



A Study of the Complexity of Conditional Mixed Systems and Their Duals with Gamma Components Using the Jensen Cumulative Residual Extropy Divergence Index

Alizadeh Noughabi, R. ¹, Pakdaman, Z. ¹, Alizadeh Noughabi, H. ²

¹Department of Statistics, University of Hormozgan, BandarAbbas , Iran.

²Department of Statistics, University of Birjand, Birjand , Iran.

Corresponding author: R. Alizadeh Noughabi, reza.alizadehn@hormozgan.ac.ir

Received: 31/8/2025 Revised: 31/12/2025 Accepted and Published Online: 2/1/2026.

Introduction

Understanding and quantifying system complexity is a key issue in reliability theory, particularly for coherent systems whose performance depends on component interactions. Information-based measures have gained increasing attention for describing uncertainty in reliability analysis. While Shannon entropy has been widely used, its dual measure, extropy, captures complementary aspects of system behavior, especially when extended to residual-lifetime and inactivity-time frameworks. Recently, the Jensen Cumulative Residual Extropy (JCRJ) divergence has been proposed as a divergence-based measure for system comparison. However, its applicability to conditional mixed systems and their duals has not been fully explored. This study addresses this gap by developing a structured framework for evaluating system complexity using JCRJ from both residual-lifetime and inactivity-time perspectives.

Material and Methods

We study coherent systems composed of independent and identically distributed components. System lifetime is expressed using order statistics, and system structure is characterized by a signature vector, providing a distribution-free description of system behavior. Conditional mixed systems are analyzed by conditioning on the system status at a fixed inspection time t . Two conditional quantities are considered: the residual lifetime given survival beyond t , and the inactivity time given failure up to time t . The associated

distribution functions are represented in mixed form using conditional weight vectors derived from the system signature. Based on these representations, explicit expressions for the Jensen Cumulative Residual Extropy Divergence are derived. Numerical and simulation studies are conducted for selected coherent systems and their duals, assuming Gamma-distributed component lifetimes and employing Monte Carlo simulation to approximate JCRJ values.

Results and Discussion

The analytical results confirm that JCRJ is non-negative and vanishes for k -out-of- n systems, supporting its role as a complexity measure. An important finding is that dual systems do not necessarily share the same level of complexity. Although duality implies complementary reliability properties, notable differences in JCRJ values may arise, particularly in conditional mixed settings. The inspection time t mainly affects the magnitude of complexity, while system rankings remain essentially unchanged. Similar patterns are observed in the inactivity time analysis: systems with stable redundancy maintain moderate complexity, while structurally imbalanced systems exhibit sharper increases in JCRJ.

Conclusion

This study presents a unified framework for assessing the complexity of conditional mixed systems and their duals using the Jensen Cumulative Residual Extropy Divergence. The results indicate that system complexity is primarily influenced by structural asymmetry and component weighting rather than by duality alone. As a result, JCRJ provides an effective tool for comparing complex systems in reliability engineering.

Keywords: System residual lifetime, System inactivity time, Cumulative residual extropy, Jensen cumulative residual extropy divergence criterion, Dual system.

Mathematics Subject Classification (2020): 62N05, 62F10.



©The Author(s). The Publisher is Iranian Statistical Society.

This is an open access article distributed under the terms and conditions of [\(CC BY-NC 4.0\)](https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/)

مطالعه پیچیدگی سیستم‌های آمیخته شرطی و دوگان آن‌ها با مولفه‌های گاما به کمک معیار واگرایی اکستروپی باقیمانده تجمعی ینسن

رضا علی‌زاده نوقابی^۱، زهره پاکدامن^۱، هادی علیزاده نوقابی^۲

گروه آمار، دانشگاه هرمزگان

گروه آمار، دانشگاه بیرجند

نویسنده مسئول: رضا علی‌زاده نوقابی، reza.alizadehn@hormozgan.ac.ir

تاریخ دریافت: ۱۴۰۴/۶/۹ تاریخ بازنگری: ۱۴۰۴/۱۰/۱۰ تاریخ پذیرش و انتشار: ۱۴۰۴/۱۰/۱۲

چکیده: در این مقاله، برای تحلیل و اندازه‌گیری پیچیدگی رفتاری سیستم‌های آمیخته شرطی، یک شاخص نوین با عنوان واگرایی اکستروپی باقیمانده تجمعی ینسن بررسی می‌شود. ابتدا با استفاده از بردار ضرایب شرطی حاصل از بردار علامت، رفتار این معیار برای دسته‌ای از سیستم‌های منسجم و نیز سیستم‌های دوگان آن‌ها، در حالتی که مؤلفه‌ها دارای توزیع گاما هستند، به صورت تحلیلی بررسی می‌شود. سپس برای ارزیابی نتایج بدست آمده، شبیه‌سازی انجام می‌شود. نتایج این مقاله نشان می‌دهد که کمترین پیچیدگی را سیستم‌های منسجم k از n با مقدار واگرایی اکستروپی باقیمانده تجمعی ینسن برابر صفر دارند. علاوه بر این نتایج نشان می‌دهد که دوگان بودن سیستم‌ها لزوماً منجر به برابری مقدار واگرایی اکستروپی باقیمانده تجمعی ینسن در سیستم‌های آمیخته شرطی نمی‌شود؛ بلکه این شاخص نسبت به وزن‌دهی مؤلفه‌ها، آماره‌های مرتب و تعامل ساختاری بین اجزای سیستم حساس است.

واژه‌های کلیدی: طول عمر باقیمانده سیستم، مدت زمان غیرفعال بودن سیستم، اکستروپی باقیمانده تجمعی، معیار واگرایی اکستروپی باقیمانده تجمعی ینسن، دوگان سیستم.
کد موضوع‌بندی ریاضی (۲۰۲۰): 62F10، 62N05.



۱ مقدمه

یک سیستم منسجم به سیستمی گفته می‌شود که عملکرد کلی آن به‌طور مستقیم تحت تأثیر عملکرد اجزاء تشکیل‌دهنده‌اش قرار دارد. در چنین سیستمی، هیچ جزء اضافه یا غیرضروری وجود ندارد و از کار افتادن یا عملکرد صحیح هر جزء می‌تواند بر کل سیستم تأثیرگذار باشد. حال اگر مجموعه‌ای از تمام ترکیب‌های ممکن و تصادفی یک سیستم منسجم با اندازه مشخص (تعداد معین اجزاء) را در نظر بگیریم، این مجموعه را یک سیستم آمیخته می‌نامند. در واقع، یک سیستم آمیخته ترکیبی احتمالاتی از چندین سیستم منسجم با ساختارهای مختلف است. برای مطالعه دقیق‌تر این مفاهیم، می‌توان به کتاب **بارلو و پروشان (۱۹۷۵)** مراجعه کرد، که از منابع اصلی در نظریه قابلیت اطمینان است. یکی از ابزارهای تحلیلی مهم در حوزه نظریه قابلیت اطمینان، بردارهای علامت سیستم هستند. نظریه و مبانی بردارهای علامت سیستم به‌طور جامع در کتاب **سامانیگو (۲۰۰۷)** معرفی و توسعه داده شده است.

فرض کنید $T(n) = \phi(X_1, \dots, X_n)$ طول عمر یک سیستم منسجم از مرتبه n باشد، که طول عمر مولفه‌های آن $X_1, \dots, X_n$ است. بردار n مولفه‌ای $s = (s_1, \dots, s_n)$ را بردار علامت یک سیستم با طول عمر $T(n)$ گویند، هرگاه مولفه i -ام آن به صورت $s_i = P(T(n) = X_{i:n})$ تعریف شود، طوری که $\sum_{i=1}^n s_i = 1$ باشد. سیستم دوگان^۱ متناظر با سیستم با طول عمر $T(n)$ دارای بردار علامت به صورت $s^D = (s_n, \dots, s_1)$ است. اگر X_i ها دارای توزیع مشترک و مستقل از هم باشند، آن‌گاه با توجه به **سامانیگو (۲۰۰۷)** نمایش آمیخته

$$\bar{F}_{T(n)}(t) = P(T(n) > t) = \sum_{i=1}^n s_i P(X_{i:n} > t), \quad (1)$$

را برای تابع بقای $T(n)$ داریم، که در آن $X_{i:n}$ ، i -امین آماره مرتب در نمونه تصادفی $X_1, \dots, X_n$ است. سیستم با طول عمر $T(n)$ را مطابق با آن‌چه گفته شده در نظر بگیرید. فرض کنید سیستم فوق در زمان بازرسی t باشد. دو حالت برای وضعیت سیستم در زمان بازرسی t ایجاد می‌شود:

۱. سیستم در زمان t در حال کار باشد (یعنی $T(n) > t$).
۲. سیستم در زمان t یا پیش از آن از کار افتاده باشد (یعنی $T(n) \leq t$).

تحت شرط اول، سیستم به عنوان استفاده شده (دست دوم یا مستعمل) شناخته می‌شود که طول عمر باقیمانده آن به صورت $t - T(n)$ تعریف می‌شود. تحت شرط دوم، زمان غیر فعال بوده و سیستم به صورت $t - T(n) | T(n) \leq t$ در نظر گرفته می‌شود. در این مقاله با توجه به این‌که هدف مطالعه پیچیدگی سیستم‌های آمیخته شرطی با طول عمر $t - T(n) | T(n) \leq t$ و $T(n) - t | T(n) > t$ است، در ادامه برای هر یک از این مفاهیم توضیحاتی را ارائه خواهیم داد. مفهوم طول عمر باقیمانده در نظریه قابلیت اطمینان اهمیت دارد و در مهندسی تحلیل بقا و مسائل اقتصادی به طور گسترده استفاده می‌شود. فرض کنید سیستم با طول عمر $T(n)$ در

¹Dual System

زمان $t = 0$ شروع به کار می‌کند و در زمان $t > 0$ هنوز فعال است. در این حالت طول عمر باقیمانده سیستم با شرط $T(n) > t$ به صورت $T(n) - t | T(n) > t$ تعریف می‌شود.

در بسیاری از موارد در دنیای واقعی سوابق خرابی سیستم از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است زیرا تحلیل این سوابق به پیش‌بینی و بهبود عملکرد سیستم کمک می‌کند. اگر یک سیستم منسجم با طول عمر $T(n)$ در لحظه t یا پیش از آن دچار خرابی گردد، در این صورت مدت زمانی که از خرابی سیستم گذشته است را می‌توان توسط یک متغیر تصادفی شرطی به صورت $t - T(n) | T(n) \leq t$ اندازه‌گیری کرد. این کمیت در نظریه قابلیت اعتماد به عنوان زمان غیر فعال بودن سیستم شناخته می‌شود.

در حوزه نظریه اطلاع، مفهوم آنتروپی برای سنجش میزان عدم قطعیت مرتبط با یک متغیر تصادفی به‌کار می‌رود. این ایده اولین بار توسط **شانون (۱۹۴۸)** مطرح شد. اگر متغیر تصادفی پیوسته X دارای تابع چگالی احتمال $f(x)$ باشد در این صورت آنتروپی آن به صورت $H(X) = -E(\log f(X))$ تعریف می‌شود، که در آن "log" تابع لگاریتم طبیعی است. چند دهه بعد **لد و همکارانش (۲۰۱۵)** رویکرد تازه‌ای برای اندازه‌گیری میزان عدم قطعیت پیشنهاد کردند که آن را اکستروپی نامیدند. بر اساس تعریف **لد و همکارانش (۲۰۱۵)**، اکستروپی متغیر تصادفی پیوسته X با تابع چگالی احتمال $f(x)$ به صورت $J(X) = -\frac{1}{2} E[f(F^{-1}(U))]$ تعریف می‌شود، که در آن F تابع توزیع تجمعی متغیر تصادفی X و متغیر تصادفی U دارای توزیع یکنواخت پیوسته بر بازه $[0, 1]$ است.

مطالعات زیادی در زمینه‌های مختلف اکستروپی انجام شده است که می‌توان به **نظام‌پور و همکاران (۱۴۰۴)**، **اکبری و همکاران (۱۴۰۲)**، **علیزاده و علیزاده (۲۰۲۵)**، **گیری و همکاران (۲۰۲۵)**، **راجش و ساجیلی (۲۰۲۵)**، **پندی و کندا (۲۰۲۵)**، **پاکدامن و علی‌زاده (b, a ۲۰۲۵)**، **سادر و نیر (۲۰۲۵)**، **کایال (۲۰۲۱)**، **و جوز و سادر (۲۰۱۹)** اشاره کرد. در بسیاری از سیستم‌ها، طول عمر باقیمانده و مدت‌زمان غیرفعال سیستم‌ها نقش اصلی در درک قابلیت اطمینان و کارایی آن‌ها ایفا می‌کند. به همین دلیل معرفی شاخصی به نام اکستروپی باقیمانده تجمعی^۱ (CRJ) به عنوان ابزاری نوین در تحلیل قابلیت اطمینان گامی ارزشمند و رو به جلو محسوب می‌شود. **جهانشاهی و همکاران (۲۰۲۰)**، CRJ متغیر تصادفی X با تابع بقای $\bar{F}(x) = 1 - F(x)$ را به صورت

$$CRJ(X) = -\frac{1}{2} \int_0^{\infty} \bar{F}^2(x) dx, \quad (2)$$

معرفی کردند. یکی دیگر از پیشرفت‌های این حوزه، معرفی معیار واگرایی اکستروپی باقیمانده تجمعی ینسن^۲ (JCRJ) است، که با ترکیب CRJ و واگرایی جنسن تعریف می‌شود (**کیو، ۲۰۱۷**؛ **چاکرابورتی و پردهان، ۲۰۲۴**).

ساختار مقاله به شرح زیر تنظیم شده است. در بخش ۲، یک عبارت ریاضی برای JCRJ طول عمر باقیمانده سیستم بر اساس بردار ضرایب شرطی ارائه می‌شود. در بخش ۳، به مطالعه پیچیدگی طول عمر باقیمانده سیستم و دوگان آن‌ها در حالتی که مولفه‌های سیستم دارای توزیع گاما است، می‌پردازیم. در بخش ۴ یک عبارت ریاضی

¹Cumulative Residual Extropy

²Jensen Cumulative Residual Extropy Divergence

برای JCRJ مدت زمان غیر فعال بودن سیستم بر اساس بردار ضرایب شرطی به دست می‌آید. در بخش ۵ به مطالعه پیچیدگی سیستم‌ها و دوگان‌ها بر اساس مدت زمان غیر فعال بودن‌ها در توزیع گاما می‌پردازیم. در پایان، در بخش ۶ مهم‌ترین نتایج به دست آمده مرور و خلاصه سازی می‌شوند.

۲ معیار واگرایی اکستروپی باقیمانده تجمعی ینسن در سیستم‌های آمیخته

فرض کنید متغیرهای تصادفی $X_1, \dots, X_n$ طول عمرهای مستقل و هم‌توزیع مولفه‌هایی باشند که دارای تابع توزیع تجمعی F در یک سیستم منسجم از مرتبه n با بردار علامت s هستند. متغیر تصادفی $T(n)$ را طول عمر سیستم فوق در نظر بگیرید که دارای تابع چگالی احتمال $f_{T(n)}(\cdot)$ و تابع توزیع تجمعی $F_{T(n)}(\cdot)$ است، که در آن $f_{T(n)}(\cdot) \geq 0$ روی بازه $(0, +\infty)$ پیوسته و انتگرال پذیر است و از طرفی $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_{T(n)}(x) = 1$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_{T(n)}(x) = 0$ است. این شرایط تضمین می‌کند که توابع بقا و توزیع‌های شرطی رفتار مناسبی در نقاط مرزی داشته و انتگرال‌های ظاهر شده در تعریف JCRJ همگرا باشند. شرایط گفته شده برای سایر توابع چگالی احتمال، توابع توزیع و بقا بیان شده برای متغیرهای تصادفی این مقاله نیز برقرار است. همچنین فرض کنید سیستم در زمان $t = 0$ شروع به کار کرده و در لحظه $t > 0$ همچنان در حال کار است. برای سهولت در نمادگذاری، در ادامه مواردی را به صورت خلاصه معرفی می‌کنیم. متغیرهای تصادفی $Y_{i:n} - t | Y_{i:n} > t, T(n) - t | T(n) > t$ و $Y_{i:n} - t | Y_{i:n} > t$ و $Y_{i:n} - t | Y_{i:n} > t$ را به ترتیب با متغیرهای تصادفی $T(n, t)$ و $Y_{i:n, t}$ نشان می‌دهیم. همچنین فرض کنید تابع چگالی احتمال و تابع توزیع تجمعی متغیرهای تصادفی $T(n, t)$ (یا $Y_{i, t}$) را به ترتیب با $f_{T(n, t)}(\cdot)$ و $F_{T(n, t)}(\cdot)$ یا $f_{i:n, t}(\cdot)$ و $F_{i:n, t}(\cdot)$ نشان می‌دهیم. با استفاده از رابطه (۱) داریم:

$$\bar{F}_{T(n, t)}(x) = \sum_{i=1}^n p_i(t) \bar{F}_{i:n, t}(x), \quad f_{T(n, t)}(x) = \sum_{i=1}^n p_i(t) f_{i:n, t}(x), \quad (3)$$

که در آن $\bar{F}_{T(n)}(t) = 1 - F_{T(n)}(t)$ و $\bar{F}_{T(n, t)}(x) = 1 - F_{T(n, t)}(x)$ ، $p_i(t) = \frac{s_i P(X_{i:n} > t)}{F_{T(n)}(t)}$ بقا سیستم‌های با طول عمرهای به ترتیب $T(n, t)$ و $T(n)$ می‌باشند. دقت کنید که در صورت عدم وجود شرط استقلال و هم‌توزیعی، روابط فوق در سیستم‌های آمیخته استفاده شده باید در چارچوب وابستگی متغیرها به روز رسانی شوند. در نظریه قابلیت اطمینان این نوع سیستم، سیستم دست دوم یا مستعمل یا استفاده شده نامیده می‌شود و طول عمر باقیمانده، نشان دهنده زمان باقیمانده عمر سیستم پس از رسیدن به سن t است. **ناوارو و همکاران (۲۰۰۸)** نمایش مشابه معادله (۱) برای تابع بقا طول عمر باقیمانده سیستم به صورت رابطه (۳) ارائه دادند. در سال‌های اخیر مطالعات مختلفی بر پایه مقایسه‌های تصادفی بین طول عمر باقیمانده سیستم‌ها انجام شده است. از جمله این پژوهش‌ها می‌توان به **اریلماز (۲۰۱۰، ۲۰۱۳)**، **دوان و خالدی (۲۰۱۴)**، **گلیفروشان و همکاران (۲۰۱۲)**، **کوچار و همکاران (۱۹۹۹)** و **ناوارو و همکاران (۲۰۰۸)** اشاره کرد. **چاکرابورتی و پردهان (۲۰۲۴)** معیار واگرایی

$JCRJ$ را برحسب تابع CRJ پیشنهاد کردند. این نویسندگان معیار واگرایی $JCRJ$ میان سیستم با طول عمر $T(n)$ و مقادیر آماره‌های مرتب طول عمر مولفه‌های $X_{1:n}, \dots, X_{n:n}$ را به صورت

$$JCRJ(T : Y_{1:n}, \dots, Y_{n:n}) = \xi J(T) - \sum_{i=1}^n s_i \xi J(Y_{i:n}), \quad (۴)$$

تعریف کردند. به قیاس با رابطه (۴)، واگرایی $JCRJ$ میان یک سیستم آمیخته استفاده شده با طول عمر $T(n, t)$ و مجموعه مولفه‌های آن یعنی $X_{1:n,t}, \dots, X_{n:n,t}$ به صورت

$$\begin{aligned} JCRJ(T(n, t) : X_{1:n,t}, \dots, X_{n:n,t}) &= \xi J(T(n, t)) - \sum_{i=1}^n p_i(t) \xi J(X_{i:n,t}), \\ &= -\frac{1}{2} \int_{G(t)} \frac{\bar{G}_{V_t}^*(v) - \sum_{i=1}^n p_i(t) \bar{G}_{V_{t,i}}^*(v)}{g(G^{-1}(v))} dv. \end{aligned} \quad (۵)$$

تعریف می‌شود. معیار واگرایی $JCRJ$ همواره نامنفی است، زیرا با استفاده از نامساوی ینسن می‌توان نشان داد که

$$\xi J(T(n, t)) \geq \sum_{i=1}^n p_i(t) \xi J(X_{i:n,t}),$$

و تساوی برقرار است اگر سیستم مورد نظر k از n باشد. بنابراین $JCRJ(T(n, t), X_{1:n,t}, \dots, X_{n:n,t})$ برای سیستم k از n استفاده شده برابر صفر است. معیار واگرایی $JCRJ$ ، پیچیدگی یک سیستم آمیخته استفاده شده را در مقایسه با یک سیستم k از n (که از همان مولفه‌های مستقل و هم‌توزیع با توزیع تجمعی $\frac{\bar{F}(x+t)}{F(t)}$ تشکیل شده) اندازه‌گیری می‌کند.

۳ سیستم‌های آمیخته و دوگان آن‌ها با مولفه‌های گاما

برای بررسی دقیق‌تر رفتار معیار واگرایی $JCRJ$ ، سیستم‌هایی با چهار مولفه مستقل و هم‌توزیع از توزیع گاما و همچنین ساختار دوگان آن‌ها را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. جدول ۱ بیست سیستم ترکیبی با چهار مولفه را نشان می‌دهد، که شامل ساختارهای مربوط به طول عمر سیستم $T(۴)$ و بردارهای علامت آن‌ها است (اسدی و همکاران، ۲۰۱۶). این ۲۰ سیستم تنها متناظر با ۱۷ بردار علامت مختلف هستند و بر اساس دوگانگی بردار علامت سیستم‌ها به ۸ گروه طبقه‌بندی شده‌اند. تمام سیستم‌هایی که دارای بردار علامت دوگان هستند، در یک گروه قرار دارند.

در گروه اول با ساده‌ترین ساختارها روبه‌رو هستیم، سیستم سری و سیستم موازی در دو انتهای طیف پیچیدگی قرار دارند. سیستم سری با بردار علامت $(۰, ۰, ۰, ۱)$ به شدت شکننده است، زیرا خرابی اولین مؤلفه به معنای

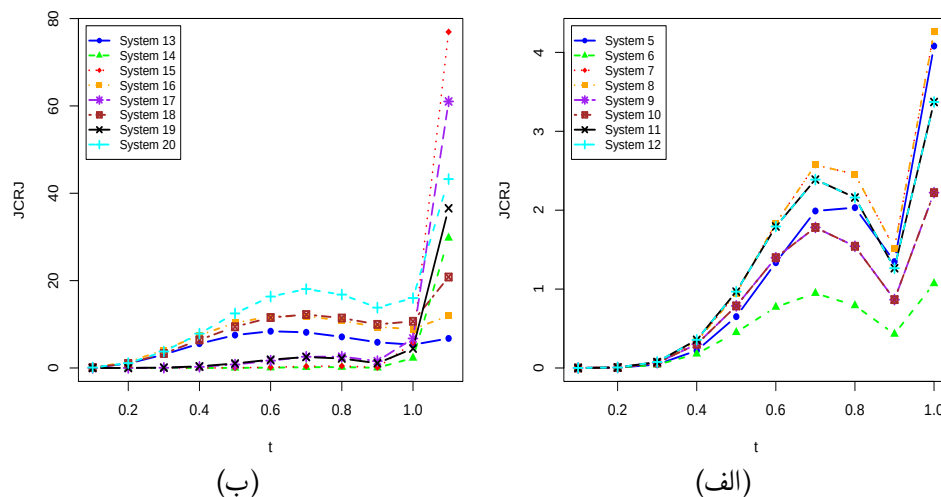
جدول ۱. سیستم‌های منسجم با چهار مولفه طبقه‌بندی شده بر اساس بردارهای علامت دوگان.

گروه	سیستم	$\phi(Y_1, Y_2, Y_3, Y_4)$	(s_1, s_2, s_3, s_4)
۱	۱	$X_{1:4}$ (سری)	$(1, 0, 0, 0)$
	۲	$X_{2:4}$ (موازی)	$(0, 0, 0, 1)$
	۳	$X_{2:4}$ (۲ از ۴)	$(0, 0, 1, 0)$
	۴	$X_{3:4}$ (۳ از ۴)	$(0, 1, 0, 0)$
۲	۵	$\max(X_{1:2}, \min(X_1, X_3, X_4), \min(X_2, X_3, X_4))$	$(0, \frac{5}{6}, \frac{1}{6}, 0)$
	۶	$\min(X_{1:2}, \max(X_1, X_3, X_4), \max(X_2, X_3, X_4))$	$(0, \frac{1}{6}, \frac{5}{6}, 0)$
۳	۷	$\max(X_{1:2}, \min(X_3, X_4))$	$(0, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0)$
	۸	$\max(X_{1:2}, \min(X_1, X_3), \min(X_2, X_3, X_4))$	$(0, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0)$
	۹	$\min(X_{2:2}, \max(X_3, X_4))$	$(0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0)$
	۱۰	$\max(\min(X_1, \min(X_2, X_3, X_4)), \min(X_2, X_3, X_4))$	$(0, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0)$
۴	۱۱	$\max(X_{1:2}, \min(X_2, X_3), \min(X_3, X_4))$	$(0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0)$
	۱۲	$\max(\min(X_1, \max(X_2, X_3, X_4)), \min(X_2, X_3, X_4))$	$(0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0)$
۵	۱۳	$\min(Y_{1:3}, Y_4)$	$(0, 0, \frac{1}{4}, \frac{3}{4})$
	۱۴	$\max(Y_{1:3}, Y_4)$	$(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, 0, 0)$
۶	۱۵	$\max(Y_{1:3}, \min(Y_2, Y_3, Y_4))$	$(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 0)$
	۱۶	$\max(Y_1, Y_2, \min(Y_3, Y_4))$	$(0, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$
۷	۱۷	$\min(Y_{2:2}, \max(Y_1, Y_3), Y_4)$	$(\frac{3}{12}, \frac{7}{12}, \frac{2}{12}, 0)$
	۱۸	$\max(Y_1, \min(Y_2, Y_3), \min(X_3, X_4))$	$(0, \frac{1}{12}, \frac{7}{12}, \frac{2}{12})$
۸	۱۹	$\min(Y_{2:3}, Y_4)$	$(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 0)$
	۲۰	$\max(Y_1, \min(Y_2, Y_3, Y_4))$	$(0, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$

خرابی کل سیستم است، در حالی که سیستم موازی با بردار علامت $(0, 0, 0, 1)$ مقاوم‌ترین حالت را نشان می‌دهد چون تنها با خرابی همه اجزا از کار می‌افتد. بین این دو، ساختارهای k -از- n مانند $(0, 1, 0, 0)$ برای ۳-از-۴ و $(0, 0, 1, 0)$ برای ۲-از-۴ قرار می‌گیرند که ترکیبی از این دو هستند و میزان تحمل خرابی‌شان نسبت به سیستم‌های سری و موازی متعادل‌تر است. به همین دلیل این گروه هم مرجع مقایسه برای بقیه گروه‌ها محسوب می‌شود، و هم نشان می‌دهد که بردار علامت چگونه به صورت مستقیم خاصیت قابلیت اعتماد سیستم را به تصویر می‌کشد.

در گروه‌های میانی (۲ تا ۴)، پیچیدگی سیستم‌ها افزایش پیدا می‌کند، چرا که بردارهای علامت به صورت ترکیبی توزیع می‌شوند و وزن‌ها بین موقعیت‌های مختلف تقسیم شده‌اند. مثلاً در گروه دوم، سیستم‌ها با بردارهایی مانند $(0, \frac{5}{6}, \frac{1}{6}, 0)$ یا دوگان آن، $(0, \frac{1}{6}, \frac{5}{6}, 0)$ نشان می‌دهند که اهمیت اجزای میانی بیشتر است و شکست یا بقا در درجات خاصی از ترتیب خرابی‌ها بر کل سیستم غلبه دارد. در گروه سوم و چهارم نیز چنین الگوهایی دیده می‌شود، اما با تقارن بیشتری، بردارهایی مانند $(0, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0)$ و $(0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0)$ یا $(0, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 0)$. این توزیع‌های بردار علامت انعطاف بیشتری را نسبت به بردارهای علامت سیستم‌های سری و موازی خالص نشان می‌دهند، زیرا اجزای مختلف با وزن تقریباً متعادل در تعیین عمر سیستم مشارکت دارند. به همین دلیل می‌توان گفت این گروه‌ها نمایانگر سیستم‌هایی هستند که بین شکنندگی و مقاومت مطلق قرار دارند و پیچیدگی‌شان از ترکیب این رفتارها ناشی می‌شود.

اما گروه‌های پایانی (۵ تا ۸) پیچیدگی بیشتری دارند، چرا که وزن‌ها به شکل نامتقارن میان موقعیت‌ها توزیع شده‌اند و ترکیب‌های خاص‌تری از وابستگی اجزا ایجاد می‌کنند. مثلاً در گروه پنجم $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 0, 0)$ و دوگانش $(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, 0, 0)$ نشان می‌دهد که سیستم یا به شدت وابسته به اجزای پایانی است یا برعکس به اجزای اولیه. در گروه ششم نیز دوگانگی جالبی دیده می‌شود $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 0, 0)$ در برابر $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ که تقارن مطلق در نقش اجزای اول و آخر را بیان می‌کند. گروه‌های هفتم و هشتم از همه پیچیده‌ترند، زیرا بردارهای آن‌ها مثل $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0)$ یا $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 0)$ نشان می‌دهند که نقش اجزا نه تنها متوازن نیست، بلکه به صورت پراکنده و با وزن‌های متفاوت توزیع شده است. این باعث می‌شود که چنین سیستم‌هایی رفتارهایی بسیار متنوع‌تر از سیستم‌های ساده یا متقارن داشته باشند و از نظر تحلیل قابلیت اعتماد، لایه‌های بیشتری از پیچیدگی را شامل شوند. آنچه گفته شد تفسیر شهودی از پیچیدگی سیستم‌ها بر مبنای بردار علامت آن‌ها بود، حال می‌خواهیم به کمک معیار JCRJ این پیچیدگی را در این سیستم‌ها کمی سازی کنیم. با رسم JCRJ مربوط به سیستم‌های ۵ تا ۲۰ در شکل ۱ ملاحظه می‌شود که سیستم‌های



شکل ۱. JCRJ سیستم‌های آمیخته استفاده شده‌الف: ۵ تا ۱۲ و ب: ۱۳ تا ۲۰ از جدول ۱.

۷ و ۸ در تمام بازه‌های زمانی بیشترین سطح پیچیدگی را دارند. این بدان معناست که ساختار این سیستم‌ها به گونه‌ای است که تنوع و ناپایداری در رفتار آن‌ها نسبت به سایر سیستم‌ها بالاتر است. به بیان دیگر، احتمال تغییرات غیرمنتظره در زمان طول عمر باقیمانده اجزای سیستم و تعامل بین مؤلفه‌ها در این سیستم‌ها بیشتر است، که آن‌ها را به پیچیده‌ترین سیستم‌ها در میان هشت سیستم ۵ تا ۱۲ تبدیل می‌کند.

سیستم‌های ۱۱ و ۱۲ با وجود اینکه از لحاظ JCRJ پایین‌تر از سیستم‌های ۷ و ۸ قرار دارند، همچنان در رده بالای پیچیدگی قرار می‌گیرند. این امر نشان می‌دهد که این سیستم‌ها نیز دارای تعامل قابل توجه بین اجزای خود هستند، اما شدت تغییرات آن‌ها نسبت به ۷ و ۸ کمتر است. به همین دلیل می‌توان آن‌ها را به عنوان سیستم‌های

پیچیده متوسط شناسایی کرد که همواره در سطح بالایی از پیچیدگی نسبی قرار دارند.

سیستم‌های ۹ و ۱۰ در رده میانی پیچیدگی قرار دارند و رفتار آن‌ها در مقایسه با سیستم‌های پیچیده‌تر نسبتاً پایدارتر است، اما هنوز می‌توان تعاملات داخلی آن‌ها را قابل توجه دانست. سیستم ۶ کمترین سطح پیچیدگی را دارد و میانگین JCRJ آن پایین است. این سیستم بیشتر ساختار ساده دارد و تغییرات در طول عمر باقیمانده مؤلفه‌هایشان تأثیر کمتری بر کل سیستم می‌گذارد، بنابراین پایدارتر و قابل پیش‌بینی‌تر از سایر سیستم‌ها است.

مقایسه سیستم‌های ۵ تا ۱۲ نشان می‌دهد که رتبه‌بندی پیچیدگی نسبی سیستم‌ها تقریباً ثابت است و بازه‌های زمانی تأثیر کمی بر تغییر رتبه‌بندی دارند. این پایداری در رتبه‌ها بیانگر آن است که ساختار سیستم‌ها نقش اصلی در تعیین پیچیدگی ایفا می‌کند و تأثیر زمان بر رفتار کل سیستم‌ها نسبتاً یکنواخت است. بنابراین، می‌توان سیستم‌ها را بر اساس JCRJ به گروه‌های پیچیده‌ترین، پیچیده متوسط، و ساده تقسیم‌بندی کرد و این دسته‌بندی برای طراحی و تحلیل سیستم‌های مشابه قابل استفاده است.

سیستم‌های ۵ و ۶ ساختاری دوگان دارند، اما JCRJ آن‌ها در طول بازه‌های زمانی متفاوت است. سیستم ۵ در بازه‌های زمانی بالاتر، JCRJ بیشتری نسبت به سیستم ۶ دارد، که نشان می‌دهد هرچند دوگان هستند، پیچیدگی آن‌ها کاملاً یکسان نیست و تغییرات در زمان طول عمر باقیمانده مؤلفه‌ها باعث تفاوت در سطح پیچیدگی می‌شود. چهار سیستم ۷، ۸، ۹ و ۱۰ نیز دوگان یکدیگر هستند، اما سیستم‌های ۷ و ۸ بیشترین JCRJ را دارند و سیستم‌های ۹ و ۱۰ نسبتاً پایین‌تر هستند. این نشان می‌دهد که دوگان بودن سیستم‌ها به معنی یکسان بودن کامل پیچیدگی نیست؛ بلکه ساختار مشابه ممکن است منجر به سطح کلی پیچیدگی مشابه شود، اما وزن و ترکیب مؤلفه‌ها تفاوت ایجاد می‌کند. از طرفی JCRJ سیستم‌های ۷ و ۸ برابر است و همچنین JCRJ سیستم‌های ۹ و ۱۰ نیز برابر است. دو سیستم ۱۱ و ۱۲ نیز دوگان هستند و JCRJ آن‌ها برابر است، بنابراین در سطح متوسط پیچیدگی قرار می‌گیرند و رفتارشان نسبت به تغییرات زمانی یکنواخت است.

به طور خلاصه، دوگان بودن سیستم‌ها تضمین‌کننده مطلقاً برابر بودن JCRJ نیست، اما امکان مقایسه دسته‌ای را فراهم می‌کند. گروه‌هایی که دوگان هستند، معمولاً در سطح مشابهی از پیچیدگی قرار می‌گیرند، اما ترتیب دقیق JCRJ در بین آن‌ها می‌تواند با جزئیات وزن مؤلفه‌ها و تعاملاتشان تغییر کند. رفتار هندسی JCRJ طول عمر باقیمانده سیستم‌های ۱۳ تا ۲۰ در شکل ۱ بیانگر آن است که در بازه ابتدایی $t \in [0.4, 0.8]$ ، سیستم‌های ۱۴ و ۱۵ از نظر پیچیدگی اطلاعاتی کمترین نوسان را دارند و نسبت به دیگر سیستم‌ها رفتار پایداری از خود نشان می‌دهند. این یعنی در شرایط اولیه، سهم هر مؤلفه در انتقال اطلاعات سیستم محدود و مشخص است. سیستم‌هایی با مقادیر اولیه پایین JCRJ نشان‌دهنده ساختار سلسله‌مراتبی قابل اعتماد هستند و پیچیدگی اطلاعاتی نسبتاً کم دارند. در مقابل سیستم‌های ۱۶ و ۲۰ با شیب بالاتر، نشان می‌دهند که ترکیب مؤلفه‌ها سریعاً بر پیچیدگی کل سیستم اثرگذار است.

در شکل ۱، در بازه میانی $t \in [0.5, 0.8]$ ، همگرایی نسبی برخی سیستم‌ها مثل ۱۷ و ۱۹ (۱۶ و ۱۸) دیده می‌شود؛ یعنی نرخ رشد JCRJ کاهش می‌یابد و سیستم به تعادل نسبی در توزیع پیچیدگی می‌رسد. این بازتابی از تعامل مؤلفه‌هاست که با افزایش t ، اثر ترکیبی مؤلفه‌های مهم کاهش می‌یابد و مؤلفه‌های کم اهمیت‌تر نقش بیشتری پیدا می‌کنند. در بازه $t \in (0.8, 1]$ مشاهده می‌شود که سیستم ۲۰ تقریباً همیشه بالاترین مقدار شاخص پیچیدگی را

جدول ۲. روند JCRJ برای سیستم‌ها و بازه‌های زمانی و رتبه‌بندی بر اساس میانگین JCRJ واقعی.

بازه زمانی				
سیستم	[۰/۱, ۰/۴]	[۰/۵, ۰/۸]	[۰/۹, ۱/۱]	رتبه
۵	کم	متوسط	متوسط	۴
۶	کم	کم	کم	۵
۷	متوسط	زیاد	زیاد	۱
۸	متوسط	زیاد	زیاد	۱
۹	متوسط/کم	متوسط	متوسط	۳
۱۰	متوسط/کم	متوسط	متوسط	۳
۱۱	متوسط	زیاد	زیاد	۲
۱۲	متوسط	زیاد	زیاد	۲

دارد، و این نشان می‌دهد ساختار آن به‌صورت پایدار پیچیده باقی می‌ماند. پس از آن سیستم ۱۸ و سیستم ۱۶ قرار می‌گیرند که پیچیدگی نسبتاً بالایی دارند ولی فاصله کمی با یکدیگر دارند. در مقابل، سیستم‌های ۱۴ و ۱۵ پایین‌ترین مقادیر را دارند که بیانگر سادگی اجزای آن‌ها است. به‌طور کلی رتبه‌بندی در کل بازه پایدار باقی می‌ماند، هرچند فاصله عددی بین سیستم‌ها با تغییر زمان کمی تغییر می‌کند. در انتهای بازه زمانی، یعنی $t \in (1, 1/1]$ رفتارها مجدداً متفاوت می‌شوند. در این قسمت، بعضی از سیستم‌ها که در بازه قبلی نزدیک هم بودند (مثل ۱۶ و ۱۸)، دوباره کمی از هم فاصله می‌گیرند. سیستم ۱۵ بیشترین پیچیدگی را دارد. سیستم ۱۵ و سیستم ۱۷ روندی متمایز از بقیه پیدا می‌کنند و شکاف بیشتری نسبت به سیستم‌های پیچیده‌تر ایجاد می‌شود. این نشان می‌دهد که در شرایط زمانی طولانی‌تر، تفاوت بین سیستم‌های ساده و پیچیده بار دیگر پررنگ‌تر می‌شود. اگر کل بازه را در نظر بگیریم، سیستم‌ها تقریباً رتبه‌های ثابتی دارند، اما در مقاطع خاص (مثلاً ۰/۸ تا ۱) اختلاف‌ها کمتر می‌شود و در مقاطع دیگر (۱ تا ۱/۱) دوباره فاصله‌ها برجسته‌تر می‌شوند. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که پایداری رتبه‌بندی ویژگی اصلی این مدل‌هاست، اما شدت تفاوت‌ها به زمان وابسته است. از دید طراحی، اگر هدف داشتن سیستمی با پیچیدگی پایدار و بالا باشد، سیستم ۲۰ بهترین گزینه است؛ ولی اگر سادگی و پیش‌بینی‌پذیری اهمیت بیشتری داشته باشد، سیستم ۱۷ مناسب‌تر است، به‌ویژه در بازه‌های بلندمدت که فاصله آن با سایر سیستم‌ها بیشتر هم می‌شود.

جدول ۳. مقایسه پیچیدگی طول عمر باقیمانده سیستم‌های ۱۳ تا ۲۰ در بازه‌های زمانی مختلف.

بازه زمانی	پیچیده‌ترین سیستم‌ها	پیچیدگی متوسط	ساده‌ترین سیستم‌ها
۰/۴ - ۰/۱	۲۰	۱۳ و ۱۸	۱۴ و ۱۵
۰/۵ - ۰/۹	۲۰	۱۶ و ۱۸ و ۱۳	۱۴ و ۱۵
۰/۹ - ۱	۲۰	۱۶ و ۱۸ و ۱۳	۱۴
۱ - ۱/۱	۱۵	۱۶ و ۱۸ و ۱۳	۱۴

برای ارزیابی دقیق‌تر رفتار شاخص JCRJ تحت سیستم‌های مختلف آمیخته ۵ تا ۲۰ و همچنین بررسی حساسیت آن‌ها نسبت به مقادیر مختلف آستانه t ، یک مطالعه شبیه‌سازی برای نمودارهای شکل ۱ انجام شده است. در این

شبیه‌سازی، ابتدا برای هر سیستم، توزیع پایه را با استفاده از توزیع گاما با پارامتر مقیاس ۰.۵ و پارامتر شکل ۱ شبیه‌سازی کرده و مقادیر و توابع مرتبط با آماره‌های مرتب محاسبه شدند. سپس با بهره‌گیری از روش مونت کارلو و تولید ۱۰^۴ نمونه مستقل از توزیع‌های مورد بررسی، مقادیر تقریبی $\overline{G}_{V_t}(v)$ و $\overline{G}_{V_{t,i}}(v)$ ساخته شده و مقدار انتگرال تعریف شده در رابطه (۵) برای هر مقدار t تقریب زده شد. برای هر مقدار t ، علاوه بر مقدار JCRJ شبیه‌سازی شده بازه $Mean \pm SD$ برای بررسی دقیق‌تر و دیدن پراکندگی و پایداری نتایج محاسبه و در در جدول ۴ ارائه شد. این رویکرد امکان مقایسه دقیق بین سیستم‌ها را فراهم کرده و نشان می‌دهد که JCRJ چگونه نسبت به ساختار سیستم و مقدار آستانه t تغییر می‌کند.

جدول ۴. مقادیر شبیه‌سازی شده JCRJ برای سیستم‌های ۵ تا ۱۲ در شکل‌های ۱ و ۲ به ازای دو مقدار t

System	t	JCRJ	Mean $\pm$ SD
۵	۰/۲	۰/۰۰۳۶	[۰/۰۰۳۲, ۰/۰۰۳۸]
	۰/۶	۱/۳۳۵	[۱/۲۰۰, ۱/۴۶۸]
۶	۰/۲	۰/۰۰۳۵	[۰/۰۰۳۱, ۰/۰۰۳۷]
	۰/۶	۰/۷۷۵	[۰/۶۹۵, ۰/۸۴۹]
۷	۰/۲	۰/۰۰۵۵	[۰/۰۰۴۹, ۰/۰۰۵۹]
	۰/۶	۱/۸۳۵	[۱/۶۵۱, ۲/۰۱۹]
۸	۰/۲	۰/۰۰۵۳	[۰/۰۰۴۹, ۰/۰۰۵۹]
	۰/۶	۱/۸۳۴	[۱/۶۵۰, ۲/۰۱۸]
۹	۰/۲	۰/۰۰۵۵	[۰/۰۰۴۹, ۰/۰۰۵۹]
	۰/۶	۱/۳۹۸	[۱/۲۵۸, ۱/۵۳۸]
۱۰	۰/۲	۰/۰۰۵۴	[۰/۰۰۴۹, ۰/۰۰۵۹]
	۰/۶	۱/۳۹۶	[۱/۲۵۷, ۱/۵۳۷]
۱۱	۰/۲	۰/۰۰۶۰	[۰/۰۰۵۵, ۰/۰۰۶۷]
	۰/۶	۱/۷۹۵	[۱/۶۱۶, ۱/۹۷۲]
۱۲	۰/۲	۰/۰۰۶۱	[۰/۰۰۵۵, ۰/۰۰۶۷]
	۰/۶	۱/۷۹۲	[۱/۶۱۳, ۱/۹۷۲]
۱۳	۰/۲	۱/۰۱۱۳	[۰/۹۱۰۲, ۱/۱۱۲۴]
	۰/۶	۸/۴۰۷۸	[۷/۵۶۷۰, ۹/۲۴۸۶]
۱۴	۰/۲	۰/۰۰۰۰	[۰/۰۰۰۰, ۰/۰۰۰۰]
	۰/۶	۰/۰۷۴۰	[۰/۰۶۶۶, ۰/۰۸۱۴]
۱۵	۰/۲	۰/۰۰۰۰	[۰/۰۰۰۰, ۰/۰۰۰۰]
	۰/۶	۰/۱۵۴۷	[۰/۱۳۹۲, ۰/۱۷۰۲]
۱۶	۰/۲	۱/۳۴۹۰	[۱/۲۱۴۱, ۱/۴۸۳۹]
	۰/۶	۱۱/۸۲۸۱	[۱۰/۶۴۵۳, ۱۳/۰۱۰۹]
۱۷	۰/۲	۰/۰۰۳۷	[۰/۰۰۳۳, ۰/۰۰۴۱]
	۰/۶	۱/۶۷۸۵	[۱/۵۱۰۷, ۱/۸۴۶۳]
۱۸	۰/۲	۱/۰۴۶۱	[۰/۹۴۱۵, ۱/۱۵۰۷]
	۰/۶	۱۱/۵۴۴۹	[۱۰/۳۹۰۴, ۱۲/۶۹۹۴]
۱۹	۰/۲	۰/۰۰۶۲	[۰/۰۰۵۶, ۰/۰۰۶۸]
	۰/۶	۱/۹۰۱۰	[۱/۷۱۰۹, ۲/۰۹۱۱]
۲۰	۰/۲	۱/۱۱۱۱	[۰/۹۹۹۹, ۱/۲۲۲۲]
	۰/۶	۱۶/۳۵۱۳	[۱۴/۷۱۶۲, ۱۷/۹۸۶۴]

۴ معیار واگرایی اکستروپی باقیمانده تجمعی ینسن

فرض کنید متغیرهای تصادفی $Y_1, \dots, Y_n$ طول عمرهای مستقل و هم‌توزیع مولفه‌هایی باشد که دارای تابع توزیع تجمعی F در یک سیستم منسجم از مرتبه n با بردار علامت s باشند. متغیر تصادفی $T(n)$ را طول عمر سیستم در نظر بگیرید که دارای تابع چگالی احتمال $g_{T(n)}(\cdot)$ و تابع توزیع تجمعی $G_{T(n)}(\cdot)$ است. همچنین فرض کنید سیستم در زمان $t = 0$ شروع به کار کرده و در لحظه $t < 0$ همچنان در حال کار است. برای سهولت در نماد گذاری، در ادامه مواردی را به صورت خلاصه معرفی می‌کنیم. متغیرهای تصادفی $t - Y_i | Y_i \leq t$ و $t - Y_{i:n} | Y_{i:n} \leq t$ را به ترتیب با متغیرهای تصادفی $IT(n, t)$ ، $IY_{i:n,t}$ و $IY_{i,t}$ نشان می‌دهیم. همچنین فرض کنید تابع چگالی احتمال و تابع توزیع تجمعی متغیرهای تصادفی $IT(n, t)$ (یا $IY_{i:n,t}$) را به ترتیب با $g_{IT(n,t)}(\cdot)$ و $G_{IT(n,t)}(\cdot)$ (یا $g_{i:n,t}(\cdot)$ و $G_{i:n,t}(\cdot)$) نشان می‌دهیم. بنابر رابطه (۱) داریم:

$$\bar{G}_{IT(n,t)}(x) = \sum_{i=1}^n q_i(t) \bar{G}_{i:n,t}(x), \quad g_{IT(n,t)}(x) = \sum_{i=1}^n q_i(t) g_{i:n,t}(x), \quad (6)$$

که در آن $q_i(t) = \frac{s_i P(Y_{i:n} \leq t)}{G_{T(n)}(t)}$ برای $i = 1, \dots, n$ و $\bar{G}_{IT(n,t)}(x) = 1 - G_{IT(n,t)}(x)$ و $\bar{G}_{T(n)}(t) = 1 - G_{T(n)}(t)$ است.

در سال‌های اخیر مطالعات مختلفی بر پایه مقایسه‌های تصادفی بین زمان‌های عمر سیستم با استفاده از مفهوم زمان غیر فعال بودن انجام شده است. از جمله این پژوهش‌ها می‌توان به **اسدی (۲۰۰۶)**، **پروده و بالا کریشان (۲۰۱۴)**، **گلیفروشان و اسدی (۲۰۱۱)** و **لی و ژانگ (۲۰۰۸)** اشاره کرد. **ژانگ (۲۰۱۰)** نمایش مشابه رابطه (۱) برای تابع بقای مربوط به مدت زمان غیر فعال بودن سیستم منسجم با طول عمر $T(n)$ به صورت رابطه (۶) ارائه کردند. در این بخش نیز با استفاده معیار واگرایی JCR که به طور خاص برای سنجش پیچیدگی سیستم‌هایی متشکل از مولفه‌های IID تعریف شده است، به مطالعه پیچیدگی سیستم‌ها از نقطه نظر مدت زمان غیر فعال بودن آن‌ها می‌پردازیم. با استفاده از رابطه (۵) می‌توان $JCRJ$ را برای مدت زمان غیر فعال بودن سیستم با طول عمر $T(n)$ به صورت

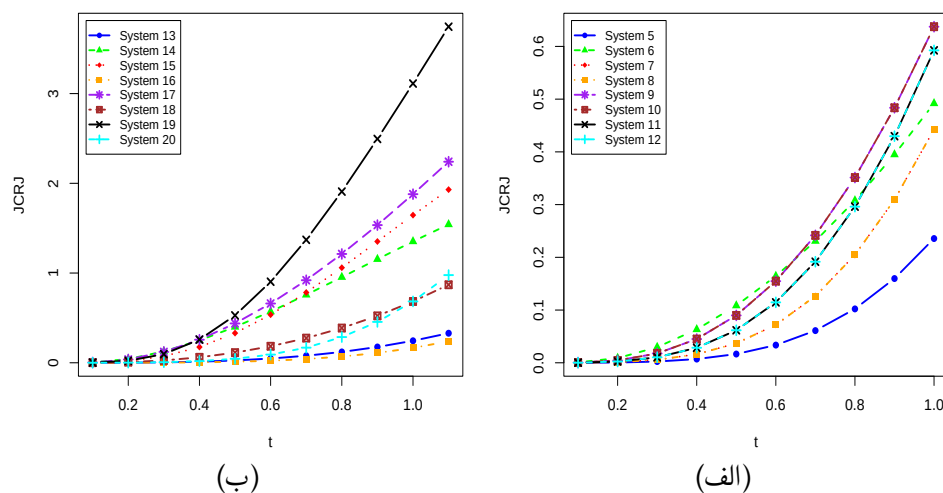
$$JCRJ(IT(n, t) : IY_{1:n,t}, \dots, IY_{n:n,t}) = \frac{-1}{2G_{T(n)}^*(t)} \times \int_0^{G(t)} \frac{G_V^*(v) - \sum_{i=1}^n \frac{G_{V_i}^*(v)}{q_i(t)}}{g(G^{-1}(v))} dv \quad (7)$$

بازنویسی کرد. از طریق معیار $JCRJ$ فوق شرط $JCRJ(T(n, t) : Y_{1:n,t}, \dots, Y_{n:n,t}) = 0$ برای سیستم‌های k از n که از زمان غیر فعال بودن مولفه‌ها تشکیل شده‌اند، برآورده می‌سازد. این خاصیت نشان دهنده سودمندی این معیار در تحلیل رفتار سیستم است، زیرا شرایطی را مشخص می‌سازد، که در آن پیچیدگی سیستم با یک پیکربندی پایه هم ارز است. علاوه بر این، واگرایی $JCRJ$ به طور موثر نابرابری در پیچیدگی میان زمان

غیرفعال بودن سیستم و یک سیستم معیار k از n با مولفه‌های مستقل و هم‌توزیع را کمی سازی می‌کند، سیستمی که توسط یک تابع توزیع تجمعی به فرم $\frac{\bar{F}(t-x)}{\bar{F}(t)}$ مشخص می‌شود. این چارچوب یک ابزار تحلیلی قدرتمند برای مقایسه سیستم‌های ترکیبی ارائه می‌دهد و می‌تواند ظرافت‌های مربوط به ساختار و پیچیدگی قابلیت اعتماد آن‌ها را به خوبی آشکار سازد. لازم به ذکر است که، مطالعه‌ای روی معیار واگرایی باقیمانده تجمعی یشن برای مدت زمان غیر فعال بودن سیستم‌های منسجم ۱۳ الی ۲۰ از جدول ۱ در حالتی که مولفه‌ها داری توزیع نمایی باشند توسط **پاکدامن و علی‌زاده (۲۰۲۵)** انجام شده است. در این مطالعه با توجه به متمرکز بودن عنوان روی مطالعه کلی این شاخص و انتخاب توزیع نمایی با نرخ خطر ثابت، امکان ارزیابی مدل در سیستم‌های دوگان با نرخ خطر غیر ثابت وجود نداشت. در این مطالعه تحت توزیع گاما برای دسته وسیع‌تری از سیستم‌های منسجم و دوگان آن‌ها به مطالعه و شبیه‌سازی این شاخص می‌پردازیم. این بخش از مقاله حاضر با هدف بسط و تحلیل شبیه‌سازی این مفهوم به ارائه تحلیل جامع‌تری در مدل‌های طول عمر با نرخ خطر غیر ثابت مانند توزیع گاما در مطالعه قبلی نویسندگان می‌پردازد.

۵ مدت زمان غیرفعال بودن سیستم‌های آمیخته و دوگان با مولفه‌های گاما

در این بخش نیز برای بررسی دقیق‌تر رفتار معیار واگرایی $JCRJ$ سیستم‌هایی با چهار مولفه مستقل و هم‌توزیع از توزیع گاما با پارامتر شکل ۲ و پارامتر مقیاس $\frac{1}{t}$ و همچنین ساختارهای دوگان آن‌ها را که در جدول ۱ ارائه شده است، مورد مطالعه قرار می‌دهیم. در شکل ۲، $JCRJ$ مربوط به مدت زمان غیر فعال بودن سیستم‌های ۵ تا ۱۲ رسم شده و ملاحظه می‌شود در بازه ابتدایی یعنی زمانی که t بین ۰ تا ۰/۶ قرار دارد، نمودار $JCRJ$ نشان می‌دهد که سیستم‌های ۵ و ۷ (۸) کمترین مقدار پیچیدگی را به خود اختصاص می‌دهند. این یعنی این دو سیستم از منظر مدت زمان غیرفعال بودن، رفتار ساده‌تری داشته و ساختارشان به‌گونه‌ای است که نوسانات کمتری در پیچیدگی ایجاد می‌کنند. در مقابل، سیستم ۶ در همین بازه بیشترین مقدار $JCRJ$ را دارد و این بیانگر آن است که این سیستم در همان ابتدای تغییرات t ، به‌طور محسوسی پیچیده‌تر و حساس‌تر به غیرفعال بودن اجزای خود عمل می‌کند. این تفاوت اولیه اهمیت بالایی دارد چون نشان می‌دهد ذات ترکیب اجزای سیستم‌ها چگونه از همان لحظات ابتدایی در پیچیدگی منعکس می‌شود. وقتی به بازه میانی یعنی $t \in [0.6 - 0.8]$ می‌رسیم، رفتار سیستم‌ها تغییر می‌کند و شکاف بین آن‌ها پررنگ‌تر می‌شود. در این قسمت، سیستم‌های ۹ و ۱۰ مقادیر بالاتری از $JCRJ$ نسبت به سیستم‌های ۷ و ۸ دارند و این به خوبی نشان می‌دهد که با افزایش مدت زمان غیرفعال بودن، بعضی ترکیبات اجزای سیستم حساس‌تر از بقیه عمل می‌کنند. این بازه به‌نوعی «مرحله میانی حساسیت» است که در آن ساختارهای نزدیک به هم (مثل جفت ۷ و ۸ یا ۹ و ۱۰) تفاوت رفتاری آشکاری پیدا می‌کنند. بنابراین می‌توان گفت $JCRJ$ در این بازه ابزار دقیقی برای تمایز میان سیستم‌ها فراهم می‌کند و پیچیدگی آن‌ها را در شرایط متوسط به‌خوبی آشکار می‌سازد. در بازه پایانی یعنی وقتی t به ۰/۸ تا ۱ می‌رسد، دوباره الگوی مشاهده شده در بازه قبلی تکرار می‌شود. در این قسمت نیز سیستم‌های ۹ و ۱۰ بیشترین مقادیر $JCRJ$ را به خود اختصاص داده و پیچیده‌ترین ساختارها را دارند. در مقابل، سیستم‌های ۵ و ۷ (۸) دوباره در پایین‌ترین سطح باقی می‌مانند. این موضوع نشان می‌دهد که فارغ از تغییرات



شکل ۲. JCRJ و مدت زمان غیر فعال بودن سیستم‌های الف: ۵ تا ۱۲ و ب: ۱۳ تا ۲۰ از جدول ۱

میانی، رفتار کلی سیستم‌ها در انتها و میانه بازه t از یک الگوی ثابت پیروی می‌کند. به عبارت دیگر، ماهیت ذاتی ساختار سیستم‌ها از دیدگاه JCRJ پایدار است و تغییرات عمده فقط در بازه‌های میانی رخ می‌دهد.

در یک جمع‌بندی کلی می‌توان گفت که مقادیر JCRJ در سه بازه زمانی مختلف یک تصویر روشن از پیچیدگی سیستم‌ها به دست می‌دهد. سیستم‌های ۵ و ۷ (۸) تقریباً در تمام بازه‌ها ساده‌ترین و کم‌پیچیدگی‌ترین باقی می‌مانند، درحالی‌که سیستم‌های ۹ و ۱۰ پیوسته در سمت پیچیده‌تر نمودار قرار دارند. این نتایج نشان می‌دهد که JCRJ واقعاً توانسته ماهیت ذاتی سیستم‌ها را بازتاب دهد و هم‌راستا با بردار علامت آن‌ها عمل کند. بنابراین معیار JCRJ نه تنها برای توصیف تغییرات لحظه‌ای پیچیدگی معتبر است، بلکه برای مقایسه کلی سیستم‌ها نیز ابزاری دقیق و سازگار به شمار می‌آید. جدول ۲؟ بر اساس شکل ۲ ارائه شده است که نشان می‌دهد در هر بازه زمانی کدام سیستم‌ها دارای پیچیدگی کمتر و کدام سیستم‌ها دارای پیچیدگی بیشتر هستند.

در شکل ۲، در مقایسه سیستم‌های ۱۳ تا ۲۰ براساس JCRJ مدت زمان غیرفعال بودن، مشاهده می‌شود که سیستم ۱۳ که توزیع وزنی بیشتری روی اجزای مرتبه بالاتر (به‌ویژه مؤلفه چهارم با سهم $\frac{3}{4}$) دارد، کمترین پیچیدگی را در مدت زمان غیرفعال بودن نسبت به دوگان خود یعنی سیستم ۱۴ از خود نشان می‌دهد. منحنی JCRJ این سیستم در ابتدا مقادیر پایینی دارد، اما با افزایش t رشد متوسطی را تجربه می‌کند. این رفتار نشان‌دهنده آن است که هرچه سیستم مدت بیشتری در حالت غیرفعال قرار بگیرد، ساختار درونی آن واکنش‌های غیرخطی و پیچیده‌تری بروز می‌دهد. از طرفی سیستم ۱۶ را می‌توان ساده‌ترین سیستم در بعد مدت زمان غیرفعال بودن قبل سیستم ۱۳ دانست. در مقابل، سیستم‌های ۱۴ و ۱۵ که تمرکز وزنی بیشتری روی اجزای ابتدایی دارند، روندی بسیار ساده‌تر در شاخص JCRJ مدت زمان غیرفعال بودن ارائه می‌دهند. برای مثال سیستم ۱۴ با نسبت $\frac{3}{4}$ ، $\frac{1}{4}$ روی اجزای اول و

جدول ۵. مقادیر JCRJ برای مدت زمان غیرفعال بودن سیستم‌های ۵ تا ۲۰ در بازه $t \in [0, 1]$.

سیستم	بازه زمانی			سطح نسبی پیچیدگی
	$[0-0.6]$	$[0.6-0.8]$	$[0.8-1]$	
۵	خیلی پایین	پایین	خیلی پایین	ساده‌ترین
۶	متوسط	بالا	متوسط	حساس در میانه
۷	پایین	پایین	پایین	ساده و پایدار
۸	پایین	پایین	پایین	ساده و پایدار
۹	بالا	خیلی بالا	خیلی بالا	پیچیده‌ترین
۱۰	بالا	خیلی بالا	خیلی بالا	پیچیده‌ترین
۱۱	متوسط	بالا	بالا	حساس در میانه و پیچیده
۱۲	متوسط	بالا	بالا	حساس در میانه و پیچیده
۱۳	پایین	پایین	پایین	ساده
۱۴	پایین	متوسط	متوسط	به‌طور متوسط پیچیده
۱۵	پایین	متوسط	بالا	حساس در میانه و پیچیده
۱۶	خیلی پایین	پایین	خیلی پایین	ساده‌ترین
۱۷	پایین	بالا	بالا	پیچیده در انتهای بازه زمانی
۱۸	پایین	متوسط	متوسط	حساس در میانه
۱۹	بالا	خیلی بالا	خیلی بالا	پیچیده‌ترین
۲۰	پایین	پایین	پایین	ساده و پایدار

دوم و سیستم ۱۵ با توزیع متوازن $\frac{1}{4}, \frac{1}{4}$ منحنی‌هایی هموار و با شیب ملایم دارند. این بدان معناست که این سیستم‌ها در دوره‌های مختلف غیرفعال بودن، رفتار پیچیده‌ای از خود نشان نمی‌دهند و تغییرات JCRJ آن‌ها یکنواخت باقی می‌ماند. در نتیجه می‌توان گفت این دو سیستم رفتار تقریباً مشابهی به لحاظ پیچیدگی در زمینه مدت زمان غیرفعال بودن دارند. سیستم‌های ۱۶ و ۱۷ از نظر JCRJ مدت زمان غیرفعال بودن در حد میانه قرار می‌گیرند. سیستم ۱۶ که به‌طور برابر بین مؤلفه‌های سوم و چهارم وزن داده شده، در مقایسه با سیستم‌های ساده‌تر روند افزایشی کم‌رنگ‌تری دارد، اما همچنان از سیستم ۱۳ ساده‌تر است. سیستم ۱۷ نیز با تمرکز بیشتر بر اجزای میانی (به‌ویژه نسبت $\frac{1}{4}, \frac{1}{4}$) به مؤلفه دوم) رفتاری غیرخطی اما معتدل‌تر نشان می‌دهد. بنابراین این دو سیستم ۱۶ و ۱۷ را می‌توان در دسته سیستم‌هایی قرار داد که به ترتیب پیچیدگی ساده و متوسطی در مدت زمان غیرفعال بودن دارند. در نهایت، سیستم‌های ۱۸ و ۲۰ بیشترین تعادل را در مدت زمان غیرفعال بودن سیستم‌ها از خود نشان می‌دهند. این دو سیستم به دلیل توزیع یکنواخت‌تر ضرایب روی مؤلفه‌ها، تغییرات JCRJ نسبتاً هموار و کنترل‌شده‌ای را بروز می‌دهند. برای نمونه سیستم ۱۸ با ترکیب $\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}$ و سیستم ۲۰ با $\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}$ به شکل محسوسی پایدار هستند و نوسانات کمتری در طول بازه‌های مختلف t دارند. بنابراین می‌توان گفت این سیستم‌ها در حوزه پیچیدگی مدت زمان غیرفعال بودن در سطحی بینابینی ولی نزدیک‌تر به سادگی قرار می‌گیرند. به این ترتیب: سیستم ۱۹ پیچیده‌ترین، سیستم‌های ۱۳ و ۱۶ ساده‌ترین، و سیستم‌های ۱۸ و ۲۰ در بازه‌ای میانه قرار دارند.

همانند بخش قبل، برای ارزیابی و تحلیل بهتر رفتار شاخص JCRJ برای مدت زمان غیرفعال بودن سیستم‌های ۵ تا ۲۰ و همچنین برای تحلیل حساسیت آن‌ها نسبت به مقادیر مختلف آستانه t و مشاهده رفتار آن‌ها یک مطالعه شبیه‌سازی برای نمودارهای شکل ۲ انجام شده است. در این شبیه‌سازی، ابتدا برای هر سیستم، توزیع پایه را با

استفاده از توزیع گاما با پارامترهای مقیاس ۰/۵ و پارامتر شکل ۲ شبیه‌سازی کرده و مقادیر و توابع مرتبط با آماره‌های مرتب محاسبه شدند. سپس با بهره‌گیری از روش مونت کارلو و تولید ۱۰^۴ نمونه مستقل از توزیع‌های مورد بررسی، مقادیر تقریبی $\bar{G}_V(v)$ و $G_{V_i}^2(v)$ ساخته شده و مقدار انتگرال تعریف شده در رابطه (۷) برای هر مقدار t تقریب زده شد. برای هر مقدار t علاوه بر مقدار JCRJ شبیه‌سازی شده، بازه $Mean \pm SD$ برای بررسی دقیق‌تر و دیدن پراکندگی و پایداری نتایج محاسبه شد. این رویکرد امکان مقایسه دقیق بین سیستم‌ها را فراهم کرده و نشان می‌دهد که JCRJ چگونه نسبت به ساختار سیستم و مقدار آستانه t تغییر می‌کند. نتایج شبیه‌سازی در جدول ۸ قرار داده شد.

جدول ۶. مقادیر شبیه‌سازی شده JCRJ برای سیستم‌های ۵ تا ۲۰ در شکل‌های ۳ و ۴ به ازای دو مقدار t

Mean $\pm$ SD	JCRJ	t	System
[۰/۵۰۰۰۵, ۰/۵۰۰۰۵]	۰/۵۰۰۰۵	۰/۲	۵
[۰/۵۰۳۰۲, ۰/۵۰۳۶۹]	۰/۵۰۳۳۵	۰/۶	
[۰/۵۰۰۸۰, ۰/۵۰۰۹۸]	۰/۵۰۰۸۹	۰/۲	۶
[۰/۱۴۸۰, ۰/۱۸۰۸]	۰/۱۶۴۴	۰/۶	
[۰/۵۰۰۱۱, ۰/۵۰۰۱۳]	۰/۵۰۰۱۲	۰/۲	۷
[۰/۵۰۶۴۹, ۰/۵۰۷۹۳]	۰/۵۰۷۲۱	۰/۶	
[۰/۵۰۰۱۱, ۰/۵۰۰۱۳]	۰/۵۰۰۱۲	۰/۲	۸
[۰/۵۰۶۴۹, ۰/۵۰۷۹۳]	۰/۵۰۷۲۱	۰/۶	
[۰/۵۰۰۴۰, ۰/۵۰۰۴۸]	۰/۵۰۰۴۴	۰/۲	۹
[۰/۱۳۹۳, ۰/۱۷۰۳]	۰/۱۵۴۸	۰/۶	
[۰/۵۰۰۴۰, ۰/۵۰۰۴۸]	۰/۵۰۰۴۴	۰/۲	۱۰
[۰/۱۳۹۳, ۰/۱۷۰۳]	۰/۱۵۴۸	۰/۶	
[۰/۵۰۰۲۲, ۰/۵۰۰۲۶]	۰/۵۰۰۲۴	۰/۲	۱۱
[۰/۱۰۳۱, ۰/۱۲۶۱]	۰/۱۱۴۶	۰/۶	
[۰/۵۰۰۲۲, ۰/۵۰۰۲۶]	۰/۵۰۰۲۴	۰/۲	۱۲
[۰/۱۰۳۱, ۰/۱۲۶۱]	۰/۱۱۴۶	۰/۶	
[۰/۵۰۰۰۹, ۰/۵۰۰۱۱]	۰/۵۰۰۱۰	۰/۲	۱۳
[۰/۵۰۴۲۵, ۰/۵۰۵۱۹]	۰/۵۰۴۷۲	۰/۶	
[۰/۵۰۳۷۴, ۰/۵۰۴۵۸]	۰/۵۰۴۱۶	۰/۲	۱۴
[۰/۵۱۳۵, ۰/۶۲۷۶]	۰/۵۷۰۵	۰/۶	
[۰/۵۰۱۷۱, ۰/۵۰۲۰۹]	۰/۵۰۱۹۰	۰/۲	۱۵
[۰/۴۸۲۲, ۰/۵۸۹۴]	۰/۵۳۵۸	۰/۶	
[۰/۵۰۰۰۴, ۰/۵۰۰۰۴]	۰/۵۰۰۰۴	۰/۲	۱۶
[۰/۵۰۲۰۴, ۰/۵۰۲۵۰]	۰/۵۰۲۲۷	۰/۶	
[۰/۵۰۳۲۹, ۰/۵۰۴۰۳]	۰/۵۰۳۶۶	۰/۲	۱۷
[۰/۵۹۴۳, ۰/۷۲۶۳]	۰/۶۶۰۳	۰/۶	
[۰/۵۰۰۶۳, ۰/۵۰۰۷۷]	۰/۵۰۰۷۰	۰/۲	۱۸
[۰/۱۶۵۵, ۰/۲۰۲۳]	۰/۱۸۳۹	۰/۶	
[۰/۵۰۲۰۱, ۰/۵۰۲۴۵]	۰/۵۰۲۲۳	۰/۲	۱۹
[۰/۸۱۲۹, ۰/۹۹۳۶]	۰/۹۰۳۳	۰/۶	
[۰/۵۰۰۱۲, ۰/۵۰۰۱۴]	۰/۵۰۰۱۳	۰/۲	۲۰
[۰/۵۰۸۱۹, ۰/۱۰۰۰۱]	۰/۵۰۹۱۰	۰/۶	

بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله با تکیه بر چارچوب نظریه اطلاعات و استفاده از معیار JCRJ به تحلیل و سنجش پیچیدگی در سیستم‌های آمیخته و دوگان پرداخته شد. این معیار توانست در مقایسه با شاخص‌های سنتی مانند نرخ خرابی یا زمان میانگین تا خرابی، تصویری دقیق‌تر و پویا از رفتار سیستم‌ها در شرایط مختلف ارائه دهد. نتایج نشان داد که JCRJ قادر است هم در سطح لحظه‌ای و هم در افق‌های زمانی بلندمدت، تغییرات ساختاری و میزان وابستگی اجزا را آشکار سازد و تفاوت میان سیستم‌های ساده، متوسط و پیچیده را به خوبی نمایان کند. بررسی سیستم‌های با مؤلفه‌های دارای توزیع گاما نشان داد که JCRJ نه تنها قادر است روند تغییرات پیچیدگی را در طول زمان منعکس کند، بلکه حساسیت بالایی نسبت به وابستگی‌های درونی و ناهمگونی وزن اجزا دارد. بدین ترتیب، سیستم‌هایی که دارای ترکیب متوازن‌تر اجزا هستند، رفتار پایدارتر و قابل پیش‌بینی‌تری از خود نشان دادند، در حالی که سیستم‌های با ساختار نامتقارن یا وزن‌دهی نامتعادل، پیچیدگی بیشتری و نوسانات شدیدتری در مقادیر شاخص داشتند. نتایج این پژوهش نشان داد که معیار JCRJ ابزار قدرتمندی برای سنجش پیچیدگی در سیستم‌های آمیخته و دوگان است و می‌تواند رفتار سیستم‌ها را هم در قالب طول عمر باقیمانده و هم در قالب مدت زمان فعال نبودن آشکار سازد. به طور مثال در مورد طول عمر باقیمانده در توزیع گاما، سیستم‌های ۵ و ۶ در میان ساده‌ترین‌ها قرار گرفتند. این سیستم‌ها به دلیل ساختار متوازن و شباهت به سیستم‌های موازی، مقادیر JCRJ پایین و رفتار با ثبات‌تری در بازه‌های زمانی مختلف نشان دادند. در مقابل، سیستم‌های ۷ و ۸ بالاترین میزان پیچیدگی را داشتند. این سیستم‌ها به دلیل وجود وابستگی‌های درونی و ساختار نامتقارن، بیشترین نوسانات را در مقادیر JCRJ بروز دادند و به عنوان پیچیده‌ترین ساختارها شناخته شدند. در مورد مدت زمان فعال نبودن در توزیع گاما، ساده‌ترین سیستم‌ها در این بخش نیز سیستم‌های ۱۳ و ۱۶ بودند که با توزیع متوازن وزن اجزا، تغییرات بسیار کمی در مقادیر JCRJ داشتند و پایداری بالاتری از خود نشان دادند. پیچیده‌ترین سیستم‌ها مربوط به سیستم‌های ۱۹ و تا حدی ۱۵ و ۱۷ بودند. این سیستم‌ها به دلیل توزیع نامتقارن ضرایب میان اجزا و حساسیت بالا به تغییر زمان، بیشترین مقدار پیچیدگی و ناپایداری را نشان دادند. سیستم‌های ۱۴، ۱۸ و ۲۰ در سطح میانی قرار گرفتند و رفتار آن‌ها وابسته به بازه‌های زمانی تغییر می‌کرد؛ به طوری که در برخی بازه‌ها به سیستم‌های ساده نزدیک بودند و در برخی بازه‌ها رفتار پیچیده‌تری داشتند.

در ادامه، به منظور روشن‌تر شدن نقش شاخص واگرایی اکستروپی باقیمانده تجمعی ینسن در تحلیل رفتار سیستم‌های آمیخته شرطی، دو مثال کاربردی ارائه می‌شود. مثال نخست بر مفهوم طول عمر باقیمانده در یک ساختار آمیخته شرطی تمرکز دارد و نشان می‌دهد چگونه وابستگی شرطی میان مؤلفه‌ها می‌تواند درک ما از پویایی و قابلیت بقا را تغییر دهد. مثال دوم به مدت زمان غیرفعال بودن مؤلفه‌ها در یک سیستم افزونه‌دار می‌پردازد و نقش این شاخص را در آشکارسازی الگوهای پنهان مرتبط با خرابی، تعمیر و تعامل بین اجزای سیستم برجسته می‌سازد. این دو مثال کمک می‌کنند تا کاربرد عملی معیار JCRJ و توانایی آن در سنجش پیچیدگی ساختاری و رفتاری سیستم‌ها بهتر قابل مشاهده باشد.

۱- در سامانه‌های پایش وضعیت تجهیزات صنعتی، مانند واحدهای پمپاژ خطوط انتقال نفت، چند حسگر

به صورت هم‌زمان وضعیت ارتعاش، دما و فشار دستگاه را ثبت می‌کنند. هر یک از این حسگرها دارای طول عمر مشخصی بوده و خرابی آن‌ها باعث کاهش دقت پایش سیستم می‌شود. از آنجا که اهمیت هر حسگر به شرایط عملیاتی وابسته است (برای مثال در هنگام افزایش دما، حسگر دمای اصلی نقش پررنگ‌تری دارد)، ساختار کلی سامانه به صورت یک سیستم آمیخته شرطی مدل می‌شود؛ یعنی وزن و نقش هر زیرسیستم با توجه به وضعیت فعلی سایر اجزا تعیین می‌شود. در این شرایط، طول عمر باقیمانده سیستم تنها به خرابی یا سلامت یک حسگر وابسته نیست، بلکه به ترکیب شرطی وضعیت تمام حسگرها بستگی دارد. وقتی یکی از حسگرها دچار افت عملکرد شود، توزیع طول عمر باقیمانده کل سامانه به طور شرطی تغییر می‌کند؛ زیرا سیستم به حالت آمیخته‌ای از سناریوهای مختلف (فعال، نیمه‌فعال، یا جبرانی) منتقل می‌شود. اندازه‌گیری و تحلیل این طول عمر باقیمانده شرطی، دید دقیقی از اینکه سامانه تا چه مدت دیگر قادر به ارائه پایش قابل اتکا است فراهم می‌کند و می‌تواند اساس تصمیم‌گیری برای توقف اضطراری، تعمیر پیشگیرانه یا فعال‌سازی مسیرهای پشتیبان قرار گیرد. شاخص JCRJ در چنین ساختاری پیچیدگی وابستگی شرطی و تغییرات رفتاری طول عمر باقیمانده سیستم را به خوبی آشکار می‌سازد.

۲- در صنایع فرآیندی مانند پالایشگاه‌ها، بسیاری از پمپ‌ها و تجهیزات کلیدی دارای ساختار فعال-آماده به کار^۱ هستند. در صورت خرابی یک پمپ فعال، پمپ ذخیره به طور خودکار وارد مدار شده و پمپ معیوب برای تعمیر از مدار خارج می‌شود. مدت زمانی که پمپ خراب شده در وضعیت غیرفعال باقی می‌ماند، اطلاعات ارزشمندی برای تحلیل قابلیت اطمینان و سیاست‌های نگهداری ارائه می‌دهد. طولانی‌شدن این دوره‌های غیرفعال بودن می‌تواند نشانه‌ای از ناکارآمدی فرآیند تعمیرات، کمبود قطعات یا فرسودگی تجهیزات باشد. تحلیل این زمان‌های غیرفعال بودن در سطح مؤلفه‌ای، امکان ارزیابی ساختار افزونگی، پیش‌بینی توقف تولید و تصمیم‌گیری برای بهینه‌سازی تعمیرات را فراهم می‌کند. شاخص JCRJ در چنین ساختاری می‌تواند پیچیدگی ناشی از توالی فعال-غیرفعال شدن مؤلفه‌ها و تعامل میان اجزای سیستم را اندازه‌گیری و تفاوت‌های رفتاری پنهان در پیکربندی‌های مختلف را روشن سازد.

تقدیر و تشکر

نویسندگان بدین وسیله مراتب سپاس و قدردانی خود را از سردبیر محترم مجله علوم آماری، داوران ارجمند و ویراستار گرامی ابراز می‌دارند که با ارائه رهنمودها و پیشنهادهای علمی ارزشمند، نقش بسزایی در ارتقای کیفیت علمی و محتوایی این مقاله ایفا نموده‌اند.

مراجع

اکبری، م.، کشیری، ع. و احمدی، ک. (۱۴۰۲)، کاربرد اکستروپی در مشخص سازی برخی از توزیع های پیوسته، مجله علوم آماری، ۱۷، ۱۹-۱.

¹ Active-Standby

نظام‌پور، ف.، علیزاده نوقابی، ه. و چهکندی، م. (۱۴۰۴)، ازمون نیکویی برازش برای مدل تعمیر کاهش حسابی سن براساس اندازه‌های اطلاع، مجله علوم آماری، ۱۹، ۴۸۹-۴۶۷.

Alizadeh Noughabi, H., and Alizadeh Noughabi, R. (2025), On the Estimation of Relative Extropy and Its Application in Goodness of Fit Tests. *Sankhya B*, **87**(2), 650-685.

Asadi, M. (2006), On the Mean Past Lifetime of the Components of a Parallel System, *Journal of Statistical Planning and Inference*, **136**(4), 1197-1206.

Asadi, M., Ebrahimi, N., Soofi, E. S., and Zohrevand, Y. (2016), Jensen-Shannon Information of the Coherent System Lifetime. *Reliability Engineering and System Safety*, **156**, 244-255.

Barlow, R. E. and Proschan, F., (1975), *Statistical Theory of Reliability and Life Testing*, Holt, Rinehart and Winston, New York.

Chakraborty, S., and Pradhan, B. (2024), On Cumulative Residual Extropy of Coherent and Mixed Systems, *Annals of Operations Research*, **340**(1), 59-81.

Dewan, I., and Khaledi, B. E. (2014), On Stochastic Comparisons of Residual Life Time at Random Time, *Statistics and Probability Letters*, **88**, 73-79.

Eryilmaz, S. (2010), Review of Recent Advances in Reliability of Consecutive K-Out-of-N and Related Systems, *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part O: Journal of Risk and Reliability*, **224**(3), 225-237.

Eryilmaz, S. (2013), On Residual Lifetime of Coherent Systems After the Rth Failure, *Statistical Papers*, **54**(1), 243-250.

Giri, R. R., Kayal, S., and Contreras-Reyes, J. E. (2025), Permutation Extropy: A New Time Series Complexity Measure, *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, 130951.

Goliforushani, S., and Asadi, M. (2011), Stochastic Ordering Among Inactivity Times of Coherent Systems, *Sankhya B*, **73**(2), 241-262.

- Goliforushani, S., Asadi, M., and Balakrishnan, N. (2012), On the Residual and Inactivity Times of the Components of Used Coherent Systems, *Journal of Applied Probability*, **49**(2), 385-404.
- Jahanshahi, S. M. A., Zarei, H., and Khammar, A. H. (2020), On Cumulative Residual Extropy, *Probability in the Engineering and Informational Sciences*, **34**(4), 605-625.
- Jose, J. and Sathar, E. A., (2019), Residual Extropy of k -Record Values, *Statistics and Probability Letters*, **146**, 1-6.
- Kayal, S. (2021), Failure Extropy, Dynamic Failure Extropy and Their Weighted Versions, *Stochastics and Quality Control*, **36**(1), 59-71.
- Kochar, S., Mukerjee, H., and Samaniego, F. J., (1999), The “Signature” of a Coherent System and Its Application to Comparison Among Systems, *Naval Research Logistics*, **46**, 507-523.
- Lad, F., Sanfilippo, G., and Agro, G., (2015), Entropy: Complementary Dual of Entropy, *Statistical Science*, **30**, 40-58.
- Li, X., and Zhang, Z., (2008), Some Stochastic Comparisons of Conditional Coherent Systems, *Applied Stochastic Models in Business and Industry*, **24**, 541-549.
- Navarro, J., Balakrishnan, N. and Samaniego, F. J., (2008), Mixture Representations of Residual Lifetimes of Used Systems, *Journal of Applied Probability*, **45**, 1097-1112.
- Pakdaman, Z., and Alizadeh Noughabi, R. (2025a), A New Representation of Some Extropy-Related Measures Based on Probability Density Quantile, *International Journal of Reliability, Quality and Safety Engineering*, **32**(5), 2550013.
- Pakdaman, Z., and Alizadeh Noughabi, R. (2025), Analyzing the Cumulative Residual Extropy of System Inactivity Times and Revealing System Complexity, *Journal of Inequalities and Applications*, **2025**(1), 117.

- Pakdaman, Z., and Noughabi, R. A. (2025b), On the Study of the Cumulative Residual Extropy of Mixed Used Systems and Their Complexity, *Probability in the Engineering and Informational Sciences*, **39**(1), 122-140.
- Pandey, A., and Kundu, C. (2025), Bivariate Extension of Residual Extropy With Application, *Statistics*, 1-30.
- Parvardeh, A., and Balakrishnan, N., (2014), On the Conditional Residual Life and Inactivity Time of Coherent Systems, *Journal of Applied Probability*, **51**(4), 990-998.
- Qiu, G., (2017), The Extropy of Order Statistics and Record Values, *Statistics and Probability Letters*, **120**, 52-60.
- Rajesh, G., and Sajily, V. S. (2025), Testing Exponentiality Based on Relative Extropy, *Statistical Papers*, **66**(5), 108.
- Samaniego F.J., (2007), *System Signatures and Their Applications in Engineering Reliability*, Springer, New York.
- Sathar, E. A., and Nair, R. D. (2025), Properties of Extropy and Its Weighted Version for Doubly Truncated Random Variables, *Ricerche di Matematica*, **74**(2), 977-1002.
- Shannon, C.E., (1948), A Mathematical Theory of Communication, *The Bell System Technical Journal*, **27**, 379-423.
- Zhang, Z., (2010), Mixture Representations of Inactivity Times of Conditional Coherent Systems and Their Applications, *Journal of Applied Probability*, **47**, 876-885.