش RDP تاگوچی، مدل سازی میانگین و واریانس پاسخها به طور جداگانه است که به آن روش مدل سازی مکان-پراکندگی می گویند (باکس، ۱۹۸۸؛ وینینگ و مایرز، ۱۹۹۰). استراتژی مدل سازی مکان-پراکندگی، مدلهایی را برای اندازه گیری مکان و پراکندگی بر اساس اثرات اصلی و متقابل عوامل کنترل بنا می کند. در این روش آزمایشها مطابق با آرایه های متقاطع انجام می شوند. در تنظیم $\bar{y}$ آمین عامل کنترل، بترتیب آماره های $\bar{y}_1$ و s_i^2 بر اساس n_i تکرار عامل نوفه برای اندازه گیری مکان و پراکندگی استفاده می شوند. از مدل های مکان-پراکندگی شناخته شده، عوامل مکان به عنوان عواملی هستند که در مدل مکان ظاهر می شوند. به طور مشابه، عوامل پراکندگی آنهایی هستند که در مدل پراکندگی بیان می شوند. هر عامل مکان که عامل پراکندگی نباشد، عامل تصحیح نام دارد. در این روش برای مسئله اسمی-بهترین، ابتدا آزمایشگر باید سطوح عوامل پراکندگی را برای به حداقل رساندن پراکندگی انتخاب کند و سپس سطوح عوامل تصحیح را برای رساندن مکان به هدف مورد نظر انتخاب نماید. یکی از نتایج احتمالی این است که مکان برای رسیدن هدف تصحیح شود اما پراکندگی افزایش یابد، که این موضوع نیاز به تصحیح مجدد عوامل پراکندگی داشته و تکرار مراحل لازم است. برای مسئله بزرگتر-بهتر (یا کوچکتر-بهتر)، معمولاً توصیه می شود جای دو مرحله را با هم عوض کنید، به این معنی که ابتدا باید سطوح عوامل مکان را برای حداکثر کردن (یا به حداقل رساندن) مکان انتخاب کنید و سپس سطوح عوامل پراکندگی که عوامل مکانی نیستند را طوری انتخاب کنید که مینیمم پراکندگی حاصل شود. یک نقطه ضعف روش مدل سازی مکان-پراکندگی این است که عوامل کنترلی ممکن است برخی از روابط مهم بین عوامل کنترل و نوفه را بپوشانند. علاوه بر این، محتمل تر آن است که اندازه پراکندگی از یک رابطه غیرخطی بر اساس عامل کنترل تبعیت کند، حتی وقتی که پاسخ اصلی یک رابطه خطی با عوامل کنترل و نوفه داشته باشد. این مطلب می تواند مدل سازی اندازه پراکندگی را دشوارتر نماید.

۳.۳ مدل سازی پاسخ

در مدل سازی پاسخ برای حل مسائل RDP، طرحی اجرا می شود که فرد را قادر می سازد تا رابطه بین عوامل کنترل و نوفه در میانگین و واریانس پاسخ را مدل سازی کند. در این روش به جای محاسبه واریانس روی تکرارهای نوفه، پاسخ y به عنوان تابعی از هر دو عامل کنترل و نوفه مدل سازی می شود ولش و همکاران (۱۹۹۰)؛ شومیکر و همکاران (۱۹۹۱). تحلیل در مدل سازی پاسخ شامل دو بخش است. ابتدا، نمودارهای متقابل کنترل با نوفه برای تعیین اثرات متقابل مهم در مدل پاسخ ایجاد می شوند. از این نمودارها، تنظیمات عوامل کنترلی که در آن y رابطه مسطح تری با عوامل نوفه دارند را به عنوان تنظیمات استوار انتخاب می نمایند. سپس، بر اساس مدل برازش شده $\hat{y}$ ، $\text{Var}(\hat{y})$ که به آن مدل واریانس انتقال یافته گویند را با توجه به تغییرات عوامل نوفه در $\hat{y}$ محاسبه می کنند. از آنجایی که $\text{Var}(\hat{y})$ تابعی از عوامل کنترلی است، لذا می توانیم از آن برای تشخیص تنظیمات عامل کنترل با تغییرات کوچک در واریانس استفاده کنیم. مزیت استفاده از مدل واریانس انتقالی $\text{Var}(\hat{y})$ این است که از ارائه توصیه های متناقض در مورد

تنظیمات عامل کنترل اجتناب می‌شود، زیرا محاسبه واریانس اثرات مختلف را در یک فرمول واحد ترکیب می‌کند. با بهره‌برداری از روش مدل‌سازی پاسخ در RDP کاهش قابل توجهی از تغییرات پاسخ را می‌توان بدست آورد. اگر کاهش بیشتر در تغییرات پاسخ مورد نظر باشد، ممکن است اقدامات با هزینه گران‌تری برای کاهش مستقیم تغییرات نوفه انجام شود. اجرای چنین طرحی توسط **تاگوچی (۱۹۸۶)** طراحی تحمل نامیده می‌شود. روش انجام RDP و به دنبال آن اجرای طراحی تحمل را طراحی دو مرحله‌ای نامند. یک جایگزین مناسب، انجام طراحی RDP و طراحی تحمل در یک مرحله است و به عنوان یک طراحی یکپارچه از آن یاد می‌شود (**چان و شیائو، ۱۹۹۵؛ لی و وو، ۱۹۹۹**). **مایرز و همکاران (۱۹۹۲)** مدل

$$y(x, z) = \beta_0 + x'\beta + x'Bx + z'\gamma + x'\Delta z + \varepsilon$$

را برای پاسخ $y(x, z)$ با عوامل کنترل x و عوامل نوفه z به ترتیب با ابعاد $1 \times k$ و $1 \times r$ ارائه کردند، در اینجا β_0 ، عرض از مبدأ، $\beta_{k \times 1}$ و $\gamma_{r \times 1}$ بردارهای ضرایب برای متغیرهای کنترل و نوفه، $B_{k \times k}$ ماتریسی است که مولفه‌های قطر اصلی آن ضرایبی برای اثرات درجه دوم خالص عوامل کنترل و مولفه‌های خارج از قطر اصلی آن نیمی از اثرات متقابل عوامل کنترل، $\Delta_{k \times r}$ ماتریس ضرایب متقابل عوامل کنترل با عوامل نوفه است و ε بصورت $(0, \sigma_\varepsilon^2) \sim N$ فرض می‌شود. مدل شوند. اثرات متقابل نوفه و اثرات مرتبه دوم عوامل نوفه را شامل نمی‌شود زیرا این شرایط موضوعات مورد توجه در نیستند (**باکس و جونز، ۱۹۹۰**). با فرض $E(z) = 0$ و $\text{Var}(z) = \sigma_z^2 I$ که نماد ۰ نشان دهنده بردار صفر است، میانگین و واریانس فرآیند به صورت

$$E_{z, \varepsilon}[y(x, z)] = \beta_0 + x'\beta + x'Bx$$

$$\text{Var}_{z, \varepsilon}[y(x, z)] = \sigma_z^2(\gamma + \Delta'x)'(\gamma + \Delta'x) + \sigma_\varepsilon^2$$

به دست می‌آیند، که در آن $\gamma + \Delta'x$ بر بردار مشتقات جزئی پاسخ $y(x, z)$ نسبت به z دلالت داشته و بزرگتری مشتقات بزرگتری واریانس فرآیند را نتیجه می‌دهد. **لی و نلدر (۲۰۰۳)** یافتن تنظیماتی از عوامل کنترلی x را پیشنهاد کردند که آن‌ها را به رابطه $\gamma + \Delta'x = 0$ می‌رساند و سپس استفاده از عوامل تصحیح (در صورت وجود) برای رساندن میانگین به هدف را توصیه نمودند. البته، چنین محدودیت‌هایی شرایطی برای فرآیند به وجود می‌آورند که در برخی موارد نامناسب و گاهی غیرعملی هستند (**مایرز و همکاران، ۲۰۰۵**).

۴ روش پیشنهادی بر اساس مدل‌سازی پاسخ

با تمام توجهاتی که در نوشتگان موجود دریافت کرده است، تلاش بسیار کمی در برآورد پارامترهای مدل شوند. و تعیین یک طراحی بهینه برای چنین مدلی انجام شده است. ارائه برآوردگرهای نااریب برای این پارامترها می‌تواند

بسیار مفید باشد. برای تعیین این برآوردها، مدل شوند. به صورت

$$y(x, z) = X\beta + Z\gamma + \varepsilon \quad (۱)$$

بیان می‌شود، که در آن $y(x, z)$ به $n \times ۱$ بردار پاسخ دلالت داشته، X و Z ماتریس‌های طراحی بترتیب با ابعاد $(۱ + k(k + ۳)/۲) \times n$ و $n \times r(k + ۱)$ بوده، به طوری که ردیف‌های آن‌ها تنظیمات سطوح مختلف برای Z ، $(z_1 z_2 \dots z_r x_1 z_1 z_2 \dots x_1 z_r x_2 z_1 z_2 \dots x_2 z_r x_k z_1 z_2 \dots x_k z_r)$ ، و برای X ، $(x_1 x_2 \dots x_k x_1 x_2 \dots x_k x_{k-1} x_k x_1^2 \dots x_k^2)$ هستند. بعلاوه β یک بردار $(۱ + k(k + ۳)/۲) \times ۱$ شامل ضرایب مرتبه اول، مرتبه دوم و متقابل از عوامل قابل کنترل است، و γ یک بردار $r(k + ۱) \times ۱$ شامل ضرایب مرتبه اول برای عوامل نوفه و ضرایب متقابل کنترل و نوفه است، به طوری که،

$$\beta = (\beta_0, \beta_{x_1}, \dots, \beta_{x_k}, \beta_{x_1 x_2}, \beta_{x_1 x_3}, \dots, \beta_{x_1 x_r}, \beta_{x_2 x_1}, \beta_{x_2 x_3}, \dots, \beta_{x_2 x_r}, \dots, \beta_{x_{k-1} x_k}, \beta_{x_1^2}, \dots, \beta_{x_k^2}),$$

$$\gamma = (\gamma_{z_1}, \gamma_{z_2}, \dots, \gamma_{z_k}, \gamma_{x_1 z_1}, \gamma_{x_2 z_1}, \dots, \gamma_{x_k z_1}, \gamma_{x_1 z_2}, \gamma_{x_2 z_2}, \dots, \gamma_{x_k z_2}, \dots, \gamma_{x_1 z_r}, \gamma_{x_2 z_r}, \dots, \gamma_{x_k z_r})$$

بردارهای تصادفی $\varepsilon = (\varepsilon_1 \dots \varepsilon_n)'$ و $z = (z_1 \dots z_r)'$ به صورت نرمال توزیع شده‌اند، یعنی $\varepsilon \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2 I_{n \times n})$ و $z \sim N(0, \sigma_z^2 I_{r \times r})$. در شرایطی که $X'Z$ و $Z'Z$ نانتین باشند، برآوردهای حداقل توان‌های دوم عادی β و γ به صورت

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1} X'y(x, z), \quad (۲)$$

$$\hat{\gamma} = (Z'Z)^{-1} Z'y(x, z) \quad (۳)$$

است در یک آزمایش (ثابت) زمانی که ماتریس‌های X و Z متعامد نباشند، سپس این برآوردها برآوردهای اریب می‌باشند. برای بدست آوردن برآوردهایی نااریب، این ماتریس‌ها تعریف می‌شوند، $A = (X'X)^{-1} X'Z$ ، $Z_{ZX} = Z - XA$ ، ستون‌های Z را با $z_{(j)}$ و تابع مدلی $z_{(j)} = X\tau$ ، به طوری که τ یک بردار $(۱ + k(k + ۳)/۲) \times ۱$ است. برآوردها حداقل توان دوم عادی از τ بصورت $\hat{\tau} = (X'X)^{-1} X'z_j$ است. در حقیقت، $z_{(j)} - X\hat{\tau}$ ستون j ام از ماتریس Z_{ZX} است. در نتیجه، هر ستون از Z_{ZX} بر هر یک از ستون‌های X متعامد است، یعنی داریم $X'Z_{ZX} = (0)$ ، که نماد (0) بر ماتریس صفر دلالت دارد. بر اساس روابط (۲) و (۳) تعریف Z_{ZX} ، برآوردهای نااریب از β و γ بصورت

$$\hat{\beta}_u = \hat{\beta} - A\hat{\gamma}_u, \quad (۴)$$

$$\hat{\gamma}_u = (Z'_{ZX} Z_{ZX})^{-1} Z'_{ZX} y(x, z) \quad (۵)$$

^۱Ordinary Least Square

بدست می‌آیند. هنگامی که حداقل یک ستون از X متعامد بر یک ستون از Z ، و یا حداقل یک ستون آن با یک ستون از Z یکسان باشند، سپس $\hat{\beta}_u = \hat{\beta}$ و $\hat{\gamma}_u = \hat{\gamma}$ است. در برخی آزمایشات صنعتی، پاسخ از توزیع نرمال پیروی نمی‌کند و استفاده از مدل خطی تعمیم‌یافته^۱ (GLM)، مورد نیاز است. در این موقعیت، **نلدر و لی** (۱۹۹۱) اولین کسانی بودند که مدل‌سازی مشترک میانگین و واریانس در RDP را با استفاده از GLM پیشنهاد کردند و موردی را در نظر گرفتند که میانگین و واریانس هر دو تابع متغیرهای کنترل بودند. برای مطالعه مباحث بیشتر در مورد استفاده از GLM در RDP به **لی و نلدر** (۱۹۹۸) و **لی و نلدر** (۲۰۰۳) مراجعه کنید. مطابق با مفروضات مربوط به z (ثابت) و خطای متغیر ε در (۱)، واریانس برآوردهای نااریب $\hat{\beta}_u$ و $\hat{\gamma}_u$ بصورت

$$\begin{aligned}\text{Var}(\hat{\beta}_u) &= \sigma^2[(X'X)^{-1} + A(Z'_{ZX}Z_{ZX})^{-1}A'], \\ \text{Var}(\hat{\gamma}_u) &= \sigma^2(Z'_{ZX}Z_{ZX})^{-1}\end{aligned}$$

محاسبه می‌شوند. مدل (۱) را می‌توان برای گسترش روش مدل‌سازی پاسخ برای پاسخ تکی استفاده کرد،

$$y_i(x, z) = x_i\beta + z_i\gamma + \varepsilon_i \quad i = 1, \dots, n \quad (۶)$$

مقدار مطلوب پاسخ زمانی حاصل می‌شود که، مقادیر انتخابی برای بردارهای x و z باعث شوند واریانس پاسخ مینیمم شده و میانگین پاسخ در محدوده‌ای خاص قرار گیرد،

$$\min \text{Var}_{z, \varepsilon}[y_i(x, z)], \quad a \leq E_{z, \varepsilon}[y_i(x, Z)] \leq b$$

در اینجا، x_i و z_i بترتیب بردارهای ردیف نام از ماتریس X و Z هستند. برای (۶) می‌توان نوشت،

$$\begin{aligned}E_{z, \varepsilon}[y_i(x, z)] &= x_i\beta, \\ \text{Var}_{z, \varepsilon}[y_i(x, z)] &= \gamma'[(x_i^{(1)}x_i^{(1)})' \otimes (\sigma_z^2 I_{r \times r})]\gamma + \sigma_\varepsilon^2,\end{aligned} \quad (۷)$$

که در آن $x_i^{(1)} = (x_{i1} \dots x_{ik})'$ بر اساس اولین $k+1$ مولفه از بردار x_i بوده و نماد $\otimes$ به ضرب کرونکر اشاره دارد. برای دستیابی به مقدار مشخصی از پاسخ مورد انتظار در (۶) باید $a = b$ در نظر گرفته شود. مطابق با مدل پاسخ (۱)، مدل برازش پاسخ تکی بصورت

$$\hat{y}_i(x, z) = x_i\hat{\beta}_u + z_i\hat{\gamma}_u = x_i(\hat{\beta}_u + A\hat{\gamma}_u) + z_{iZX}\hat{\gamma}_u$$

^۱Generalized Linear Model

است به طوری که، z_{iZX} به i امین ردیف از ماتریس Z_{ZX} دلالت دارد. برآوردهای نااریب برای میانگین و واریانس پاسخ در (۶)

$$\begin{aligned}\hat{E}_{Z,\varepsilon}[y_i(x, z)] &= x_i \hat{\beta}_u, \\ \hat{Var}_{Z,\varepsilon}[y_i(x, z)] &= \gamma'_u[(x_i^{(1)} x_i'^{(1)}) \otimes (\sigma_z^2 I_{r \times r})] \hat{\gamma}_u + \hat{\sigma}_\varepsilon^2 \\ &- \hat{\sigma}^2 \text{tr}\{[(x_i^{(1)} x_i'^{(1)}) \otimes (\sigma_z^2 I_{r \times r})](Z'_{ZX} Z_{ZX})^{-1}\} \quad (8)\end{aligned}$$

است، که بر اساس فرضیات توزیع عوامل نوفه σ_z^2 معلوم و $\hat{\sigma}_\varepsilon^2$ میانگین توان دوم خطای مانده بوده و نماد tr بیان کننده اثر یک ماتریس است. در معادله (۸)، $\hat{\sigma}^2 \text{tr}\{[(x_i^{(1)} x_i'^{(1)}) \otimes (\sigma_z^2 I_{r \times r})](Z'_{ZX} Z_{ZX})^{-1}\}$ عامل اریبی برآورد شده (تصحیح اریبی) است. آماره $\hat{\gamma}_u + \hat{\sigma}_\varepsilon^2$ $\gamma'_u[(x_i^{(1)} x_i'^{(1)}) \otimes (\sigma_z^2 I_{r \times r})]$ برآورده اریبی برای $Var_{Z,\varepsilon}[y_i(x, z)]$ است. عامل اریبی برآورد شده از این برآورده اریب کم می شود تا یک برآورده نااریب برای $Var_{Z,\varepsilon}[y_i(x, z)]$ در رابطه (۷) بدست آید. در (۸) از تفریق استفاده می شود، زیرا عامل اریبی برآورد شده خطای ناشی از برآورد γ را محاسبه می کند، در حالی که $Var_{Z,\varepsilon}[y_i(x, z)]$ تنها بر واریانس ناشی از عوامل نوفه در z و خطای ε متکی است. با توجه به مثبت بودن مقدار واریانس، عامل اریبی برآورد شده نباید مقدار خیلی بزرگی باشد، چون تحت چنین شرایطی ممکن است برآورد واریانس پاسخ منفی شده و به این ترتیب برآورد واریانس بی معنی شود. برای حل چنین مسئله ای، بررسی مرحله طراحی و ایجاد آزمایش های جدید توصیه می شود. توضیح بیشتر در مورد وضعیت برآورد منفی واریانس توسط **سرل و همکاران (۲۰۰۶)** و **مایرز و همکاران (۲۰۱۶)** ارائه شده است.

۵ مطالعه شبیه سازی

ایده های این مقاله و کاربردهای آن با این مطالعه شبیه سازی شرح داده می شوند. آزمایشی برای ترکیب سه متغیر قابل کنترل و دو متغیر نوفه انجام می شود. آزمایشگر یک طرح آرایه ترکیبی را همانطور که در جدول ۱ نشان داده شده است، با ۲۵ اجرا بر اساس دامنه آزمایش هایی که حول مبدا متمرکز شده اند اعمال کرده است. مطابق با رابطه (۱)، فرض بر این است که مدل پاسخ حقیقی بصورت

$$\begin{aligned}y(x, z) &= 27.5 - 3.1x_1 - 3.9x_2 + 2.4x_3 + 2.3x_1^2 + 2.9x_1^2 + 3.9x_2^2 + 2.2x_1x_2 \\ &- 2.5x_1x_3 - 1.7x_2x_3 + 2.6z_1 - 2.4z_2 - 1.8x_1z_1 + 1.9x_1z_2 - 1.8x_2z_1 \\ &+ 3.1x_2z_2 + 4.3x_3z_1 - 5.1x_3z_2 + \varepsilon \quad (9)\end{aligned}$$

باشد، که در آن ε نشان دهنده خطای جمعی با توزیع $N(0, 1)$ است. طرح ارائه شده در جدول ۱، که بر اساس سه متغیر اصلی قابل کنترل و دو متغیر اصلی نوفه ساخته شده است، یک طرح متعامد نیست. در اینجا، این طرح

X_1 نام‌گذاری می‌شود. به منظور متعامد کردن X_1 ، از روش متعامدسازی گرام-اشمیت اصلاح شده^۱ (MGS) استفاده شده است. در این روش، حذف گاوسی روی $X'_1 | X_1$ برای تبدیل آن به $Q' | R$ گونه‌ای انجام می‌شود که R یک ماتریس بالا مثلثی معکوس‌پذیر از $X'_1 X_1$ و Q یک ماتریس متعامد از ماتریس اصلی X_1 باشد. فرض کنید U یک ماتریس قطری بصورت $(c_{11}^{1/2}, \dots, c_{jj}^{1/2}, \dots, c_{kk}^{1/2})$ است، که c_{jj} برای $j = 1, \dots, k$ برابر زامین مولفه قطری از $X'_1 X_1$ باشد. ماتریس مطلوب ما بفرم تجزیه‌ای $X = QU$ که یک فرم متعامد MGS با طول بردارهای (ستون‌های) یکسان از ماتریس اولیه X_1 می‌باشد. برای جزئیات بیشتر در مورد روش MGS به منظور متعامدسازی یک طرح اولیه کیانی (۲۰۱۰) معرفی می‌شود. طرح نامتعامد اولیه X_1 و طرح متعامد MGS آن به ترتیب در جداول ۱ و ۲ نشان داده شده‌اند. جدول ۳ نتایج معیارهای مورد علاقه برای اریبی و پراکندگی برآوردهای β و γ از یک طرح نامتعامد و طرح متعامد شده MGS آن را نشان می‌دهد. در این جدول، نماد θ بیان‌کننده زاویه بین دو بردار است، به عنوان مثال $\theta_{\beta, \hat{\beta}}$ زاویه بین β و برآوردگر آن $\hat{\beta}$ می‌باشد. مقدار کوچکتر برای $\theta_{\beta, \hat{\beta}}$ یک برآوردگر صحیح‌تر را نشان می‌دهد. فرض کنید $\sigma_e^2 = 1$ ، معیارهای مورد علاقه $|(X'X)^{-1}|$ ، $|(X'X)^{-1} + A(Z'_{ZX}Z_{ZX})^{-1}A'|$ ، $|(Z'Z)^{-1}|$ و $|(Z'_{ZX}Z_{ZX})^{-1}|$ به ترتیب واریانس برآوردهای $\hat{\beta}$ ، $\hat{\beta}_u$ ، $\hat{\gamma}$ و $\hat{\gamma}_u$ هستند. در این مورد، مقدار کوچکتر این معیارها به برآوردهای دقیق‌تر دلالت دارد. مقادیر ستون دوم و سوم جدول به ترتیب با توجه به طرح نامتعامد در جدول ۱ و طرح متعامد آن در جدول ۲ محاسبه می‌شوند. همانطور که مشاهده می‌کنیم، به طور کلی MGS یک روش مفید برای بهبود واریانس و اریبی برآوردهایی از β و γ هستند. ستون‌های چهارم و پنجم در جدول ۳ به معیارهای مورد علاقه‌ای اشاره می‌کنند که مطابق با یک طرح مرکب مرکزی^۲ (CCD)، و یک طرح بهینه-D ارزیابی می‌شوند **مایرز و همکاران** (۲۰۱۶) و **کیانی** (۲۰۱۲). طرح مرکب مرکزی شامل ۲۵ اجرا است. این طرح مطابق با یک استاندارد با پنج عامل ایجاد شده، با این توضیح که بخش مکعب یک طرح 2^{5-1} بوده و نقاط محوری مرتبط با دو عامل نوفه حذف شده‌اند. طرح بهینه-D با استفاده از نرم افزار Design-Expert ساخته شده است، به طوری که طرح دارای ۲۵ اجرا شامل ۱۸ نقطه مطابق با مدل (۸)، ۶ نقطه برای برآورد عدم برازش و ۱ نقطه تکرار است. با توجه به نتایج به دست آمده از جدول ۳ و نتایج آزمایش‌های عددی گسترده، می‌توان پیشنهاد داد که اگر در مرحله اول برنامه‌ریزی هستیم، استفاده از طرح مرکب مرکزی ارجحیت دارد و در غیر این صورت با داشتن یک طرح نامتعامد اولیه که روی آن روش طرح بهینه-D انجام شده است، مناسب می‌باشد. در روش CCD، از آنجایی که $X'Z$ برابر با یک ماتریس صفر است، در نتیجه ماتریس‌های X و Z متعامد هستند و برآوردها در معادلات (۲) و (۴) با هم و همچنین معادلات (۳) و (۵) با هم معادل می‌باشند. در موارد دیگر، یعنی وقتی که از یک طرح نامتعامد، یا MGS یا بهینه-D استفاده می‌شود، از نظر به حداقل رساندن اریبی، بکارگیری برآوردهای نااریب پیشنهادی با بهینه-D توصیه شده، و از لحاظ به حداقل رساندن پراکندگی، برآوردهای OLS با طرح بهینه-D قابل ترجیح هستند. در ادامه مطابق با طرح MGS که یک طرح متعامد بوده و داده‌های آن در جدول ۲ نشان داده شده است، تحلیل مدل

¹Modified Gram-Schmidt²Central Composite Design

جدول ۱. آزمایش آرایه ترکیبی با سه متغیر قابل کنترل و دو متغیر نوفه بر اساس طراحی نامتعامل.

y	Z_2	Z_1	X_2	X_3	X_1	Run Number
۴۷/۱۶	-۱/۲۸	۰/۸۳	۱/۱۳	-۰/۱۲	۰/۶۰	۱
۲۷/۸۹	-۱/۳۶	۰/۸۹	-۰/۸۸	-۰/۷۴	۰/۷۸	۲
۲۵/۱۸	۰/۹۰	۰/۰۳	-۰/۲۰	۰/۲۲	-۰/۰۲	۳
۳۶/۶۲	-۰/۴۱	۰/۰۲	۱/۱۹	-۰/۰۳	۰/۴۳	۴
۲۸/۰۷	-۰/۷۴	-۰/۵۴	-۰/۵۳	۰/۶۴	-۱/۱۰	۵
۲۳/۷۴	-۱/۲۳	-۰/۱۵	-۰/۱۸	۱/۲۰	۰/۶۲	۶
۴۱/۳۵	۰/۲۱	-۰/۱۸	-۰/۷۶	-۱/۳۲	-۱/۰۲	۷
۳۷/۱۴	۱/۲۸	-۰/۰۴	-۰/۹۲	۰/۸۴	۰/۵۰	۸
۳۲/۳۶	۱/۲۴	۰/۷۷	-۰/۷۷	-۰/۶۷	-۰/۴۶	۹
۴۵/۰۸	-۱/۰۳	۱/۲۰	-۰/۸۵	-۱/۱۶	-۰/۶۷	۱۰
۴۲/۳۵	-۱/۱۳	-۱/۱۷	۰/۹۶	۰/۰۲	-۱/۱۲	۱۱
۲۷/۰۵	-۰/۲۷	۰/۷۸	-۰/۷۵	-۰/۲۱	۰/۸۳	۱۲
۲۹/۹۵	-۰/۷۲	۰/۳۵	-۰/۰۸	-۰/۵۱	۱/۱۶	۱۳
۳۰/۱۹	-۰/۳۱	-۰/۳۷	-۰/۵۶	-۰/۵۷	۱/۰۸	۱۴
۳۵/۳۸	۰/۷۸	-۰/۸۹	-۰/۸۲	-۱/۰۷	-۱/۲۹	۱۵
۳۴/۷۰	-۱/۰۹	۰/۵۲	۰/۲۴	-۰/۷۸	۱/۳۷	۱۶
۲۵/۹۷	-۰/۳۷	-۰/۸۷	۰/۳۴	۰/۵۹	-۰/۳۷	۱۷
۲۶/۴۱	۱/۱۲	۰/۶۹	۰/۱۴	۰/۲۹	-۰/۲۹	۱۸
۳۷/۱۹	-۰/۴۵	-۰/۵۷	۱/۰۵	-۰/۶۷	۰/۵۰	۱۹
۳۴/۲۲	-۰/۰۳	۰/۱۳	۱/۲۳	۰/۲۷	۰/۳۵	۲۰
۲۸/۷۰	-۰/۰۳	-۰/۱۴	-۰/۴۲	-۰/۲۶	-۰/۰۳	۲۱
۳۰/۶۰	۱/۲۵	۰/۴۱	۰/۰۹	-۰/۶۸	-۰/۷۵	۲۲
۳۴/۹۷	۱/۱۳	۰/۶۵	۰/۸۷	-۱/۰۹	۰/۰۶	۲۳
۲۸/۴۰	-۱/۲۶	۰/۴۲	-۰/۳۴	-۰/۱۷	۰/۱۳	۲۴
۳۱/۲۸	-۰/۲۳	-۰/۹۳	۰/۴۰	۱/۳۴	۱/۳۰	۲۵

(۹) ارائه می‌گردد. با استفاده از برآوردهای نااریب $\hat{\beta}_u$ و $\hat{\gamma}_u$ ، برازش مدل (۶) بصورت

$$\begin{aligned}
 \hat{y}(x, z) = & 27.3 - 2.65x_1 - 4.29x_2 + 2.28x_3 + 2.04x_1^2 + 2.93x_2^2 + 3.96x_3^2 \\
 & + 2.61x_1x_2 - 2.26x_1x_3 - 1.37x_2x_3 + 2.47z_1 - 2.43z_2 - 2.28x_1z_1 \\
 & + 2.27x_1z_2 - 1.71x_2z_1 + 2.79x_2z_2 + 3.75x_3z_1 - 5.25x_3z_2
 \end{aligned}$$

جدول ۲. آزمایش آرایه ترکیبی با سه متغیر قابل کنترل و دو متغیر نوفه بر اساس طراحی متعامد MGS.

y	Z_2	Z_1	X_2	$\bar{X}_2$	X_1	Run Number
۴۶۸۹	-۱/۱۰	۰/۹۲	۱/۱۰	-۰/۲۳	۰/۶۰	۱
۳۰/۱۵	-۱/۲۶	۰/۳۱	-۰/۹۰	-۰/۸۹	۰/۷۸	۲
۲۵/۴۶	۰/۹۰	۰/۱۱	-۰/۲۴	۰/۲۳	-۰/۰۲	۳
۳۵/۰۱	-۰/۱۳	۰/۰۷	۱/۱۷	-۰/۱۱	۰/۴۳	۴
۲۷/۷۴	-۰/۳۱	-۰/۰۷	-۰/۴۹	۰/۸۵	-۱/۱۰	۵
۲۲/۶۸	-۱/۱۸	-۰/۱۳	-۰/۴۵	۱/۱۱	۰/۶۲	۶
۳۹/۶۵	-۰/۱۲	-۰/۶۰	-۰/۴۴	-۱/۱۶	-۱/۰۲	۷
۴۰/۴۵	۱/۴۰	۰/۰۱	-۱/۱۴	۰/۷۷	۰/۵۰	۸
۳۱/۶۲	۱/۰۰	۰/۶۲	-۰/۶۳	-۰/۶۰	-۰/۴۶	۹
۴۷/۲۸	-۱/۵۲	۰/۹۷	-۰/۶۰	-۱/۰۶	-۰/۶۷	۱۰
۴۸/۶۹	-۱/۴۲	-۰/۸۳	۱/۱۴	۰/۲۲	-۱/۱۲	۱۱
۲۸/۸۴	-۰/۱۰	۰/۴۲	-۰/۸۵	-۰/۳۶	۰/۸۳	۱۲
۲۹/۸۵	-۰/۲۷	-۰/۲۲	-۰/۱۶	-۰/۷۳	۱/۱۶	۱۳
۳۲/۰۸	۰/۲۰	-۱/۱۵	-۰/۶۳	-۰/۷۸	۱/۰۸	۱۴
۳۲/۱۸	۰/۴۴	-۱/۲۵	-۰/۵۰	-۰/۸۶	-۱/۲۹	۱۵
۳۲/۹۰	-۰/۵۴	-۰/۱۶	۰/۱۸	-۱/۰۴	۱/۳۷	۱۶
۲۶/۹۵	-۰/۴۵	-۰/۵۸	۰/۳۱	۰/۶۷	-۰/۳۷	۱۷
۲۷/۹۷	۰/۹۵	۱/۰۷	۰/۱۴	۰/۳۵	-۰/۲۹	۱۸
۳۱/۵۲	۰/۰۰	-۰/۹۶	۱/۱۱	-۰/۷۷	۰/۵۰	۱۹
۳۳/۷۲	۰/۲۰	۰/۳۷	۱/۱۷	۰/۲۱	۰/۳۵	۲۰
۲۸/۳۸	-۰/۰۴	-۰/۳۵	-۰/۳۹	-۰/۲۶	-۰/۰۳	۲۱
۳۱/۹۶	۱/۰۳	۰/۴۴	۰/۳۰	-۰/۵۶	-۰/۷۵	۲۲
۳۲/۲۶	۱/۳۵	۰/۴۱	۱/۰۵	-۱/۱۲	۰/۰۶	۲۳
۲۸/۵۹	-۱/۳۷	۰/۳۲	-۰/۳۴	-۰/۲۰	۰/۱۳	۲۴
۳۳/۱۶	۰/۳۴	-۰/۸۶	۰/۰۳	۱/۱۳	۱/۳۰	۲۵

است ضمناً، مدل‌های میانگین و واریانس برازش شده مربوط به معادلات (۸) برابر

$$\begin{aligned} \hat{E}_{Z,\varepsilon}[y(x,z)] = & 273 - 265x_1 - 43x_2 + 228x_3 + 204x_1^2 + 293x_2^2 + 396x_3^2 \\ & + 261x_1x_2 - 226x_1x_3 - 137x_2x_3 \end{aligned} \quad (10)$$

جدول ۳. اندازه‌های مورد نظر برای برآوردگرها بر اساس طرح‌های مختلف آزمایشی.

D-Optimal	CCD	MGS	Non-Orthogonal	Measure
$1.23E - 01$	$1.05E - 02$	$2.62E - 01$	$2.20E - 01$	$\theta_{\beta, \hat{\beta}}$
$2.42E - 02$	$1.05E - 02$	$3.07E - 02$	$2.72E - 02$	$\theta_{\beta, \hat{\beta}_u}$
$6.27E - 01$	$4.76E - 02$	$7.30E - 01$	$1.41E + 00$	$\theta_{\gamma, \hat{\gamma}}$
$2.69E - 02$	$4.76E - 02$	$8.71E - 02$	$1.07E - 01$	$\theta_{\gamma, \hat{\gamma}_u}$
$8.75E - 11$	$1.32E - 14$	$1.05E - 09$	$1.61E - 09$	$ (X'X)^{-1} $
$1.68E - 10$	$1.32E - 14$	$7.91E - 08$	$7.29E - 07$	$ (X'X)^{-1} + A(Z'_{ZX}Z_{ZX})^{-1}A' $
$2.63E - 11$	$2.33E - 10$	$4.45E - 08$	$5.86E - 08$	$ (Z'Z)^{-1} $
$5.05E - 11$	$2.33E - 10$	$3.36E - 06$	$2.70E - 05$	$ (Z'_{ZX}Z_{ZX})^{-1} $

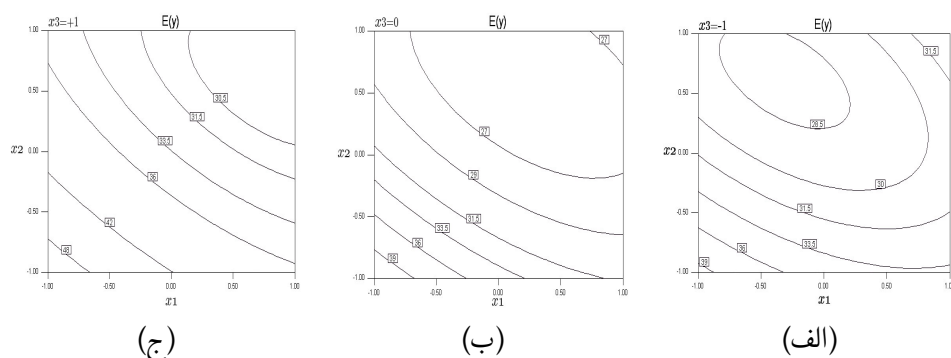
$$\begin{aligned} \hat{\text{Var}}_{Z, \varepsilon}[y(x, z)] &= 13.06 - 22.48x_1 - 22.53x_2 + 44.24x_3 + 9.56x_1^2 + 10.08x_2^2 \\ &+ 41.14x_3^2 + 20.64x_1x_2 - 40.75x_1x_3 - 42.1x_2x_3. \end{aligned} \quad (11)$$

است. شکل ۱ نمودارهای تراز مدل میانگین برازش شده مربوط به (۱۰) را برای $x_3 = -1, 0, +1$ نشان می‌دهند، و شکل ۲ نمودارهای تراز مدل واریانس برازش شده از رابطه (۱۱) را برای $x_3 = -1, 0, +1$ به نمایش می‌گذارند. در این مثال حدود مطلوب برای میانگین و واریانس فرآیند بصورت

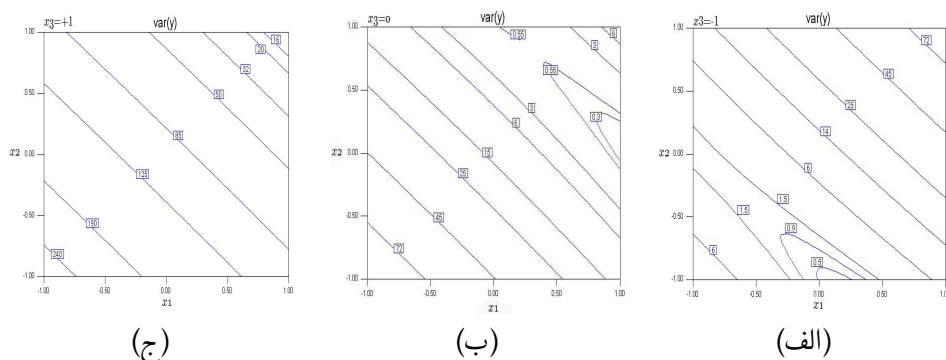
$$31.5 \leq E_{Z, \varepsilon}[y(x, z)], \leq 33.5 \quad \text{Var}_{Z, \varepsilon}[y(x, z)] \leq 2 \quad (12)$$

هستند. با در نظر گرفتن شکل ۱ تا ۲، می‌توان نتیجه گرفت که نمودارهای قابل قبول شکل ۱-الف و شکل ۲-الف هستند، یعنی زمانی که $x_3 = -1$ تنظیم شده است. از این رو، برای سهولت در تشخیص ناحیه مورد علاقه از متغیرهای x_1 و x_2 مطابق با هر دو رابطه (۱۲)، نمودار همپوشانی شکل (۳)-الف رسم می‌شود ($x_3 = -1$). ترازهایی از مقادیر ثابت برای میانگین و واریانس روی هم قرار می‌گیرند، سپس ناحیه محدود شده توسط این ترازها، نشان‌دهنده یک ناحیه عملیاتی مناسب با واریانس کم ($\text{Var}_{Z, \varepsilon}[y(x, z)] \leq 2$) و متوسط پاسخ در فاصله مورد علاقه $[31.5, 33.5]$ است. اگر تولید کننده در ترکیب مورد نظر از عوامل قابل کنترل بخواهد برای ساخت یک محصول، مقدار زیادی از x_1 و مقدار کمی از x_2 استفاده نماید، با بهره‌برداری از نمودار همپوشانی شکل (۳)-ب می‌توان نسبت به تعیین مقادیر این متغیرها اقدام نمود، ضمن آنکه $x_3 = -0.75$ تنظیم می‌شود.

بر اساس شکل ۱-ب و شکل ۲-ب ($x_3 = 0$)، می‌توان نتیجه گرفت که به میانگین و واریانس مطلوب فرآیند همانطور که در روابط (۱۲) خواسته شده است، نمی‌توان نائل شد و یک تهاوت وجود دارد. دلیل این مطلب آن است که، در ناحیه آزمایشی هیچ تنظیمی برای وجود ندارد که بطور یکجا میانگین و واریانس با محدوده تعیین



شکل ۱. نمودار تراز مدل میانگین برازش شده در الف- $X_3 = -1$ ، ب- $X_3 = 0$ ، ج- $X_3 = +1$

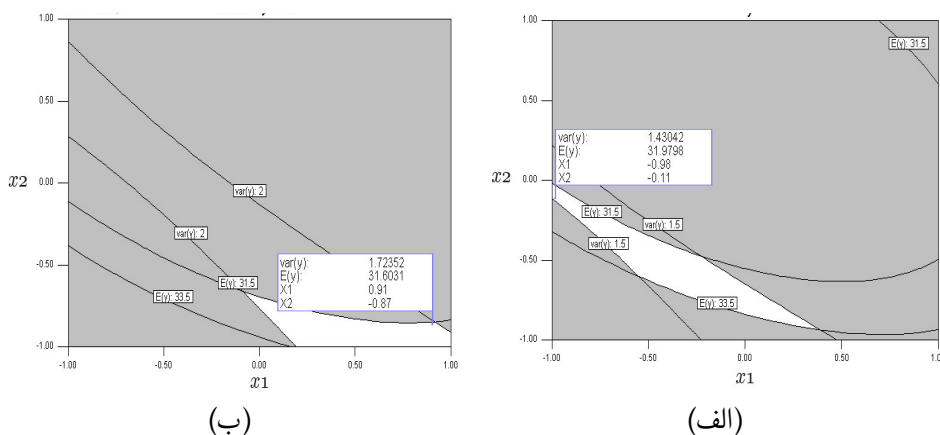


شکل ۲. نمودار تراز مدل میانگین برازش شده در الف- $X_3 = -1$ ، ب- $X_3 = 0$ ، ج- $X_3 = +1$

شده را ارائه دهد. در ناحیه‌ای که میانگین مطلوب دیده می‌شود، واریانس فرآیند به طور قابل توجهی بزرگ است یا حداقل کمتر یا مساوی ۲ نیست. از طرفی در ناحیه‌ای که واریانس در حد قابل قبول قرار دارد میانگین از چنین ویژگی برخوردار نیست. بطور مشابه، مطابق با شکل ۱- ج و شکل ۲- ج برای $x_3 = +1$ ، یک تهاتر وجود دارد و مواجه با عدم حصول ناحیه عملیاتی خواسته شده هستیم. توضیحات بیشتر در مورد تحلیل تهاتری در RDP توسط [شین و همکاران \(۲۰۱۱\)](#) و [بویلان و همکاران \(۲۰۱۳\)](#) بیان شده است.

بحث و نتیجه‌گیری

این مقاله ابتدا مروری بر روش‌های موجود در نوشتگان برای کاهش تغییرات پاسخ به دلیل وجود عوامل نوفه در فرآیندهای تولیدی دارد. برای دستیابی به این هدف، روی روش مدل‌سازی پاسخ تمرکز شده است، چرا که این روش نسبت به سایر روش‌های موجود مانند روش تاگوچی و روش مدل‌سازی مکان-پراکندگی دارای مزیت‌هایی است.



شکل ۳. همپوشانی خطوط میانگین و واریانس با ناحیه بازی که شرایط مطلوب را برای میانگین و واریانس فرآیند در الف-ب، $x_3 = -0.75$ دارد.

در این روش در جهت حصول معیارهای با در نظر گرفتن تاثیرات عوامل نوفه، سطوح عوامل کنترل برای رسیدن به محصول دلخواه و کاهش تغییرات آن تعیین گردید. در مرحله طراحی، فرض بر این است که عوامل نوفه برای اهداف آزمایشی قابل کنترل هستند و بر این اساس سطوح عوامل قابل کنترل طوری تعیین می‌شوند که نسبت به عوامل نوفه حساسیت کمتری داشته باشند. در نتیجه، ناایبی و استواری آزمایش‌ها یا تولیدات آتی در مقیاس انبوه به طور چشمگیری بهبود خواهند یافت. برای برآورد پارامترهای مدل پاسخ، برآوردهای ناایب پیشنهاد شده‌اند. با در اختیار داشتن برآوردهای کمترین توان‌های دوم عادی، طراحی بهینه برای به حداقل رساندن ناایبی و پراکندگی این برآوردها استفاده می‌شود. ترازهای میانگین و واریانس همپوشانی شده تا ناحیه عملیاتی عوامل قابل کنترل با میانگین و واریانس مطلوب برای پاسخ ارائه شوند.

تقدیر و تشکر

نویسنده مقاله از پیشنهادات ارزنده ویراستار محترم و همچنین داوران و سردبیر محترم مجله که باعث ارائه بهتر و افزایش سطح کیفی مقاله شده‌اند، صمیمانه کمال قدردانی و سپاس‌گزاری دارد.

مراجع

- Arora, J. S. (2017), *Introduction to Optimum Design*, 4th Edition, Elsevier Science.
- Borror, C. M., Montgomery, D. C., and Myers, R. H. (2002), Evaluation of statistical designs for experiments involving noise variables, *Journal of Quality Technology*, **34**, 54-70.

- Box, G. E. P. (1988), Signal-to-Noise Ratio, Performance Criteria, and Transformation, *Technometrics*, **30**, 1-17.
- Box, G. E. P., and Jones, S. (1990), Designing Products That Are Robust To The Environment. Report Series in Quality and Productivity, CPQI, University of Wisconsin, Number 56.
- Box, G. E. P., and Wilson, K. B. (1951), On the Experimental Attainment of Optimum Conditions (with discussion), *Journal of the Royal Statistical Society*, **13**, 1-45.
- Boylan, G. L., Goethals, P. L., and Cho, B. R. (2013), Robust Parameter Design in Resource-Constrained Environments: An Investigation of Trade-offs Between Costs and Precision Within Variable Processes, *Applied Mathematical Modelling*, **37**, 2394-2416.
- Chan, L. K., and Xiao, P. H. (1995), Combined Robust Design, *Quality Engineering*, **8**, 47-56.
- Copeland, K. A. F., and Nelson, P. R. (1996), Dual Response Optimization via Direct Function Minimization, *Journal of Quality Technology*, **28**, 331-336.
- Del Castillo E., and Montgomery, D. C. (1993), A Nonlinear Programming Solution to the Dual Response Problem, *Journal of Quality Technology*, **25**, 199-204.
- Kiani, M. (2010), Extensions to Modified Gram-Schmidt Strategy and Its Application in Steepest Ascent Method, *Journal of Statistical Computation and Simulation*, **80**, 389-400.
- Kiani, M. (2012), On the Construction of Optimal Designs, *Journal of Statistical Computation and Simulation*, **82**, 1003-1014.
- Lee, Y., and Nelder, J. A. (1998), Joint Modeling of Mean and Dispersion, *Technometrics*, **40**, 168-175.

- Lee, Y., and Nelder, J. A. (2003), Robust Design via Generalized Linear Models, *Journal of Quality Technology*, **35**, 2-12.
- Li, W., and Wu, C. F. J. (1999), An Integrated Method of Parameter Design and Tolerance Design, *Quality Engineering*, **11**, 417-425.
- Lin, D. K. J. and Tu, W. (1995), Dual Response Surface Optimization, *Journal of Quality Technology*, **27**, 248-260.
- MacKay, R. J., and Steiner, S. H. (1997), Strategies for Variability Reduction, *Quality Engineering*, **10**, 125 -136.
- Miro-Quesada, G., and Del Castillo, E. (2004), Two Approaches for Improving The Dual Response Method in Robust Parameter Design, *Journal of Quality Technology*, **36**, 154-168.
- Montgomery, D. C. (2020), *Design and Analysis of Experiments*, 10th Edition, John Wiley and Sons, New York.
- Myers R. H., Montgomery, D. C., and Anderson, C. M. (2016), *Response Surface Methodology: Process and Product Optimization Using Designed Experiments*, 4th Edition, John Wiley and Sons, New York, NY.
- Myers R. H., Khuri A. I., and Vining G. G. (1992), Response Surface Alternatives to the Taguchi Robust Parameter Design Approach, *The American Statistician*, **46** , 131-139.
- Myers, R. H., Khuri, A. I., and Carter, W. H. (1989), Response Surface Methodology: 1966-1988, *Technometrics*, **31**, 137-157.
- Myers, W. R., Brenneman, W. A., and Myers, R. H. (2005), A Dual-Response Approach to Robust Parameter Design for a Generalized Linear Model, *Journal of Quality Technology*, **37**, 130-138
- Nelder, J. A., and Lee, Y. (1991), Generalized Linear Models for the Analysis of Taguchi-Type Experiments, *Applied Stochastic Models and Data Analysis*, **7**, 107-120.

- Rodriguez, M., Montgomery, D. C., and Borror, C. M. (2009), Generating Experimental Designs Involving Control and Noise Variables Using Genetic Algorithms, *Quality and Reliability Engineering International*, **25**, 1045–1065.
- Searle, S.R., Casella, G. and McCulloch, C.E. (2006), *Variance Components*, John Wiley and Sons, New York, NY.
- Shin, S., Samanlioglu, F., Cho, B. R., Wiecek, M. M. (2011), Computing Trade-offs in Robust Design: Perspectives of the Mean Squared Error, *Computers and Industrial Engineering*, **60**, 248–255.
- Shoemaker, A. C., Tsui, K. L., and Wu, C. F. J. (1991), Economical Experimentation Methods for Robust Design, *Technometrics*, **33**, 415-427.
- Taguchi, G. (1986), *Introduction to Quality Engineering. Tokyo, Japan: Asian Productivity Organization*.
- Taguchi, G. (1987), *System of Experimental Design: Engineering Methods to Optimize Quality and Minimize Cost*, Quality Resources, White Plains, NJ.
- Vining, G. C., and Myers, R. H. (1990), Combining Taguchi and Response Surface Philosophies: A Dual Response Approach, *Journal of Quality Technology*, **22**, pp. 38-45.
- Welch, W. J., Yu, T. K., Kang, S. M., and Sacks, J. (1990), Computer experiments for quality control by parameter design, *Journal of Quality Technology*, **22**, 15-22.
- Wu, C. F. J., and Hamada, M. (2021), *Experiments: Planning, Analysis, and Parameter Design Optimization*, 3rd Edition, John Wiley and Sons, New York.
- Wu, C. F. J., and Zhu, Y. (2003), Optimal Selection of Single Arrays for Parameter Design Experiments, *Statistica Sinica*, **13**, 1179-1199.