



On Properties of a New Generalization of the Log-Logistic Distribution and Its Application

Shafaei Noughabi, M.¹ , Khorashadizadeh, M.² 

¹Department of Mathematics and Statistics, University of Gonabad, Iran.

²Department of Statistics, University of Birjand, Iran.

Corresponding author: M. Shafaei Noughabi, mohamad.shafaei@gmail.com

Received: 16/12/2024 **Revised:** 6/3/2025 **Accepted and Published Online:** 8/3/2025.

Introduction

Recent developments in distribution theory emphasize the problems researchers face and propose different models so that lifetime datasets can be better evaluated and studied in various application domains. In other words, there is a need to introduce applicable models to better study natural phenomena. An essential goal for proposing, extending, or generalizing (models or their classes) is to explain how life expectancy occurs in physics, computer science, insurance, health care, medicine, engineering, biology, industry, communications, etc. The well-known and basic distributions, such as the log-logistic, exponential, Rayleigh, Weibull, and Gamma distributions, are very limited in their properties and need more flexibility. Log-logistic distribution plays a significant role in various fields due to its flexibility in modeling lifetime data and its ability to account for diverse real-world phenomena. Its widespread applications span reliability analysis, survival studies, and economic modeling, demonstrating its importance in theoretical and practical contexts. However, despite its utility, the standard log-logistic distribution lacks the adaptability required to address more complex datasets or emerging challenges in modern applications. This underscores the necessity of proposing generalized versions that extend its capabilities. In this work, we introduce a novel extension of the log-logistic distribution that enhances its flexibility, allowing for more accurate and practical applications across various domains.

Material and Methods

In this paper, we introduced a new extension of the log-logistic distribution

with three parameters, and many of its features, including central moments, failure rate function, mean residual life function, p-quantile residual life function, and properties of stochastic random, etc., were investigated and presented. Also, the parameters of this new distribution were estimated using LLP and maximum likelihood methods and compared using simulation and bootstrap. Finally, application of the new distribution to two real data sets were studied.

Results and Discussion

The statistical and reliability indices became more flexible by adding a third parameter to the log-logistic distribution (named θ). As θ increased, the mean and median indices shifted to the right, the distribution shape became more symmetrical, and its kurtosis decreased. As θ increased, the k th moment of the distribution and the quantile also increased. In addition, it was shown that the failure rate function in this distribution was unimodal, and the behavior of the mean remaining life function, failure rate, and quantile function was further investigated by plotting the graph. The simulation shows that the values of biased and MSE decrease with n , implying that the ML and LLP estimators are consistent, and the small values of biased and MSE show that both methods are suitable for real-world problems.

Conclusion

The new generalized version of the LL model is useful when the LLP has an increasing concave curve, and the HR function is unimodal. The MLE and LLP estimators are discussed, and their behavior is examined in a simulation study. Simulation results show that both estimators are consistent and estimate the parameters efficiently. An application to reliability data demonstrates the relevance and versatility of the proposed model.

Keywords: Log-logistic distribution, Reliability, Hazard rate, Lifetime data.

Mathematics Subject Classification (2010): 60E05, 62P30.



©The Author(s). The Publisher is Iranian Statistical Society.

This is an open access article distributed under the terms and conditions of [CC BY-NC 4.0](https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/).

معرفی یک تعمیم جدید از توزیع لگ-لوژستیک، ویژگی‌ها و کاربرد آن

محمد شفاعی نوقابی^۱، محمد خراشادی زاده^۲

^۱ گروه ریاضی و آمار، مجتمع آموزش عالی گناباد

^۲ گروه آمار، دانشگاه بیرجند

نویسنده مسئول: محمد شفاعی نوقابی، mohamad.shafaee@gmail.com

تاریخ دریافت: ۱۴۰۳/۹/۲۶ تاریخ بازنگری: ۱۴۰۳/۱۲/۱۶ تاریخ پذیرش و انتشار: ۱۴۰۳/۱۲/۱۸

چکیده: در این مقاله با معرفی یک تعمیم جدید از توزیع لگ-لوژستیک، ویژگی‌ها و برآورد پارامترهای آن مورد مطالعه و بررسی قرار می‌گیرد. در این توزیع با اضافه شدن یک پارامتر، نشان داده می‌شود که با افزایش این پارامتر، شکل آن متقارن‌تر و کشیدگی آن کمتر می‌شود. همچنین بر خلاف توزیع اولیه، در توزیع جدید گشتاورهای توزیع و تابع چندکی آن همواره وجود دارد. علاوه بر این نشان داده می‌شود که در توزیع جدید، شاخص‌های قابلیت اعتماد مانند تابع نرخ شکست و تابع میانگین مانده عمر و ترتیب‌های تصادفی از انعطاف پذیری بیشتری برخوردار هستند. همچنین ضمن برآورد پارامترهای توزیع به روش‌های نمودار لگ-لوژستیک و درستمایی ماکسیمم، به کمک مطالعات شبیه سازی، کارایی و سازگاری برآوردگرها بررسی شد. در نهایت با اجرای مدل جدید به روی داده‌های واقعی در حوزه تجهیزات هواپرد و بیماران سرطان ریه کاربردی بودن مدل نشان داده شد.

واژه‌های کلیدی: توزیع لگ-لوژستیک، قابلیت اعتماد، نرخ شکست، داده‌های طول عمر
کد موضوع بندی ریاضی (۲۰۱۰): 62P30، 60E05

۱ مقدمه

توزیع لگ-لوژستیک یک حالت خاص از توزیع پر نوع ۱۲ (بر، ۱۹۴۲) و یک حالت خاص از توزیع کاپا (میلک و جانسون، ۱۹۷۳) است. این توزیع به عنوان یک مدل جایگزین برای توزیع لگ-نرمال و ویبول مطرح شد، چرا که تابع بقا و تابع نرخ

©نویسندگان). ناشر انجمن آمار ایران است.

این مقاله با دسترسی آزاد تحت شرایط و ضوابط (CC BY-NC 4.0) توزیع شده است.



خطر آن فرمول‌های بسته‌ای دارند که کار با آن‌ها را آسان‌تر می‌کند. در زمینه تحلیل بقا، توزیع لگ-لوژستیک به علت انعطاف‌پذیری در مدل‌سازی توابع خطر با شکل‌های مختلف استفاده می‌شود. این توزیع به خصوص زمانی که نرخ خطر در ابتدا افزایش و سپس کاهش می‌یابد، مناسب است. این توزیع در اقتصاد نیز برای مدل‌سازی داده‌های وابسته به زمان مانند مدت زمان تا ورشکستگی شرکت‌ها، یا زمان تا وقوع رویدادهای مالی مهم کاربرد دارد. همچنین در مباحث بیمه و مدیریت ریسک، برای مدل‌سازی زمان تا وقوع خسارت‌ها یا رویدادهای زیان‌آور استفاده می‌شود.

مدل لگ-لوژستیک (LL) که در علم اقتصاد به عنوان توزیع فیسک^۱ شناخته می‌شود، یک توزیع احتمال پیوسته برای متغیر تصادفی غیر منفی است. مدل LL با پارامترهای a و b که با نماد $LL(a, b)$ نشان داده شده است با توابع قابلیت اطمینان و نرخ شکست به ترتیب با

$$R(x) = \frac{1}{1 + (ax)^b}; \quad a > 0, b > 0, x \geq 0,$$

$$h(x) = \frac{ab(ax)^{b-1}}{1 + (ax)^b}; \quad a > 0, b > 0, x \geq 0,$$

مشخص می‌شود. تابع نرخ شکست این توزیع غیر یکنوا است که به ازای پارامترهای مختلف به شکل کاهشی یا تک مدی (وان حمامی وارونه) است. مدل LL در بسیاری از زمینه‌های علمی مانند تجزیه و تحلیل بقا، شبکه‌های کامپیوتری، اقتصاد و هیدرولوژی مفید است، به ویژه زمانی که داده‌ها نرخ فزاینده و سپس کاهشی رویدادها را نشان می‌دهند. نمونه‌ای از این داده‌ها زمان تعمیر برخی از دستگاه‌های الکترونیکی یا مرگ و میر بیماران سرطانی است. **بنت (۱۹۸۳)** از مدل LL برای تجزیه و تحلیل داده‌های بقا از جمله داده‌های سرطانی استفاده کرد. یکی دیگر از کاربردهای مدل LL در فناوری اطلاعات است که **گاگوبینیش و همکاران (۲۰۱۳)** توانست بازه زمانی ترانکشن‌ها بین گره‌های کامپیوتر و سرورها را با این مدل توصیف کند. **فیسک (۱۹۶۱)** از جمله اولین محققانی بود که مدل LL را در ادبیات اقتصادی برای تجزیه و تحلیل توزیع درآمد یا داده‌های ثروت گنجانده. در هواشناسی و تجزیه و تحلیل سیل **احمد و همکاران (۱۹۸۸)** با مقایسه مدل LL با مدل‌های رقیب نشان داد که کارایی این مدل از سایر مدل‌های بیشتر است.

توزیع پرکه اولین بار توسط **بر (۱۹۴۲)** معرفی شد نسخه تعمیم یافته توزیع LL است. علاوه بر این، تعمیم‌های دیگری از مدل LL در متون علمی وجود دارد که هرکدام کاربردها و ویژگی‌های خاص خود را دارند، به عنوان مثال، **سینگ و همکاران (۱۹۸۸)** یک نسخه تعمیم یافته از مدل LL را معرفی کرد که برای داده‌های دارای چولگی زیاد یا دم‌های سنگین کارا می‌باشد. **اوجو و اولاپاده (۲۰۰۳)** یک تعمیم جدید از مدل LL برای تجزیه و تحلیل داده‌های بقا معرفی کرد و آن را با سایر مدل‌های مشابه مقایسه نمود. **لیما و کوردیرو (۲۰۱۷)** یک مدل توسعه یافته از LL با چهار پارامتر که فرم پیچیده‌ای نیز دارد پیشنهاد کردند و خواص آن از جمله گشتاورها، میانگین، آنتروپی و برآورد پارامترهای آن را مطالعه نمودند. از جمله سایر محققینی که تعمیم‌هایی از مدل LL پیشنهاد نمودند و خواص

¹Fisk distribution

آنها بررسی کردند می‌توان به کوردیرو و همکاران (۲۰۱۷)، حق بین و همکاران (۲۰۱۷)، آریر و موکا (۲۰۱۸)، کوردیرو و همکاران (۲۰۱۷)، شاخاتره (۲۰۱۸)، مارشال و الکین (۱۹۹۷)، ملیک و احمد (۲۰۲۰)، آلون (۱۹۶۴) و موسه و همکاران (۲۰۲۱) اشاره نمود.

نمودار لگ-لوژستیک (LLP) یک ابزار مفید برای بررسی مدل صحیح برای ترسیم داده‌ها است. در این نمودار محور افقی $t_i = \ln x_i$ و محور عمودی $y_i = \ln(\hat{R}^{-1}(x_i) - 1)$ است که در آن $\hat{R}(x_i)$ تابع بقای تجربی است. در مدل LL این نمودار یک خط مستقیم را نشان می‌دهد. کید (۲۰۲۲) اخیراً یک مدل LL اصلاح شده با تابع LLP صعودی و محدب پیشنهاد کرده است در حالیکه این مدل برای داده‌های واقعی دارای LLP صعودی و مقعر است. لذا این مقاله با هدف اصلاح مدل ارائه شده توسط کید (۲۰۲۲) به ارائه یک مدل جدید با تابع LLP صعودی و مقعر می‌پردازد. مدل پیشنهادی یک تابع نرخ شکست به شکل وان حمام وارونه است و می‌تواند در تئوری قابلیت اطمینان، هیدرولوژی، تجزیه و تحلیل بقا، اقتصاد، مهندسی شبکه و بسیاری از زمینه‌های دیگر مفید باشد.

ساختار مقاله به شرح زیر تدوین شده است. بخش ۲ فرم‌های توابع بقا، چگالی و تابع توزیع مدل جدید را بیان می‌کند و برخی از ویژگی‌ها و معیارهای قابلیت اطمینان مدل مورد بررسی قرار می‌گیرد. سپس، LLP برای یک مجموعه داده برای توزیع جدید بررسی می‌شود. در بخش ۳ میحث برآورد پارامترهای مدل جدید با استفاده از دو رویکرد، حداکثر درستنمایی و روش LLP مورد مطالعه قرار گرفته است. بخش ۴ سازگاری و کارایی دو برآوردگر را با استفاده از مطالعات شبیه‌سازی بررسی می‌کند. در بخش‌های ۵ و ۶ مدل پیشنهادی به دو مجموعه داده واقعی در حوزه تجهیزات هواپرد و بیماران سرطان ریه برازش می‌شود و نتایج با مدل‌های جایگزین مقایسه می‌شوند. در نهایت، بحث و نتیجه‌گیری ارائه شده است.

۲ مدل پیشنهادی

تحولات اخیر در تئوری توزیع‌های آماری بر مشکلاتی که محققان با آن روبرو هستند تأکید می‌کند و مدل‌های مختلف و منعطفی را پیشنهاد می‌کند تا بتوان مجموعه داده‌های طول عمر را در حوزه‌های کاربردی مختلف ارزیابی و مطالعه کرد. به عبارت دیگر، نیاز به معرفی مدل‌های کاربردی برای بررسی بهتر پدیده‌های طبیعی ضرورتی است که باید همواره به دنبال آن بود. توزیع‌های شناخته شده و اساسی مانند توزیع‌های لوژستیک، نمایی، ریلی، وایبول و گاما از نظر خواص بسیار محدود هستند و به انعطاف پذیری بیشتری نیاز دارند. در این بخش، یک مدل لگ-لوژستیک تعمیم یافته^۱ (GLL) با پارامترهای a, b و θ که به اختصار با نماد $GLL(a, b, \theta)$ نمایش داده می‌شود با تابع قابلیت اطمینان

$$R(x) = \frac{1}{1 + (ax)^b \exp(-\frac{x}{\theta})}; \quad a > 0, b > 0, \theta > 0, x \geq 0, \quad (1)$$

¹Generalized Log-Logistic

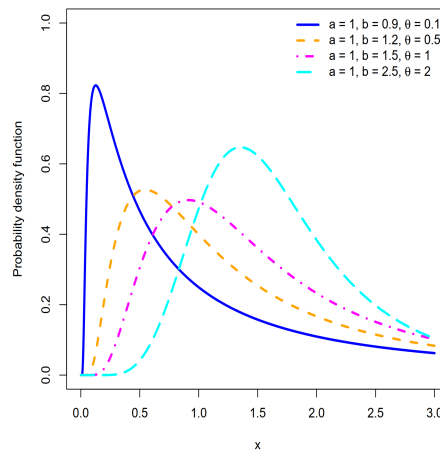
ارائه می‌شود.

تابع توزیع تجمعی و تابع چگالی احتمال این توزیع جدید به ترتیب به صورت

$$F(x) = \frac{1}{1 + (ax)^{-b} \exp(\frac{x}{\theta})}; \quad a > 0, b > 0, \theta > 0, x \geq 0,$$

$$f(x) = \frac{a(ax)^{b-1} \exp(-\frac{\theta}{x})(b + \frac{\theta}{x})}{(1 + (ax)^b \exp(-\frac{\theta}{x}))^2}; \quad a > 0, b > 0, \theta > 0, x \geq 0,$$

هستند. یکی از ویژگی‌های این توزیع پیچیدگی کمتر آن نسبت به سایر تعمیم‌های توزیع لگ-لوژستیک است. پارامتر جدید θ در این توزیع انعطاف پذیری و خواص مهمی را در این توزیع تحت تأثیر قرار می‌دهد. با افزایش θ ، معیارهای گرایش مرکزی، مانند میانگین و میانه، به سمت راست تغییر می‌کنند و شکل متقارن‌تری برای تابع چگالی احتمال ارائه می‌دهند. از آنجایی که ضریب $\exp(-\frac{\theta}{x})$ به عدد یک در بی نهایت تمایل دارد، رفتار دم سمت راست مدل‌های LL و GLL تقریباً یکسان است. علاوه بر این، با افزایش θ ، ضریب کشیدگی کاهش خواهد یافت. شکل ۱ رفتار تابع چگالی توزیع نسبت به مقادیر مختلف پارامترها را نشان می‌دهد. می‌دانیم برای $b > k$ ، گشتاور k ام متغیر



شکل ۱. تابع چگالی توزیع GLL برای مقادیر مختلف پارامترها

تصادفی Y با توزیع $LL(a, b)$ برابر با

$$E(Y^k) = \frac{1}{a^k} B(1 - \frac{k}{b}, 1 + \frac{k}{b}),$$

است. در حالی که برای $b \leq k$ ، متناهی نیست. برای متغیر تصادفی X با توزیع $GLL(a, b, \theta)$ ، k امین گشتاور

به صورت

$$E(X^k) = \int_0^\infty \frac{kx^{k-1}}{1 + ax^b \exp(-\frac{\theta}{x})} dx \geq \int_0^\infty \frac{ky^{k-1}}{1 + ay^b} dy = E(Y^k),$$

محاسبه می شود. این نشان می دهد که اگر $b > k$ ، $E(X^k)$ متناهی است اما اگر $b \leq k$ داریم

$$\begin{aligned} E(X^k) &= \int_0^\infty \frac{kx^{k-1}}{1 + ax^b \exp(-\frac{\theta}{x})} dx \\ &< \int_0^1 \frac{kx^{k-1}}{1 + ax^b \exp(-\frac{\theta}{x})} dx + \int_1^\infty ka^{-b} x^{k-b-1} \exp(-\frac{\theta}{x}) dx \\ &< M + e^\theta ka^{-b} \int_1^\infty x^{k-b-1} dx, \end{aligned}$$

که به وضوح متناهی است. توجه شود که وقتی θ افزایش می یابد، میانگین X نیز افزایش می یابد. چندک های معیارهای مهم گرایش مرکزی هستند که در گزاره زیر نشان داده می شود که این شاخص نسبت به θ صعودی و متناهی هستند. p -امین چندک از توزیع $GLL(a, b, \theta)$ ، (q_p) را می توان با حل معادله

$$\ln(p^{-1} - 1) = -b \ln a - b \ln q_p + \frac{\theta}{q_p}, \quad (2)$$

محاسبه کرد.

گزاره ۱. برای متغیر تصادفی X با توزیع $GLL(a, b, \theta)$ ، $-k$ -امین گشتاور (برای $b > k$) و q_p نسبت به θ صعودی هستند.

برهان: فرض کنید $b > k$ لذا مشتق $E(X^k)$ نسبت به θ برابر

$$\frac{\partial}{\partial \theta} E(X^k) = \int_0^\infty \frac{kx^{k-1}(ax)^b \exp(-\frac{\theta}{x})}{[1 + (ax)^b \exp(-\frac{\theta}{x})]^2} dx > 0,$$

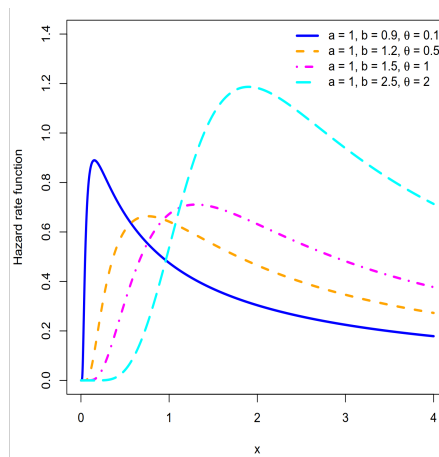
است که نشان دهنده صعودی بودن آن نسبت به θ است. با مشتق گرفتن از (۲)، مشتق جزئی q_p نسبت به θ را می توان به صورت $\frac{\partial}{\partial \theta} q_p = \frac{q_p}{bq_p + \theta} > 0$ محاسبه کرد. که نتیجه مطلوب را برای چندک نیز نشان می دهد.

۲.۱ معیارهای قابلیت اطمینان

توابع نرخ شکست^۱ (HR)، میانگین مانده عمر^۲ (MRL) و چندک p ام مانده عمر^۳ (p-QRL) در مطالعات قابلیت اطمینان و تحلیل بقا از شاخص‌های مهم و کاربردی هستند که در ادامه به محاسبه و بررسی رفتار آنها در توزیع GLL پرداخته می‌شود. تابع HR برای توزیع $GLL(a, b, \theta)$ به صورت

$$h(x) = \frac{a \exp(-\frac{\theta}{x}) a x^{b-1} (b + \frac{\theta}{x})}{1 + (ax)^b \exp(-\frac{\theta}{x})}, \quad a > 0, b > 0, \theta \geq 0, x \geq 0,$$

است. با مشتق گرفتن از $h(x)$ به راحتی می‌توان نشان داد که این تابع یک وجهی است (به شکل وان وارونه). شکل ۲ رفتار تابع نرخ شکست در این توزیع را نشان می‌دهد. تابع MRL یک مولفه در زمان x نشان‌دهنده



شکل ۲. تابع نرخ شکست توزیع GLL برای مقادیر مختلف پارامترها

میانگین مانده عمر آن به شرطی که تا زمان x سالم باقی مانده باشد تعریف می‌شود. به عبارتی داریم

$$m(x) = E(X - x | X \geq x) = \frac{1}{R(x)} \int_x^\infty R(t) dt, x > 0.$$

¹Hazard Rate

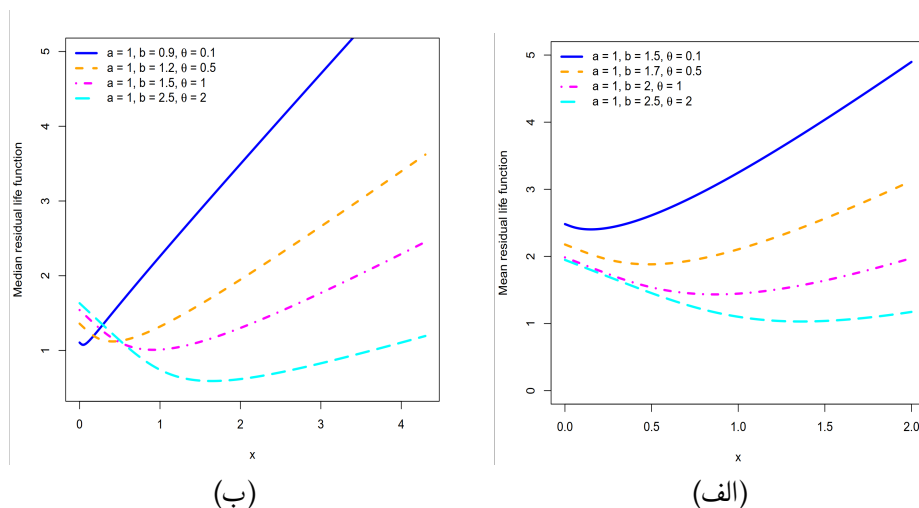
²Mean Residual Life

³pth Quantile Residual Life

لذا برای توزیع $GLL(a, b, \theta)$ در حالت $b > 1$ به صورت

$$m(x) = \left(1 + (ax)^b \exp\left(-\frac{\theta}{x}\right)\right) \int_x^\infty \frac{1}{1 + (at)^b \exp\left(-\frac{\theta}{t}\right)} dt, \quad a, b, \theta, x \geq 0,$$

حاصل شده است، که به روش‌های عددی قابل محاسبه است. شکل ۳-الف رفتار تابع میانگین مانده عمر در این توزیع نشان می‌دهد. تابع $p - QRL$ در زمان x چند p ام مانده عمر مولفه را به شرطی که در زمان x سالم باشد



شکل ۳. تابع الف-میانگین و ب-میانه مانده عمر توزیع GLL برای مقادیر مختلف پارامترها

را نشان می‌دهد. از نظر ریاضی داریم

$$q_p(x) = R^{-1}(\bar{p}R(x)) - x, \quad x \geq 0,$$

که در آن $\bar{p} = 1 - p$ است. یک مورد خاص زمانی است که $p = 0.5$ باشد و تابع میانه مانده عمر نامیده می‌شود و جایگزین خوبی برای تابع MRL است. برخلاف تابع MRL ، تابع میانه مانده عمر برای همه مقادیر پارامتر متناهی و موجود است. اسپیتلین و موریسون (۱۹۸۱) برخی از مزایای $p - QRL$ را مورد بحث قرار دادند. شکل ۳-ب رفتار تابع میانه مانده عمر را در توزیع GLL نشان می‌دهد.

فرض کنید X_1 و X_2 دو متغیر تصادفی طول عمر با توابع قابلیت اطمینان $R_1(x)$ و $R_2(x)$ باشند. آنگاه می‌گوییم X_2 بزرگتر از X_1 در ترتیب تصادفی معمولی است ($X_2 \geq_{st} X_1$)، اگر $R_2(x) \geq R_1(x)$ برای هر x . همچنین برای ترتیب تصادفی نرخ شکست می‌گوییم $X_2 \geq_{HR} X_1$ اگر $h_2(x) \geq h_1(x)$ برای هر x .

گزاره ۲. فرض کنید X_i ($i = 1, 2$) دو متغیر تصادفی نامنفی و دارای توزیع $GLL(a, b, \theta_i)$ باشند، اگر $\theta_2 \geq \theta_1$ آنگاه $X_2 \geq_{st} X_1$.

برهان: با توجه به اینکه تابع $\exp(-\frac{\theta}{x})$ بر حسب θ نزولی است نتیجه فوق با اندکی محاسبات اثبات می‌شود. می‌توان با ارائه مثال‌های نقض نشان داد که وقتی شرایط نتیجه فوق برقرار است، ترتیب در نرخ شکست در حالت کلی برقرار نیست. اما در لم زیر نشان داده شده است که تحت شرایط لم فوق ترتیب نرخ شکست در دم راست توزیع نیز برقرار است.

تعریف ۱. گویم $X_2 \geq X_1$ ، در ترتیب تصادفی نرخ شکست دم راست است اگر x_0 وجود داشته باشد به طوریکه $h_1(x) \geq h_2(x)$ برای هر $x > x_0$ باشد.

گزاره ۳. فرض کنید X_i ($i = 1, 2$) دو متغیر تصادفی نامنفی و دارای توزیع $GLL(a, b, \theta_i)$ باشند. اگر $\theta_2 \geq \theta_1$ آنگاه X_1 کوچکتر از X_2 در ترتیب تصادفی نرخ شکست دم راست است.

برهان: تابع HR را می‌توان به صورت

$$h(x) = \frac{a(b + \frac{\theta}{x})}{e^{\frac{\theta}{x}}(ax)^{1-b} + ax},$$

بازنویسی کرد. مشتق HR نسبت به θ با عبارت $a^2(1 - b - \frac{\theta}{x}) + a^2$ متناسب است. با این واقعیت که می‌توان x_0 به اندازه کافی بزرگ انتخاب کرد، واضح است که برای $x \geq x_0$ و $\frac{\theta}{x}$ و x^{-b} بسیار کوچک و نزدیک به صفر هستند. بنابراین، این عبارت برای $x \geq x_0$ مثبت است. اثبات را کامل می‌کند.

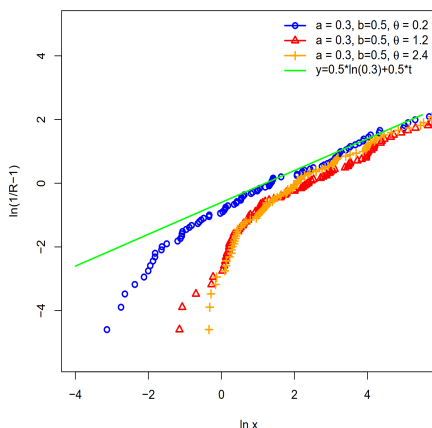
۲.۲ نمودار لگ-لوژستیک

نمودار لگ-لوژستیک (LLP) می‌تواند هم برای تشخیص مدل و هم برای تخمین پارامتر استفاده شود. برای اعمال این ایده در مدل GLL پیشنهادی می‌توان تابع قابلیت اطمینان (۱) را به صورت

$$\ln(\frac{1}{R(x)} - 1) - b \ln x - \frac{\theta}{x},$$

باز نویسی نمود. این معادله را می‌توان با در نظر گرفتن $c = n \ln a$ و $t = \ln x$ و $y = \ln(\frac{1}{R(x)} - 1)$ به صورت $y = c + bt - \theta \exp(-t)$ ساده نمود که تابعی صعودی و مقعر نسبت به t است. در ادامه سه نمونه از توزیع‌های $GLL(0.3, 0.5, 1.2)$ ، $GLL(0.3, 0.5, 2.4)$ و $GLL(0.3, 0.5, 4.8)$ با اندازه $n = 100$ شبیه‌سازی شده و (۱) $y_i = \ln(\hat{R}^{-1}(x_i) - 1)$ در برابر $t_i = \ln x_i$ برای $i = 1, \dots, n$ رسم شده است. در این مقاله برآورد

تابع بقا به کمک تابع توزیع تجربی $\hat{R}(x) = n^{-1} \sum_{j=1}^n I(x_j > x)$ ، در نظر گرفته شده است. شکل ۴ نشان



شکل ۴. LLP مربوط به سه نمونه شبیه‌سازی شده از مدل GLL با اندازه ۱۰۰

می‌دهد که چگونه افزایش θ باعث تغییر منحنی می‌شود. خط مستقیم LLP را برای یک مدل $LL(0.3, 0.5)$ نشان می‌دهد. این مثال شبیه‌سازی نشان می‌دهد که چگونه LLP می‌تواند برای تعیین اینکه آیا داده‌ها از مدل LL یا GLL هستند استفاده شود.

۳ برآورد پارامترهای توزیع

در این بخش، روش‌های LLP و روش ماکسیم درستنمایی برای برآورد پارامترهای مدل پیشنهادی مورد بحث قرار گرفته است. فرض کنید $X_1, \dots, X_n$ یک نمونه تصادفی از توزیع $GLL(a, b, \theta)$ است.

مدل رگرسیون

$$y_i = c + bt_i - \theta e^{t_i} + \epsilon_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

را در نظر بگیرید، که در آن $y_i = \ln(\hat{R}^{-1}(x_i) - 1)$ و $t_i = \ln x_i$ ، $i = 1, \dots, n$ است. معمولاً دنباله ϵ_i ها مستقل و هم توزیع با توزیع نرمال با میانگین صفر و واریانس σ^2 در نظر گرفته می‌شود. لذا برآوردهای LLP را می‌توان با برازش داده‌ها به این مدل محاسبه کرد.

لگاریتم تابع درستنمایی براساس نمونه n تایی به صورت

$$\begin{aligned} \ell(a, b, \theta; x) = nb \ln a + (b - 1) \sum_{i=1}^n \ln x_i - \theta \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} + \sum_{i=1}^n \ln \left(b + \frac{\theta}{x_i} \right) \\ - \sum_{i=1}^n \ln \left(1 + (ax_i)^b e^{-\frac{\theta}{x_i}} \right), \end{aligned}$$

است. مقادیر بیشینه‌سازی تابع فوق $(\hat{a}, \hat{b}, \hat{\theta})$ را می‌توان به طور مستقیم یا با حل همزمان معادلات

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial a} \ell(a, b, \theta; x) &= \frac{nb}{a} - \sum_{i=1}^n \frac{b(ax_i)^{b-1} x_i e^{-\frac{\theta}{x_i}}}{1 + (ax_i)^b e^{-\frac{\theta}{x_i}}} = 0, \\ \frac{\partial}{\partial b} \ell(a, b, \theta; x) &= n \ln a + \sum_{i=1}^n \ln x_i + \sum_{i=1}^n \frac{1}{b + \frac{\theta}{x_i}} - \sum_{i=1}^n \frac{\ln(ax_i)(ax_i)^b e^{-\frac{\theta}{x_i}}}{1 + (ax_i)^b e^{-\frac{\theta}{x_i}}} = 0, \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \ell(a, b, \theta; x) &= - \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} + \frac{1}{bx_i + \theta} + \sum_{i=1}^n \frac{a(ax_i)^{b-1} e^{-\frac{\theta}{x_i}}}{1 + (ax_i)^b e^{-\frac{\theta}{x_i}}} = 0. \end{aligned}$$

محاسبه نمود. عبارت $(\hat{a} - a, \hat{b} - b, \hat{\theta} - \theta)$ دارای توزیع نرمال چندمتغیره $N(0, \Sigma^{-1})$ است که در آن Σ ماتریس اطلاعات فیشر است و از حل رابطه زیر حاصل می‌شود.

$$\Sigma = \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2}{\partial a^2} & -\frac{\partial^2}{\partial a \partial b} & -\frac{\partial^2}{\partial b^2} \\ -\frac{\partial^2}{\partial a \partial b} & -\frac{\partial^2}{\partial b^2} & -\frac{\partial^2}{\partial b \partial \theta} \\ -\frac{\partial^2}{\partial \theta \partial a} & -\frac{\partial^2}{\partial \theta \partial b} & -\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \end{bmatrix} \ell(a, b, \theta; x) = 0,$$

۴ مطالعات شبیه‌سازی

برای شبیه‌سازی یک نمونه تصادفی از توزیع $GLL(a, b, \theta)$ ، ابتدا یک نمونه تصادفی از توزیع یکنواخت استاندارد تولید و آن را u بنامید. سپس با حل معادله $F(x) = u$ مقدار x را پیدا کنید. با مقداری محاسبات جبری و در نظر گرفتن $\alpha = \ln(u^{(-1)} - 1) + b \ln a$ این معادله به صورت

$$\alpha + b \ln X - \frac{\theta}{x} = 0,$$

حاصل می‌شود. واضح است که اگر $\theta \geq \alpha$ آنگاه $X \geq 1$ و اگر $\theta < \alpha$ ، آنگاه $X < 1$. این نکته در تولید نمونه‌های تصادفی از مدل GLL بسیار مفید است. در این مطالعه شبیه‌سازی، دامنه وسیعی از پارامترها انتخاب

شدند. سپس، $r = 500$ تکرار از نمونه‌های به حجم‌های $50, 100, 150$ در هر اجرا از توزیع مد نظر شبیه‌سازی شد. در ادامه مقادیر MLE و LLP برای هر نمونه محاسبه شد و در نهایت اریبی (b) و میانگین مربعات خطا (MSE) به دست آمد. هر سلول در جدول ۱ یک اجرای کامل را نشان می‌دهد. MLE ها با بهینه سازی تابع درست‌نمایی به کمک تابع " $optim$ " و با استفاده از روش استاندارد " $Nelder - Mead$ " در نرم افزار R محاسبه شدند. مقادیر اولیه مورد استفاده در فرآیند بهینه‌سازی به طور تصادفی از توزیع یکنواخت گرفته شد، به عنوان مثال، مقدار اولیه برای a به طور تصادفی در فواصل $(0.85, 1.25)$ $a \in$ در نظر گرفته شدند. تابع " lm " در نرم افزار R برای پیاده سازی روش LLP استفاده شد. بر اساس نتایج شبیه سازی مقادیر b و MSE با n

 جدول ۱. مقادیر اریبی و میانگین مربعات خطا در شبیه‌سازی‌ها به دو روش MLE و LLP

n						a, b, θ	
50		100		200			
b	MSE	b	MSE	b	MSE		
0.0447	0.0303	0.0210	0.0121	0.0097	0.0060	$0.4, 0.8, 0.1$	MLE
-0.00044	0.0088	-0.0037	0.0040	-0.0017	0.0020		
0.0228	0.0028	0.0098	0.0005	0.0043	0.0001		
0.0054	0.0012	0.0009	0.0007	-0.0004	0.0045	$0.1, 1.1, 0.3$	
-0.00653	0.0453	-0.0476	0.0308	-0.0361	0.0231		
0.3115	0.2237	0.1565	0.1010	0.0822	0.0333		
0.0459	0.0518	0.0172	0.0042	-0.0077	0.0019	$0.4, 1.3, 0.2$	
-0.00541	0.0358	-0.0285	0.0173	-0.0200	0.0083		
0.1493	0.0785	0.0720	0.0195	0.0412	0.0068		
0.0069	0.0014	0.0027	0.0007	0.0008	0.0004	$0.1, 0.8, 0.15$	
-0.0215	0.0139	-0.0158	0.0078	-0.0106	0.0046		
0.1149	0.0615	0.0504	0.0122	0.0225	0.0025		
0.0682	0.0353	0.0328	0.0130	0.0152	0.0057	$0.4, 0.8, 0.1$	LLP
0.0172	0.0097	0.1152	0.0044	0.0085	0.0022		
0.0008	0.0011	-0.0017	0.0002	-0.0018	0.0006		
0.0106	0.0009	0.0049	0.0003	0.0024	0.0001	$0.1, 1.1, 0.3$	
0.0175	0.0259	0.0144	0.0119	0.0100	0.0052		
0.0132	0.2125	-0.0052	0.0538	-0.0137	0.0126		
0.0326	0.0114	0.0137	0.0037	0.0062	0.0017	$0.4, 1.3, 0.2$	
0.0418	0.0448	0.0255	0.0186	0.0181	0.0087		
-0.0155	0.0366	-0.0110	0.0109	-0.0114	0.0035		
0.0153	0.0016	0.0073	0.0006	0.0036	0.0003	$0.1, 0.8, 0.15$	
0.0133	0.0122	0.0090	0.0053	0.0055	0.0027		
0.0149	0.0235	0.0022	0.0044	-0.0011	0.0011		

۱۳۰ معرفی یک تعمیم جدید از توزیع لگ-لوژستیک

کاهش می‌یابد، به این معنی که MLE و LLP سازگار هستند. مقادیر کوچک b و MSE نشان می‌دهد که هر دو روش برای مسائل دنیای واقعی مناسب هستند.

۵ تحلیل داده‌های زمان تعمیرات فرستنده و گیرنده ارتباطی هوابرد

داده‌های جدول ۲ شامل ۴۶ زمان تعمیر یک فرستنده و گیرنده ارتباطی هوابرد است که توسط آلون (۱۹۶۴) و مید و همکاران (۲۰۱۸) مورد مطالعه قرار گرفته است. مفهوم کل زمان آزمایش (TTT) یک معیار تشخیصی غیر پارامتریک به ویژه برای مطالعه شکل تابع نرخ شکست داده‌ها است.

جدول ۲. مجموعه داده‌های زمان تعمیرات فرستنده و گیرنده ارتباطی هوابرد											
۰/۲	۰/۳	۰/۵	۰/۵	۰/۵	۰/۵	۰/۶	۰/۶	۰/۷	۰/۷	۰/۷	۰/۸
۱/۰	۱/۰	۱/۰	۱/۰	۱/۰	۱/۱	۱/۳	۱/۵	۱/۵	۱/۵	۱/۵	۲/۰
۲/۰	۲/۲	۲/۵	۲/۷	۳/۰	۳/۰	۳/۳	۳/۳	۴/۰	۴/۰	۴/۵	۴/۷
۵/۰	۵/۴	۵/۴	۷/۰	۷/۵	۸/۸	۹/۰	۱۰/۳	۲۲/۰	۲۴/۵		

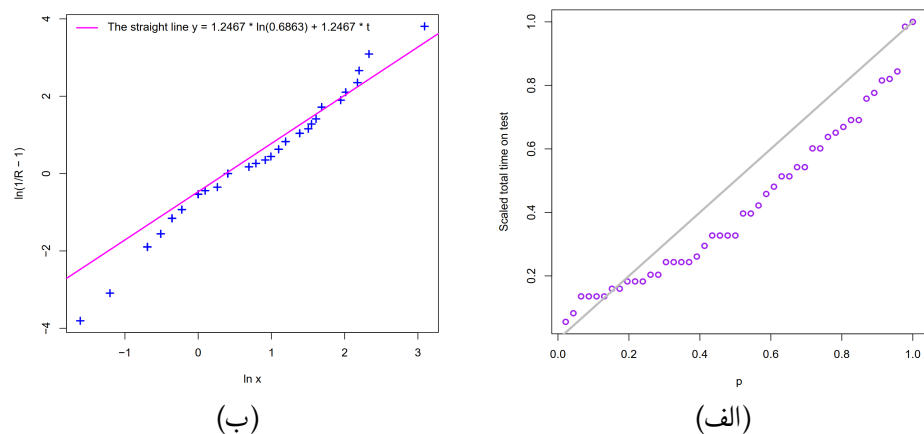
شکل ۵ نمودارهای TTT و LLP را برای این مجموعه داده نشان می‌دهد. نمودار TTT در ابتدا مقعر و بالای قطر اصلی است و سپس محدب و پایین قطر اصلی قرار می‌گیرد. لذا تابع نرخ شکست داده‌ها فرمی صعودی-نزولی (تک مدی) دارد. برای اطلاعات بیشتر راجع به ارتباط تابع TTT و تابع نرخ شکست به اصفهانی و همکاران (۲۰۲۱) مراجعه شود. LLP رسم شده نمودار تشخیصی دیگری است که شکل مقعر را نشان می‌دهد. این دو نمودار تأیید می‌کنند که مدل GLL پیشنهادی این مقاله برای این مجموعه داده به خوبی برازش داده شده است. در این بخش توزیع‌های لگ-لوژستیک نمایی شده (ELL)، گامای تعمیم یافته (GG)، لگ-لوژستیک (LL) و لوژستیک مارشال-اولکین ($MOLL$) به عنوان مدل‌های جایگزین در نظر گرفته شده‌اند که هر کدام به ترتیب دارای توزیع‌های توزیع تجمعی

$$F(x) = \left(\frac{1}{1 + (ax)^{-b}} \right)^{\theta}, \quad a, b, \theta > 0, x \geq 0,$$

$$F(x) = 1 - \frac{\Gamma(b, (ax)^{\theta})}{\Gamma(b)} \quad a, b, \theta > 0, x \geq 0,$$

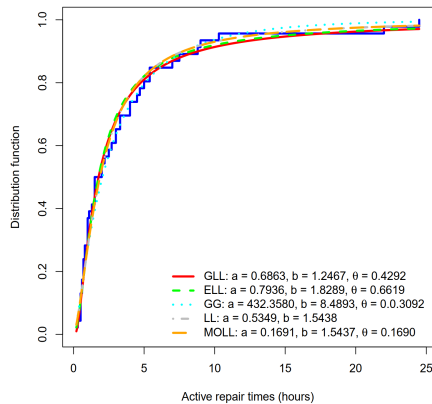
$$F(x) = \frac{1}{1 + (ax)^{-b}} \quad a, b, \theta > 0, x \geq 0,$$

$$F(x) = \frac{\theta(1 + (ax)^{-b})^{-1}}{1 - (1 - \theta)(1 + (ax)^{-b})^{-1}} \quad a, b, \theta > 0, x \geq 0,$$



شکل ۵. نمودارهای الف- LLP و ب- TTT برای زمان تعمیرات فرستنده و گیرنده ارتباطی هواپرد

هستند، که در آن‌ها $\Gamma(b, u) = \int_u^\infty t^{b-1} e^{-t} dt$ تابع گامای ناقص بالایی است. شکل ۶ توابع توزیع تجربی و برآورد شده مدل‌های انتخابی را نشان می‌دهد. برآوردهای ML و LLP برای همه مدل‌های در نظر گرفته شده محاسبه



شکل ۶. تابع توزیع تجربی به همراه تابع توزیع تجمعی تخمینی GLL پیشنهادی و برخی مدل‌های جایگزین.

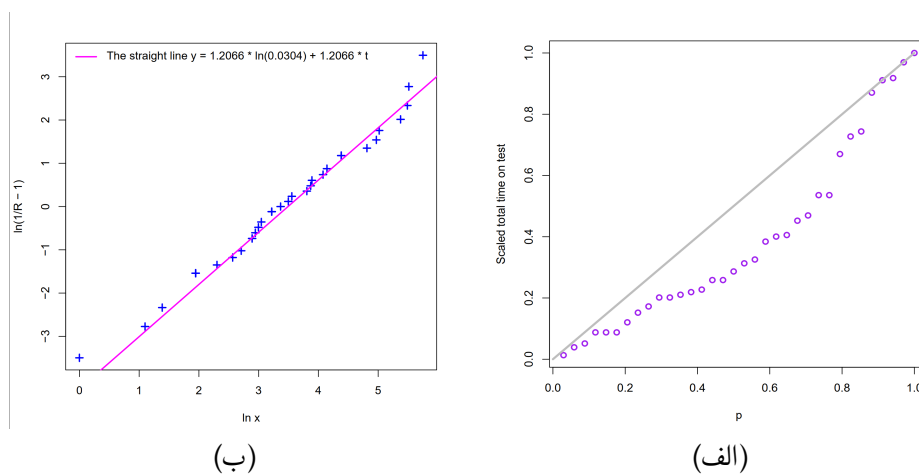
شد. مقادیر معیارهای اطلاعات آکایک (AIC)، کلموگروف-اسمیرنوف ($K-S$)، کرامر-فون میزس (CVM) و اندرسون دارلینگ (AD) در جدول ۳ نشان می‌دهند که مدل GLL پیشنهادی از سایر مدل‌ها بهتر عمل می‌کند.

جدول ۳. شاخص‌های نیکویی برازش مدل‌ها برای زمان تعمیرات فرستنده و گیرنده ارتباطی هوابرد

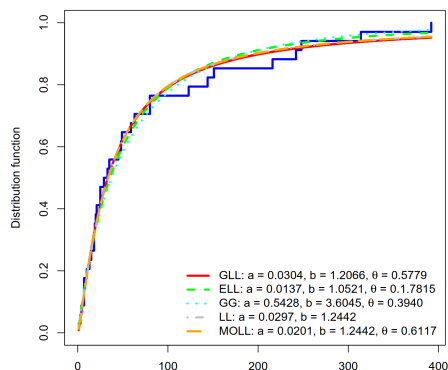
توزیع	$\hat{\theta}$	$\hat{b}$	$\hat{a}$	$AD(p-value)$	$CVM(p-value)$	$K-S(p-value)$	AIC
<i>GLL</i>	۰/۴۲۹۲	۱/۲۴۶۷	۰/۶۸۶۳	۰/۳۱۲۳(۰/۹۲۸۳)	۰/۰۵۰۸(۰/۸۷۳۵)	۰/۰۸۰۲(۰/۹۲۸۷)	۲۰۶/۳۲
<i>ELL</i>	۰/۶۶۱۹	۱/۸۲۸۹	۰/۷۹۳۶	۰/۴۰۰۱(۰/۸۴۷۹)	۰/۰۶۶۲(۰/۷۷۷۳)	۰/۰۸۵۹(۰/۸۸۶۳)	۲۰۸/۰۹
<i>GG</i>	۰/۳۰۹۲	۸/۴۸۹۳	۴۳۲/۳۵۸۰	۰/۴۱۱۰(۰/۸۳۷۰)	۰/۰۶۸۵(۰/۷۶۳۱)	۰/۱۰۷۷(۰/۶۵۹۲)	۲۰۸/۰۰
<i>LL</i>	—	۱/۵۴۳۸	۰/۵۳۴۹	۰/۴۱۱۰(۰/۸۳۷۰)	۰/۰۶۵۲(۰/۷۸۳۴)	۰/۰۹۳۸(۰/۸۱۲۵)	۲۰۶/۳۴
<i>MOLL</i>	۰/۱۶۹۰	۱/۵۴۳۷	۰/۱۶۹۱	۰/۴۱۰۹(۰/۸۳۷۱)	۰/۰۶۵۲(۰/۸۷۳۴)	۰/۰۹۳۸(۰/۸۱۲۶)	۲۰۸/۳۴

۶ تحلیل داده‌های زمان بقای بیماران سرطان ریه

پرنیس (۱۹۷۳) و گوپتا و همکاران (۱۹۹۹) مجموعه داده‌های زمان بقای بیماران سرطان ریه از زمان درمان را بر حسب روز تحلیل کردند. جدول ۴ مجموعه داده را نشان می‌دهد. در اینجا، داده‌ها را با *GLL* پیشنهادی و گزینه‌های در نظر گرفته شده مطابقت داده شده است. با توجه به جدول ۵، شاخص‌های $K-S$ ، CVM و AD برای همه مدل‌ها به‌ویژه *GLL* بسیار کوچک و رضایت‌بخش است و براساس این معیارها، *GLL* بهتر از سایر مدل‌های عمل نموده است. اما، *LL* که دارای دو پارامتر است، AIC کوچکتری ارائه می‌دهد. شکل ۷ نمودارهای *LLP* و *TTT* را نشان می‌دهد. نمودار *TTT* فرمی محدب و پایین قطر اصلی را نشان می‌دهد. لذا تابع نرخ شکست داده‌ها نزولی است (اصفهانی و همکاران، ۲۰۲۱). شکل ۸ نشان دهنده توزیع‌های تجمعی مدل‌های جایگزین *GLL* است.



شکل ۷. نمودارهای الف- *LLP* و ب- *TTT* برای داده‌های زمان بقای بیماران سرطان ریه



شکل ۸. تابع توزیع تجربی به همراه توزیع تجمعی تخمینی GLL پیشنهادی و برخی مدل‌های جایگزین.

جدول ۴. مجموعه داده‌های زمان بقای بیماران سرطان ریه

۶۳	۷	۱۸	۲۰	۱۸	۱۵۱	۵۹	۱۲۳	۴	۱۴۴	۳۱۴	۱۰
۷	۱۳	۲۱	۲۵	۱	۲۵	۳۳	۲۴۲	۲۱۶	۳	۳۵	۳۹۲
		۴۹	۱۵	۸۰	۴۵	۱۹	۷	۴۸	۲۴۸	۲۹	۸۰

جدول ۵. شاخص‌های نیکویی برازش مدل‌های مختلف برای داده‌های زمان بقای بیماران سرطان ریه

توزیع	$\hat{a}$	$\hat{b}$	$\hat{\theta}$	$AD(p-value)$	$CVM(p-value)$	$K-S(p-value)$	AIC
GLL	۰/۵۷۷۹	۱/۲۰۶۶	۰/۳۰۴	۰/۱۹۱۰ (۰/۹۹۲۷)	۰/۲۲۶ (۰/۹۹۴۵)	۰/۰۶۵۷ (۰/۹۹۸۵)	۳۶۳/۸۶
ELL	۱/۷۸۱۵	۱/۰۵۲۱	۰/۱۳۷	۰/۲۴۶۶ (۰/۹۷۲۰)	۰/۳۵۲ (۰/۹۵۸۱)	۰/۰۷۶۱ (۰/۹۸۹۱)	۳۶۳/۷۴
GG	۰/۳۹۴۰	۳/۶۰۴۵	۰/۵۴۲۸	۰/۲۷۴۳ (۰/۹۵۵۹)	۰/۴۳۸ (۰/۹۱۵۶)	۰/۰۸۲۲ (۰/۹۷۵۷)	۳۶۲/۸۰
LL	—	۱/۲۴۴۲	۰/۲۹۷	۰/۱۹۷۳ (۰/۹۹۱۲)	۰/۲۴۶ (۰/۹۹۱۳)	۰/۰۶۹۴ (۰/۹۹۶۷)	۳۶۲/۰۲
MOLL	۰/۶۱۱۷	۱/۲۴۴۲	۰/۲۰۱	۰/۱۹۷۳ (۰/۹۹۱۲)	۰/۲۴۵ (۰/۹۹۱۴)	۰/۰۶۹۴ (۰/۹۹۶۷)	۳۶۴/۰۳

۷ بحث و نتیجه‌گیری

نسخه تعمیم یافته جدید مدل LL زمانی مفید است که LLP یک منحنی مقعر صعودی و تابع نرخ شکست تک‌مدی (صعودی-نزولی) باشد. برآوردهای ML و LLP مورد بحث قرار گرفت و رفتار آنها در یک مطالعه شبیه‌سازی

مورد بررسی بیشتر قرار گرفت. نتایج شبیه سازی نشان می‌دهد که هر دو برآوردگر سازگار هستند و پارامترها را به طور کارآمد تخمین می‌زنند. کاربردی از مدل پیشنهادی در دو مجموعه داده واقعی ارائه شد که نشان دهنده برتری مدل پیشنهادی در مقایسه با توزیع‌های رقیب است.

تقدیر و تشکر

نویسندگان مقاله از سردبیر محترم، داوران گرامی و ویراستار ارجمند مجله بابت ارائه نظرات ارزنده که باعث بهبود کیفیت نتایج و نحوه ارائه مقاله گردید کمال تشکر و امتنان را دارند.

مراجع

- Ahmad, M.I., Sinclair, C.D. and Werritty, A. (1988), Log-Logistic Flood Frequency Analysis, *Journal of Hydrology*, **98**, 205-224.
- Alfaer N.M., Gemeay, A.M., Aljohani, H.M. and Afify, A.Z. (2021), The Extended Log-Logistic Distribution: Inference and Actuarial Applications, *Mathematics*, **9**, 1-22.
- Alven, W.H., (1964), *Reliability Engineering*, ARINC. Prentice-hall, New Jersey.
- Arber, Q. and Muça, M. (2018), A New Modified Generalized Odd Log-Logistic Distribution with Three Parameters, *Mathematical Theory and Modeling*, **8**, 49-60.
- Bennett, S. (1983), Log-Logistic Regression Models for Survival Data, *Journal of the Royal Statistical Society, Series C*, **32** (2), 165-171.
- Burr, I. W. (1942), Cumulative Frequency Functions, *Annals of Mathematical Statistics*, **13**, 215-232.
- Cordeiro, G.M., Alizadeh, M., Ozel, G., Hosseini, B., Ortega, E.M.M. and Altun, E. (2017), The Generalized Odd Log-Logistic Family of Distributions: Properties, Regression Models and Applications, *Journal of Statistical Computation and Simulation*, **87**, 908-932.

- Esfahani M., Amini M. and Mohtashami Borzadaran G.R. (2021), On the Applications of Total Time on Test Transform in Reliability, *Journal of Statistical Sciences*, **15** (1), 1-22.
- Fisk, P.R. (1961), The Graduation of Income Distributions, *Econometrica*, **29**, 171-185.
- Gago-Benítez, A., Fernández-Madrigal, J.A. and Cruz-Martín, A. (2013), Log-logistic Modeling of Sensory Flow Delays in Networked Telerobots, *IEEE Sensors Journal*, **13**, 2944-2953.
- Gupta, R. C., Akman, H. O and Lvin, S. (1999), A Study of Log-Logistic Model in Survival Analysis, *Biometrical Journal*, **41**(4), 431-443.
- Hagbabin, H., Ozel, G., Alizadeh, M. and Hamedani, G.G. (2017), A New Generalized Odd Log-Logistic Family of Distributions, *Communications in Statistics - Theory and Methods*, **46**, 9897-9920.
- Kayid, M. (2022), Applications of Bladder Cancer Data Using a Modified Log-Logistic Model. *Applied Bionics and Biomechanics*, **2022**, Article ID 6600278, 12.
- Khan, S. and Khosa, S. (2016). Generalized Log-Logistic Proportional Hazard Model with Applications in Survival Analysis, *Journal of Statistical Distributions and Applications*, **3**, 1-18.
- Lima, S.R. and Cordeiro, G.M. (2017), The Extended Log-Logistic Distribution: Properties and Application, *Anais da Academia Brasileira de Ciências*, **89**, 3-17.
- Malik, A.S. and Ahmad, S. (2020), An Extension of Log-Logistic Distribution for Analyzing Survival Data, *Pakistan Journal of Statistics and Operation Research*, **16**, 789-801.
- Marshall, A. W., and Olkin, I. (1997), A New Method for Adding a Parameter to a Family of Distributions with Application to the Exponential and Weibull Families, *Biometrika*, **84**, 3, 641–52.

- Mead, M., Nassar, M. M., and Dey, S. (2018), A Generalization of Generalized Gamma Distributions, *Pakistan Journal of Statistics and Operation Research*, **14**, 121-138.
- Mielke, P. W., and Johnson, E. S. (1973), Three-Parameter Kappa Distribution Maximum Likelihood Estimates and Likelihood Ratio Tests, *Monthly Weather Review*, **101**(9), 701-707.
- Muse, A.H., Mwalili, S.M. and Ngesa, O. (2021), On the Log-Logistic Distribution and Its Generalizations: A Survey, *International Journal of Statistics and Probability*, **10**, 93-125.
- Ojo, M.O. and Olapade, A.K. (2003), On the Generalized Logistic and Log-Logistic Distributions, *Kragujevac Journal of Mathematics*, **25**, 65-73.
- Prentice, R. L. (1973), Exponential Survivals with Censoring and Explanatory Variables, *Biometrika*, **60**, 279-288.
- Schmittlein D.C. and Morrison, D.G. (1981), The Median Residual Lifetime: A Characterization Theorem and an Application, *Operations Research*, **29**, 392-399.
- Shakhatreh, M.K. (2018), A New Three-Parameter Extension of the Log-Logistic Distribution with Applications to Survival Data, *Communications in Statistics - Theory and Methods*, **47**, 5205-5226.
- Singh, K.P., Lee, C.M.-S. and George, E.O. (1988), On Generalized Log-Logistic Model for Censored Survival Data, *Biometrical Journal*, **30**, 843-850.
- Tahir, M.H., Mansoor, M., Zubair, M. and Hamedani, G.G. (2014), McDonald Log-Logistic Distribution with an Application to Breast Cancer Data, *Journal of Statistical Theory and Applications*, **13**, 65-82.