مجله علوم آماری، پاییز و زمستان ۱۳۹۱
جلد ۶، شماره ۲، ص ۱۵۱-۱۶۶

سانسور فزاینده نوع I تطبیقی و کاربرد آن در مسائل طول عمر

محمد بیات، جعفر احمدی
گروه آمار، دانشگاه فردوسی مشهد

تاریخ دریافت: ۱۳۹۱/۵/۲۱ تاریخ آخرین بازنگری: ۱۳۹۱/۱۲/۴

چکیده : امروزه استفاده از روش‌های مختلف نمونه‌گیری براساس طرح سانسورهای متفاوت در مطالعات مربوط به طول عمر سیستم‌های مهندسی و آزمایشهای صنعتی اهمیت ویژه‌ای پیدا کرده است. در این مقاله مدل تطبیقی از سانسور فزاینده نوع I معرفی شده است. فرض شده است تعداد شیءهایی که در مرحله iام از آزمایش خارج می‌شوند، متغیری تصادفی و وابسته به زمان و بردار رخدادها و همچنین تعداد سانسور شده‌های قبلی باشد. نتایج توزیعی در حالت کلی به‌صورت تحلیلی و صریح به‌دست آمده است. نشان داده شده است، برآوردگر درستنمایی ماکسیمم بر اساس طرح جدید منطبق با سانسور فزاینده نوع I معمولی است. در پایان مقاله برای تشریح بیشتر و مقایسه، مطالعه شبیه‌سازی برای توزیع نمایی یک پارامتری انجام شده است.

واژه‌های کلیدی : سانسور فزاینده نوع I، سانسور فزاینده نوع I تطبیقی، سانسور فزاینده نوع II، سانسور فزاینده نوع II تطبیقی، طرح سانسور.

آدرس الکترونیک مسئول مقاله: محمد بیات، mob1365@yahoo.com
کد موضوع‌بندی ریاضی (۲۰۰۰): ۶۲N۰۵

۱ مقدمه

امروزه استفاده از طرح سانسورها در مطالعات مربوط به آزمایشات طول عمر، مباحث قابلیت اعتماد و تحلیل بقا مورد توجه ویژه‌ای قرار گرفته است. از ساده‌ترین طرح سانسورها، می‌توان سانسورهای نوع I و II را نام برد. فرض کنید n شیء را به طور همزمان در یک آزمایش طول عمر قرار داده شود، اگر در یک زمان از قبل تعیین شده مانند T آزمایش متوقف و باقیمانده شیءها از آزمایش خارج شوند، این طرح در متون قابلیت اعتماد و تحلیل بقا به سانسور نوع I معروف است. اگر به جای ختم آزمایش در زمان T، آزمایش تا زمان از کارافتادگی شیء mام (که m یک مقدار از قبل مشخص شده است و $m \leq n$) ادامه یابد، طرح مذکور به سانسور نوع II معروف است. طرح سانسورها توسط پژوهشگران زیادی مورد مطالعه قرار گرفته و تعمیم‌های متفاوتی از آنها انجام شده است. از جمله سانسور فزاینده نوع I و II، سانسور هیبرید فزاینده نوع I و II، سانسور تصادفی. ایزانلو و حبیبی‌راد (۱۳۸۸) ترکیبی از دو طرح سانسور هیبرید نوع I و II را در نظر گرفته و پارامترهای توزیع نمایی تعمیم یافته را بر اساس آن برآورد نمودند.

از پرکاربردترین روش‌های سانسور که در دهه اخیر بسیار مورد توجه قرار گرفته است، می‌توان سانسور فزاینده نوع II را نام برد، که در آن n شیء در آزمایش قرار می‌گیرد، پیش از آزمایش تعداد مشاهدات مورد نیاز تعیین و با m نشان داده می‌شود. زمانی که شکست iام رخ‌داد، تعداد r_i $(1 \leq i \leq m)$ واحد از شیءهای باقیمانده در آزمایش کنار گذاشته می‌شود، که در آن r_iها پیش از آزمایش تعیین شده‌اند و $\sum_{i=1}^{m} r_i = n - m$. بردار $\boldsymbol{r}_m = (r_1, \ldots, r_m)$ طرح سانسور نامیده می‌شود. برای اطلاعات بیشتر، به بالاکریشنان و آگاروالا (۲۰۰۰)، بالاکریشنان (۲۰۰۷)، بالاکریشنان و همکاران (۲۰۰۸)، بروشکات و همکاران (۲۰۰۶)، بروشکات (۲۰۰۸)، کوهن (۱۹۶۳)، کرامر و کمپس (۲۰۰۱) و هرد (۱۹۵۶) مراجعه شود. به دلیل اینکه ممکن است در آزمایش شرایطی پیش آید که نتوان از بردار $\boldsymbol{r}_m$ استفاده نمود، تعدادی از آماردانان طرح‌های سانسور جدیدی را ارائه دادند که می‌تواند در شرایط متفاوت تعداد متفاوتی از شیءها را در زمان رخ‌دادن

شکست سانسور کند (نگ و همکاران، ۲۰۰۹؛ بایرامو و پارسی، ۲۰۱۱). کرامر و ایلیوپلوس (۲۰۱۰) طرح کاملی را تحت عنوان سانسور فزاینده تطبیقی نوع II ارائه دادند که شامل طرح‌های پیشین نیز می‌شود. اما طرح دیگری که مورد نظر این مقاله است، طرح سانسور فزاینده نوع I است. در این طرح ابتدا در زمان صفر به‌صورت همزمان n شیء را در آزمایش قرار داده و با رسیدن به زمان از پیش تعیین شده t_i $(1 \leq i \leq m)$ تعداد r_i واحد از شیءهای موجود در آزمایش کنار گذاشته می‌شود. در زمان t_m تمامی شیءهای باقیمانده از آزمایش خارج می‌شوند. در این نوع سانسور چون تعداد شکست‌ها متغیر تصادفی است و امکان دارد که مقدار آن صفر باشد، به‌علاوه ممکن است قبل از رسیدن به زمان t_m تمامی شیءها یا مشاهده شده باشند و یا اینکه سانسور شده باشند (آزمایش پایان پذیرفته باشد) این طرح سانسور در صنعت کاربرد کم و ضعیفی دارد. این مقاله برآن است که طرح منعطف‌تری از سانسور فزاینده نوع I را ارائه دهد به گونه‌ای که احتمال رخ دادن ایرادات بالا را کاهش دهد.

در بخش ۲ طرح سانسور فزاینده نوع I تطبیقی معرفی و دو مثال برای توضیح بیشتر ارائه می‌شود. بخش ۳ شامل خواص توزیعی و قضایای اصلی می‌باشد. مقایسه طرح سانسور معرفی شده با سانسور فزاینده نوع I معمولی، با استفاده از الگوریتم شبیه‌سازی در بخش ۴ انجام شده است.

۲ معرفی طرح

فرض کنید n شیء به طور همزمان در یک آزمون بقا قرار داده شده‌اند و پیش از شروع آزمایش، بردار زمان‌های سانسور $\boldsymbol{T} = (t_1, \ldots, t_m)$ تعیین شده باشد. به‌علاوه فرض کنید نمادهای d_i نشان دهنده تعداد شکست‌های رخ داده در بازه $[t_{i-1}, t_i)$ با $t_0 = 0$، $d_{(i)}$ تعداد شکست‌های رخ داده در بازه $[0, t_i)$، R_i تعداد سانسورها در بازه $[t_{i-1}, t_i)$ و $R_{(i)}$ تعداد سانسورها در بازه $[0, t_i)$ باشند. فرض کنید آزمایش در زمان صفر آغاز می‌شود و با رسیدن به زمان t_1، تعداد R_1 واحد از شیءهای باقیمانده در آزمایش کنار گذاشته می‌شوند.در اینجا R_1 یک متغیر

تصادفی گسسته با تابع جرم احتمال $g_۱$ و تکیه‌گاه $\{۰, ۱, \dots, n - d_۱\}$ است، که $g_۱$ وابسته به زمان‌های شکست‌های رخ داده در بازه $[۰, t_۱)$ و $d_۱$ می‌باشد. سپس آزمایش با $n - d_۱ - R_۱$ شیء باقیمانده ادامه می‌یابد و با رسیدن به زمان $t_۲$، تعداد $R_۲$ واحد از شیءهای موجود در آزمایش به تصادف انتخاب شده و کنار گذاشته می‌شوند، که $R_۲$ یک متغیر تصادفی گسسته با تابع جرم احتمال $g_۲$ و تکیه‌گاه آن $\{۰, ۱, \dots, n - d_۱ - d_۲ - R_۱\}$ است که $g_۲$ به زمان‌های شکست‌های رخ‌داده در بازه $[۰, t_۲)$ و همچنین $d_۱$، $d_۲$ و $R_۱$ وابسته است. بنابراین آزمایش بدین صورت است که با رسیدن به زمان t_j $(۱ \leq j \leq m)$، تعداد R_j واحد از شیءهای باقیمانده در آزمایش به تصادف انتخاب شده و از آزمایش کنار گذاشته می‌شوند، که در آن R_j یک متغیر تصادفی گسسته با تابع جرم احتمال g_j و تکیه‌گاه $\{۰, ۱, \dots, n - d_{(j)} - R_{(j-۱)}\}$ است که g_j به $\boldsymbol{D}_j$، $\boldsymbol{R}_{j-۱}$ و $\boldsymbol{Y}_{d_{(j)}}$ وابسته است.

به همین ترتیب آزمایش ادامه می‌یابد و در زمان t_m، شیءهای باقیمانده از آزمایش کنار گذاشته می‌شوند. در پایان آزمایش بردار طرح سانسور $\boldsymbol{r}_m = (r_۱, \dots, r_m)$، بردار تعداد مشاهدات رخ‌داده در بازه‌های $[t_{i-۱}, t_i)$، $(i = ۱, ۲, \dots)$ یعنی $\boldsymbol{d}_m = \{d_۱, \dots, d_m\}$ و بردار مشاهدات کل آزمایش $\boldsymbol{y}_{d_{(m)}} = \{y_۱, \dots, y_{d_{(۱)}}, y_{d_{(۱)}+۱}, \dots, y_{d_{(m)}}\}$ به‌دست می‌آیند. این طرح را سانسور فزاینده تطبیقی نوع I می‌نامیم.

توجه شود که ممکن است آزمایش قبل از رسیدن به زمان t_m خاتمه یافته باشد، یعنی قبل از اینکه به زمان t_m رسیده باشیم، تمامی n شیء آزمایش، سانسور شده باشند یا از کار افتاده باشند (مشاهده شده باشند).

به منظور خلاصه نویسی، برای n از پیش معلوم، مجموعه طرح‌های سانسور ممکن که به $\boldsymbol{d}_m$ وابسته‌اند به‌صورت

$$C^m_{n,\boldsymbol{d}_m} = \{(r_۱, \dots, r_m) \in N^m_۰; r_{(m)} = n - d_{(m)}\}$$

نمایش داده می‌شود، که در آن $N_۰ = \{۰, ۱, \dots\}$. برای $k = ۱, \dots, m - ۱$، مجموعه‌ء دنباله‌های سانسورهای ممکن تا مرحله‌ء kام به‌صورت

$$C^k_{n,\boldsymbol{d}_k} = \{(r_۱, \dots, r_k) \in N^k_۰; r_{(k)} \leq n - d_{(k)}\}$$

نمایش داده می‌شود. برای $(r_1,\ldots,r_m)\in C^m_{n,\boldsymbol{d}_m}$ نمادهای زیر تعریف می‌شود

$$\gamma_1=n \quad \text{و} \quad \gamma_j=n-d_{(j-1)}-r_{(j-1)},\quad j=2,\ldots,m.$$

توجه شود که γ_i، تعداد شیءهای باقیمانده در آزمایش، درست قبل از اولین مشاهده در بازه (t_{i-1},t_i) است. به طور مشابه، متغیرهای تصادفی متناظر Γ_1، ...، Γ_m را به‌صورت

$$\Gamma_1=n \quad \text{و} \quad \Gamma_j=n-D_{(j-1)}-R_{(j-1)},\quad j=2,\ldots,m,$$

تعریف می‌شوند و قرار می‌دهیم

$$\begin{aligned} R^{d_k}_{\le} &= \{(y_{d_{(k-1)}+1},\ldots,y_{d_{(k)}})\in R^{d_k}\,|\,t_{k-1}\le y_{d_{(k-1)}+1}\le\cdots\le y_{d_{(k)}}\le t_k\},\\ R^{d_{(k)}}_{\le} &= \{(y_1,y_2,\cdots,y_{d_{(1)}},\cdots,y_{d_{(k)}})\in R^{d_{(k)}}\,|\,t_1\le y_1\le\cdots\le y_{d_{(k)}}\le t_k\}.\end{aligned}$$

هرچند که مقادیر داده‌های بقا نامنفی هستند، اما در ادامه دامنه توزیع‌های بقا مجموعه اعداد حقیقی در نظر گرفته می‌شود و برای نشان دادن بردارها از نمادهای

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}_{d_k} &= (a_{d_{(k-1)}+1},a_{d_{(k-1)}+2},\ldots,a_{d_{(k)}}),\\ \boldsymbol{a}_{d_{(k)}} &= (a_1,a_2,\ldots,a_{d_1},\ldots,a_{d_{(k)}}),\\ \boldsymbol{a}_k &= (a_1,a_2,\ldots,a_k),\end{aligned}$$

استفاده می‌شود، که در آن $k=1,\ldots,m$. همچنین یادآور می‌شود که R_m تابعی قطعی از $R_{(m-1)}$ و $D_{(m)}$ است، یعنی

$$R_m=n-D_{(m)}-R_{(m-1)}.$$

بنابراین با معلوم بودن $D_{(m)}$ و $R_{(m-1)}$، مقدار R_m معلوم می‌شود.

فرض کنید متغیرهای تصادفی بقا دارای توزیعی مطلقاً پیوسته با تابع چگالی f و تابع توزیع F باشند. در این صورت تابع چگالی سانسور فزاینده نوع I به‌صورت

$$f(\boldsymbol{d}_m,\boldsymbol{y}_{d_{(m)}}) = \prod_{i=1}^{m}\Big\{\binom{\gamma_i}{d_i}d_i!\{\prod_{j=1}^{d_i}f(y_{d(i-1)+j})\}$$

$$\times \quad \{1 - F(t_i)\}^{r_i} I_{R^{d_i}_{\leq}}(\boldsymbol{y}_{d_i})\Big\} I_{C^{m}_{n,\boldsymbol{d}_m}}(\boldsymbol{r}_m), \qquad (1)$$

است برای جزئیات بیشتر به بالاکریشنان (۲۰۰۷) مراجعه شود. حال داریم

$$\begin{aligned}
f(\boldsymbol{d}_i, \boldsymbol{y}_{d_{(i)}}) &= \sum_{d_{i+1}, d_{i+2}, \ldots, d_m} \int_{y_{d_{(i)}+1}, \ldots, y_{d_{(m)}}} f(\boldsymbol{d}_m, \boldsymbol{y}_{d_{(m)}}) \\
&= \prod_{j=1}^{i-1} \Big\{ \binom{\gamma_j}{d_j} d_j! \{\prod_{h=1}^{d_j} f(y_{d(j-1)+h})\} \\
&\times \quad \{1 - F(t_j)\}^{r_j} I_{R^{d_h}_{\leq}}(\boldsymbol{y}_{d_h})\Big\} I_{C^{i-1}_{n,\boldsymbol{d}_i}}(\boldsymbol{r}_{i-1}) \\
&\times \quad \binom{\gamma_i}{d_i} d_i! \{\prod_{h=1}^{d_i} f(y_{d(i-1)+h})\}\{1 - F(t_i)\}^{\gamma_i - d_i} I_{R^{d_i}_{\leq}}(\boldsymbol{y}_{d_i}),
\end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned}
f(d_i, \boldsymbol{y}_{d_i} | \boldsymbol{d}_{i-1}, \boldsymbol{y}_{d_{(i-1)}}) &= \frac{f(\boldsymbol{d}_i, \boldsymbol{y}_{d_{(i)}})}{f(\boldsymbol{d}_{i-1}, \boldsymbol{y}_{d_{(i-1)}})} \\
&= \binom{\gamma_i}{d_i} d_i! \{\prod_{h=1}^{d_i} \frac{f(y_{d(i-1)+h})}{1 - F(t_{i-1})}\} \\
&\times \quad \{\frac{1 - F(t_i)}{1 - F(t_{i-1})}\}^{\gamma_i - d_i} I_{R^{d_i}_{\leq}}(\boldsymbol{y}_{d_i}).
\end{aligned}$$

بنابراین تابع چگالی توأم D_i و $\boldsymbol{Y}_{D_i}$ به شرط $\boldsymbol{D}_{i-1}$ و $\boldsymbol{Y}_{D_{(i-1)}}$ مستقل از $\boldsymbol{Y}_{D_{(i-1)}}$ است و برای $F(t_{i-1}) < 1$ با تابع چگالی نمونه‌ای تصادفی به حجم γ_i که تابع توزیع آن از سمت چپ در نقطهٔ t_{i-1} بریده شده باشد معادل است. با توجه با ساختار آزمایش و همچنین رابطه (۱) تابع چگالی توأم D_1 و $\boldsymbol{Y}_{D_1}$ به‌صورت

$$f(d_1, \boldsymbol{y}_{d_1}) = \binom{n}{d_1} d_1! \{\prod_{h=1}^{d_1} f(y_h)\}\{1 - F(t_i)\}^{n - d_1} I_{R^{d_1}_{\leq}}(\boldsymbol{Y}_{d_1}).$$

داده می‌شود. تابع جرم احتمال R_1 به شرط $\boldsymbol{Y}_{D_1} = \boldsymbol{y}_{d_1}$ و $D_1 = d_1$ با نماد $g_1(r_1 | d_1, \boldsymbol{y}_{d_1})$ و تابع جرم احتمال R_i، $(i = 2, \ldots, m)$ به شرط $\boldsymbol{Y}_{D_{(i)}} = \boldsymbol{y}_{d_{(i)}}$ و $\boldsymbol{D}_i = \boldsymbol{d}_i$، $\boldsymbol{R}_{i-1} = \boldsymbol{r}_{i-1}$ را با نماد $g_i(r_i | \boldsymbol{d}_i, \boldsymbol{y}_{d_{(i)}}, \boldsymbol{r}_{i-1})$ نمایش داده می‌شوند. بنابر تعریف سانسور فزاینده نوع I تطبیقی، تابع جرم احتمال R_m به شرط

$\boldsymbol{Y}_{D_{(m)}} = \boldsymbol{y}_{d_{(m)}}$، $\boldsymbol{D}_m = \boldsymbol{d}_m$ و $\boldsymbol{R}_{m-1} = \boldsymbol{r}_{m-1}$، یک توزیع تباهیده در نقطه $n - d_{(m)} - r_{(m-1)}$ است، یعنی

$$g_m(r_m|\boldsymbol{d}_m, \boldsymbol{y}_{d_{(m)}}, \boldsymbol{r}_{m-1}) = I_{\{n-d_{(m)}-r_{(m-1)}\}}(r_m).$$

تابع چگالی احتمال توأم $\boldsymbol{R}_i$، $\boldsymbol{D}_i$ و $\boldsymbol{Y}_{D(i)}$ به‌صورت

$$\begin{aligned}
f(\boldsymbol{d}_i, \boldsymbol{y}_{d(i)}, \boldsymbol{r}_i|\boldsymbol{t}_i) &= g_i(r_i|(\boldsymbol{d}_i, \boldsymbol{y}_{d(i)}, \boldsymbol{r}_{i-1}, \boldsymbol{t}_i) f(d_i, \boldsymbol{y}_{d_i}|\boldsymbol{d}_{i-1}, \boldsymbol{y}_{d(i-1)}, \boldsymbol{r}_{i-1}, \boldsymbol{t}_i) \\
&\times f(\boldsymbol{d}_{i-1}, \boldsymbol{y}_{d(i-1)}, \boldsymbol{r}_{i-1}|\boldsymbol{t}_{i-1}) \\
&= \prod_{j=1}^{i} g_j(r_j|\boldsymbol{d}_j, \boldsymbol{y}_{d(j)}, \boldsymbol{r}_{j-1}, \boldsymbol{t}_j) I_{C^i_{n,\boldsymbol{d}_i}}(\boldsymbol{r}_i) \\
&\times \prod_{j=1}^{i-1} \Big\{ \binom{\gamma_j}{d_j} d_j! \{\prod_{h=1}^{d_j} f(y_{d(j-1)+h})\} \\
&\times \{1 - F(t_j)\}^{r_j} I_{R^{d_h}_{\leq}}(\boldsymbol{y}_{d_h}) \Big\} I_{C^{i-1}_{n,\boldsymbol{d}_i}}(\boldsymbol{r}_{i-1}) \\
&\times \binom{\gamma_i}{d_i} d_i! \{\prod_{h=1}^{d_i} f(y_{d(i-1)+h})\}\{1 - F(t_i)\}^{\gamma_i - d_i} I_{R^{d_i}_{\leq}}(\boldsymbol{y}_{d_i}) \\
&= g_i^*(\boldsymbol{r}_i|\boldsymbol{d}_i, \boldsymbol{y}_{d(i)}) f_i^*(\boldsymbol{y}_{d(i)}, \boldsymbol{d}_i|\boldsymbol{r}_{i-1}), \qquad (2)
\end{aligned}$$

است، که در آن $f_1^*(\cdot|r_0) = f_1$. توجه شود که $f_i^*(\cdot|r_{i-1})$ با تابع چگالی کناری سانسور فزاینده نوع I با طرح سانسور $\boldsymbol{r}_{i-1} \in C^{i-1}_{n,\boldsymbol{d}_{i-1}}$ دقیقاً برابر است و

$$\sum_{\boldsymbol{d}_i} \int_{R^{d_i}_{\leq}} f_i^*(\boldsymbol{y}_{d(i)}, \boldsymbol{d}_i|\boldsymbol{r}_{i-1}) = 1, \quad \sum_{\boldsymbol{r}_i} g_i^*(\boldsymbol{r}_i|\boldsymbol{d}_i, \boldsymbol{y}_{d(i)}) = 1.$$

مثال ۱ : فرض کنید $\boldsymbol{s}_m = (s_1, \ldots, s_m)$ طرح سانسور فزاینده نوع I معمولی باشد که در آن $\sum_{i=1}^m s_i = n$، با قرار دادن

$$\begin{aligned}
g_j(r_j|\boldsymbol{d}_j, \boldsymbol{y}_{d(j)}, \boldsymbol{r}_{j-1}, \boldsymbol{t}_j) &= \{I_{\{s_j\}}(r_j) \times I_{\{0,1,\ldots,\gamma_j - d_j\}}(s_j)\} \\
&+ \{I_{\{\gamma_j - d_j\}}(r_i) \times I_{\{\gamma_j - d_j + 1, \gamma_j - d_j + 2, \ldots\}}(s_j)\}
\end{aligned}$$

در رابطه (۲) سانسور فزاینده نوع I معمولی حاصل می‌شود. بنابراین زیر مدلی از سانسور فزاینده نوع I تطبیقی است و تابع چگالی آن به‌صورت زیر است

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{d}_m, \boldsymbol{y}_{d(m)}, \boldsymbol{r}_m | \boldsymbol{t}_m) &= \prod_{i=1}^{m} \Big\{ \binom{\gamma_i}{d_i} d_i! \{ \prod_{j=1}^{d_i} f(y_{d(i-1)+j}) \} \\ &\times \{1 - F(t_i)\}^{r_i} I_{R_{\leq}^{d_i}}(Y_{d_i}) \Big\} I_{C^m_{n,\boldsymbol{d}_m}}(\boldsymbol{r}_m) \\ &\times \prod_{i=1}^{m} \Big\{ \{ I_{\{s_j\}}(r_j) \times I_{\{0,1,\ldots,\gamma_j - d_j\}}(s_j) \} \\ &+ \{ I_{\{\gamma_j - d_j\}}(r_i) \times I_{\{\gamma_j - d_j + 1, \ldots\}}(s_j) \} \Big\}. \end{aligned}$$

مثال ۲ : سانسور فزاینده نوع I با حذف تصادفی. در این نوع از سانسور فزاینده نوع I تعداد شیءهایی که می‌بایست سانسور شوند، از یک توزیع گسسته پیروی می‌کنند که از $\boldsymbol{Y}_{D_{(m)}}$ و $\boldsymbol{T}$ مستقل هستند. با انتخاب g_m^* به‌صورت

$$g_m^*(\boldsymbol{r}_m | \boldsymbol{d}_m, \boldsymbol{y}_{d(m)}) = g_m^*(\boldsymbol{r}_m | \boldsymbol{d}_m) = \prod_{i=1}^{m} \Big\{ g_i(r_i | \boldsymbol{d}_i, \boldsymbol{r}_{i-1}) I_{C^i_{n,\boldsymbol{d}_i}}(\boldsymbol{R}_i) \Big\},$$

دیده می‌شود که سانسور فزاینده نوع I با حذف تصادفی، یک زیر مدل از سانسور فزاینده نوع I تطبیقی است. واضح است که برای مشخص کردن g_i انتخاب‌های بسیار زیادی وجود دارد و انتخاب آن وابسته به ماهیت مسئله و نظر آزمایشگر است و می‌تواند بر زمان اتمام آزمایش و همچنین استنباط در مورد پارامترهای جامعه تاثیر بگذارد.

۳ نتایج توزیعی پایه

در سانسور فزایندهٔ نوع I معمولی با طرح سانسور $\boldsymbol{r}_m$ (که $\sum_{i=1}^{m} r_i \leq n$) توزیع حاشیه‌ای $\boldsymbol{D}_i$ و $\boldsymbol{Y}_{D_{(i)}}$ مستقل از $(r_i, \ldots, r_m)$ است. بدیهی است که توزیع $(\boldsymbol{Y}_{D_{i+1}}, \boldsymbol{Y}_{D_{i+2}}, \ldots, \boldsymbol{Y}_{D_m})$ و $(D_{i+1}, \ldots, D_m)$ به شرط $\boldsymbol{D}_i = \boldsymbol{d}_i$، $\boldsymbol{Y}_{D_{(i)}} = \boldsymbol{y}_{d(i)}$ همانند $\boldsymbol{D}_{(m)} - \boldsymbol{D}_{(i)}$ رخداد اول در آزمایشی است که با $\gamma_{i+1} = n - r_{(i)} - d_{(i)}$ واحد آغاز به کار کرده و در زمان‌های $(t_{i+1}, \ldots, t_m)$ با

طرح سانسور $(r_{i+1},\ldots,r_m)$ و توزیع از چپ بریده شده در نقطه t_i، یعنی

$$f(d_{i+1},\ldots,d_m,\boldsymbol{y}_{d_{i+1}},\ldots,\boldsymbol{y}_{d_m}|\boldsymbol{d}_i,\boldsymbol{y}_{d_{(i)}})=\prod_{j=i+1}^{m}\Big\{\binom{\gamma_j}{d_j}d_j!\{\prod_{h=1}^{d_j}\frac{f(y_{d(j-1)+h})}{1-F(t_i)}\} \times\{\frac{1-F(t_j)}{1-F(t_i)}\}^{r_j}I_{R_{\le}^{d_j}}(y_{d_j})\Big\},$$

باید سانسور صورت پذیرد.

قضیه ۱ : توزیع احتمال $(\boldsymbol{Y}_{D_{i+1}},\ldots,\boldsymbol{Y}_{D_m})$ و $(D_{i+1},\ldots,D_m)$ و $(R_{i+1},\ldots,R_m)$ به شرط $(\boldsymbol{Y}_{D_{(i)}},\boldsymbol{D}_i,\boldsymbol{R}_i)=(\boldsymbol{y}_{d_{(i)}},\boldsymbol{d}_i,\boldsymbol{r}_i)$ همانند توزیع احتمال توأم $\boldsymbol{R}_{m-i}$، $\boldsymbol{D}_{m-i}$ و $\boldsymbol{Y}_{D_{(m)}-D_{(i)}}$ است، با این تفاوت که توزیع اصلی آن در نقطهء t_i از چپ بریده شده است، با حجم نمونه γ_{i+1} و g_iهایی که به $\boldsymbol{r}_i$، $\boldsymbol{d}_i$ و $\boldsymbol{y}_{d_{(i)}}$ وابسته‌اند.

برهان : با توجه به رابطه (۲) تساوی زیر را داریم

$$f(y_{d_{i+1}},\ldots,y_{d_m},d_{i+1},\ldots,d_m,r_{i+1},\ldots,r_m|\boldsymbol{y}_{d_i},\boldsymbol{d}_i,\boldsymbol{r}_i)=\frac{f(\boldsymbol{d}_m,\boldsymbol{y}_{d_{(m)}},\boldsymbol{r}_m|\boldsymbol{t}_m)}{f(\boldsymbol{d}_i,\boldsymbol{y}_{d_{(i)}},\boldsymbol{r}_i|\boldsymbol{t}_i)}.$$

همچنین داریم

$$\frac{f(\boldsymbol{d}_m,\boldsymbol{y}_{d(m)},\boldsymbol{r}_m|\boldsymbol{t}_m)}{f(\boldsymbol{d}_i,\boldsymbol{y}_{d_{(i)}},\boldsymbol{r}_i|\boldsymbol{t}_i)}=\prod_{j=i+1}^{m}\binom{\gamma_j}{d_j}d_j!\{\prod_{h=1}^{d_j}\frac{f(y_{d(j-1)+h})}{1-F(t_i)}\} \times\{\frac{1-F(t_j)}{1-F(t_i)}\}^{r_j}I_{R_{\le}^{d_j}}(y_{d_j}) \times\prod_{j=i+1}^{m}g_i(r_i|\boldsymbol{d}_i,\boldsymbol{y}_{d_i},\boldsymbol{r}_{i-1})I_{C^{m-i}_{\gamma_{i+1},d_{i+1},\ldots,d_m}}(r_{i+1},\ldots,r_m).$$

قضیه ۲ : به‌ازای هر i $(1\le i\le m)$ اگر γ_i-d_i برابر با صفر باشد، آنگاه، $g_i(r_i=0|\boldsymbol{d}_i,\boldsymbol{y}_{d_{(i)}},\boldsymbol{r}_{i-1})=1$، یعنی به ازای هر $j\ge i$، g_j یک توزیع تباهیده در نقطه صفر است.

برهان : با توجه به اینکه تکیه‌گاه متغیر تصادفی R_j برابر $\{0,\ldots,\gamma_j-d_j\}$ است، اثبات بدیهی است.

توجه شود که در رابطه (۲) اگر d_iها معلوم باشند، آنگاه R_iها و Γ_iهامی‌توانند از یکدیگر حاصل شوند. بنابراین می‌توان به‌جای R_iها از Γ_iها

استفاده نمود و در رابطه (۲) به‌جای $f(d_i, \boldsymbol{y}_{d_i}|\boldsymbol{d}_{i-1}, \boldsymbol{y}_{d_{(i-1)}}, \boldsymbol{r}_{i-1}, \boldsymbol{t}_i)$ می‌توان از $g_i(r_i|\boldsymbol{d}_i, \boldsymbol{y}_{d_{(i)}}, \boldsymbol{r}_{i-1}, \boldsymbol{t}_i)$ و به‌جای $\tilde{f}(d_i, \boldsymbol{y}_{d_i}|\boldsymbol{d}_{i-1}, \boldsymbol{y}_{d_{(i-1)}}, \gamma_i, \boldsymbol{t}_i)$ می‌توان از $\tilde{g}_i(\gamma_i|\boldsymbol{d}_{i-1}, \boldsymbol{y}_{d_{(i-1)}}, \gamma_{i-1}, \boldsymbol{t}_{i-1})$ استفاده کرد. قرار می‌دهیم

$$\tilde{C}^m_{n,\boldsymbol{d}_m} = \{(\gamma_1, \ldots, \gamma_m) \in N^m_0; 0 \leq \gamma_{j+1} \leq \gamma_j - d_j, j = 1, \ldots, m-1\},$$

که در آن $N_0 = \{0, 1, \ldots\}$ و $\gamma_1 = n$. بنابراین تابع چگالی توأم $\boldsymbol{D}_m$، $\boldsymbol{Y}_{D_{(m)}}$ و $\boldsymbol{\Gamma}_m$ به‌صورت

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{d}_m, \boldsymbol{y}_{d(m)}, \gamma_m|\boldsymbol{t}_m) &= \prod_{i=1}^{m} \tilde{f}(d_i, \boldsymbol{y}_{d_i}|\boldsymbol{d}_{i-1}, \boldsymbol{y}_{d_{(i-1)}}, \gamma_i, \boldsymbol{t}_i) I_{R^{d_{(m)}}_{\leq}}(\boldsymbol{y}_{d_{(m)}}) \\ &\times \prod_{i=1}^{m} \tilde{g}_i(\gamma_i|\boldsymbol{d}_{i-1}, \boldsymbol{y}_{d_{(i-1)}}, \gamma_{i-1}, \boldsymbol{t}_{i-1}) I_{\tilde{C}^m_{n,\boldsymbol{d}_m}}(\gamma_m). \end{aligned}$$

می‌شود. واضح است که در سانسور فزاینده نوع I معمولی چگالی D_{i+1} و $\boldsymbol{Y}_{D_{i+1}}$ به شرط $\boldsymbol{D}_i$ و $\boldsymbol{Y}_{D_{(i)}}$، مستقل از $\boldsymbol{D}_i$ و $\boldsymbol{Y}_{D_{(i)}}$ می‌باشد.

قضیه ۳ : اگر $k = 1, 2, \ldots$ وجود داشته باشد به طوری که تابع جرم Γ_i حداکثر به $\boldsymbol{Y}_{D_{(i-1)}-D_{(i-k)}}$ و $(D_{i-k}, \ldots, D_{i-1})$ و $(\Gamma_{i-k}, \ldots, \Gamma_{i-1})$ وابسته باشد، آنگاه متغیرهای تصادفی D_i، $\boldsymbol{Y}_{D_i}$ و Γ_i از خاصیت مارکوفی k تایی پیروی می‌کنند.

برهان : براساس محدودیت‌های ذکر شده در قضیه ۳ تساوی

$$\begin{aligned} \tilde{g}_i(\gamma_i|\boldsymbol{d}_{i-1}, \boldsymbol{y}_{d_{(i-1)}}, \gamma_{i-1}) = \tilde{g}_i(\gamma_i|&D_{i-k}, \ldots, D_{i-1}, \boldsymbol{Y}_{D(i-1)-D(i-k)}, \\ &\Gamma_{i-k}, \ldots, \Gamma_{i-1}). \end{aligned}$$

برقرار است. همچنین با توجه به اینکه در سانسور فزاینده نوع I معمولی، $\boldsymbol{Y}_{D_i}$ و D_i تواماً مستقل از $\boldsymbol{Y}_{D_{(i-1)}}$ و $\boldsymbol{D}_{i-1}$ هستند، نتیجه حاصل می‌شود.

مثال ۳ : سانسورهای فزاینده نوع I معمولی و با حذف تصادفی دارای خاصیت زنجیر مارکوف با $k = 1$ هستند، یعنی تابع جرم احتمال Γ_i در این دو نوع سانسور تنها به Γ_{i-1} و D_{i-1} وابسته می‌باشد.

فرض کنید که توزیع احتمال متغیرهای بقا، F با پارامتر نامعلوم و $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_k) \in \Theta$ باشد، تابع درستنمایی برای داده‌های سانسور فزاینده نوع I

تطبیقی با استفاده از رابطه (۲) به‌صورت

$$\begin{aligned} L(\theta|\boldsymbol{d}_m, \boldsymbol{y}_{d_{(m)}}, \boldsymbol{r}_m, \boldsymbol{t}_m) &= f_\theta(\boldsymbol{d}_m, \boldsymbol{y}_{d_{(m)}}, \boldsymbol{r}_m|\boldsymbol{t}_m) \\ &= f^*_m(\boldsymbol{y}_{d(m)}, \boldsymbol{d}_m|\boldsymbol{r}_{m-1}) g^*_m(\boldsymbol{r}_m|\boldsymbol{d}_m, \boldsymbol{y}_{d(m)}) \end{aligned}$$

است. در نتیجه می‌توان نوشت

$$L(\theta|\boldsymbol{d}_m, \boldsymbol{y}_{d_{(m)}}, \boldsymbol{r}_m, \boldsymbol{t}_m) \propto f^*_m(\boldsymbol{y}_{d_{(m)}}, \boldsymbol{d}_m|\boldsymbol{r}_{m-1}),$$

که از آن قضیه زیر نتیجه می‌شود.

قضیه ۴ : فرض کنید $(\boldsymbol{y}_{d_{(m)}}, \boldsymbol{d}_m, \boldsymbol{r}_m)$ بردار مشاهدات از متغیر تصادفی $(\boldsymbol{Y}_{D_{(m)}}, \boldsymbol{D}_m, \boldsymbol{R}_m)$ باشد، اینکه به چه طریقی R_iها انتخاب شده‌اند (یعنی اینکه g_i ها به هر صورتی که باشند) تأثیری بر روی برآوردگر درستنمایی ماکسیمم ندارد و برآوردگر درستنمایی سانسور فزاینده نوع I تطبیقی همانند برآوردگر درستنمایی سانسور فزاینده نوع I معمولی است که در آن از طرح سانسور $\boldsymbol{r}_m$ استفاده شده باشد.

قضیه ۴ برای آزمون درستنمایی فرضیه‌های مربوط به θ و اطلاع فیشر نیز صادق است.

مثال ۴ : فرض کنید ۱۰ شیء، که متغیر طول عمر آنها از توزیع نمایی با میانگین نامعلوم θ پیروی می‌کنند در آزمایش قرار داده شده‌اند و از سانسور فزاینده نوع I تطبیقی با $m = ۳$، $g_۱$، $g_۲$ و $g_۳$ معلوم استفاده شود. در پایان آزمایش دیده شده است که $R_۱ = r_۱$، $R_۲ = r_۲$ و $R_۳ = r_۳$ و نیز چهار مشاهده $y_۱$، $y_۲$، $y_۳$ و $y_۴$ رخ داده‌اند. با استفاده از قضیه ۴ برآوردگر درستنمایی ماکسیمم θ برابر با برآوردگر درستنمایی ماکسیمم آزمایش سانسور فزاینده نوع I معمولی است که در آن از طرح $\boldsymbol{r}_۳ = (r_۱, r_۲, r_۳)$ استفاده شده باشد. بنابراین

$$MLE(\theta) = \frac{\sum_{i=۱}^{۴} y_i + \sum_{i=۱}^{۳} r_i t_i}{۴}.$$

با توجه به بخش ۱، سانسور فزاینده نوع I معمولی به دلیل نواقصی که دارد، نظر صنعتگران و پژوهشگران را نتوانسته است به خود معطوف کند. در ادامه نشان داده

می‌شود که این نواقص و ایرادات بر سانسور فزاینده نوع I تطبیقی وارد نمی‌باشد. در واقع با انتخاب g_iهای مناسب می‌توان بر این نواقص غلبه نمود و اگر به ازای هر g_i این نواقص باز هم در سانسور فزاینده نوع I تطبیقی رخ دهند، به دلیل ضعف مدل نیست بلکه محدودیت ایجاد شده یعنی t_m در حالت ناسازگار با آزمایش است. برای رفع دوتا از نقایص سانسور فزاینده نوع I که در ادامه می‌آید، g_iهایی معرفی شده و در مطالعه‌ای شبیه‌سازی کارآیی آن‌ها نشان داده خواهد شد. با سانسور فزاینده نوع I، دو مورد را می‌توان نام برد.

۱- اغلب اتفاق می‌افتد که آزمایش در زمانی پیش از زمان t_m به پایان می‌رسد و حتی تا مرحله آخر نیز ادامه پیدا نمی‌کند.

۲- ممکن است تعداد رخدادها کم یا حتی صفر باشد که برای برآورد پارامتر مورد نظر جامعه مناسب به نظر نمی‌رسد.

در ادامه نشان داده می‌شود که می‌توان با انتخاب g_iهابه یکی از صورت‌های

$$\begin{aligned} g_{i1}(r_i) &= I_{\{s_i\}}(r_i)I_{[1,\infty)}(d_i) + I_{\{0\}}(r_i)I_{\{0\}}(d_i) \\ g_{i2}(r_i) &= I_{\{s_i\}}(r_i)I_{[1,s_i)}(d_i) + I_{\{0\}}(r_i)I_{\{0,[s_i,\infty)\}}(d_i). \end{aligned} \tag{3}$$

احتمال وقوع دو ایراد بالا را به حداقل برساند. وقتی در بازه iام اتفاقی رخ ندهد و $r_i = 0$ یا زمانی که شکستی مشاهده شود و $r_i = s_i$، در این‌صورت $g_{i1}(r_i) = 1$. این کار باعث می‌شود که نرخ شکست و احتمال رخ‌دادن شکست کاهش نیابد.

۴ مطالعه شبیه‌سازی

در این بخش در مطالعه‌ای عملکرد سانسور فزاینده نوع I تطبیقی با نوع معمولی ا مقایسه می‌شود. برای این منظور فرض شده است طول عمر شیءها از توزیع نمایی با میانگین ۲۰ پیروی می‌کند و برای سادگی تابع g_{i1} داده شده در (۳) را برای سانسور فزاینده نوع I تطبیقی در نظر گرفته‌ایم. نمونه تصادفی با اندازهٔ $n = 20, 35, 50, 100$ به روش مونت‌کارلو از توزیع نمایی با میانگین ۲۰ تولید شده‌اند. تعداد مراحل سانسور، m، طرح‌های مختلف برداشت $\boldsymbol{r}$ و بردارهای متفاوتی از زمان سانسور $\boldsymbol{t}$ متناسب با اندازه نمونه n انتخاب شده‌اند. در کل ۱۰

جدول ۱: طرح‌های سانسور انتخاب شده

t	r	m	n	P
۱،۵،۸،۱۲،۲۱	۵،۴،۳،۳،۲	۵	۲۰	$P_۱$
۱،۲،۳/۵،۴/۸،۶/۴،۸/۴،۱۰/۸،۱۴،۱۹/۲،۲۹	۲،۲،۳،۱،۲،۰،۰،۰،۵،۵	۱۰	۲۰	$P_۲$
۱،۲،۳/۵،۴/۸،۶/۴،۸/۴،۱۰/۸،۱۴،۱۹/۲،۲۹	۳،۳،۳،۳،۳،۳،۲،۲،۲،۲	۱۰	۳۵	$P_۳$
۱،۲،۱۲،۱۲،...،۱۲،۳۵	۵،۵،۵،۰،...،۰،۵	۱۵	۳۵	$P_۴$
۱،۲،۳/۵،۴/۸،۶/۴،۸/۴،۱۰/۸،۱۴،۱۹/۲،۲۹	۱۰،۱۰،۵،۵،۰،...،۰	۱۰	۵۰	$P_۵$
۱،۲،۳/۴،۲۰،...،۲۰،۲۵،۳۰	۵،۵،۵،۱۰،۵،۰،...،۰،۵،۵	۲۰	۵۰	$P_۶$
۱،۲،۳/۴،۱۵،...،۱۵،۳۰	۱۵،۱۰،۵،۵،۰،...،۰	۳۰	۵۰	$P_۷$
۱،۲،۳/۵،۴/۸،۶/۴،۸/۴،۱۰/۸،۱۴،۱۹/۲،۲۹	۲۰،۱۵،۱۰،۵،۰،...،۰،۱۰	۱۰	۱۰۰	$P_۸$
۱،۲،۳/۵،۲۰،...،۲۰،۲۵،۳۰	۱۰،۱۰،۱۰،۱۰،۰،...،۰،۱۰،۱۰	۲۰	۱۰۰	$P_۹$
۱،۲،۳/۵،۴/۸،۶/۴، ۱۸،...،۱۸،۲۵،۳۰	۱۰،۲۰،۵،۵،۵،۵،۰،...،۰،۲۰،۱۰	۳۰	۱۰۰	$P_{۱۰}$

طرح در نظر گرفته شده و با نمادهای $P_۱$ تا $P_{۱۰}$ در جدول ۱ ارائه شده‌اند. هر طرح $۱۰^۴$ بار تکرار شده و در هر مرحله متوسط زمان اتمام آزمایش به‌علاوه تعداد آزمایش‌هایی که به مرحله آخر رسیده و در زمان t_m سانسور شده‌اند، محاسبه و در جدول ۲ ارائه شده‌اند. در اینجا نمادهای $\bar{y}$ برای میانگین زمان اتمام آزمایش بر اساس سانسور فزاینده نوع I، $\bar{y}^*_{g۱}$ برای میانگین زمان اتمام آزمایش بر اساس سانسور فزاینده نوع I تطبیقی با استفاده از طرح سانسور $g_{i۱}$ ، $\bar{y}_m$ برای میانگین تعداد آزمایشاتی که به مرحله mام رسیده‌اند و در زمان t_m بر اساس سانسور فزاینده نوع I سانسور شده‌اند، $\bar{y}^*_{mg۱}$ برای میانگین تعداد آزمایشاتی که به مرحله mام رسیده‌اند و در زمان t_m بر اساس سانسور فزاینده نوع I تطبیقی با استفاده از طرح سانسور $g_{i۱}$ سانسور شده‌اند، $\bar{\boldsymbol{R}}$ برای میانگین تعداد شیء‌های سانسور شده در هر آزمایش بر اساس سانسور فزاینده نوع I و $\bar{\boldsymbol{R}}^*_{g۱}$ و میانگین تعداد شیء‌های سانسور شده در هر آزمایش بر اساس سانسور فزاینده نوع I تطبیقی با استفاده از طرح سانسور $g_{i۱}$ استفاده شده‌اند.

همان‌طور که در جدول ۲ ملاحظه می‌شود طرح معرفی شده میانگین زمان اتمام آزمایش را به زمان مطلوب اتمام آزمایش نزدیک کرده، میانگین تعداد آزمایشاتی که به مرحله mام رسیده‌اند و در زمان t_m سانسور شده‌اند و میانگین تعداد شیء‌های سانسور شده در هر آزمایش را افزایش داده است.

جدول ۲: نتایج شبیه‌سازی طرح‌های جدول ۱

$\bar{R}^*_{g1}$	$\bar{R}$	$\bar{y}^*_{mg1}$	$\bar{y}_m$	$\bar{y}^*_{g1}$	$\bar{y}$	P
۷/۲۶۶	۵/۳۴۸	۰/۷۱۸	۰/۲۵۹	۱۸/۹۹	۱۵/۴۳۱	P_1
۹/۶۵۳	۶/۹۴۰	۰/۴۴۷	۰/۰۴۲	۲۵/۷۴	۲۲/۰۱	P_2
۱۴/۵۵۳	۱۱/۳۷۵	۰/۷۵۱	۰/۲۶۲	۲۶/۹۱	۲۱/۰۸	P_3
۱۹/۰۸۳	۱۷/۳۶۲	۰/۹۴۵	۰/۹۳۴	۳۴/۶۹	۳۴/۵۹	P_4
۱۹/۳۴۲	۱۶/۲۱۵	۰/۹۸۷	۰/۹۸۶	۲۸/۹۴	۲۸/۹۴	P_5
۲۴/۸۰۷	۲۲/۸۶۸	۰/۶۷۶	۰/۰۹۳	۲۶/۸۲	۱۹/۸۱	P_6
۱۶/۹۶۸	۱۳/۵۴۱	۰/۸۱۱	۰/۷۳۵	۲۷/۹۱	۲۷/۱۲	P_7
۴۰/۳۴۵	۳۹/۶۵۱	۱	۱	۲۹	۲۹	P_8
۴۵/۶۹۲	۴۵/۵۰۸	۱	۰/۹۹۹	۲۰	۱۹/۹۹	P_9
۴۰/۲۵۸	۳۹/۶۷۱	۰/۰۱۸	۰/۰۰۱	۲۷/۸۴	۲۷/۷۶	P_{10}

برای مقایسه میزان خطای برآورد پارامتر جامعه تحت دو طرح سانسور، پارامتر θ در توزیع نمایی مطابق اطلاعات جدول ۱ برآورد شده و متوسط توان دوم خطای برآوردگرها در جدول ۳ ارائه شده‌اند. $\hat{\theta}$، برآورد تجربی بر اساس سانسور فزاینده نوع I، $\hat{\theta}^*_{g1}$ برآورد تجربی بر اساس سانسور فزاینده نوع I تطبیقی با استفاده از طرح سانسور g_{i1}، $MSE(\hat{\theta})$ میانگین توان‌های دوم خطای تجربی برآورد بر اساس سانسور فزاینده نوع I، $MSE(\hat{\theta}^*_{g1})$ میانگین توان‌های دوم خطای تجربی برآورد، بر اساس سانسور فزاینده نوع I تطبیقی با استفاده از طرح سانسور g_{i1} است.

جدول ۳: متوسط توان دوم خطای برآوردگرها

$MSE(\hat{\theta}^*_{g1})$	$MSE(\hat{\theta})$	$\hat{\theta}^*_{g1}$	$\hat{\theta}$	P
۱۹۱/۱۹	۳۰۴/۴۰	۲۰/۹۶	۲۲/۵۷	P_1
۱۵۹/۱۲	۲۳۲/۸۸	۲۰/۵۳	۲۱/۷۸	P_2
۱۳۶/۲۳	۱۵۷/۷۷	۲۰/۳۱	۲۰/۷۳	P_3
۱۲۷/۲۵	۱۳۴/۶۳	۲۰/۲۱	۲۰/۴۱	P_4
۱۲۵/۹۱	۱۳۸/۶۳	۲۰/۱۵	۲۰/۵۲	P_5
۱۲۲/۰۸	۱۲۸/۵۲	۲۰/۲۳	۲۰/۴۵	P_6
۱۳۰/۲۲	۱۴۲/۰۱	۲۰/۱۶	۲۰/۶۱	P_7
۱۱۴/۰۹	۱۱۴/۴۹	۲۰/۱۷	۲۰/۱۸	P_8
۱۱۴/۶۸	۱۱۵/۳۶	۲۰/۲۵	۲۰/۲۸	P_9
۱۱۵/۴۵	۱۱۶/۷۶	۲۰/۲۴	۲۰/۲۸	P_{10}

همان‌طور که در جدول ۳ ملاحظه می‌شود در تمامی موارد طرح معرفی شده برآورد تجربی دقیق‌تری دارد و میانگین توان‌های دوم خطای تجربی آن کمتر است.

بحث و نتیجه‌گیری

ملاحظه شد که طرح سانسور فزاینده نوع I تطبیقی نسبت به نوع معمولی دارای تعداد سانسور شده‌های بیشتر است. درصد تعداد آزمایشاتی که به مرحله آخر رسیده و در زمان t_m سانسور داشته‌اند افزایش یافته است. همچنین میانگین زمان اتمام آزمایش به مقدار t_m نزدیک شده است. به‌علاوه میانگین توان‌های دوم خطای برآوردگر بر اساس طرح جدید نیز کاهش یافته است. بنابراین طرح سانسور فزاینده نوع I تطبیقی بر طرح سانسور فزاینده نوع I معمولی برتری دارد. توجه شود که، اگر در آزمایش از g_{i1} استفاده شود و تا پایان آزمایش هیچ شکستی مشاهده نشود، این از ضعف مدل نیست. بلکه با توجه به نحوه عملکرد g_{i1} زمان رخداد اولین آماره ترتیبی، بعد از زمان t_m بوده است و این ایراد بر محدودیت ایجاد شده برای آزمایش وارد است.

تقدیر و تشکر

نویسندگان از پیشنهادات ارزنده داوران گرامی و هیئت تحریریه محترم مجله که باعث ارائه بهتر و بهبود مقاله شده است، کمال تشکر را دارند. همچنین از حمایت قطب علمی داده‌های ترتیبی و فضایی دانشگاه فردوسی مشهد تشکر می‌شود.

مراجع

ایزانلو، م.، حبیبی‌راد، آ. (۱۳۸۸)، برآورد پارامترهای توزیع نمایی تعمیم یافته دو پارامتری تحت سانسور هیبرید واحد شده، مجله علوم آماری، جلد **۳**، ۱۶-۱.

Balakrishnan, N. and Aggarwala, R. (2000), *Progressive Censoring: Theory, Methods and Applications*, Birkhauser, Boston.

Balakrishnan, N. (2007), Progressive Censoring Methodology: An Appraisal (with discussions), *Test*, **16**, 211-296.

Balakrishnan, N. and Burkschat, M. and Cramer, E. and Hofman, G. (2008), Fisher Information Based Progressive Censoring Plans, *Computational Statistics and Data Analysis*, **53**, 366-380.

Bairamov, I. and Parsi, S. (2011), On Flexible Progressive Censoring, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **235**, 4537-4544.

Burkschat, M. and Cramer, E. and Kamps, U. (2006), On Optimal Schemes in Progressive Censoring, *Statistics and Probability Letters*, **76**, 1032-1036.

Burkschat, M. (2008), On Optimality of Extremal Schemes in Progressive Type-II Censoring, *Journal of Statistical Planing and Infrence*, **138**, 1647-1659.

Cohen. A. C. (1963), Progressively Censored Samples in Life Testing, *Technometrics*, **5**, 327-329.

Cramer, E. and Kamps, U. (2001), Estimation with Sequential Order Statistics from Exponential Disterbutions, *Annals of the Institue of Statical Mathematics*, **53**, 307-324.

Cramer, E. and Iliopoulos, G. (2010), Adaptive Progressive Type-II Censoring, *Test*, **19**, 342-358.

Herd, R. G. (1956), Estimation of Parameters of a Population from a multi-Censored Sample. PhD Thesis, Iowa State College, Ames, Iowa.

Ng, H. K. T., Kundu, D. and Chan, P. S. (2009), Statistical of Analysis of Exponential Lifetimes under an Adaptive Type-II Progressive Censoring Scheme, *Naval Research logistics*, **56**, 687-698.