مجله علوم آماری، پاییز و زمستان ۱۳۹۲
جلد ۷، شماره ۲، ص ۲۰۷-۲۳۲

استنباط درستنمایی و بیزی مدل تنش-نیرو بر اساس داده‌های رکوردی در خانواده‌های نرخ خطر متناسب و معکوس متناسب

ناهید سنجری فارسی‌پور، هاجر ریاحی
گروه ریاضی، دانشگاه الزهرا(س)

تاریخ دریافت: ۱۳۹۲/۶/۶ **تاریخ آخرین بازنگری:** ۱۳۹۲/۱۲/۲۰

چکیده : در این مقاله استنباط درستنمایی و استنباط بیزی قابلیت اطمینان تنش-نیرو در توزیع‌های رایلی تعمیم‌یافته، گامبل نمایی، بور نوعIII، نمایی تعمیم‌یافته، وایبول تعمیم‌یافته، پارتو تعمیم‌یافته، لوژستیک تعمیم‌یافته، تابع توانی و رایلی معکوس به‌عنوان توزیع‌های خانواده نرخ خطر معکوس متناسب بر اساس داده‌های رکوردی پایین مورد مطالعه قرار گرفته است. همچنین مدل تنش-نیرو بر اساس مقادیر رکوردی بالا در توزیع‌های گامپرتز، بور نوعXII، لوماکس و وایبول به‌عنوان اعضایی از خانواده نرخ خطر متناسب بررسی می‌شود. براورد پارامترها محاسبه و ویژگی‌های آنها مورد بررسی قرار گرفته‌اند. بازه‌های اطمینان دقیق و بیزی برای قابلیت اطمینان تنش-نیرو در همه توزیع‌ها به‌دست آمده است. سپس بازه‌های بوت‌استرپ-تی و درصدی برای پارامتر مدل تنش-نیرو بر مبنای داده‌های رکوردی مطالعه شده است. در پایان مطالعه‌های شبیه‌سازی برای بررسی و مقایسه بازه‌های اطمینان به‌دست آمده، انجام شده است.

واژه‌های کلیدی: نرخ خطر متناسب، نرخ خطر معکوس متناسب، مقادیر رکوردی، مدل تنش-نیرو، بازهٔ اطمینان بیزی و بوت‌استرپ.

آدرس الکترونیک مسئول مقاله: ناهید سنجری فارسی‌پور، nsanjari@alzahra.ac.ir
کد موضوع‌بندی ریاضی(۲۰۱۰): ۶۲C۹۹، ۶۲F۱۰

۱ مقدمه

مساله برآورد $P(X<Y)$ در زمینه‌های قابلیت اطمینان یک سیستم مکانیکی با فشار $\mathbf{X}$ و نیروی $\mathbf{Y}$ رخ می‌دهد. در ساده‌ترین شکل عنوان ارزیابی قابلیت اطمینان اجزاء سیستم توسط متغیرهای تصادفی $\mathbf{X}$ که نشان دهنده تنش (فشار) در اجزاء و $\mathbf{Y}$ که نماینده قدرت قادر به غلبه فشار وارد شده می‌باشد، توصیف می‌شود. مطابق این تعریف اگر فشار بیشتر از نیرو یا $X>Y$ باشد، سیستم خراب می‌شود. بر عکس یک وسیله به عملکرد خود ادامه می‌دهد تا زمانی که $X<Y$ باشد. بنابراین قابلیت اطمینان تنش-نیرو [۱]، احتمال سالم ماندن یک وسیله تعریف می‌شود که به‌صورت $P(X<Y)$ نشان داده می‌شود. منشاء این ایده توسط برنبائوم (۱۹۵۶) معرفی شد و توسط برنبائوم و مک کارتی (۱۹۵۸) توسعه یافت. اصلاح رسمی تنش-نیرو اولین بار در عنوان چرچ و هریس (۱۹۷۰) ظاهر گشت. بعدها تعداد قابل توجهی مقاله به مسائل احتمالاتی خاص مربوط به ارزیابی $P(X<Y)$ و ساختن برآوردهای کارآمد و قابل اطمینانی از پارامتر مورد نظر بر مبنای مقادیر نمونه‌ای با فرض‌های مختلفی روی توزیع‌های $\mathbf{X}$ و $\mathbf{Y}$ پرداخته شده‌است. نویسندگان به این واقعیت توجه کردند که در بسیاری از کاربردها، قابلیت اطمینان برای دستگاه‌ها از نظر داشتن احتمال زندگی مفید، خیلی نزدیک یک می‌باشد. قابلیت اطمینان تنش-نیرو در بسیاری از کاربردهای مهندسی مثل عمران، هوا و فضا و مکانیکی به‌کار می‌رود. برای بررسی بیشتر به نادارجا و کوتز (۲۰۰۳)، کوندا و گوپتا (۲۰۰۵)، بکلیزی (۲۰۰۸) و کاکادی و همکاران (۲۰۰۸) مراجعه شود.

فرض کنید $X_1, X_2, \ldots$ دنباله‌ای نامتناهی از متغیرهای تصادفی مستقل و هم توزیع (iid) باشند. مشاهده X_j یک رکورد پایین (بالا) نامیده می‌شود اگر به‌ازای هر $i<j$، $X_j<(>)X_i$ باشد. فرض کنید X_j در زمان j رخ دهد، سپس برای اندیس‌ها در داده‌های رکوردی پایین (بالا) یک دنباله رکوردی زمانی به‌صورت $T_1=1$ و $T_n=\min\{j: X_j<(>)X_{T_{n-1}} \;;\; n>1\}$ تعریف می شود. متغیرهای تصادفی $R_1,\ldots,R_n$ یک دنباله مقادیر رکوردی پایین (بالا) نامیده می‌شوند اگر

[۱] Stress-Strength reliability

به‌صورت $R_n = X_{T_n};\ n = ۱, \ldots$ تعریف شده باشند، به‌طوری که R_n، n امین داده رکوردی پایین (بالا) است.

۲ خانواده‌های نرخ خطر

فرض کنید متغیر تصادفی مطلقاً پیوسته X دارای تابع توزیع تجمعی

$$G(x;\theta,\alpha) = [F(x;\theta)]^{\alpha},\ x \in R,\ \ \theta \in \Theta,\ \ \alpha > ۰$$

باشد. خانواده‌ای از توزیع‌های $\{G(x;\theta,\alpha),\ \theta \in \Theta,\ \alpha > ۰\}$، مدل نرخ خطر معکوس متناسب[۲] با توزیع پایه $F(x;\theta)$ نامیده می‌شود، که در آن $F(x;\theta)$ یک تابع توزیع پیوسته دلخواه است. همچنین $G(x;\theta,\alpha)$ را تابع توزیع تعمیم‌یافته از تابع توزیع پایه $F(x;\theta)$ می‌نامند. متغیر تصادفی X از این خانواده به ترتیب دارای توابع چگالی احتمال و خطر به‌صورت

$$g(x;\theta,\alpha) = \alpha f(x;\theta)[F(x;\theta)]^{\alpha-۱},\ \ x \in R,\ \ \theta \in \Theta,\ \ \alpha > ۰$$
$$H(x;\theta) = \theta\frac{f(x;\theta)}{F(x;\theta)},\ \ x \in R,\ \ \theta \in \Theta,\ \ \alpha > ۰.$$

است. توزیع‌هایی از خانواده نرخ خطر معکوس متناسب در جدول ۱ ارائه شده‌اند (گوپتاو گوپتا، ۲۰۰۷؛ گوپتا و همکاران، ۲۰۰۴).

همچنین برای متغیر تصادفی مطلقا پیوسته X با تابع توزیع تجمعی

$$G(x;\theta,\alpha) = F^{\alpha}(x;\theta,\alpha) = ۱ - [۱ - F(x;\theta)]^{\alpha},\ x \in R,\ \theta \in \Theta,\ \alpha > ۰.$$

خانواده‌ای از توابع توزیع $\{G(x;\theta,\alpha), \theta \in \Theta, \alpha > ۰\}$ مدل نرخ خطر متناسب[۳] با توزیع پایه $F(x;\theta)$ نامیده می‌شود. در این خانواده، متغیر تصادفی X به‌ترتیب دارای توابع چگالی احتمال و نرخ خطر به‌صورت

$$g(x;\theta,\alpha) = \alpha f(x;\theta)[۱ - F(x;\theta)]^{\alpha-۱},\ \ x \in R,\ \theta \in \Theta,\ \alpha > ۰.$$
$$H(x;\theta) = \theta\frac{f(x;\theta)}{۱ - F(x;\theta)},\ \ x \in R,\ \theta \in \Theta,\ \alpha > ۰.$$

---

۲ Proportional reversed hazard rate model

۳ Proportional hazard rate model

جدول ۱: توابع توزیع نرخ خطر معکوس متناسب و توابع چگالی احتمال، توزیع و توزیع پایه آنها به‌ازای $\alpha > 0,\ \lambda > 0,\ \beta > 0$.

توزیع‌هایی از خانواده نرخ خطر معکوس متناسب			
تابع توزیع	$G(x;\theta,\alpha)$	$g(x;\theta,\alpha)$	$F(x;\theta)$
رایلی تعمیم‌یافته	$[1-e^{-(\lambda x)^2}]^{\alpha}$	$2\alpha\lambda^2 x e^{-(\lambda x)^2}[1-e^{-(\lambda x)^2}]^{\alpha-1}$	$1-e^{-(\lambda x)^2}$
گامبل نمایی	$[e^{(-e^{-\frac{x}{\lambda}})}]^{\alpha}$	$\frac{\alpha}{\lambda}e^{-\frac{x}{\lambda}}[e^{(-e^{-\frac{x}{\lambda}})}]^{\alpha}$	$e^{(-e^{-\frac{x}{\lambda}})}$
بور نوع III	$[1+x^{-\lambda}]^{-\alpha}$	$\alpha\lambda x^{-(\lambda+1)}[1+x^{-\lambda}]^{-(\alpha+1)}$	$[1+x^{-\lambda}]^{-1}$
نمایی تعمیم‌یافته	$[1-e^{-\lambda x}]^{\alpha}$	$\alpha\lambda e^{-\lambda x}[1-e^{-\lambda x}]^{\alpha-1}$	$1-e^{-\lambda x}$
وایبول تعمیم‌یافته	$1-e^{-\alpha(\lambda x)^{\beta}}$	$\alpha\beta\lambda^{\beta}x^{\beta-1}e^{-(\lambda x)^{\beta}}[1-e^{-(\lambda x)^{\beta}}]^{\alpha-1}$	$1-e^{-(\lambda x)^{\beta}}$
پارتو تعمیم‌یافته	$[1-(1+x)^{-\lambda}]^{\alpha}$	$\alpha\lambda(1+x)^{-\lambda-1}[1-(1+x)^{-\lambda}]^{\alpha-1}$	$1-(1+x)^{-\lambda}$
لوژستیک تعمیم‌یافته	$[1+e^{-\lambda x}]^{-\alpha}$	$\alpha\lambda e^{-\lambda x}[1+e^{-\lambda x}]^{-(\alpha+1)}$	$(1+e^{-\lambda x})^{-1}$
توانی	$[\frac{x}{\lambda}]^{\alpha}$	$\frac{\alpha}{\lambda}[\frac{x}{\lambda}]^{\alpha-1}$	$\frac{x}{\lambda}$
رایلی معکوس	$e^{-\frac{\alpha}{x^2}}$	$\frac{2\alpha}{x^3}e^{-\frac{\alpha}{x^2}}$	$e^{-\frac{1}{x^2}}$

است. این خانواده شامل چند توزیع طول عمر مشهور است که مواردی از آنها در جدول ۲ ارائه شده است (احمدی و همکاران، ۲۰۰۸ و ۲۰۰۹؛ مارشال و الکین، ۲۰۰۷).

جدول ۲: چند خانواده نرخ خطر متناسب و توابع چگالی احتمال، توزیع و توزیع پایه آنها به‌ازای $\alpha > 0,\ \lambda > 0$.

توزیع‌های خاص از خانواده نرخ خطر متناسب			
توزیع	$G(x;\theta,\alpha)$	$g(x;\theta,\alpha)$	$1-F(x;\theta)$
فرم کلی	$1-[1-F(x;\theta)]^{\alpha}$	$\alpha f(x;\theta)[1-F(x;\theta)]^{\alpha-1}$	$1-F(x;\theta)$
گامپرتز	$1-e^{-\frac{\alpha}{\lambda}(e^{\lambda x}-1)}$	$\alpha e^{\lambda x}e^{-\frac{\alpha}{\lambda}(e^{\lambda x}-1)}$	$e^{-\frac{\alpha}{\lambda}(e^{\lambda x}-1)}$
بور نوع XII	$1-[1+x^{\lambda}]^{-\alpha}$	$\alpha\lambda x^{\lambda-1}[1+x^{\lambda}]^{-(\alpha+1)}$	$[1+x^{\lambda}]^{-1}$
لوماکس	$1-[1+\frac{x}{\lambda}]^{-\alpha}$	$\frac{\alpha}{\lambda}[1+\frac{x}{\lambda}]^{-(\alpha+1)}$	$[1+\frac{x}{\lambda}]^{-1}$
وایبول	$1-e^{-\alpha x^{\lambda}}$	$\alpha\lambda x^{\lambda-1}e^{-\alpha x^{\lambda}}$	$e^{-\alpha x^{\lambda}}$

در هر دو مدل، θ می‌تواند بردار پارامتر توزیع پایه باشد ولی α پارامتر عددی تابع توزیع $G(x;\theta,\alpha)$ است. بسیاری از محققها و نویسندگان کلاس‌های مختلفی از توزیع‌های این خانواده‌ها را با $F(x;\theta)$های مختلف معرفی و بطور وسیعی مورد

مطالعه قرار دادند، زیرا کاربرد وسیعی در مدل‌بندی و تحلیل داده‌های طول عمر دارند. هر چند در این دو مدل از توزیع‌های $G(x;\theta,\alpha)$ با تکیه‌گاه اعداد حقیقی تعریف شده است. اما چون اصولا در این مدل‌ها به توزیع‌های طول عمر توجه می‌شود، معمولا حدود متغیر روی محور نامنفی اعداد حقیقی در نظر گرفته می‌شود.

۳ استنباط درستنمایی R بر اساس داده رکوردی پایین در خانواده نرخ خطر معکوس متناسب

فرض کنید X و Y متغیرهای تصادفی مستقل از توزیع‌های خانواده نرخ خطر معکوس متناسب باشند. در اینجا بردار پارامتر مشترک $(\beta \text{ و } \lambda) = \theta$ تابع توزیع پایه برای X و Y را معلوم و برابر با یک فرض می‌شود. توابع $F(\cdot;\theta)$ و $f(\cdot;\theta)$ را به دلیل معلوم بودن پارامتر به‌ترتیب به‌صورت $F(\cdot)$ و $f(\cdot)$ نشان داده می‌شوند.

فرض کنید $X \sim g_X(x;\alpha_1)$ و $Y \sim g_Y(y;\alpha_2)$ متغیرهای تصادفی مستقل از توزیع‌های خانواده نرخ خطر معکوس متناسب باشند، در نتیجه مقدار $R = P(X < Y)$ برابر با $R = \frac{\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}$ به‌دست می‌آید. فرض کنید $\mathbf{r} = (r_1,\dots,r_n)$ داده‌های رکوردی پایین از $X \sim g_X(x;\alpha_1)$ و $\mathbf{s} = (s_1,\dots,s_m)$ داده‌های رکوردی پایین از $Y \sim g_Y(y;\alpha_2)$ باشند. به‌طوری که دو مجموعه مستقل از یک‌دیگر هستند. تابع درستنمایی داده‌های رکوردی پایین به‌صورت

$$L_1(\alpha_1|\underline{r}) = g_X(r_n;\alpha_1)\prod_{i=1}^{n-1}\frac{g_X(r_i;\alpha_1)}{G_X(r_i;\alpha_1)}, \tag{1}$$

$$L_2(\alpha_2|\underline{s}) = g_Y(s_m;\alpha_2)\prod_{i=1}^{m-1}\frac{g_Y(s_i;\alpha_2)}{G_Y(s_i;\alpha_2)} \tag{2}$$

هستند (آرنولد و همکاران، ۱۹۹۸). با جایگذاری G_Y، g_Y، G_X و g_X در تابع‌های درستنمایی (۱) و (۲) داریم:

$$L_1(\alpha_1|\underline{r}) = \alpha_1^n v_1(r) e^{-\alpha_1\gamma_1(r_n)}, \tag{3}$$

$$L_2(\alpha_2|\underline{s}) = \alpha_2^m v_2(s) e^{-\alpha_2\gamma_2(s_m)}. \tag{4}$$

که برای تمام توزیع‌های ارائه شده عبارت‌های $v_1(r)$، $\gamma_1(r_n)$، $v_2(s)$ و $\gamma_2(s_m)$ در جدول ۳ ارائه شده‌اند.

برآوردهای ماکسیمم درستنمایی α_1 و α_1 و همچنین طبق پایایی برآوردگرها، برآورد R بر اساس داده‌های رکوردی پایین در خانواده نرخ خطر معکوس متناسب محاسبه و در جدول ۴ ارائه شده‌اند. برای مطالعه توزیع $\hat{R}$ باید توزیع‌های $\hat{\alpha}_1$ و $\hat{\alpha}_2$ از تابع چگالی R_n، یعنی nامین داده رکوردی پایین، که در آرنولد و همکاران (۱۹۹۸) به‌صورت

$$f_{R_n}(r_n) = g(r_n;\alpha)[-\ln G(r_n;\alpha)]^{n-1}/(n-1)!. \qquad (5)$$

ارائه شده‌اند، استفاده شود. بنابراین با جایگذاری توابع توزیع و چگالی X و Y در رابطه (۴) داریم:

$$f_{R_n}(r_n) = \frac{1}{\Gamma(n)}\alpha_1 f(r_n)[F(r_n)]^{\alpha_1-1}[-\alpha_1 \ln(F(r_n))]^{n-1},$$
$$f_{S_m}(s_m) = \frac{1}{\Gamma(m)}\alpha_2 f(s_m)[F(s_m)]^{\alpha_2-1}[-\alpha_2 \ln(F(s_m))]^{m-1}.$$

با توجه به تابع چگالی احتمال R_n و S_m، تابع چگالی احتمال $Z_1 = \hat{\alpha}_1 = \frac{n}{-\ln F(r_n)}$ گامای معکوس ($IG(z_1; n, n\alpha_1)$) با تابع چگالی

$$f_{Z_1}(z_1) = \frac{(n\alpha_1)^n}{\Gamma(n) z_1^{n+1}} e^{\frac{-n\alpha_1}{z_1}}, \quad z_1 > 0.$$

است. به‌طور مشابه با فرض $Z_2 = \hat{\alpha}_2 = \frac{m}{-\ln F(s_m)}$ داریم:

$$f_{Z_2}(z_2) = \frac{(m\alpha_2)^m}{\Gamma(m) z_2^{m+1}} e^{\frac{-m\alpha_2}{z_2}}, \quad z_2 > 0.$$

یعنی Z_2 دارای توزیع $IG(Z_2; m, m\alpha_2)$ است. اکنون برای به‌دست آوردن تابع چگالی احتمال $\hat{R}$، با توجه به $\hat{R} = \frac{\hat{\alpha}_2}{\hat{\alpha}_1+\hat{\alpha}_2} = \frac{1}{1+Z_1/Z_2}$، باید توزیع $\frac{Z_1}{Z_2}$ در نظر گرفته شود. بنابراین با استفاده از ویژگی‌های توزیع وارون گاما و رابطه آن با توزیع گاما داریم:

$$\frac{n\alpha_1}{Z_1} \sim Gamma(n, 1), \quad \frac{2n\alpha_1}{Z_1} \sim \chi^2_{2n},$$
$$\frac{m\alpha_2}{Z_2} \sim Gamma(m, 1), \quad \frac{2m\alpha_2}{Z_2} \sim \chi^2_{2m}.$$

جدول ۳: توزیع‌هایی از خانواده نرخ خطرمعکوس متناسب

توزیع	$v_1(r)$	$\gamma_1(r_n)$	$v_2(s)$	$\gamma_2(s_m)$
فرم کلی	$\prod_{i=1}^{n} \frac{f(r_i)}{F(r_i)}$	$-\ln[F(r_n)]$	$\prod_{i=1}^{m} \frac{f(s_i)}{F(s_i)}$	$-\ln[F(s_m)]$
رایلی تعمیم‌یافته	$\prod_{i=1}^{n} \frac{2\lambda^2 r_i e^{-(\lambda r_i)^2}}{1-e^{-(\lambda r_i)^2}}$	$-\ln[1-e^{-(\lambda r_n)^2}]$	$\prod_{i=1}^{m} \frac{2\lambda^2 s_i e^{-(\lambda s_i)^2}}{1-e^{-(\lambda s_i)^2}}$	$-\ln[1-e^{-(\lambda s_m)^2}]$
گامبل نمایی	$\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{r_i}{\lambda}}$	$e^{-\frac{r_n}{\lambda}}$	$\prod_{i=1}^{m} \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{s_i}{\lambda}}$	$e^{-\frac{s_m}{\lambda}}$
بور نوع III	$\prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda r_i^{-(\lambda+1)}}{1+r_i^{-\lambda}}$	$\ln[1+r_n^{-\lambda}]$	$\prod_{i=1}^{m} \frac{\lambda s_i^{-(\lambda+1)}}{1+s_i^{-\lambda}}$	$\ln[1+s_m^{-\lambda}]$
نمایی تعمیم‌یافته	$\prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda e^{-\lambda r_i}}{1-e^{-\lambda r_i}}$	$-\ln[1-e^{-\lambda r_n}]$	$\prod_{i=1}^{m} \frac{\lambda e^{-\lambda s_i}}{1-e^{-\lambda s_i}}$	$-\ln[1-e^{-\lambda s_m}]$
وایبول تعمیم‌یافته	$\prod_{i=1}^{n} \frac{\beta\lambda^{\beta} r_i^{\beta-1} e^{-(\lambda r_i)^{\beta}}}{1-e^{-(\lambda r_i)^{\beta}}}$	$-\ln[1-e^{-(\lambda r_n)^{\beta}}]$	$\prod_{i=1}^{m} \frac{\beta\lambda^{\beta} s_i^{\beta-1} e^{-(\lambda s_i)^{\beta}}}{1-e^{-(\lambda s_i)^{\beta}}}$	$-\ln[1-e^{-(\lambda s_m)^{\beta}}]$
پارتو تعمیم‌یافته	$\prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda(1+r_i)^{-(\lambda+1)}}{1-(1+r_i)^{-\lambda}}$	$-\ln[1-(1+r_n)^{-\lambda}]$	$\prod_{i=1}^{m} \frac{\lambda(1+s_i)^{-(\lambda+1)}}{1-(1+s_i)^{-\lambda}}$	$-\ln[1-(1+s_m)^{-\lambda}]$
لوژستیک تعمیم‌یافته	$\prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda e^{-\lambda r_i}}{1+e^{-\lambda r_i}}$	$\ln[1+e^{-\lambda r_n}]$	$\prod_{i=1}^{m} \frac{\lambda e^{-\lambda s_i}}{1+e^{-\lambda s_i}}$	$\ln[1+e^{-\lambda s_m}]$
توانی	$\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{r_i}$	$-\ln[\frac{r_n}{\lambda}]$	$\prod_{i=1}^{m} \frac{1}{s_i}$	$-\ln[\frac{s_m}{\lambda}]$
رایلی معکوس	$\prod_{i=1}^{n} \frac{2}{r_i^3}$	$\frac{1}{r_n^2}$	$\prod_{i=1}^{m} \frac{2}{s_i^3}$	$\frac{1}{s_m^2}$

جدول ۴: برآوردهای ماکسیمم درستنمایی بر اساس داده‌های رکوردی پایین در توزیع‌های خانواده نرخ خطر معکوس متناسب

توزیع	α_1	α_2	R
فرم کلی	$\frac{n}{-\ln[F(r_n)]}$	$\frac{m}{-\ln[F(s_m)]}$	$\frac{\hat{\alpha}_2}{\hat{\alpha}_1+\hat{\alpha}_2}$
رایلی تعمیم‌یافته	$\frac{n}{-\ln[1-e^{-(\lambda r_n)^2}]}$	$\frac{m}{-\ln[1-e^{-(\lambda s_m)^2}]}$	$\frac{\hat{\alpha}_2}{\hat{\alpha}_1+\hat{\alpha}_2}$
گامبل نمایی	$\frac{n}{e^{-\frac{r_n}{\lambda}}}$	$\frac{m}{e^{-\frac{s_m}{\lambda}}}$	$\frac{\hat{\alpha}_2}{\hat{\alpha}_1+\hat{\alpha}_2}$
بور نوع III	$\frac{n}{\ln[1+r_n^{-\lambda}]}$	$\frac{m}{\ln[1+s_m^{-\lambda}]}$	$\frac{\hat{\alpha}_2}{\hat{\alpha}_1+\hat{\alpha}_2}$
نمایی تعمیم‌یافته	$\frac{n}{-\ln[1-e^{-\lambda r_n}]}$	$\frac{m}{-\ln[1-e^{-\lambda s_m}]}$	$\frac{\hat{\alpha}_2}{\hat{\alpha}_1+\hat{\alpha}_2}$
وایبول تعمیم‌یافته	$\frac{n}{-\ln[1-e^{-(\lambda r_n)^\beta}]}$	$\frac{m}{-\ln[1-e^{-(\lambda s_m)^\beta}]}$	$\frac{\hat{\alpha}_2}{\hat{\alpha}_1+\hat{\alpha}_2}$
پارتو تعمیم‌یافته	$\frac{n}{-\ln[1-(1+r_n)^{-\lambda}]}$	$\frac{m}{-\ln[1-(1+s_m)^{-\lambda}]}$	$\frac{\hat{\alpha}_2}{\hat{\alpha}_1+\hat{\alpha}_2}$
لوژستیک تعمیم‌یافته	$\frac{n}{\ln[1+e^{-\lambda r_n}]}$	$\frac{m}{\ln[1+e^{-\lambda s_m}]}$	$\frac{\hat{\alpha}_2}{\hat{\alpha}_1+\hat{\alpha}_2}$
توانی	$\frac{n}{-\ln[\frac{r_n}{\lambda}]}$	$\frac{m}{-\ln[\frac{s_m}{\lambda}]}$	$\frac{\hat{\alpha}_2}{\hat{\alpha}_1+\hat{\alpha}_2}$
رایلی معکوس	$\frac{n}{1/r_n^2}$	$\frac{m}{1/s_m^2}$	$\frac{\hat{\alpha}_2}{\hat{\alpha}_1+\hat{\alpha}_2}$

با فرض استقلال این دو متغیر داریم $\frac{2m\alpha_2/2mZ_2}{2n\alpha_1/2nZ_1} \sim F_{2m,2n}$. بنابراین $\frac{Z_1}{Z_2} \sim \frac{\alpha_1}{\alpha_2}F_{2m,2n}$، که در آن F_{r_1,r_2} توزیع فیشر با درجات آزادی r_1 و r_2 است. در نتیجه با یک تبدیل ساده توزیع $\widehat{R}$ برابر با $\frac{1}{1+\alpha_1/\alpha_2 F_{2m,2n}}$ به‌دست می‌آید. بنابراین یک بازهٔ اطمینان $100(1-\alpha)\%$ برای R به‌صورت

$$((\frac{z_1/z_2}{F_{\alpha/2,2m,2n}}+1)^{-1},\ \ (\frac{z_1/z_2}{F_{1-\alpha/2,2m,2n}}+1)^{-1}). \qquad (6)$$

حاصل می‌شود. به‌طور مشابه بازهٔ اطمینان $100(1-\alpha)\%$ برای R بر اساس داده‌های رکوردی پایین برای این خانواده از توزیع‌ها در جدول ۵ ارائه شده‌اند.

۴ استنباط بیزی R در خانواده نرخ خطر معکوس متناسب

در این بخش با توجه به تابع درستنمایی که برای (α_1,α_2) بر اساس دو مجموعه از داده‌های رکوردی پایین از توزیع‌های خانواده نرخ خطر معکوس متناسب در (۳)

جدول ۵: بازهٔ اطمینان $(1-\alpha)100\%$ بر اساس داده‌های رکوردی پایین برای R در توزیع‌های خانواده نرخ خطر معکوس متناسب

توزیع	بازهٔ اطمینان
فرم کلی	$\left[\left(\frac{n\ln(F(s_m))}{m\ln(F(r_n))F_{1-\alpha/2,2m,2n}}+1\right)^{-1},\ \left(\frac{n\ln(F(s_m))}{m\ln(F(r_n))F_{\alpha/2,2m,2n}}+1\right)^{-1}\right]$
رایلی تعمیم‌یافته	$\left[\left(\frac{n\ln[1-e^{-(\lambda s_m)^2}]}{m\ln[1-e^{-(\lambda r_n)^2}]F_{1-\alpha/2,2m,2n}}+1\right)^{-1},\ \left(\frac{n\ln[1-e^{-(\lambda s_m)^2}]}{m\ln[1-e^{-(\lambda r_n)^2}]F_{\alpha/2,2m,2n}}+1\right)^{-1}\right]$
گامبل نمایی	$\left[\left(\frac{ne^{-\frac{s_m}{\lambda}}}{me^{-\frac{r_n}{\lambda}}F_{1-\alpha/2,2m,2n}}+1\right)^{-1},\ \left(\frac{ne^{-\frac{s_m}{\lambda}}}{me^{-\frac{r_n}{\lambda}}F_{\alpha/2,2m,2n}}+1\right)^{-1}\right]$
بور نوع III	$\left[\left(\frac{n\ln[1+s_m^{-\lambda}]}{m\ln[1+r_n^{-\lambda}]F_{1-\alpha/2,2m,2n}}+1\right)^{-1},\ \left(\frac{n\ln[1+s_m^{-\lambda}]}{m\ln[1+r_n^{-\lambda}]F_{\alpha/2,2m,2n}}+1\right)^{-1}\right]$
نمایی تعمیم‌یافته	$\left[\left(\frac{n\ln[1-e^{-\lambda s_m}]}{m\ln[1-e^{-\lambda r_n}]F_{1-\alpha/2,2m,2n}}+1\right)^{-1},\ \left(\frac{n\ln[1-e^{-\lambda s_m}]}{m\ln[1-e^{-\lambda r_n}]F_{\alpha/2,2m,2n}}+1\right)^{-1}\right]$
وایبول تعمیم‌یافته	$\left[\left(\frac{n\ln[1-e^{-(\lambda s_m)^\beta}]}{m\ln[1-e^{-(\lambda r_n)^\beta}]F_{1-\alpha/2,2m,2n}}+1\right)^{-1},\ \left(\frac{n\ln[1-e^{-(\lambda s_m)^\beta}]}{m\ln[1-e^{-(\lambda r_n)^\beta}]F_{\alpha/2,2m,2n}}+1\right)^{-1}\right]$
پارتو تعمیم‌یافته	$\left[\left(\frac{n\ln[1-(1+s_m)^{-\lambda}]}{m\ln[1-(1+r_n)^{-\lambda}]F_{1-\alpha/2,2m,2n}}+1\right)^{-1},\ \left(\frac{n\ln[1-(1+s_m)^{-\lambda}]}{m\ln[1-(1+r_n)^{-\lambda}]F_{\alpha/2,2m,2n}}+1\right)^{-1}\right]$
لوژستیک تعمیم‌یافته	$\left[\left(\frac{n\ln[1+e^{-\lambda s_m}]}{m\ln[1+e^{-\lambda r_n}]F_{1-\alpha/2,2m,2n}}+1\right)^{-1},\ \left(\frac{n\ln[1+e^{-\lambda s_m}]}{m\ln[1+e^{-\lambda r_n}]F_{\alpha/2,2m,2n}}+1\right)^{-1}\right]$
توانی	$\left[\left(\frac{n\ln[\frac{s_m}{\lambda}]}{m\ln[\frac{r_n}{\lambda}]F_{1-\alpha/2,2m,2n}}+1\right)^{-1},\ \left(\frac{n\ln[\frac{s_m}{\lambda}]}{m\ln[\frac{r_n}{\lambda}]F_{\alpha/2,2m,2n}}+1\right)^{-1}\right]$
رایلی معکوس	$\left[\left(\frac{n/s_m^2}{m/r_n^2F_{1-\alpha/2,2m,2n}}+1\right)^{-1},\ \left(\frac{n/s_m^2}{m/r_n^2F_{\alpha/2,2m,2n}}+1\right)^{-1}\right]$

به‌دست آوردیم، توزیع‌های پیشین مزدوج α_1 و α_2 از خانواده توزیع گاما به‌صورت

$$\pi_1(\alpha_1) = \frac{\beta_1^{\delta_1}\alpha_1^{\delta_1-1}e^{-\beta_1\alpha_1}}{\Gamma(\delta_1)}, \quad \alpha_1 > 0 \tag{۷}$$

$$\pi_2(\alpha_2) = \frac{\beta_2^{\delta_2}\alpha_2^{\delta_2-1}e^{-\beta_2\alpha_2}}{\Gamma(\delta_2)}, \quad \alpha_2 > 0 \tag{۸}$$

در نظر گرفته می‌شود، که در آن β_1, δ_1 و β_2, δ_2 به‌ترتیب پارامترهای پیشین برای α_1 و α_2 هستند. بنابراین

$$\alpha_1|\boldsymbol{r} \sim \Gamma(n+\delta_1, (\beta_1+\gamma_1(r_n))^{-1}), \quad 2(\beta_1+\gamma_1(r_n))\alpha_1|\boldsymbol{r} \sim \chi^2_{2(n+\delta_1)},$$

$$\alpha_2|\boldsymbol{s} \sim \Gamma(m+\delta_2, (\beta_2+\gamma_2(s_m))^{-1}), \quad 2(\beta_2+\gamma_2(s_m))\alpha_2|\boldsymbol{s} \sim \chi^2_{2(m+\delta_2)}.$$

چون $R|\boldsymbol{r},\boldsymbol{s} = (1+\frac{\alpha_1}{\alpha_2})^{-1}|\boldsymbol{r},\boldsymbol{s}$، توزیع پسین R، $\pi(R|\boldsymbol{r},\boldsymbol{s})$، برابر با توزیع $R|\boldsymbol{r},\boldsymbol{s} \stackrel{D}{=} (1+\frac{(n+\delta_1)/(\beta_1+\gamma_1(r_n))}{(m+\delta_2)/(\beta_2+\gamma_2(s_m))}W)^{-1}$ است، که در آن $W \sim F_{2(n+\delta_1),2(m+\delta_2)}$.

برآورد بیزی R با تابع زیان توان دوم، میانگین توزیع پسین R است که با روش تقریبی می‌تواند محاسبه شود. بنابراین با فرض $C = \frac{(n+\delta_1)(\beta_2+\gamma_2(s_m))}{(m+\delta_2)(\beta_1+\gamma_1(r_n))}$ یا به‌طور معادل $C = \frac{(n+\delta_1)(\beta_2-\ln(F(s_m)))}{(m+\delta_2)(\beta_1-\ln(F(r_n)))}$، یک بازهٔ اطمینان $100(1-\alpha)\%$ برای R عبارت است از

$$[(CF_{1-\alpha/2,2(n+\delta_1),2(m+\delta_2)}+1)^{-1}, \ (CF_{\alpha/2,2(n+\delta_1),2(m+\delta_2)}+1)^{-1}]. \tag{۹}$$

به‌همین ترتیب می‌توان بازهٔ اطمینان بیزی $100(1-\alpha)\%$ برای R بر اساس داده‌های رکوردی پایین در توزیع‌های خاص خانواده نرخ خطر معکوس متناسب مشابه رابطه (۱۰) به‌دست آورد، که ضریب C در آن برای توزیع‌های مختلف در جدول ۶ ارائه شده‌اند.

اگر توزیع پیشین ناآگاهی‌بخش جفری $\frac{1}{\alpha_1}$ و $\frac{1}{\alpha_2}$ به‌ترتیب برای α_1 و α_2 در نظر گرفته شود، آنگاه

$$\alpha_1|\boldsymbol{r} \sim Gamma(n, (\gamma_1(r_n)^{-1}), \quad 2\gamma_1(r_n)\alpha_1|\boldsymbol{r} \sim \chi^2_{2(n)},$$

$$\alpha_2|\boldsymbol{s} \sim Gamma(m, (\gamma_2(s_m)^{-1}), \quad 2\gamma_2(s_m)\alpha_2|\boldsymbol{s} \sim \chi^2_{2(m)}.$$

جدول ۶: عبارت C در بازهٔ اطمینان بیزی $(1-\alpha)100\%$ بر اساس داده‌های رکوردی پایین برای R در توزیع‌های خانواده نرخ خطر معکوس متناسب

توزیع	C
فرم کلی	$\frac{(n+\delta_1)(\beta_2-\ln(F(s_m)))}{(m+\delta_2)(\beta_1-\ln(F(r_n)))}$
رایلی تعمیم‌یافته	$\frac{(n+\delta_1)(\beta_2-\ln[1-e^{-(\lambda s_m)^2}])}{(m+\delta_2)(\beta_1-\ln[1-e^{-(\lambda r_n)^2}])}$
گامبل نمایی	$\frac{(n+\delta_1)(\beta_2+e^{-\frac{s_m}{\lambda}})}{(m+\delta_2)(\beta_1+e^{-\frac{r_n}{\lambda}})}$
بور نوع III	$\frac{(n+\delta_1)(\beta_2+\ln[1+s_m^{-\lambda}])}{(m+\delta_2)(\beta_1+\ln[1+r_n^{-\lambda}])}$
نمایی تعمیم‌یافته	$\frac{(n+\delta_1)(\beta_2-\ln[1-e^{-\lambda s_m}])}{(m+\delta_2)(\beta_1-\ln[1-e^{-\lambda r_n}])}$
وایبول تعمیم‌یافته	$\frac{(n+\delta_1)(\beta_2-\ln[1-e^{-(\lambda s_m)^\beta}])}{(m+\delta_2)(\beta_1-\ln[1-e^{-(\lambda r_n)^\beta}])}$
پارتو تعمیم‌یافته	$\frac{(n+\delta_1)(\beta_2-\ln[1-e^{-(\lambda s_m)^2}])}{(m+\delta_2)(\beta_1-\ln[1-e^{-(\lambda r_n)^2}])}$
لوژستیک تعمیم‌یافته	$\frac{(n+\delta_1)(\beta_2+\ln[1+e^{-\lambda s_m}])}{(m+\delta_2)(\beta_1+\ln[1+e^{-\lambda r_n}])}$
توانی	$\frac{(n+\delta_1)(\beta_2-\ln[\frac{s_m}{\lambda}])}{(m+\delta_2)(\beta_1-\ln[\frac{r_n}{\lambda}])}$
رایلی معکوس	$\frac{(n+\delta_1)(\beta_2+1/s_m^2)}{(m+\delta_2)(\beta_1++1/r_n^2)}$

بنابراین $R|\boldsymbol{r},\boldsymbol{s} \overset{D}{=} (1+\frac{n/\gamma_1(r_n)}{m/\gamma_2(s_m)}W)^{-1}$، که در آن $W \sim F_{2n,2m}$. در این صورت یک بازهٔ اطمینان بیزی $(1-\alpha)100\%$ برای R به‌صورت

$$[(\frac{n\gamma_2(s_m)}{m\gamma_1(r_n)}F_{1-\alpha/2,2n,2m}+1)^{-1},\ \ (\frac{n\gamma_2(s_m)}{m\gamma_1(r_n)}F_{\alpha/2,2n,2m}+1)^{-1}] \qquad (10)$$

محاسبه می‌شود. بازه‌های اطمینان بیزی $(1-\alpha)100\%$ برای R مشابه رابطه (۱۱) بر اساس داده‌های رکوردی پایین برای توزیع‌های مورد بررسی به‌دست آورده و در جدول ۵ ارائه شده‌اند.

ساختن ناحیه HPD[۴] برای پارامتر دلخواه θ، نیازمند پیدا کردن مجموعه $C(\pi_\alpha)=\{\theta:\pi(\theta|\boldsymbol{r},\boldsymbol{s})\geq\pi_\alpha\}$ است، که در آن π_α بزرگترین مقدار ثابتی است که در نامساوی $P(\theta\in C(\pi_\alpha))\geq 1-\alpha$ صدق می‌کند. محاسبه این مجموعه برای

---
[۴] Highest Posterior Density

جدول ۷: بازهٔ اطمینان بیزی $100(1-\alpha)\%$ بر اساس داده‌های رکوردی پایین برای R در توزیع‌های خانواده نرخ خطر معکوس متناسب

توزیع	بازهٔ اطمینان
فرم کلی	$[(\frac{n\ln(F(s_m))}{m\ln(F(r_n))}F_{\alpha/2,2n,2m}+1)^{-1}$, $(\frac{n\ln(F(s_m))}{m\ln(F(r_n))}F_{1-\alpha/2,2n,2m}+1)^{-1}]$
رایلی تعمیم‌یافته	$[(\frac{n\ln[1-e^{-(\lambda s_m)^2}]}{m\ln[1-e^{-(\lambda r_n)^2}]}F_{\alpha/2,2n,2m}+1)^{-1}$, $(\frac{n\ln[1-e^{-(\lambda s_m)^2}]}{m\ln[1-e^{-(\lambda r_n)^2}]}F_{1-\alpha/2,2n,2m}+1)^{-1}]$
گامبل نمایی	$[(\frac{ne^{-\frac{s_m}{\lambda}}}{me^{-\frac{r_n}{\lambda}}}F_{\alpha/2,2n,2m}+1)^{-1}$, $(\frac{ne^{-\frac{s_m}{\lambda}}}{me^{-\frac{r_n}{\lambda}}}F_{1-\alpha/2,2n,2m}+1)^{-1}]$
بور نوع III	$[(\frac{n\ln[1+s_m^{-\lambda}]}{m\ln[1+r_n^{-\lambda}]}F_{\alpha/2,2n,2m}+1)^{-1}$, $(\frac{n\ln[1+s_m^{-\lambda}]}{m\ln[1+r_n^{-\lambda}]}F_{1-\alpha/2,2n,2m}+1)^{-1})]$
نمایی تعمیم‌یافته	$[(\frac{n\ln[1-e^{-\lambda s_m}]}{m\ln[1-e^{-\lambda r_n}]}F_{\alpha/2,2n,2m}+1)^{-1}$, $(\frac{n\ln[1-e^{-\lambda s_m}]}{m\ln[1-e^{-\lambda r_n}]}F_{1-\alpha/2,2n,2m}+1)^{-1}]$
وایبول تعمیم‌یافته	$[(\frac{n\ln[1-e^{-(\lambda s_m)^\beta}]}{m\ln[1-e^{-(\lambda r_n)^\beta}]}F_{\alpha/2,2n,2m}+1)^{-1}$, $(\frac{n\ln[1-e^{-(\lambda s_m)^\beta}]}{m\ln[1-e^{-(\lambda r_n)^\beta}]}F_{1-\alpha/2,2n,2m}+1)^{-1}]$
پارتو تعمیم‌یافته	$[(\frac{n\ln[1-(1+s_m)^{-\lambda}]}{m\ln[1-(1+r_n)^{-\lambda}]}F_{\alpha/2,2n,2m}+1)^{-1}$, $(\frac{n\ln[1-(1+s_m)^{-\lambda}]}{m\ln[1-(1+r_n)^{-\lambda}]}F_{1-\alpha/2,2n,2m}+1)^{-1}]$
لوژستیک تعمیم‌یافته	$[(\frac{n\ln[1+e^{-\lambda s_m}]}{m\ln[1+e^{-\lambda r_n}]}F_{\alpha/2,2n,2m}+1)^{-1}$, $(\frac{n\ln[1+e^{-\lambda s_m}]}{m\ln[1+e^{-\lambda r_n}]}F_{1-\alpha/2,2n,2m}+1)^{-1}]$
توانی	$[(\frac{n\ln[\frac{s_m}{\lambda}]}{m\ln[\frac{r_n}{\lambda}]}F_{\alpha/2,2n,2m}+1)^{-1}$, $(\frac{n\ln[\frac{s_m}{\lambda}]}{m\ln[\frac{r_n}{\lambda}]}F_{1-\alpha/2,2n,2m}+1)^{-1}]$
رایلی معکوس	$[(\frac{n/s_m^2}{m/r_n^2}F_{\alpha/2,2n,2m}+1)^{-1}$, $(\frac{n/s_m^2}{m/r_n^2}F_{1-\alpha/2,2n,2m}+1)^{-1}]$

پارامتر R نیازمند روش‌های بهینه‌سازی عددی است. همچنین چن و شائو (۱۹۹۹) یک روش ساده مونت کارلو را نیز برای محاسبه تقریبی HPD ارائه داده است. با توجه به اینکه توزیع پسین R تک مدی است می‌توان با استفاده از ایده آنها یک بازهٔ اطمینان تقریبی HPD برای پارامتر R بر اساس داده‌های رکوردی محاسبه کرد.

۵ استنباط درستنمایی R بر اساس داده رکوردی (بالا) در خانواده نرخ خطر متناسب

متغیرهای تصادفی مستقل $X \sim g_X(x;\alpha_1)$ و $Y \sim g_Y(y;\alpha_2)$ را از توزیع‌های خانواده نرخ خطر متناسب در نظر بگیرید. در اینجا باز هم (بردار) پارامتر مشترک θ در تابع توزیع پایه برای X و Y معلوم فرض می‌شود. پارامتر $R = P(X < Y)$ برابر با $R = \frac{\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2}$ به‌دست می‌آید.

بردار $\mathbf{r} = (r_1, \ldots, r_n)$ داده‌های رکوردی بالا از $X \sim g_X(x;\alpha_1)$ و $\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_m)$ داده‌های رکوردی بالا از $Y \sim g_Y(y;\alpha_2)$ فرض می‌شوند، به‌طوری که دو مجموعه مستقل از هم هستند. تابع درستنمایی آرنولد و همکاران (۱۹۹۸) و رزمخواه و همکاران (۱۳۸۶) برای داده رکوردی بالا به‌صورت

$$L_1(\alpha_1|\boldsymbol{r}) = g_X(r_n;\alpha_1) \prod_{i=1}^{n-1} \frac{g_X(r_i;\alpha_1)}{1 - G_X(r_i;\alpha_1)} \tag{11}$$

$$L_2(\alpha_2|\boldsymbol{s}) = g_Y(s_m;\alpha_2) \prod_{i=1}^{m-1} \frac{g_Y(s_i;\alpha_2)}{1 - G_Y(r_i;\alpha_2)} \tag{12}$$

هستند. اگر g_X, G_X, g_Y, G_Y در تابع درستنمایی (۱۱) و (۱۲) جایگذاری شوند، آنگاه

$$L_1(\alpha_1|\boldsymbol{r}) = \alpha_1^n u_1(r) e^{-\alpha_1 \eta_1(r_n)}, \tag{13}$$

$$L_2(\alpha_2|\boldsymbol{s}) = \alpha_2^m u_2(s) e^{-\alpha_2 \eta_2(s_m)}. \tag{14}$$

برای تمام توزیع‌های ارائه شده عبارت‌های $u_1(r)$، $\eta_1(r_n)$، $u_2(s)$ و $\eta_2(s_m)$ در جدول ۸ ارائه شده‌اند.

جدول ۸: توزیع‌های خانواده نرخ خطر متناسب

توزیع	$u_1(r)$	$\eta_1(r_n)$	$u_2(s)$	$\eta_2(s_m)$
نرخ خطر متناسب	$\prod_{i=1}^{n} \frac{f(r_i)}{1-F(r_i)}$	$-\ln[1-F(r_n)]$	$\prod_{i=1}^{m} \frac{f(s_i)}{1-F(s_i)}$	$-\ln[1-F(s_m)]$
گامپرتز	$\prod_{i=1}^{n} e^{\lambda r_i}$	$\frac{1}{\lambda}(e^{\lambda r_n}-1)$	$\prod_{i=1}^{m} e^{\lambda s_i}$	$\frac{1}{\lambda}(e^{\lambda s_m}-1)$
بور نوع XII	$\prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda r_i^{\lambda-1}}{1+r_i^{\lambda}}$	$\ln[1+r_n^{\lambda}]$	$\prod_{i=1}^{m} \frac{\lambda s_i^{\lambda-1}}{1+s_i^{\lambda}}$	$\ln[1+s_m^{\lambda}]$
لوماکس	$\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda}[1+\frac{r_n}{\lambda}]^{-1}$	$\ln[1+\frac{r_n}{\lambda}]$	$\prod_{i=1}^{m} \frac{1}{\lambda}[1+\frac{s_m}{\lambda}]^{-1}$	$\ln[1+\frac{s_m}{\lambda}]$
وایبول	$\prod_{i=1}^{n} \lambda r_i^{\lambda-1}$	r_n^{λ}	$\prod_{i=1}^{m} \lambda s_i^{\lambda-1}$	s_m^{λ}

به روش مشابه $\widehat{\alpha}_1$، $\widehat{\alpha}_2$ و $\widehat{R}$ را بر اساس داده‌های رکوردی بالا در توزیع‌های خانواده نرخ خطر متناسب به‌دست آوردیم و در جدول ۹ نشان داده شده‌اند.

جدول ۹: براوردهای ماکسیمم درستنمایی بر اساس داده‌های رکوردی بالا در توزیع‌های خانواده نرخ خطر متناسب

توزیع	α_1	α_2	R
نرخ خطر متناسب	$\frac{n}{-\ln[1-F(r_n)]}$	$\frac{m}{-\ln[1-F(s_m)]}$	$\frac{\hat{\alpha}_1}{\hat{\alpha}_1+\hat{\alpha}_2}$
گامپرتز	$\frac{n\lambda}{e^{\lambda r_n}-1}$	$\frac{m\lambda}{e^{\lambda s_m}-1}$	$\frac{\hat{\alpha}_1}{\hat{\alpha}_1+\hat{\alpha}_2}$
بور نوع XII	$\frac{n}{\ln[1+r_n^{\lambda}]}$	$\frac{m}{\ln[1+s_m^{\lambda}]}$	$\frac{\hat{\alpha}_1}{\hat{\alpha}_1+\hat{\alpha}_2}$
لوماکس	$\frac{n}{\ln[1+\frac{r_n}{\lambda}]}$	$\frac{m}{\ln[1+\frac{s_m}{\lambda}]}$	$\frac{\hat{\alpha}_1}{\hat{\alpha}_1+\hat{\alpha}_2}$
وایبول	$\frac{n}{r_n^{\lambda}}$	$\frac{m}{s_m^{\lambda}}$	$\frac{\hat{\alpha}_1}{\hat{\alpha}_1+\hat{\alpha}_2}$

با به‌کارگیری تابع چگالی R_n، nامین داده رکوردی بالا، که در آرنولد و همکاران (۱۹۹۸) به‌صورت

$$f_{R_n}(r_n) = g(r_n;\alpha)[-\ln(1-G(r_n;\alpha))]^{n-1}/(n-1)!.$$

آمده است. به روش مشابه بخش ۳ و با فرض‌های $T_1 = \widehat{\alpha}_1 = \frac{n}{-\ln(1-F(r_n))}$ و $T_2 = \widehat{\alpha}_2 = \frac{m}{-\ln(1-F(s_m))}$ بازهٔ اطمینان $100(1-\alpha)\%$ برای R به‌صورت

$$[(\frac{t_2/t_1}{F_{\alpha/2,2n,2m}}+1)^{-1}, \quad (\frac{t_2/t_1}{F_{1-\alpha/2,2n,2m}}+1)^{-1}]. \qquad (15)$$

به‌دست می‌آید. به‌همین ترتیب بازهٔ اطمینان $100(1-\alpha)\%$ برای R بر اساس داده‌های رکوردی بالا در توزیع‌های خاص از گروه دوم توزیع‌های تعمیم‌یافته در جدول ۱۰ ارائه شده‌اند.

جدول ۱۰: بازهٔ اطمینان $100(1-\alpha)\%$ بر اساس داده‌های رکوردی بالا برای R در توزیع‌های خانواده نرخ خطر متناسب

توزیع	بازهٔ اطمینان
نرخ خطر متناسب	$[(\frac{m\ln(1-F(r_n))}{n\ln(1-F(s_m))F_{\alpha/2,2n,2m}}+1)^{-1}\ ,\ (\frac{m\ln(1-F(r_n))}{n\ln(1-F(s_m))F_{1-\alpha/2,2n,2m}}+1)^{-1}]$
گامپرتز	$[(\frac{m(e^{\lambda r_n}-1)}{n(e^{\lambda s_m}-1)F_{\alpha/2,2n,2m}}+1)^{-1}\ ,\ (\frac{m(e^{\lambda r_n}-1)}{n(e^{\lambda s_m}-1)F_{1-\alpha/2,2n,2m}}+1)^{-1}]$
بور نوع XII	$[(\frac{m\ln[1+r_n^{\lambda}]}{n\ln[1+s_m^{\lambda}]F_{\alpha/2,2n,2m}}+1)^{-1}\ ,\ (\frac{m\ln[1+r_n^{\lambda}]}{n\ln[1+s_m^{\lambda}]F_{1-\alpha/2,2n,2m}}+1)^{-1}]$
لوماکس	$[(\frac{m\ln[1+\frac{r_n}{\lambda}]}{n\ln[1+\frac{s_m}{\lambda}]F_{\alpha/2,2n,2m}}+1)^{-1}\ ,\ (\frac{m\ln[1+\frac{r_n}{\lambda}]}{n\ln[1+\frac{s_m}{\lambda}]F_{1-\alpha/2,2n,2m}}+1)^{-1}]$
وایبول	$[(\frac{mr_n^{\lambda}}{ns_m^{\lambda}F_{\alpha/2,2n,2m}}+1)^{-1}\ ,\ (\frac{mr_n^{\lambda}}{ns_m^{\lambda}F_{1-\alpha/2,2n,2m}}+1)^{-1}]$

۶ استنباط بیزی R در خانواده نرخ خطر متناسب

با توجه به تابع درستنمایی که برای (α_1,α_2) بر اساس دو مجموعه از داده‌های رکوردی بالا از توزیع‌های خانواده نرخ خطر متناسب در (۱۱) و (۱۲) ارائه شد، توزیع پیشین مزدوجی برای α_1 و α_1 از خانواده توزیع گاما مطابق رابطه‌های (۶) و (۷) در نظر گرفته می‌شود، به‌طوری که β_1,δ_1 و β_2,δ_2 به‌ترتیب پارامترهای پیشین برای β_2,δ_2 و α_2 هستند. مشابه بخش ۴ توزیع پسین R، به‌صورت $R|\boldsymbol{r},\boldsymbol{s}\overset{D}{=}(1+\frac{(m+\delta_2)/(\beta_2+\eta_2(s_m))}{(n+\delta_1)/(\beta_1+\eta_1(r_n))}W)^{-1}$ است، که در آن $W\sim F_{2(m+\delta_2),2(n+\delta_1)}$. برآورد بیزی R با تابع زیان توان دوم خطا به روش تقریبی عددی نیازمند است. همچنین بازهٔ اطمینان بیزی $100(1-\alpha)\%$ برای R بر اساس داده‌های رکوردی بالا در خانواده نرخ خطر متناسب به‌صورت

$$[(KF_{1-\alpha/2,2(m+\delta_2),2(n+\delta_1)}+1)^{-1}\ ,\ (KF_{\alpha/2,2(m+\delta_2),2(n+\delta_1)}+1)^{-1}].\quad (16)$$

به‌دست می‌آید. مقادیر مختلف K برای توزیع‌های خانواده نرخ خطر متناسب در جدول ۱۱ ارائه شده است.

در استنباط بیزی اگر برای R در خانواده نرخ خطر متناسب، توزیع پیشین ناآگاهی‌بخش جفری $1/\alpha_1$ و $1/\alpha_2$ به‌ترتیب برای α_1 و α_2 در نظر گرفته شود، آنگاه $R|\boldsymbol{r},\boldsymbol{s}\sim(1+\frac{m/\eta_2(s_m)}{n/\eta_1(r_n)}W)^{-1}$، به‌طوری که $W\sim F_{2m,2n}$. بنابراین بازهٔ

جدول ۱۱: بازهٔ اطمینان بیزی $100(1-\alpha)\%$ بر اساس داده‌های رکوردی بالا برای پارامتر R در توزیع‌های خانواده نرخ خطر متناسب

توزیع	K
نرخ خطر متناسب	$\frac{(m+\delta_2)(\beta_1-\ln(1-F(r_n)))}{(n+\delta_1)(\beta_2-\ln(1-F(s_m)))}$
گامپرتز	$\frac{(m+\delta_2)(\beta_1+1/\lambda(e^{\lambda r_n}-1))}{(n+\delta_1)(\beta_2+1/\lambda(e^{\lambda s_m}-1))}$
بور نوع XII	$\frac{(m+\delta_2)(\beta_1+\ln[1+r_n^\lambda]}{(n+\delta_1)(\beta_2+\ln[1+s_m^\lambda]}$
لوماکس	$\frac{(m+\delta_2)(\beta_1+\ln[1+\frac{r_n}{\lambda}]}{(n+\delta_1)(\beta_2+\ln[1+\frac{s_m}{\lambda}]}$
وایبول	$\frac{(m+\delta_2)(\beta_1+s_m^\lambda)}{(n+\delta_1)(\beta_2+r_n^\lambda)}$

اطمینان بیزی $100(1-\alpha)\%$ برای R به‌صورت

$$((\frac{m\eta_1(r_n)}{n\eta_2(s_m)}F_{1-\alpha/2,2m,2n}+1)^{-1}\ ,\ (\frac{m\eta_1(r_n)}{n\eta_2(s_m)}F_{\alpha/2,2m,2n}+1)^{-1}). \qquad (17)$$

محاسبه می‌شود. به همین ترتیب بازهٔ اطمینان بیزی $100(1-\alpha)\%$ برای R مشابه رابطه (۱۲) بر اساس داده‌های رکوردی بالا برای توزیع‌های ارائه شده به‌دست آورده و در جدول ۱۲ ارائه شده‌اند.

جدول ۱۲: بازهٔ اطمینان بیزی $100(1-\alpha)\%$ بر اساس داده‌های رکوردی بالا برای R در توزیع‌های خانواده نرخ خطر متناسب

توزیع	بازهٔ اطمینان		
نرخ خطر متناسب	$(\frac{m\ln(1-F(r_n))}{n\ln(1-F(s_m))}F_{\alpha/2,2m,2n}+1)^{-1}]$	,	$[(\frac{m\ln(1-F(r_n))}{n\ln(1-F(s_m))}F_{1-\alpha/2,2m,2n}+1)^{-1}$
گامپرتز	$(\frac{m(e^{\lambda rn}-1)}{n(e^{\lambda sm}-1)}F_{\alpha/2,2m,2n}+1)^{-1}]$	,	$[(\frac{m(e^{\lambda rn}-1)}{n(e^{\lambda sm}-1)}F_{1-\alpha/2,2m,2n}+1)^{-1}$
بور نوع XII	$(\frac{m\ln[1+r_n^\lambda]}{n\ln[1+s_m^\lambda]}F_{\alpha/2,2m,2n}+1)^{-1}]$	,	$[(\frac{m\ln[1+r_n^\lambda]}{n\ln[1+s_m^\lambda]}F_{1-\alpha/2,2m,2n}+1)^{-1}$
لوماکس	$(\frac{m\ln[1+\frac{r_n}{\lambda}]}{n\ln[1+\frac{s_m}{\lambda}]}F_{\alpha/2,2m,2n}+1)^{-1}]$	,	$[(\frac{m\ln[1+\frac{r_n}{\lambda}]}{n\ln[1+\frac{s_m}{\lambda}]}F_{1-\alpha/2,2m,2n}+1)^{-1}$
وایبول	$(\frac{mr_n^\lambda}{ns_m^\lambda}F_{\alpha/2,2m,2n}+1)^{-1}]$	,	$[(\frac{mr_n^\lambda}{ns_m^\lambda}F_{1-\alpha/2,2m,2n}+1)^{-1}$

۷ بوت‌استرپ

افرون و تبشیرانی (۱۹۹۳) بازه‌های اطمینان بوت‌استرپ-تی[۵] و درصدی[۶] را ارائه کردند. این نکته در اینجا اهمیت دارد که همه روش‌های استنباط و بازهٔ اطمینان فقط بر مبنای داده رکوردی بالا یا پایین r_n و s_m می‌باشند. در ادامه مراحل تولید بازه‌های بوت‌استرپ شرح داده می‌شوند.
بازهٔ بوت‌استرپ-تی:

۱) محاسبه $\widehat{\alpha}_۱$، $\widehat{\alpha}_۲$، $\widehat{R}$ و $\widehat{\sigma}$، برآوردهای ماکسیمم درستنمایی $\alpha_۱$، $\alpha_۲$، R و σ بر اساس σ و s_m، به‌طوری که $\sigma^۲ = (\frac{\partial R}{\partial \alpha_۱})^۲ var(\alpha_۱) + (\frac{\partial R}{\partial \alpha_۲})^۲ var(\alpha_۲) = [R(۱-R)]^۲(۱/n + ۱/m)$ واریانس تقریبی R است (بکلیزی، ۲۰۰۸).

۲) تولید r_n^* و s_m^* از تابع‌های چگالی R_n و S_m با جایگذاری $\widehat{\alpha}_۱$، $\widehat{\alpha}_۲$ به جای $\alpha_۱$، $\alpha_۲$ در $f_{R_n}(r_n)$ و $f_{S_m}(s_m)$.

۳) محاسبه $\widehat{\alpha}_۱^*$، $\widehat{\alpha}_۲^*$ و $\widehat{R}^*$ از r_n^* و s_m^* به دست آمده از مرحله ۲.

۴) محاسبه $\widehat{\sigma}^*$، برآورد واریانس $\widehat{R}$ با استفاده از r_n^* و s_m^*.

۵) تکرار مراحل ۲ تا ۴ تا به‌دست آوردن $\widehat{R}^*_{(۱)}, \ldots, \widehat{R}^*_{(B)}$ و $\widehat{\sigma}^*_{(۱)}, \ldots, \widehat{\sigma}^*_{(B)}$.

۶) z_α^* را چندک αام توزیع بوت‌استرپ $Z^* = (\widehat{R}^* - \widehat{R})/\widehat{\sigma}^*$ بگیرید.

۷) محاسبه بازهٔ بوت‌استرپ-تی برای R از رابطه $(\widehat{R} - Z^*_{۱-\alpha/۲}\widehat{\sigma},\ \widehat{R} - Z^*_{\alpha/۲}\widehat{\sigma})$.

بازهٔ بوت‌استرپ درصدی:

۱) محاسبه $\widehat{\alpha}_۱$، $\widehat{\alpha}_۲$ و $\widehat{R}$ برآوردهای ماکسیمم درستنمایی $\alpha_۱$، $\alpha_۲$ و R بر اساس σ و s_m.

۲) تکرار B بار مرحله ۲ تا ۴ مراحل تولید بوت‌استرپ-تی تا به‌دست آوردن مجموعه $\widehat{R}^*_{(۱)}, \ldots, \widehat{R}^*_{(B)}$.

---
[۵] Bootstrap-t interval
[۶] Percentile interval

۳) توزیع تجمعی تجربی از B مقدار بوت‌استرپ $\widehat{R}^*_{(1)},\ldots,\widehat{R}^*_{(B)}$ به‌صورت $H(x)=P(\widehat{R}^*\leq x)$ محاسبه شود و قرار دهید $\widehat{R}_{Boot-p}(x)=H^{-1}(x)$.

۴) بازهٔ اطمینان $100(1-\alpha)\%$ بوت‌استرپ درصدی برای R از رابطه $(\widehat{R}_{Boot-p}(\alpha/2)\ ,\ \widehat{R}_{Boot-p}(1-\alpha/2))$ محاسبه شود.

جدول ۱۳: بازه‌های اطمینان مختلف برای توزیع گامبل نمایی

$AHPD$		$boot.p$		$boot.t$		$BAYES$		MLE		R	m	n
CV	L	CV	L	CV	L	CV	L	CV	L			
۰/۹۸	۰/۱۷۴	۰/۹۰	۰/۳۰۳	۰/۹۲	۰/۴۰۱	۰/۹۷	۰/۲۱۰	۰/۹۰	۰/۳۲۸	۰/۱		
۰/۹۴	۰/۳۷۳	۰/۹۱	۰/۴۷۷	۰/۸۸	۰/۶۷۸	۰/۹۸	۰/۴۴۳	۰/۹۷	۰/۵۳۱	۰/۳	۴	
۰/۹۴	۰/۴۶۸	۰/۹۵	۰/۴۹۸	۰/۹۸	۰/۷۵۶	۰/۹۹	۰/۵۵۶	۰/۹۸	۰/۵۹۸	۰/۵		
۰/۹۳	۰/۱۵۹	۰/۹۲	۰/۲۷۸	۰/۹۹	۰/۲۹۵	۰/۹۷	۰/۱۹۳	۰/۹۳	۰/۲۶۵	۰/۱		
۰/۹۱	۰/۳۴۷	۰/۹۱	۰/۴۶۶	۰/۹۶	۰/۶۱۳	۰/۹۵	۰/۴۰۹	۰/۹۲	۰/۴۴۶	۰/۳	۶	۴
۰/۹۰	۰/۴۳۱	۰/۸۹	۰/۴۸۰	۰/۹۲	۰/۶۸۹	۰/۹۵	۰/۵۱۲	۰/۹۳	۰/۵۴۴	۰/۵		
۰/۹۰	۰/۱۵۵	۰/۹۰	۰/۲۵۶	۰/۹۰	۰/۲۸۸	۰/۹۸	۰/۱۹۰	۰/۹۵	۰/۲۴۲	۰/۱		
۰/۹۱	۰/۳۳۹	۰/۸۸	۰/۴۱۷	۰/۹۴	۰/۵۲۳	۰/۹۸	۰/۴۲۰	۰/۹۸	۰/۴۷۹	۰/۳	۸	
۰/۹۱	۰/۴۱۴	۰/۸۷	۰/۴۴۷	۰/۹۵	۰/۶۲۳	۰/۹۵	۰/۴۹۷	۰/۹۳	۰/۵۲۴	۰/۵		
۰/۹۱	۰/۱۵۶	۰/۹۲	۰/۲۳۴	۰/۹۸	۰/۳۲۹	۰/۹۹	۰/۱۸۹	۰/۹۷	۰/۲۸۹	۰/۱		
۰/۹۰	۰/۳۳۱	۰/۹۰	۰/۴۱۰	۰/۹۴	۰/۵۶۴	۰/۹۸	۰/۴۱۲	۰/۹۸	۰/۵۰۳	۰/۳	۴	
۰/۹۲	۰/۴۳۲	۰/۹۰	۰/۴۶۷	۰/۹۲	۰/۶۶۹	۰/۹۷	۰/۵۱۲	۰/۹۵	۰/۵۴۵	۰/۵		
۰/۹۵	۰/۱۵۳	۰/۹۱	۰/۲۱۳	۰/۹۸	۰/۲۵۶	۰/۹۵	۰/۱۹۱	۰/۹۲	۰/۲۷۳	۰/۱		
۰/۹۲	۰/۳۱۸	۰/۹۰	۰/۳۹۸	۰/۸۸	۰/۵۰۵	۰/۹۸	۰/۴۰۰	۰/۹۸	۰/۴۶۱	۰/۳	۶	۶
۰/۹۰	۰/۴۰۱	۰/۸۷	۰/۴۲۲	۰/۹۰	۰/۵۷۷	۰/۹۲	۰/۴۷۰	۰/۹۰	۰/۴۹۳	۰/۵		
۰/۹۳	۰/۱۳۴	۰/۹۶	۰/۱۹۶	۰/۹۶	۰/۲۰۶	۰/۹۹	۰/۱۷۱	۰/۹۷	۰/۲۲۲	۰/۱		
۰/۹۲	۰/۳۱۸	۰/۸۵	۰/۳۷۴	۰/۹۷	۰/۴۶۶	۰/۹۵	۰/۳۷۵	۰/۹۲	۰/۴۲۲	۰/۳	۸	
۰/۹۰	۰/۳۷۹	۰/۹۶	۰/۴۳۷	۰/۹۹	۰/۵۸۸	۰/۹۸	۰/۴۵۶	۰/۹۵	۰/۴۸۰	۰/۵		
۰/۹۶	۰/۱۳۸	۰/۹۲	۰/۲۲۲	۰/۹۹	۰/۲۹۰	۰/۹۹	۰/۱۷۶	۰/۹۸	۰/۲۸۴	۰/۱		
۰/۹۴	۰/۳۳۳	۰/۸۵	۰/۴۰۳	۰/۹۲	۰/۶۱۷	۰/۹۷	۰/۳۸۹	۰/۹۵	۰/۱۸۱	۰/۳	۴	
۰/۸۸	۰/۴۰۵	۰/۸۱	۰/۴۵۱	۰/۹۳	۰/۶۵۲	۰/۹۸	۰/۴۹۵	۰/۹۲	۰/۵۲۵	۰/۵		
۰/۹۷	۰/۱۳۵	۰/۹۶	۰/۲۰۹	۰/۹۷	۰/۲۴۲	۰/۹۹	۰/۱۵۸	۰/۹۶	۰/۲۱۹	۰/۱		
۰/۸۹	۰/۳۰۰	۰/۸۰	۰/۳۳۲	۰/۸۵	۰/۴۳۰	۰/۹۸	۰/۳۷۶	۰/۹۹	۰/۴۴۱	۰/۳	۶	۸
۰/۸۸	۰/۳۷۷	۰/۸۸	۰/۴۱۲	۰/۹۲	۰/۵۴۵	۰/۹۷	۰/۴۴۶	۰/۹۵	۰/۴۶۷	۰/۵		
۰/۹۱	۰/۱۴۴	۰/۹۲	۰/۱۷۷	۰/۸۵	۰/۱۹۲	۰/۹۵	۰/۱۵۶	۰/۹۰	۰/۱۹۷	۰/۱		
۰/۹۰	۰/۳۰۲	۰/۸۵	۰/۳۷۳	۰/۸۵	۰/۴۵۳	۰/۹۸	۰/۳۵۱	۰/۹۷	۰/۳۹۵	۰/۳	۸	
۰/۹۰	۰/۳۵۲	۰/۸۴	۰/۳۹۰	۰/۸۹	۰/۴۸۸	۰/۹۶	۰/۴۲۷	۰/۹۵	۰/۴۴۷	۰/۵		
۰/۹۱	۰/۱۰۹	۰/۹۹	۰/۱۰۸	۰/۹۳	۰/۱۱۱	۰/۹۹	۰/۱۴۱	۰/۹۹	۰/۱۷۴	۰/۱	۴	
۰/۹۲	۰/۲۵۵	۰/۹۴	۰/۲۱۶	۰/۹۵	۰/۲۳۶	۰/۹۹	۰/۳۰۸	۰/۹۵	۰/۳۳۷	۰/۳	۶	۱۲
۰/۹۰	۰/۳۱۵	۰/۹۹	۰/۲۵۴	۰/۹۴	۰/۲۷۵	۰/۹۹	۰/۳۶۴	۰/۹۶	۰/۳۷۶	۰/۵	۸	

۸ مطالعه شبیه‌سازی

در این بخش مطالعه‌ای شبیه‌سازی برای بررسی و مقایسه عملکرد تقریبی بازه‌های مختلف صورت پذیرفته است. در طرح شبیه‌سازی از ترکیبات مختلفی از $n = ۴, ٦, ۸$ و $m = ۴, ٦, ۸$ و همچنین برای مشاهده رفتار برآوردها و بازه‌ها در نمونه‌های بزرگتر از $n = ۱۲$ و $m = ۱۲$ استفاده شده است. همچنین $R = ۰/۱, ۰/۳, ۰/۵$ و $\alpha_۲ = ۱$ در توزیع‌های خانواده نرخ خطر معکوس متناسب معلوم فرض شده‌اند . بنابراین $\alpha_۱$ با انتخاب $\alpha_۲$ و R از رابطه $R = \frac{\alpha_۲}{\alpha_۱+\alpha_۲}$ مشخص می‌شود. برای توزیع‌های مورد بررسی در خانواده نرخ خطر متناسب $R = ۰/۱, ۰/۳, ۰/۵$ و $\alpha_۱ = ۱$ فرض شد. بنابراین $\alpha_۲$ نیز با انتخاب $\alpha_۱$ و R از رابطه $R = \frac{\alpha_۲}{\alpha_۱+\alpha_۲}$ معین می‌شود. سطح اطمینان برای تمام بازه‌های اطمینان محاسبه شده $(۱ - \alpha) = ۰/۹۵$ در نظر گرفته شد. برای هر ترکیب مشخص در شبیه‌سازی ۲۰۰۰ نمونه از داده‌های رکوردی پایین (یا رکوردی بالا) از توزیع‌های X و Y تولید شد. برای هر جفت نمونه تولید برآوردها و بازه‌های زیر محاسبه شدند:

۱) MLE : بازهٔ اطمینان دقیق MLE بر اساس رابطه‌های ارائه شده در جداول ۳ و ۱۰ برای هر توزیع خاص.

۲) $BAYES$: بازهٔ بیزی دقیق مطابق رابطه‌های (۱۰) و (۱۶) برای هر توزیع خاص.

۳) $Boot-t$: بازهٔ بوت‌استرپ درصدی.

۴) $AHPD$: بازهٔ HPD تقریبی با استفاده از ایده چن و شائو.

۵) $\widehat{R}$: برآورد R.

۶) $MSE(\widehat{R})$: محاسبه MSE برآوردگر R.

بنابراین با تولید ۲۰۰۰ نمونه رکوردی پایین (بالا) برای هر جفت از ترکیب طرح شبیه‌سازی و سپس محاسبه پنج بازهٔ اطمینان بالا به‌صورت

$j = 1,\dots,2000$ ،$i = 1,\dots,6$ (L_{ij},U_{ij}) محاسبه شد. در نهایت با استفاده از این ۲۰۰۰ تکرار، احتمال پوشش و میانگین طول بازه‌های اطمینان، برآورد R و خطای برآورد به صورت زیر تقریب زده شد.

۱) محاسبه احتمال پوشش هر بازه: $CV_i = \frac{1}{2000}\sum_{j=1}^{2000} I\{L_{ij} < R < U_{ij}\}$.

۲) محاسبه میانگین طول هر بازه: $L_i = \frac{1}{2000}\sum_{j=1}^{2000} (U_{ij} - L_{ij})$.

۳) محاسبه $MSE(\widehat{R})_i;\ \ i = 1,\dots,2000$ و $\widehat{R}_i$، و میانگین آنها.

جدول ۱۴: بازه‌های اطمینان مختلف برای توزیع بور نوع III و پارتو تعمیم‌یافته

$AHPD$		$boot.p$		$boot.t$		$BAYES$		MLE		R	m	n
CV	L	CV	L	CV	L	CV	L	CV	L			
۰/۹۲	۰/۱۷۷	۰/۹۴	۰/۲۷۹	۰/۹۴	۰/۳۴۶	۰/۹۹	۰/۱۹۷	۰/۹۸	۰/۲۹۵	۰/۱		
۰/۹۳	۰/۳۸۱	۰/۸۸	۰/۴۵۳	۰/۹۸	۰/۶۸۱	۰/۹۷	۰/۴۳۸	۰/۹۳	۰/۵۲۱	۰/۳	۴	
۰/۹۴	۰/۴۵۴	۰/۹۲	۰/۵۰۹	۰/۹۰	۰/۷۵۹	۰/۹۸	۰/۵۴۴	۰/۹۷	۰/۵۸۰	۰/۵		
۰/۹۴	۰/۱۶۳	۰/۸۹	۰/۲۷۸	۰/۹۲	۰/۳۰۴	۰/۹۸	۰/۱۸۹	۰/۹۵	۰/۲۴۸	۰/۱		
۰/۹۲	۰/۳۶۳	۰/۹۱	۰/۴۲۹	۰/۹۳	۰/۵۷۹	۰/۹۹	۰/۴۲۸	۰/۹۱	۰/۴۹۴	۰/۳	۶	۴
۰/۹۱	۰/۴۳۵	۰/۹۶	۰/۴۸۸	۰/۹۶	۰/۶۹۰	۰/۹۷	۰/۵۱۴	۰/۹۸	۰/۵۴۷	۰/۵		
۰/۹۰	۰/۱۵۷	۰/۸۴	۰/۲۴۵	۰/۹۴	۰/۲۶۱	۰/۹۹	۰/۱۸۹	۰/۹۵	۰/۲۳۷	۰/۱		
۰/۹۴	۰/۳۵۹	۰/۹۶	۰/۴۳۰	۰/۹۶	۰/۵۳۲	۰/۹۸	۰/۴۲۴	۰/۹۰	۰/۴۷۷	۰/۳	۸	
۰/۸۸	۰/۴۱۳	۰/۸۵	۰/۴۴۲	۰/۹۰	۰/۵۹۵	۰/۹۲	۰/۴۹۹	۰/۹۲	۰/۵۳۳	۰/۵		
۰/۹۱	۰/۱۵۳	۰/۹۱	۰/۲۱۸	۰/۹۰	۰/۲۷۱	۰/۹۹	۰/۱۸۰	۰/۹۲	۰/۲۶۹	۰/۱		
۰/۹۰	۰/۳۴۳	۰/۹۰	۰/۴۲۷	۰/۹۶	۰/۶۵۶	۰/۹۸	۰/۴۱۶	۰/۹۵	۰/۵۰۸	۰/۳	۴	
۰/۹۱	۰/۴۲۶	۰/۹۰	۰/۴۷۵	۰/۹۴	۰/۶۸۳	۰/۹۷	۰/۵۱۴	۰/۹۵	۰/۵۴۸	۰/۵		
۰/۹۱	۰/۱۴۸	۰/۹۰	۰/۲۰۵	۰/۹۰	۰/۲۵۰	۰/۹۶	۰/۱۷۳	۰/۹۵	۰/۲۳۲	۰/۱		
۰/۸۷	۰/۳۳۷	۰/۸۲	۰/۳۶۶	۰/۹۰	۰/۴۵۵	۰/۹۹	۰/۳۹۰	۰/۹۹	۰/۴۴۸	۰/۳	۶	۶
۰/۹۴	۰/۴۱۰	۰/۹۴	۰/۴۴۶	۰/۹۸	۰/۵۹۷	۰/۹۵	۰/۴۷۲	۰/۹۲	۰/۴۹۷	۰/۵		
۰/۹۲	۰/۱۴۶	۰/۹۶	۰/۱۹۰	۰/۹۹	۰/۱۹۰	۰/۹۰	۰/۳۷۴	۰/۸۵	۰/۴۱۷	۰/۱		
۰/۸۷	۰/۳۱۱	۰/۸۸	۰/۳۷۶	۰/۹۶	۰/۴۷۲	۰/۹۰	۰/۳۷۴	۰/۸۳	۰/۴۱۷	۰/۳	۸	
۰/۹۰	۰/۳۷۴	۰/۹۶	۰/۴۳۹	۰/۹۹	۰/۵۳۹	۰/۹۸	۰/۴۵۷	۰/۹۸	۰/۴۷۹	۰/۵		
۰/۹۶	۰/۱۳۸	۰/۹۲	۰/۱۸۳	۰/۹۶	۰/۲۶۸	۰/۹۹	۰/۱۷۴	۰/۹۳	۰/۲۸۸	۰/۱		
۰/۹۱	۰/۳۲۵	۰/۹۶	۰/۳۸۱	۰/۹۲	۰/۵۶۸	۰/۹۶	۰/۳۹۵	۰/۹۸	۰/۴۹۱	۰/۳	۴	
۰/۹۳	۰/۴۲۱	۰/۹۲	۰/۴۶۴	۰/۹۶	۰/۶۶۰	۰/۹۵	۰/۴۹۵	۰/۹۵	۰/۵۳۰	۰/۵		
۰/۹۶	۰/۱۴۴	۰/۸۸	۰/۲۰۷	۰/۸۸	۰/۲۳۷	۰/۹۹	۰/۱۶۷	۰/۹۹	۰/۲۳۴	۰/۱		
۰/۸۹	۰/۳۰۱	۰/۹۲	۰/۳۶۶	۰/۹۶	۰/۴۸۳	۰/۹۵	۰/۳۵۳	۰/۹۵	۰/۴۱۱	۰/۳	۶	۸
۰/۹۰	۰/۳۸۵	۰/۸۸	۰/۴۱۱	۰/۹۶	۰/۵۵۱	۰/۹۸	۰/۴۵۴	۰/۹۸	۰/۴۷۸	۰/۵		
۰/۹۲	۰/۱۱۸	۰/۹۹	۰/۱۷۱	۰/۹۹	۰/۱۹۱	۰/۹۸	۰/۱۵۴	۰/۹۵	۰/۱۹۵	۰/۱		
۰/۹۲	۰/۲۹۴	۰/۸۵	۰/۳۴۴	۰/۹۰	۰/۴۳۴	۰/۹۵	۰/۳۴۴	۰/۹۶	۰/۳۸۷	۰/۳	۸	
۰/۸۷	۰/۳۶۲	۰/۸۹	۰/۳۸۵	۰/۹۶	۰/۴۸۵	۰/۹۶	۰/۴۳۰	۰/۹۱	۰/۴۵۰	۰/۵		
۰/۹۱	۰/۱۱۴	۰/۹۰	۰/۱۰۱	۰/۹۰	۰/۱۰۵	۰/۹۹	۰/۱۲۹	۰/۹۵	۰/۱۵۱	۰/۱	۴	
۰/۹۱	۰/۲۴۶	۰/۹۰	۰/۲۱۶	۰/۸۹	۰/۲۶۲	۰/۹۸	۰/۲۹۸	۰/۹۷	۰/۳۲۵	۰/۳	۶	۱۲
۰/۹۲	۰/۳۱۶	۰/۸۹	۰/۲۵۶	۰/۹۰	۰/۲۹۴	۰/۹۹	۰/۳۶۳	۰/۹۵	۰/۳۷۵	۰/۵	۸	

برای محاسبه بازه‌های بوت‌استرپ از ۵۰۰ نمونه بوت‌استرپ استفاده شد. همچنین تولید بازهٔ $AHPD$ بر اساس ۱۰۰۰ نمونه مونت کارلو از تابع چگالی پسین انجام شده است. برای انجام محاسبات در تمام این توزیع‌ها پارامترهای توزیع R پایه که با λ (λ, β) نشان داده شد، معلوم و برابر با یک در نظر گرفته شد ($\lambda = ۱$).

جدول ۱۵: بازه‌های اطمینان مختلف برای توزیع گامپرتز

$AHPD$		$boot.p$		$boot.t$		BAYES		MLE		R	m	n
CV	L	CV	L	CV	L	CV	L	CV	L			
۰/۹۵	۰/۱۷۳	۰/۹۲	۰/۲۶۵	۰/۹۸	۰/۳۴۱	۰/۹۹	۰/۲۰۹	۰/۹۴	۰/۳۱۸	۰/۱		
۰/۹۱	۰/۳۸۴	۰/۸۸	۰/۴۵۱	۰/۹۰	۰/۶۷۷	۰/۹۶	۰/۴۴۹	۰/۹۲	۰/۵۳۶	۰/۳	۴	
۰/۹۲	۰/۴۶۷	۰/۸۸	۰/۵۱۵	۰/۹۲	۰/۸۱۰	۰/۹۸	۰/۵۴۶	۰/۹۴	۰/۵۷۸	۰/۵		
۰/۹۳	۰/۱۶۷	۰/۹۴	۰/۲۳۷	۰/۹۹	۰/۲۸۳	۰/۹۸	۰/۲۱۴	۰/۹۵	۰/۳۰۰	۰/۱		
۰/۸۸	۰/۳۶۴	۰/۹۰	۰/۴۲۳	۰/۹۴	۰/۵۴۰	۰/۹۸	۰/۴۳۴	۰/۹۵	۰/۵۰۱	۰/۳	۶	۴
۰/۹۳	۰/۴۴۲	۰/۹۴	۰/۴۷۰	۰/۹۴	۰/۶۷۵	۰/۹۸	۰/۵۱۴	۰/۹۶	۰/۵۴۸	۰/۵		
۰/۹۵	۰/۱۶۵	۰/۹۲	۰/۲۴۷	۰/۹۲	۰/۲۶۱	۰/۹۹	۰/۱۹۰	۰/۹۸	۰/۲۴۲	۰/۱		
۰/۸۲	۰/۳۳۸	۰/۸۰	۰/۴۰۷	۰/۸۶	۰/۵۱۴	۰/۹۹	۰/۴۰۹	۰/۹۸	۰/۴۶۵	۰/۳	۸	
۰/۸۸	۰/۴۱۴	۰/۸۸	۰/۴۶۱	۰/۹۴	۰/۶۵۱	۰/۹۹	۰/۴۹۶	۰/۹۴	۰/۵۲۸	۰/۵		
۰/۹۶	۰/۱۴۸	۰/۹۴	۰/۲۱۰	۰/۹۸	۰/۲۹۳	۰/۹۹	۰/۱۸۰	۰/۹۱	۰/۲۷۹	۰/۱		
۰/۸۸	۰/۳۲۸	۰/۸۸	۰/۴۲۶	۰/۹۶	۰/۶۸۶	۰/۹۹	۰/۴۱۷	۰/۹۵	۰/۵۰۶	۰/۳	۴	
۰/۹۱	۰/۴۴۲	۰/۹۰	۰/۴۹۱	۰/۹۲	۰/۷۳۶	۰/۹۸	۰/۵۱۸	۰/۹۶	۰/۵۵۱	۰/۵		
۰/۹۶	۰/۱۵۱	۰/۸۹	۰/۲۰۸	۰/۹۴	۰/۲۳۹	۰/۹۷	۰/۱۸۴	۰/۹۴	۰/۲۵۷	۰/۱		
۰/۹۴	۰/۳۱۸	۰/۹۰	۰/۳۸۲	۰/۹۰	۰/۵۲۰	۰/۹۵	۰/۳۸۴	۰/۹۰	۰/۴۴۲	۰/۳	۶	۶
۰/۹۲	۰/۴۱۳	۰/۹۴	۰/۴۲۴	۰/۹۶	۰/۵۵۳	۰/۹۷	۰/۴۷۴	۰/۹۶	۰/۵۰۰	۰/۵		
۰/۹۵	۰/۱۳۱	۰/۹۴	۰/۱۸۰	۰/۹۰	۰/۱۹۱	۰/۹۹	۰/۱۷۴	۰/۹۸	۰/۲۲۵	۰/۱		
۰/۹۵	۰/۳۱۳	۰/۹۲	۰/۳۶۴	۰/۸۸	۰/۴۶۱	۰/۹۶	۰/۳۸۳	۰/۹۵	۰/۴۳۲	۰/۳	۸	
۰/۸۸	۰/۳۷۸	۰/۹۶	۰/۴۱۳	۰/۹۲	۰/۵۳۸	۰/۹۶	۰/۴۴۸	۰/۹۵	۰/۴۶۹	۰/۵		
۰/۹۵	۰/۱۳۳	۰/۸۵	۰/۱۸۸	۰/۸۸	۰/۲۵۸	۰/۹۹	۰/۱۶۹	۰/۹۶	۰/۲۷۲	۰/۱		
۰/۸۸	۰/۳۲۰	۰/۸۱	۰/۳۶۹	۰/۹۶	۰/۵۳۳	۰/۹۹	۰/۳۹۳	۰/۹۷	۰/۴۸۵	۰/۳	۴	
۰/۹۲	۰/۴۱۹	۰/۸۸	۰/۴۴۸	۰/۸۴	۰/۶۲۴	۰/۹۷	۰/۴۹۴	۰/۹۵	۰/۵۲۶	۰/۵		
۰/۹۳	۰/۱۲۴	۰/۸۸	۰/۱۸۳	۰/۸۸	۰/۲۵۶	۰/۹۸	۰/۱۶۰	۰/۹۵	۰/۲۲۵	۰/۱		
۰/۹۳	۰/۳۱۵	۰/۸۹	۰/۳۵۵	۰/۸۸	۰/۴۴۶	۰/۹۵	۰/۳۶۰	۰/۹۴	۰/۴۱۶	۰/۳	۶	۸
۰/۸۴	۰/۳۸۵	۰/۹۲	۰/۴۱۶	۰/۹۲	۰/۵۴۶	۰/۹۳	۰/۴۵۰	۰/۹۲	۰/۴۷۲	۰/۵		
۰/۹۰	۰/۱۲۹	۰/۹۶	۰/۱۶۲	۰/۹۶	۰/۱۹۴	۰/۹۸	۰/۱۵۶	۰/۹۵	۰/۲۰۰	۰/۱		
۰/۹۵	۰/۲۹۸	۰/۹۹	۰/۳۵۹	۰/۹۶	۰/۴۴۴	۰/۹۹	۰/۳۵۰	۰/۹۸	۰/۳۹۵	۰/۳	۸	
۰/۸۸	۰/۳۶۲	۰/۹۹	۰/۳۷۱	۰/۹۹	۰/۴۷۰	۰/۹۸	۰/۴۳۱	۰/۹۸	۰/۴۵۱	۰/۵		
۰/۹۵	۰/۱۱۶	۰/۹۶	۰/۱۰۱	۰/۹۸	۰/۱۰۳	۰/۹۹	۰/۱۳۵	۰/۹۸	۰/۱۶۱	۰/۱	۴	
۰/۹۵	۰/۲۷۱	۰/۹۱	۰/۲۲۴	۰/۹۰	۰/۲۶۳	۰/۹۲	۰/۳۰۲	۰/۹۱	۰/۳۳۰	۰/۳	۶	۱۲
۰/۹۰	۰/۳۲۴	۰/۸۹	۰/۲۶۱	۰/۸۹	۰/۲۹۲	۰/۹۵	۰/۳۶۴	۰/۹۵	۰/۳۷۵	۰/۵	۸	

توجه شود که با معلوم فرض کردن پارامترهای توزیع پایه برای توزیع‌های پارتو تعمیم‌یافته و بور نوع III، لوماکس و بور نوع XII براوردها و بازه‌های اطمینان یکسانی به‌دست می‌آید. محاسبات این توزیع‌ها در جداول مشترکی

آورده شده‌اند. در محاسبات عددی شبیه‌سازی برای تولید بازه‌های بیزی، مقادیر پارامترهای پیشین با توجه به رابطه‌های (۶) و (۷) برای α_1 و α_2 در خانواده نرخ خطر معکوس متناسب: (برای تمام سطوح R) $\delta_2 = \beta_1 = \beta_2 = 1$ و $\delta_1 = 1(R = 0/1), \delta_1 = 3(R = 0/1), \delta_1 = 9(R = 0/1)$. همچنین برای خانواده نرخ خطر متناسب: (برای تمام سطوح R) $\delta_1 = \beta_1 = \beta_2 = 1$ و $\delta_2 = 1(R = 0/1), \delta_2 = 3(R = 0/1), \delta_2 = 9(R = 0/1)$ معلوم فرض شده‌اند.

جدول ۱۶: میانگین برآورد R و MSE برآورد در خانواده نرخ خطر معکوس متناسب

n	m	R	رایلی تعمیم‌یافته		گامبل نمایی		پارتو تعمیم‌یافته		وایبول تعمیم‌یافته	
			$\widehat{R}$	MSE	$\widehat{R}$	MSE	$\widehat{R}$	MSE	$\widehat{R}$	MSE
		۰/۱	۰/۱۲۴	۰/۰۰۹۳	۰/۱۲۹	۰/۰۱۰۱	۰/۱۱۰	۰/۰۰۶۸۱	۰/۱۲۳	۰/۰۰۷۸
	۴	۰/۳	۰/۳۲۱	۰/۰۲۲۲	۰/۳۱۲	۰/۰۱۹۴	۰/۳۱۲	۰/۰۲۴۰	۰/۳۲۰	۰/۰۲۴۸
		۰/۵	۰/۴۹۲	۰/۰۲۳۸	۰/۵۱۹	۰/۰۲۰۳	۰/۴۹۹	۰/۰۳۰۲	۰/۵۱۷	۰/۰۲۵۵
		۰/۱	۰/۱۰۶	۰/۰۰۵۰	۰/۱۱۶	۰/۰۰۵۴	۰/۱۰۴	۰/۰۰۳۶	۰/۱۱۴	۰/۰۰۶۴
۴	۶	۰/۳	۰/۳۱۴	۰/۰۱۹۶	۰/۳۰۸	۰/۰۲۴۲	۰/۳۲۹	۰/۰۱۹۲	۰/۳۳۹	۰/۰۲۳۰
		۰/۵	۰/۴۹۴	۰/۰۲۰۷	۰/۴۹۳	۰/۰۲۴۶	۰/۴۹۳	۰/۰۲۳۰	۰/۵۰۴	۰/۰۲۱۱
		۰/۱	۰/۱۱۹	۰/۰۰۵۰	۰/۱۱۵	۰/۰۰۴۷	۰/۱۰۹	۰/۰۰۳۰	۰/۱۰۸	۰/۰۰۳۳
	۸	۰/۳	۰/۳۲۵	۰/۰۱۷۳	۰/۳۴۲	۰/۰۱۶۹	۰/۳۰۸	۰/۰۲۵۳	۰/۳۴۲	۰/۰۲۳۲
		۰/۵	۰/۵۱۱	۰/۰۱۵۰	۰/۵۳۸	۰/۰۲۲۴	۰/۵۱۰	۰/۰۱۷۴	۰/۵۲۲	۰/۰۲۲۷
		۰/۱	۰/۱۰۱	۰/۰۰۳۲	۰/۱۱۰	۰/۰۰۳۸	۰/۰۹۹	۰/۰۰۲۶	۰/۱۱۵	۰/ ۰۰۴۱
	۴	۰/۳	۰/۳۱۹	۰/۰۲۴۳	۰/۳۰۶	۰/۰۱۵۶	۰/۳۱۷	۰/۰۱۶۵	۰/۲۹۸	۰/۰۱۶۹
		۰/۵	۰/۵۲۰	۰/۰۲۱۹	۰/۴۷۵	۰/۰۲۵۲	۰/۴۹۵	۰/۰۲۳۲	۰/۵۱۲	۰/۰۲۶۱
		۰/۱	۰/۱۱۵	۰/۰۰۴۰	۰/۱۳۴	۰/۰۰۶۶	۰/۱۰۴	۰/۰۰۲۵	۰/۱۰۳	۰/۰۲۲۶
۶	۶	۰/۳	۰/۳۳۱	۰/۰۱۳۵	۰/۳۴۰	۰/۰۱۸۳	۰/۳۲۰	۰/۰۱۷۹	۰/۳۰۰	۰/۰۱۱۴
		۰/۵	۰/۵۰۲	۰/۰۱۸۵	۰/۵۲۴	۰/۰۰۲۴	۰/۵۲۲	۰/۰۲۱۶	۰/۵۰۸	۰/۰۲۲۴
		۰/۱	۰/۱۲۱	۰/۰۰۵۴	۰/۱۱۳	۰/۰۰۳۰	۰/۱۱۲	۰/۰۰۴۵	۰/۱۱۴	۰/۰۰۳۴
	۸	۰/۳	۰/۳۱۹	۰/۰۱۲۹	۰/۳۱۹	۰/۰۱۳۳	۰/۳۳۴	۰/۰۲۲۷	۰/۳۱۴	۰/۰۱۳۷
		۰/۵	۰/۵۰۲	۰/۰۱۷۱	۰/۴۹۳	۰/۰۱۳۵	۰/۵۵۱	۰/۰۱۵۲	۰/۴۸۱	۰/۰۲۱۰
		۰/۱	۰/۱۱۲	۰/۰۰۳۶	۰/۱۱۱	۰/۰۰۲۷	۰/۱۱۴	۰/۰۰۳۶	۰/۱۱۵	۰/۰۰۴۷
	۴	۰/۳	۰/۲۷۹	۰/۰۱۴۲	۰/۲۹۴	۰/۰۱۳۷	۰/۳۰۰	۰/۰۱۰۴	۰/۳۳۲	۰/۰۱۶۶
		۰/۵	۰/۴۹۴	۰/۰۲۲۰	۰/۴۹۷	۰/۰۲۱۰	۰/۵۰۱	۰/۰۱۸۸	۰/۴۸۷	۰/۰۱۹۹
		۰/۱	۰/۱۰۷	۰/۰۰۲۵	۰/۱۰۳	۰/۰۰۲۲	۰/۱۱۴	۰/۰۰۳۳	۰/۱۱۲	۰/۰۰۲۹
۸	۶	۰/۳	۰/۳۱۵	۰/۰۱۲۰	۰/۳۱۷	۰/۰۰۷۷	۰/۲۸۰	۰/۰۱۰۵	۰/۳۳۵	۰/۰۱۲۲
		۰/۵	۰/۴۷۶	۰/۰۱۹۶	۰/۵۰۲	۰/۰۲۲۱	۰/۴۸۶	۰/۰۱۵۷	۰/۴۶۹	۰/۰۱۳۰
		۰/۱	۰/۱۲۰	۰/۰۰۳۰	۰/۱۰۵	۰/۰۰۲۵	۰/۱۰۴	۰/۰۰۲۱	۰/۱۱۴	۰/۰۰۲۶
	۸	۰/۳	۰/۳۰۳	۰/۰۰۷۸	۰/۳۰۷	۰/۰۰۹۶	۰/۲۹۴	۰/۰۰۸۷	۰/۲۸۷	۰/۰۰۸۷
		۰/۵	۰/۵۰۷	۰/۰۱۴۰	۰/۴۸۹	۰/۰۱۳۹	۰/۵۲۵	۰/۰۱۱۷	۰/۵۰۸	۰/۰۱۴۳
	۴	۰/۱	۰/۱۰۵	۰/۰۰۲۱	۰/۱۱۷	۰/۰۰۱۳	۰/۱۰۱	۰/۰۰۱۷	۰/۱۰۳	۰/۰۰۱۵
۱۲	۶	۰/۳	۰/۳۲۵	۰/۰۰۶۴	۰/۳۱۶	۰/۰۰۴۲	۰/۳۰۳	۰/۰۰۷۱	۰/۲۸۹	۰/۰۰۷۱
	۸	۰/۵	۰/۴۸۹	۰/۰۰۶۶	۰/۴۹۷	۰/۰۰۹۵	۰/۴۹۶	۰/۰۰۹۶	۰/۵۱۳	۰/۰۰۸۸

جداول ۱۳ تا ۱۵ را که جداول انواع بازه‌های اطمینان برای چند توزیع از توزیع‌های ذکر شده با نوع بازهٔ اطمینان و نام توزیع‌ها می‌باشند، به‌طور مجزا آورده شده‌اند. سپس محاسبات $\widehat{R}, MSE(\widehat{R})$ برای توزیع در دو جدول ۱۷ و ۱۸ با ذکر نام توزیع‌ها آورده شده‌اند.

جدول ۱۷: میانگین برآورد R و MSE برآورد در خانواده نرخ خطر معکوس متناسب

n	m	R	تابع توانی		لوژستیک تعمیم‌یافته		رایلی معکوس	
			$\widehat{R}$	$MSE(\widehat{R})$	$\widehat{R}$	$MSE(\widehat{R})$	$\widehat{R}$	$MSE(\widehat{R})$
		۰/۱	۰/۱۱۷	۰/۰۰۵۶۵	۰/۱۱۵	۰/۰۰۵۱۳	۰/۱۱۷	۰/۰۰۵۶۵
	۴	۰/۳	۰/۳۲۰	۰/۰۲۱۴۴	۰/۳۳۰	۰/۰۲۴۳۸۱	۰/۳۲۰	۰/۰۲۱۴۵
		۰/۵	۰/۵۰۱	۰/۰۲۲۸۴	۰/۵۰۲	۰/۰۳۵۵۱	۰/۴۷۴	۰/۰۲۷۸۵
		۰/۱	۰/۱۱۹	۰/۰۰۷۵۸	۰/۱۱۹	۰/۰۰۵۰۱	۰/۱۲۰	۰/۰۰۵۰۵
۴	۶	۰/۳	۰/۳۰۳	۰/۰۱۹۴۱	۰/۳۱۹	۰/۰۲۱۴۴	۰/۳۳۶	۰/۰۲۲۱۳
		۰/۵	۰/۵۲۱	۰/۰۲۳۶۳	۰/۴۹۲	۰/۰۲۳۸۴	۰/۵۲۱	۰/۰۲۳۶۳
		۰/۱	۰/۱۱۵	۰/۰۰۵۰۵	۰/۱۲۳	۰/۰۰۵۹۳	۰/۱۱۵	۰/۰۰۵۰۵
	۸	۰/۳	۰/۳۱۵	۰/۰۱۶۰۳	۰/۳۱۳	۰/۰۱۷۰۴	۰/۳۱۵	۰/۰۱۶۰۳
		۰/۵	۰/۴۸۹	۰/۰۲۲۲۶	۰/۵۱۳	۰/۰۱۷۴۱	۰/۵۴۱	۰/۰۲۰۹۶
		۰/۱	۰/۱۱۵	۰/۰۰۳۲۸	۰/۱۱۵	۰/۰۰۵۹۵	۰/۱۲۴	۰/۰۰۵۶۴
	۴	۰/۳	۰/۳۲۰	۰/۰۱۹۹۹	۰/۳۰۷	۰/۰۱۹۴۵	۰/۳۲۴	۰/۰۱۷۲۲
		۰/۵	۰/۴۹۷	۰/۰۲۴۷۲	۰/۵۰۸	۰/۰۲۵۸۴	۰/۴۹۸	۰/۰۲۱۳۲
		۰/۱	۰/۱۱۳	۰/۰۰۳۶۰	۰/۱۰۸	۰/۰۰۲۲۴	۰/۱۲۱	۰/۰۰۴۶۳
۶	۶	۰/۳	۰/۳۱۳	۰/۰۱۵۰۶	۰/۳۲۲	۰/۰۱۸۱۱	۰/۳۰۸	۰/۰۱۱۹۰
		۰/۵	۰/۵۱۷	۰/۰۱۸۴۲	۰/۴۹۷	۰/۰۲۲۸۰	۰/۵۰۹	۰/۰۲۱۶۲
		۰/۱	۰/۱۱۵	۰/۰۰۲۹۴	۰/۱۱۷	۰/۰۰۳۷۴	۰/۱۰۴	۰/۰۰۲۴۷
	۸	۰/۳	۰/۳۲۴	۰/۰۱۵۱۴	۰/۳۱۶	۰/۰۱۶۵۷	۰/۳۱۴	۰/۰۱۴۴۷
		۰/۵	۰/۴۸۶	۰/۰۱۷۸۵	۰/۵۰۱	۰/۰۱۹۰۹	۰/۴۸۳	۰/۰۱۹۳۴
		۰/۱	۰/۱۰۹	۰/۰۰۳۶۶	۰/۱۲۳	۰/۰۰۵۷۹	۰/۱۱۷	۰/۰۰۲۲۷۷
	۴	۰/۳	۰/۲۷۷	۰/۰۱۳۳۰	۰/۳۲۵	۰/۰۱۵۹۳	۰/۲۸۲	۰/۰۱۷۶۳
		۰/۵	۰/۴۵۲	۰/۰۲۱۸۳	۰/۵۲۰	۰/۰۱۷۱۳	۰/۴۷۶	۰/۰۱۸۶۷
		۰/۱	۰/۱۰۴	۰/۰۰۲۵۱	۰/۱۱۲	۰/۰۰۳۳۹	۰/۱۳۰	۰/۰۰۴۰۸
۸	۶	۰/۳	۰/۳۱۲	۰/۰۰۸۹۸	۰/۳۱۹	۰/۰۱۴۹۴	۰/۳۰۱	۰/۰۱۱۳۰
		۰/۵	۰/۴۸۱	۰/۰۱۷۵۴	۰/۵۰۵	۰/۰۱۶۴۲	۰/۴۷۰	۰/۰۱۸۷۴
		۰/۱	۰/۱۱۷	۰/۰۰۳۹۰	۰/۱۰۳	۰/۰۰۳۱۵	۰/۱۰۰	۰/۰۰۲۲۵
	۸	۰/۳	۰/۳۲۹	۰/۰۱۲۰۳	۰/۳۱۶	۰/۰۱۲۹۸	۰/۳۱۷	۰/۰۱۲۴۴
		۰/۵	۰/۵۱۴	۰/۰۱۳۵۷	۰/۴۶۴	۰/۰۱۲۶۶	۰/۴۸۸	۰/۰۱۷۱۴
	۴	۰/۱	۰/۱۰۴	۰/۰۰۱۶۵	۰/۱۰۳	۰/۰۰۱۵۵	۰/۱۱۱	۰/۰۰۱۷۶
۱۲	۶	۰/۳	۰/۲۸۰	۰/۰۰۵۸۸	۰/۲۸۶	۰/۰۰۶۶۶	۰/۲۸۳	۰/۰۰۳۷۰
	۸	۰/۵	۰/۵۲۸	۰/۰۱۶۴۷	۰/۴۷۹	۰/۰۱۳۶۳	۰/۵۰۸	۰/۰۰۵۹۸

بحث و نتیجه‌گیری

همان‌طور که در جداول ۱۳ تا ۱۵ ملاحظه می‌شود به‌ازای مقادیر مختلف R بازه‌ها در $R = ۰/۵$ طول ماکسیمم دارند و با افزایش R طول بازه کوتاهتر می‌شود. افزایش حجم نمونه نیز موجب کوتاهتر شدن بازه‌های اطمینان می‌شود. احتمال پوشش در $Boot-t$ و $Boot-p$ تقریبا شبیه هم و نسبت به بقیه بازه‌ها محافظه کارانه‌تر هستند. طوری که با افزایش حجم نمونه احتمال پوشش‌ها در آنها بهبود پیدا می‌کند. بازهٔ اطمینان $Boot-p$، بوت‌استرپ درصدی، از بازهٔ $Boot-t$، بوت‌استرپ-تی، عملکرد بهتری دارد. در بین تمام بازه‌ها در همه سطوح، بازهٔ $Boot-t$ دارای ماکسیمم طول و بازه‌های AHPD دارای کوتاهترین طول هستند. بازهٔ اطمینان بیزی عملکرد بهتری نسبت به بازهٔ درصدی در حجم نمونه‌های کوچکتر دارد و بر عکس بازهٔ بوت‌استرپ درصدی در حجم نمونه‌های بزرگ و همچنین در nهای کوچک در نزدیکی $R = ۱/۲$ کوتاهتر ظاهر می‌شود. بنابراین بازه‌های AHPD برای همه nها مناسب است و توصیه می‌شود برای nهای کوچک بازه‌های اطمینان بیزی بکار گرفته شود. برای nهای بزرگتر عملکرد دو بازهٔ بوت‌استرپ درصدی و اطمینان بیزی مشابه هستند. اما بازهٔ بوت‌استرپ درصدی مقداری کوچکتر است. همچنین بنا بر جداول ۱۷تا ۱۸ برای همه سطوح پارامتر R و مقدار واقعی برای همه ترکیب‌های n و m در همه توزیع‌ها، برآوردهای R مناسب و بسیار نزدیک مقدار واقعی پارامترند و خطاها در کل توزیع‌ها کوچک هستند.

مراجع

رزمخواه، م.، احمدی، ج. و خطیب آستانه، ب. (۱۳۸۶)، مقایسه دو روش استخراج رکوردها از دبدگاه اطلاع فیشر، مجله علوم آماری، ۱، ۱۹-۴۴.

Ahmadi, J. and Arghami, N. R. (2003a), Comparing the Fisher Information in Record Values and iid Observations, *Statistics* **37**, 435-441.

Ahmadi, J. and Arghami, N. R. (2003b), Nonparametric Confidence and Tolerance Intervals from Record Values Data, *Statistical Papers*, **44**, 455-468.

Ahmadi, J., Jafari Jozani, M., Marchand, E. and Parsian, A. (2008), Prediction of k-records from a General Class of Distributions under Balanced Type Loss Functions, *Metrika*, **70**, 19-33.

Ahmadi, J., Jafari Jozani, M., Marchand, E. and Parsian, A. (2009), Bayesian Estimation Based on k-record Data from a General Class of Distributions under Balanced Type Loss Functions, *Journal of Statistical Planning and Inference*, **139**, 1180-1189.

Arnold, B. C., Balakrishnan, N. and Nagaraja, H. N. (1998), *Records*, Wiley, New York.

Baklizi, A. (2008), Likelihood and Bayesian Estimation of $P(X < Y)$ Using Lower Record Values from the Generalized Exponential Distribution, *Computational Statistics and Data Analysis*, **52**, 3468-3473.

Birnbaum, Z. W. (1956), On a Use of Mann-Whitney Statistics, *Proceedings of Third Berkeley Symposium in Mathematics, Statistics and Probability*, **1**, 13-17, University of California Press, Berkeley, CA.

Chandra, N. N. and Roy, D. (2001), Some Results on Reversed Hazard Rate, *Probability in the Engineering and Informational Sciences*, **15**, 95-102.

Chen, M. and Shao, Q. (1999), Monte Carlo Estimation of Bayesian Credible and HPD Intervals, *Journal of Computational and Graphical Statistics*, **8**, 69-92.

Church, J. D. and Harris, B. (1970), The Estimation of Reliability from Stress-Strength Relationship, *Technometrics*, **12**, 49-54.

Efron, B. and Tibshirani, R. J. (1993), *An Introduction to the Bootstrap*, Chapman and Hall.

Gupta, R. D., Gupta, R. C. and Sankaran, P.G. (2004), Some Characterization Results Based on the (Reversed) Hazard Rate Function, *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **33**, 3009-3031.

Gupta, R. C. and Gupta, R. D. (2007), Proportional Reversed Hazard Rate Model and its Applications, *Journal of Statistical Planning and Inference*, **137**, 3525-3536.

Kakade, C. S., Shirke, D. T. and Kundu, D. (2008), Inference for $P(Y < X)$ in Exponentiated Gumbel Distribution, *Journal of Statistical Theory and Applications*, **3**, 121-133.

Kundu, D. and Gupta, R. D. (2005), Estimation of $P(Y < X)$ for Generalized Exponential Distribution, *Metrika*, **61**, 291-308.

Marshall, A. W. and Olkin, O. (2007), *Life Distributions*, Springer, New York.

Nadarajah, S. and Kotz, S. (2003), Reliability for Pareto Models, *Metron-International Journal of Statistics*, **51**, 191-204.

Shawky, A. I. and Bakoban, R. A. (2010), Inferences for Exponentiated Gamma Distribution Based on Record Values, *Journal of Statistical Theory and Applications*, **9**, 103-124.