



Development of a Bayesian Model For Finite Mixture Regression of the Skew-Laplace Distribution

Tarami, B.¹ , Sanjari Farsipour, N.² , Khosravi, H.³ 

¹Department of Statistics, Shiraz University, Shiraz, Iran.

²Department of Statistics, University of Alzahra, Tehran, Iran.

³Department of Statistics, University of Imam Khomeini, Qazvin, Iran.

Corresponding author: Nahid. Sanjari Farsipour, nsanjari@alzahra.ac.ir

Received: 21/6/2024 Revised: 2/11/2025 Accepted and Published Online: 4/11/2025.

Introduction

In classical statistics, the assumption of Normality is a basic assumption in all models and statistical hypotheses. But in many models, selection often leads to departures from these assumptions, resulting in skew and thick tails. Naturally, using classical models for these observations results in errors and causes unrealistic decisions. One ancient way of making these observations is to normalize using transformations. But in addition to these transformations, there are causes of hardness due to the interpretation of the results. When the data skewness is greater, the mean and variance are related, and the basic conditions of Normality and independence are violated. So finding a transformation that disappears this relation is impossible. The researchers were attempting to replace distribution-based models with more applicable ones. One of these distributions is the Laplace distribution and its extensions, due to their heavy tails and skewness. Some extensions of the Laplace distribution include the skew-Laplace, which is applicable under symmetry and skewness conditions and provides a robust fit across a range of conditions. Also, when the population has characteristics beyond the above, it can be modeled using a mixture of skew-Laplace distributions. When an inhomogeneous population with several sub-populations is considered, other rates are not responsible.

Material and Methods

The Normality of data has been the basic assumption of all statistical models and tests. However, we often deal with data for statistical modeling that violates this assumption. One such alternative distribution is the Laplace distribution and its extensions. There are extensions of the Laplace distribution called the Laplace-Skew distribution that can be used in both symmetrical and skewed conditions, and provide robust fits under different conditions.

Results and Discussion

The frequentist formulation of the skew-Laplace mixed regression model developed by the authors of this article is introduced. The Bayesian approach to the skew-Laplace mixed regression is developed. We then conduct a simulation study, and the results of both the Laplace and skew-Laplace mixed model approaches are compared.

Conclusion

Traditional statistical models rely on the normality assumption, which is often invalid for real-world data that is skewed, heavy-tailed, or multimodal. To overcome this, skew-Laplace distributions, generalizations of the Laplace distribution, provide a flexible approach capable of modeling both skewness and symmetry, while handling extreme data. Using mixed models with these flexible distributions yields superior results for heterogeneous data. This study employed a Bayesian approach to skew-Laplace finite-mixed regression. The Bayesian method is advantageous for mixed models, providing reliable fits and better handling of small samples than frequentist methods. The research showed that the Bayesian fit outperforms the frequentist fit. Crucially, the skew-Laplace mixture model works well for both skewed and symmetric subpopulations, whereas the simpler Laplace-based model performs poorly when the data is skewed.

Keywords: Gibbs Algorithm, Laplace distribution, Skew-Laplace distribution, Mixture regression, Metropolis-Hastings algorithm.

Mathematics Subject Classification (2020): 62E15, 62J05.



©The Author(s). The Publisher is Iranian Statistical Society.

This is an open access article distributed under the terms and conditions of [\(CC BY-NC 4.0\)](https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/)

توسعه یک مدل بیزی برای رگرسیون متناهی آمیخته توزیع چوله-لاپلاس

بهرام طارمی^۱، ناهید سنجری فارسی پور^۲، حسن خسروی^۳

^۱ بخش آمار، دانشکده علوم، دانشگاه شیراز

^۲ گروه آمار، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه الزهرا

^۳ گروه آمار، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه بین‌المللی امام خمینی قزوین

نویسنده مسئول: بهرام طارمی، tarami@shirazu.ac.ir

تاریخ دریافت: ۱۴۰۳/۴/۱ تاریخ بازنگری: ۱۴۰۴/۸/۱۱ تاریخ پذیرش و انتشار: ۱۴۰۴/۸/۱۳

چکیده: در اغلب مسائل کاربردی، مشاهدات دارای ساختاری چوله، کشیده، دم سنگین و چند مدی یا آمیخته هستند. لذا مدل‌های مبتنی بر توزیع نرمال نمی‌توانند در چنین شرایطی استنباط‌های صحیحی را ارائه دهند و باعث اریبی برآوردها یا بزرگی واریانس آنها می‌شوند. توزیع لاپلاس و تعمیم‌های آن به دلیل داشتن کشیدگی، سنگینی دم‌ها و چولگی می‌توانند جایگزین‌های مناسبی در چنین شرایطی باشند. از طرفی در مدل‌های مبتنی بر توزیع‌های آمیخته همیشه این احتمال وجود دارد که از یک یا چند مولفه نمونه‌های کمتری در دسترس باشد. لذا با توجه به مزیت رهیافت بیزی در مواجهه با نمونه‌های کم حجم، در این پژوهش یک مدل بیزی برای برازش رگرسیون آمیخته متناهی چوله-لاپلاس توسعه داده شده است و توسط یک مطالعه شبیه‌سازی و مثال کاربردی نتایج برازش مدل توسعه داده شده با رگرسیون آمیخته متناهی لاپلاس در دو رهیافت بسامدی و بیزی مقایسه شده است. نتایج نشان می‌دهد که رهیافت بیزی مدل توسعه داده شده از کارایی بسیار موثری نسبت به سایر مدل‌های مشابه در هر دو رهیافت است.

واژه‌های کلیدی: رگرسیون آمیخته، الگوریتم متروپولیس-هاستینگز، توزیع لاپلاس، توزیع چوله-لاپلاس
کد موضوع بندی ریاضی (۲۰۲۰): 62J05, 62E15



۱ مقدمه

در آمار کلاسیک و کاربردی نرمال بودن داده‌ها، فرض اساسی تمامی مدل‌ها و آزمون‌های آماری بوده است. این درحالی است که اغلب با داده‌هایی برای مدل‌سازی‌های آماری سروکار داریم که از این فرض تخطی کرده و دارای ساختاری چند مدی، چوله، کشیده و با دم‌های ضخیم هستند. طبیعتاً استفاده از مدل‌های کلاسیک برای اینگونه مشاهدات نتایج اشتباهی را به ارمغان آورده و باعث تصمیم‌گیری‌های نادرست می‌گردند. یکی از راهکارهای قدیمی مواجهه با اینگونه مشاهدات، نرمال‌سازی آن‌ها توسط یک‌سری تبدیلات تجربی است. اما گذشته از اینکه استفاده از این نوع تبدیلات باعث سختی تفاسیر نتایج مدل‌های آماری می‌گردد در مواردی که چولگی داده‌ها زیاد باشد میانگین و واریانس به یکدیگر وابسته شده و شرط اساسی توزیع نرمال که استقلال بین این دو آماره است نقض می‌گردد. لذا پیدا کردن تبدیلی که بتواند این وابستگی را از بین ببرد و باعث نرمال شدن مشاهدات گردد بسیار سخت و شاید غیر ممکن باشد. بنابراین پژوهشگران آماری در تلاش هستند که با توسعه مدل‌های مبتنی بر توزیع‌های جایگزین، بتوانند مدل‌های کارتر و انعطاف‌پذیرتری را ارائه دهند. یکی از این توزیع‌های جایگزین، توزیع لاپلاس و تعمیم‌های آن است که به دلیل داشتن ساختاری دم‌سنگین، کشیده و چوله می‌توان در شرایط غیر نرمال از آن‌ها استفاده نمود. تعمیم‌های از توزیع لاپلاس به نام چوله-لاپلاس وجود دارند که قادرند در هر دو شرایط تقارن و چولگی مورد استفاده قرار گیرند و برازش‌های استواری را در شرایط مختلف ارائه دهند. همچنین در حالتی که جامعه علاوه بر ویژگی‌های فوق دارای ساختاری چند نمایی باشد می‌توان از آمیخته‌ای از توزیع‌های چوله-لاپلاس استفاده نمود. وقتی یک جامعه ناهمگن و دارای چندین زیرجامعه باشد دیگر تحلیل‌های معمول آماری برای جامعه مورد نظر پاسخگو نیست. در این حالت می‌بایست از توزیع‌های آمیخته که ترکیب محددی از چندین توزیع پارامتری هستند، بهره جست، بطوری که هر توزیع، می‌بایست ویژگی‌های یک زیر جامعه خاص را مدل‌بندی کند.

ساده‌ترین توزیع آمیخته^۱، توزیعی دو مولفه‌ای $f_1(\cdot)$ و $f_2(\cdot)$ است که به صورت

$$f_Y(y | \eta) = \eta f_1(\cdot) + (1 - \eta) f_2(\cdot), \quad 0 \leq \eta \leq 1.$$

با یکدیگر ترکیب می‌شوند، که در آن η ضریب آمیختگی نام دارد. تعریف توزیع‌های آمیخته را می‌توان به سادگی به g توزیع به صورت

$$f_Y(y | \eta_1, \dots, \eta_g) = \sum_{j=1}^g \eta_j f_j(y), \quad \sum_{j=1}^g \eta_j = 1, \quad \eta_j > 0, \quad g > 1.$$

تعمیم داد و در مدل‌سازی‌های آماری مبنا قرار داد. هدف این پژوهش توسعه یک مدل بیزی برای رگرسیون آمیخته چوله-لاپلاس است.

¹Mixture Distribution

محققانی از جمله **ولف** (۱۹۶۵) برآورد ماکسیم درستنمایی توزیع آمیخته را مورد بررسی قرار دادند و توزیع نرمال آمیخته متناهی دو مؤلفه‌ای اولین بار توسط **پیرسون** (۱۸۹۴) مطرح شد. یکی از مسائل اساسی در توزیع‌های آمیخته تعیین تعداد مؤلفه‌های توزیع است. **آکائیک** (۱۹۷۳) به کمک نظریه اطلاع، معیار اطلاع آکائیک را برای تعیین تعداد مؤلفه‌های یک توزیع آمیخته، از طریق مینیمم ساختن فاصله کولبک-لیبر بین توزیع جامعه و توزیع پیشنهادی مورد مطالعه قرار دادند. **بوهنینگ** (۱۹۹۴) نیز تحلیل و کاربردهای توزیع‌های آمیخته را مورد مطالعه قرار دادند. **لیندسی** (۱۹۹۵) و **مک لاجلان** (۲۰۰۰) به تحلیل توزیع‌های آمیخته متناهی به عنوان توزیع‌های مناسب در موقعیت‌های گوناگون و برآورد پارامترهای این توزیع در دو رهیافت بسامدی و بیزی و همچنین تعیین تعداد مؤلفه‌های یک توزیع آمیخته پرداخته‌اند. **کوانت** (۱۹۷۲) و **کوانت و رامسی** (۱۹۷۸) اولین محققانی بودند که رگرسیونی آمیخته متناهی را مورد بررسی قرار دادند. با معرفی الگوریتم امید-بیشینه‌سازی^۱ (EM) برای توزیع‌های آمیخته توسط **دمپستر و همکاران** (۱۹۷۷)، محققانی مانند **اتکین و ویلسون** (۱۹۸۰)؛ **لاچوس و همکاران** (۲۰۱۰)؛ **کانچو و همکاران** (۲۰۱۰) به توسعه مدل‌های رگرسیون‌های آمیخته متناهی براساس توزیع‌های متفاوت روی آوردند. **جونز و مک‌لاچلان** (۱۹۹۲) با استفاده از الگوریتم EM از رگرسیون آمیخته برای تحلیل داده‌ها استفاده کردند. در همین راستا **تیورنر** (۲۰۰۰) با استفاده از یک ترکیب دو بخشی، شامل دو رگرسیون خطی ساده، مدلی را با الگوریتم EM به داده‌های خود برازش داد. **هاوکینز و همکاران** (۲۰۰۱) به بررسی تعداد مؤلفه‌ها لازم برای مدل رگرسیونی نرمال آمیخته پرداختند. توسعه مدل رگرسیون آمیخته بر اساس توزیع تی-استیودنت توسط **یاو و همکاران** (۲۰۱۴) صورت گرفت. توسعه مدل رگرسیون آمیخته استوار بر اساس توزیع لاپلاس توسط **سونگ و همکاران** (۲۰۱۴) ارائه شد. مدل رگرسیون براساس توزیع آمیخته چوله- تی توسط **داگرو و ارسلان**، (۲۰۱۷) پیشنهاد شد و در همین سال آن‌ها چندین رگرسیون آمیخته متفاوت را مورد مطالعه قرار دادند.

رهیافت بیزی تعیین تعداد مؤلفه‌های توزیع آمیخته توسط **ریچاردسون و گرین** (۱۹۹۷) مورد بررسی قرار گرفت. **مارین و همکاران** (۲۰۰۵) دشواری‌های تحلیل بیزی توزیع‌های آمیخته را بررسی نموده و نشان دادند وقتی توزیع جامعه، آمیخته است، کاربست روش‌های معمول زنجیر مارکوف مونت کارلویی^۲ (MCMC) از توزیع پسین پارامترها با دشواری روبه‌رو است. اخیراً **طارمی و همکاران** (۲۰۲۴) رهیافت بیزی رگرسیون آمیخته لاپلاس را توسعه دادند. آن‌ها در همین سال نیز رهیافت بسامدی رگرسیون آمیخته چوله-لاپلاس را مورد مطالعه قرار دادند که پژوهش حاضر توسعه مدل بیزی همین مدل است. کاربست رهیافت بیزی برای برآورد پارامترهای توزیع‌های آمیخته از دهه هشتاد قرن بیستم جایگاه خود را در میان بسیاری از محققان باز کرده است. اولین پژوهش‌ها در خصوص برآورد بیزی توزیع‌های آمیخته را می‌توان به **دایبولت و روبرت** (۱۹۹۰) و **لاوین و وست** (۱۹۹۲) نسبت داد. تحلیل بیزی مدل‌های آمیخته نیز با توجه به پیچیدگی ذاتی این مدل‌ها دارای دشواری‌های خاص خود است. توریع پسین در این مدل‌ها معمولاً پیچیده و فاقد شکل بسته است. به‌علاوه نمونه‌گیری از توزیع پسین اغلب امری دشوار و زمان‌بر است. **رودر و واسرمن** (۱۹۹۷) بیان کردند که همیشه این احتمال وجود دارد که از برخی از مؤلفه‌های توزیع‌های آمیخته،

^۱Expectation Maximization

^۲Markov Chain Monte Carlo

هیچ مشاهده‌ای به دست نیاید بنابراین نمی‌توان تمام توزیع‌های پیشین را ناآگاهی بخش در نظر گرفت زیرا در این صورت توزیع پسین سره به دست نخواهد آمد.

ساختار کلی این پژوهش به این صورت است که در بخش ۲، توزیع چوله-لاپلاس معرفی می‌شود، در بخش ۳، برازش بسامدی مدل رگرسیون آمیخته چوله-لاپلاس که توسط نویسندگان همین مقاله توسعه داده شده است، معرفی می‌شود. بخش ۴، رهیافت بیزی رگرسیون آمیخته چوله-لاپلاس توسعه داده می‌شود. بخش ۵ با یک مطالعه شبیه‌سازی شروع شده، نتایج هر دو رهیافت مدل‌های آمیخته لاپلاس و آمیخته چوله-لاپلاس با یکدیگر مقایسه می‌شوند. در بخش ۶ نیز بحث و نتیجه‌گیری ارائه می‌شود.

۲ توزیع چوله-لاپلاس

لاپلاس در سال ۱۷۷۴ توزیعی معرفی کرد که به توزیع لاپلاس معروف است. این توزیع دارای کشیدگی برابر ۶ و دم‌های سنگین‌تر از نرمال است و به همین دلیل می‌تواند داده‌های دور افتاده را پوشش دهد. این توزیع برای مدل‌سازی داده‌های متقارنی که دارای منحنی زنگوله‌ای شکل هستند، به کار می‌رود. توزیع لاپلاس دارای دو پارامتر مقیاس و یک پارامتر مکان است و حالت خاص آن که بیشتر مورد استفاده محقق گرفته است زمانی است که دو پارامتر مقیاس آن با یکدیگر برابر باشند یعنی تابع چگالی آن به صورت

$$f(x | \mu, \sigma) = \frac{1}{2\sigma} \exp \left\{ -\frac{|x - \mu|}{\sigma} \right\}, \quad \mu \in R, \sigma > 0.$$

باشد. از آنجایی که توزیع لاپلاس متقارن بوده بنابراین نمی‌تواند برای مشاهداتی که دارای چولگی هستند، کارایی داشته باشد. لذا تعمیم‌هایی از توزیع لاپلاس که می‌توانند چولگی را نیز پوشش دهند، توسط [هولا و باتاچاریا \(۱۹۸۶\)](#)؛ [کاتر و همکاران \(۲۰۰۱\)](#)؛ [یو و ژانگ \(۲۰۰۵\)](#)؛ [ارسلان \(۲۰۰۹\)](#) معرفی شده‌اند. توزیع‌های لاپلاس نامتقارن فقط برای مشاهدات چوله کارایی دارند اما توزیع‌های چوله-لاپلاس علاوه بر پوشش چولگی، قادر هستند حالت تقارن را نیز مدل‌سازی کنند در این صورت توزیع لاپلاس یک عضو خاص این خانواده از توزیع‌ها محسوب می‌شود. شکل‌های متفاوتی از توزیع‌های چوله-لاپلاس توسط محققان مختلفی ارائه شده است اما ما در اینجا توجه خود را به توزیع چوله-لاپلاسی که توسط [ارسلان \(۲۰۰۹\)](#) پیشنهاد شده، معطوف می‌کنیم. از این جهت که این توزیع دارای تابع چگالی ساده‌تری نسبت به دیگر توزیع‌های چوله-لاپلاس است لذا از لحاظ کاربردی توجه بسیاری از محققان را به خود جلب کرده است ([پریم و هلمس، ۲۰۰۵](#)؛ [جولیا و وایوز-راگو، ۲۰۰۵](#)؛ [امیری و همکاران، ۱۳۹۷](#)). این توزیع با نماد $SL(\mu, \sigma, \gamma)$ نشان داده می‌شود و تابع چگالی آن به صورت

$$f(y | \mu, \sigma, \gamma) = \frac{1}{2\sigma\alpha} \exp \left\{ \gamma \left(\frac{y - \mu}{\sigma^2} \right) - \alpha \left| \frac{y - \mu}{\sigma} \right| \right\} \quad \gamma, \mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0.$$

است، که در آن μ پارامتر مکان، σ پارامتر مقیاس، γ پارامتر چولگی و $\alpha = \sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{\sigma^2}}$ است. امید ریاضی و واریانس این توزیع به ترتیب به صورت $E(Y) = \mu + \gamma$ و $\text{Var}(Y) = \sigma^2 + \gamma^2$ بدست می‌آید. توزیع $SL(\mu, \sigma, \gamma)$ به ازای $\gamma = 0$ به توزیع متقارن $L(\mu, \sigma)$ و به ازای $\gamma > 0$ چوله به راست و برای $\gamma < 0$ چوله به چپ است. برای ادامه مدل‌سازی نیاز است که توزیع وارون گاوسی تعریف شود. متغیر تصافی X ، دارای توزیع وارون گاوسی است، اگر تابع چگالی آن به صورت

$$f(x) = \frac{b^{\frac{1}{2}} \exp \sqrt{ab}}{\sqrt{\pi}} x^{-\frac{3}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(ax + \frac{b}{x} \right) \right\}, \quad a, b > 0.$$

باشد. این توزیع را با نماد $IG(a, b)$ نشان می‌دهیم و امید ریاضی واریانس از طریق روابط

$$E(X) = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}, \quad E(X^{-1}) = \frac{1}{b} + \frac{1}{E(X)}. \quad (1)$$

بدست می‌آید. یک فرم سلسله مراتبی $SL(\mu, \sigma, \gamma)$ به صورت

$$\begin{cases} Y_i | W_i \sim N(\mu + W_i^{-1} \gamma, \frac{\sigma^2}{W_i}) \\ W_i \sim IG(1, \frac{1}{\gamma}) \end{cases} \quad (2)$$

تعریف می‌شود، که در آن توزیع حاشیه‌ای Y ، $SL(\mu, \sigma, \gamma)$ است، به طوریکه

$$f(y, w) = \frac{w^{-\frac{3}{2}}}{\sqrt{\pi} \sigma^2} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} w(y - \mu)^2 + \frac{\gamma}{\sigma^2} (y - \mu) - \frac{w^{-1}}{2} \left(\frac{\gamma^2}{\sigma^2} + 1 \right) \right\},$$

$$f(w | y) = \frac{\alpha}{\sqrt{\pi}} w^{-\frac{3}{2}} \exp \left\{ \alpha \sqrt{s} - \frac{1}{2} \left(sw + \frac{\alpha^2}{w} \right) \right\} = IG(s, \alpha^2).$$

که در آن $\alpha = \sqrt{\frac{\gamma^2}{\sigma^2} + 1}$ و $s = (\frac{y - \mu}{\sigma})^2$ است. بنابراین با توجه به روابط (۱) برای توزیع $f(w | y)$ خواهیم داشت:

$$E(w | y) = \frac{\sqrt{\gamma^2 + \sigma^2}}{|y - \mu|}, \quad E(w^{-1} | y) = \frac{\sigma^2}{\gamma^2 + \sigma^2} + \frac{|y - \mu|}{\sqrt{\gamma^2 + \sigma^2}}. \quad (3)$$

۳ رهیافت بسامدی برازش رگرسیون آمیخته چوله-لاپلاس

رگرسیون آمیخته توزیع چوله-لاپلاس را می‌توان به صورت $Y_i | x_i \sim \sum_{j=1}^g \eta_j SL(y_i | \mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta}_j, \sigma_j^2 \gamma_j)$ نشان داد. در این صورت مدل سلسله مراتبی (۲)، در حالت رگرسیونی و در $Z_{ij} = 1$ زیرجامعه به صورت

$$\begin{cases} Y_i | W_i, x_i, Z_{ij} = 1 \sim N(\mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta}_j + W_i^{-1} \gamma_j, \frac{\sigma_j^2}{W_i}) \\ W_i | Z_{ij} = 1 \sim IG(1, \frac{1}{\gamma_j}) \\ \mathbf{Z}_i = (Z_{i1}, \dots, Z_{ig})' \sim M(1, \eta_1, \dots, \eta_g) \end{cases}$$

بازنویسی می‌شود. طارمی و همکاران (۲۰۲۴) بر اساس شکل سلسله مراتبی (۳) و مدل‌سازی توزیع‌های آمیخته، تابع درست‌نمایی داده‌های کامل و برآورد ماکسیمم درست‌نمایی رگرسیون آمیخته بر اساس توزیع چوله-لاپلاس در مرحله $(t+1)$ ام الگوریتم EM را به صورت

$$\begin{aligned} \ell_c(\Psi, y, w, z_i) \propto \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^g \{ \eta_j \frac{w_i^{-\frac{1}{\gamma_j}}}{\sqrt{\sigma_j^2}} \exp \{ -\frac{1}{\gamma_j \sigma_j^2} w_i (y_i - \mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta}_j)^2 + \frac{\gamma_j}{\sigma_j^2} (y_i - \mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta}_j), \\ - \frac{w_i^{-1}}{\gamma_j} (\frac{\gamma_j}{\sigma_j^2} + 1) \} \}^{z_{ij}}. \end{aligned} \quad (4)$$

نوشتند، به طوری که $\Psi = (\boldsymbol{\theta}_1, \dots, \boldsymbol{\theta}_g, \eta_1, \dots, \eta_g)$ ، $\boldsymbol{\theta}_j = (\boldsymbol{\beta}'_j, \sigma_j^2, \gamma_j)$ ، $\hat{Z}_{ij}^{(t)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \hat{Z}_{ij}^{(t)}$ و

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\beta}_j^{(t+1)} &= (\mathbf{X}' \hat{\mathbf{M}}_{\setminus j}^{*(t)} \mathbf{X})^{-1} (\mathbf{X}' \hat{\mathbf{M}}_{\setminus j}^{*(t)} \mathbf{Y} - \gamma_j^{(t)} \mathbf{X}' \hat{\mathbf{Z}}_j^{(t)}), \\ \sigma_j^{2(t+1)} &= \frac{(Y - X \boldsymbol{\beta}_j^{(t+1)})' \hat{\mathbf{M}}_{\setminus j}^{*(t)} (Y - X \boldsymbol{\beta}_j^{(t+1)}) - \gamma_j^{(t)} (Y - X \boldsymbol{\beta}_j^{(t)})' \hat{\mathbf{Z}}_j^{(t)} + \gamma_j^{(t)} J' \hat{\mathbf{M}}_{\setminus j}^{(t)}}{\sum_{i=1}^n \hat{Z}_{ij}^{(t)}}, \\ \gamma_j^{(t+1)} &= \frac{(Y - X \boldsymbol{\beta}_j^{(t)})' \hat{\mathbf{Z}}_j^{(t)}}{J'_{nj} \hat{\mathbf{M}}_{\setminus j}^{(t)}}. \end{aligned}$$

که در آن $\hat{\mathbf{M}}_{\setminus j}^{*(t)} = \text{diag}(\hat{M}_{\setminus j}^{(t)}, \dots, \hat{M}_{\setminus nj}^{(t)})$ ، $\hat{\mathbf{Z}}_j^{(t)} = (\hat{Z}_{\setminus j}^{(t)}, \dots, \hat{Z}_{nj}^{(t)})'$ ، $\mathbf{J}'_{nj} = (1, \dots, 1)_{1 \times n_j}$ و $\hat{\mathbf{M}}_{\setminus j}^{(t)} = (\hat{M}_{\setminus j}^{(t)}, \dots, \hat{M}_{\setminus nj}^{(t)})$

$$\hat{Z}_{ij}^{(t)} = \frac{\eta_j^{(t)} SL(y_i | \mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta}_j^{(t)}, \sigma_j^{(y)}, \gamma_j^{(t)})}{\sum_{j=1}^g \eta_j^{(t)} SL(y_i | \mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta}_j^{(t)}, \sigma_j^{(y)}, \gamma_j^{(t)})},$$

$$\begin{aligned}\hat{M}_{ij}^{(t)} &= E_{\theta(t)}(Z_{ij}w_i | y_i) = \hat{Z}_{ij}^{(t)} \frac{\sqrt{\gamma_j^{(t)} + \sigma_j^{(t)}}}{|y_i - \mathbf{x}_i' \beta_j^{(t)}|}, \\ \hat{M}_{ij}^{(t)} &= E_{\theta(t)}(Z_{ij}w_i^{-1} | y_i) = \hat{Z}_{ij}^{(t)} \left[\frac{\sigma_j^{(t)}}{\gamma_j^{(t)} + \sigma_j^{(t)}} + \frac{|y_i - \mathbf{x}_i' \beta_j^{(t)}|}{\sqrt{\gamma_j^{(t)} + \sigma_j^{(t)}}} \right].\end{aligned}$$

برآورد بیزی پارامترها در مدل‌های آمیخته بر اساس تابع درستنمایی داده‌های کامل صورت می‌پذیرد و از این نظر شبیه رهیافت بسامدی و استفاده از الگوریتم EM است. بدیهی است که در تحلیل بیزی مدل‌های آمیخته توزیع‌های پیشین مزدوجی وجود ندارند اما می‌توان توزیع‌های پیشین پارامترها را به‌گونه‌ای انتخاب نمود که توزیع پسین شرطی متناظر با پارامترها از خانواده توزیع‌های پیشین باشند که این امر باعث سهولت در اجرای روش‌های مونت کارلویی خواهد شد.

معمولاً برای ضرایب آمیختگی توزیع پیشین دیریکله به صورت $\pi(\eta_1, \dots, \eta_g) = \frac{1}{B(h)} \prod_{j=1}^g \eta_j^{h_j-1}$ در نظر گرفته می‌شود، که در آن $B(h) = \frac{\prod_{j=1}^g \Gamma(h_j)}{\Gamma(\sum_{j=1}^g h_j)}$ است. این انتخاب در ادبیات مدل‌های آمیخته، یکی از انتخابات مرسوم است. از آنجایی که توزیع دیریکله تعمیم یافته توزیع بتا است، بر اساس رابطه‌ای که بین توزیع بتا و $U(0, 1)$ وجود دارد و به‌منظور پرهیز از پیش‌داوری معمولاً ابرپارامترهای توزیع پیشین $h_1 = \dots = h_g = h$ در نظر گرفته می‌شوند. اگر $h = 1$ ، آن‌گاه توزیع یکنواخت g بعدی حاصل می‌شود. البته فرض برابری ابرپارامترهای توزیع دیریکله زمانی مطلوب است که همه ضرایب آمیختگی با هم برابر باشند، به این معنا که تحلیل‌گر معتقد باشد، همه مؤلفه‌های توزیع آمیخته به یک اندازه در نمونه مشاهده شده سهم دارند. از این‌رو باید تعلق مشاهدات به هر یک از زیرجوامع را در نظر گرفت. یک روش برای این منظور در حالت‌های یک و دو متغیره رسم نمودار مشاهدات و مقایسه فراوانی مشاهدات در مؤلفه‌های تشکیل دهنده توزیع آمیخته است.

۴ رهیافت بیزی رگرسیون آمیخته بر اساس توزیع چوله-لاپلاس

به پیروی از **گلن و همکاران (۲۰۰۸)** توزیع‌های پیشین پارامترهای مدل رگرسیون آمیخته چوله-لاپلاس با فرض استقلال پارامترها و برای هر یک از زیرجوامع به‌صورت زیر در نظر گرفته می‌شوند. قابل توجه است که توزیع پیشین پارامتر چولگی به این منظور نرمال در نظر گرفته شده است که اولاً فضای پارامتری حقیقی بوده و ثانیاً با این انتخاب توزیع پسین شرطی کامل نیز از خانواده نرمال به‌صورت

$$\begin{aligned}\beta_j &\sim \mathcal{N}_p(\mu_j, \Sigma_j), \quad \sigma_j^2 | b \sim \text{Inv-Gamma}(\alpha, b), \quad b \sim \text{Gamma}(\lambda_1, \lambda_2) \\ \gamma_j &\sim \mathcal{N}(\varsigma_j, \tau_j^2), \quad \boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \dots, \eta_g) \sim \text{Dirichlet}(h, \dots, h)\end{aligned}\quad (5)$$

به دست می آید، که در آن $Ig(\alpha, b)$ نشان دهنده توزیع گامای معکوس است. برای تعیین ابرپارامترهای توزیع پیشین ضرایب رگرسیونی، می توان داده ها را با استفاده از الگوریتم خوشه بندی k-means به g خوشه تقسیم کرد و برآورد ضرایب رگرسیونی در هر یک از خوشه ها را به عنوان ابر پارامترها به صورت

$$\mu_j = \hat{\beta}_j = (X_j' X_j)^{-1} X_j' y_j, \quad \Sigma_j = \text{Var}(\hat{\beta}_j) = (X_j' X_j)^{-1} \sigma_j^2.$$

در نظر گرفت، که در آن X_j و y_j به ترتیب ماتریس طرح و بردار مشاهدات پاسخ خوشه j ام قرار هستند. برای سایر ابرپارامترهای مدل به پیروی از ریچاردسون و گرین (۱۹۹۷) عمل می شود:

$$\alpha = 2, \quad \lambda_1 = 0.2, \quad \lambda_2 = \frac{100\lambda_1}{\alpha R^2}, \quad h > 1, \quad R = \max(y_i) - \min(y_i).$$

برای ابرپارامترهای توزیع پیشین پارامتر چولگی، کافی است برآورد ضریب چولگی مشاهدات پاسخ در خوشه j ام را برای ابرپارامتر ς_j و واریانس آن را به عنوان ابر پارامتر τ_j^2 در نظر بگیریم. یعنی:

$$\varsigma_j = G_1 = E\left\{\left(\frac{y_j - \mu_j}{\sigma_j}\right)^2\right\} = \frac{n_j^2}{(n_j - 1)(n_j - 2)} \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_{ji} - \bar{y}_j)^2}{\left[\frac{1}{n_j - 1} \sum_{i=1}^n (y_{ji} - \bar{y}_j)^2\right]^{\frac{2}{\tau}}},$$

$$\tau_j^2 = \text{VAR}(G_1) = \frac{6n_j(n_j - 1)}{(n_j - 2)(n_j + 1)(n_j + 3)}.$$

با توجه به تابع درستنمایی داده های کامل در (۴) و توزیع های پیشین (۵)، توزیع پسین داده های کامل به صورت

$$\begin{aligned} \pi(\Psi, w | y) &\propto \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^g \left\{ \eta_j \frac{w_i^{-\frac{\tau}{2}}}{\sqrt{\sigma_j^2}} \exp \left\{ \frac{-1}{2\sigma_j^2} w_i (y_i - \mathbf{x}_i' \beta_j)^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\gamma_j}{\sigma_j^2} (y_i - \mathbf{x}_i' \beta_j) - \frac{w_i^{-1}}{2} \left(\frac{\gamma_j}{\sigma_j^2} + 1 \right) \right\} \right\}^{z_{ij}} \\ &\times \prod_{j=1}^g \left\{ \exp \left\{ \frac{-1}{2} (\beta_j - \mu_j)' \Sigma_j^{-1} (\beta_j - \mu_j) \right\} b^{\varrho} (\sigma_j^2)^{-(\varrho+1)} \right. \\ &\times \exp \left\{ \frac{-b}{\sigma_j^2} \right\} \exp \left\{ \frac{-1}{2\tau_j^2} (\gamma_j - \varsigma_j)^2 \right\} \eta_j^{h-1} \left. \right\} b^{\lambda_1-1} \exp\{-\lambda_2 b\}. \quad (6) \end{aligned}$$

است، که فرم شناخته شده‌ای ندارد و برای محاسبه کمیت‌های پسینی با الگوریتم گیبز توزیع‌های شرطی کامل پارامترها و متغیرهای پنهان به صورت

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_i^{(t+1)} &\sim M(\cdot, \eta_1^{*(t)}, \dots, \eta_g^{*(t)}), & W_i^{(t+1)} &\sim IG(s_j^{(t)}, \alpha_j^{\tau(t)}), \\ b^{(t+1)} &\sim \Gamma(g\varrho + \lambda_1, \lambda_1 + \sum_{j=1}^g \frac{1}{\sigma_j^{\tau(t)}}), & \beta^{(t+1)} &\sim N_p(\varsigma^{(t+1)}, \varpi^{(t+1)}), \\ \sigma_j^{\tau(t+1)} &\sim Ig(\Omega_j^{(t+1)}, \Lambda_j^{(t+1)}), & \gamma_j^{(t+1)} &\sim N(M_j^{(t+1)}, V_j^{(t+1)}), \\ \eta^{(t+1)} &\sim Dirichlet(n_1^{(t+1)} + h, \dots, n_g^{(t+1)} + h). \end{aligned}$$

بدست آمده‌اند، که در آن

$$\begin{aligned} \eta_j^{*(t)} &= \frac{\eta_j^{(t)} SL(y_i | \mathbf{x}_i' \beta_j^{(t)}, \sigma_j^{(t)}, \gamma_j^{(t)})}{\sum_{j=1}^g \{\eta_j^{(t)} SL(y_i | \mathbf{x}_i' \beta_j^{(t)}, \sigma_j^{(t)}, \gamma_j^{(t)})\}}, & s_j^{(t)} &= \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i' \beta_j^{(t)}}{\sigma_j^{(t)}} \right)^2 \\ \varpi_j^{(t+1)} &= \left(\frac{\mathbf{X}' D_j^{(t+1)} \mathbf{X}}{\sigma_j^{\tau(t)}} + \Sigma_j^{-1} \right)^{-1}, & \Omega_j^{(t+1)} &= \frac{\mathbf{J}' Z_j^{(t+1)}}{\tau} + \varrho \\ \varsigma^{(t+1)} &= \varpi_j^{(t+1)} \left(\frac{\mathbf{X}' D_j^{(t+1)} \mathbf{Y} - \gamma_j^{(t)} \mathbf{X}' Z_j^{(t+1)}}{\sigma_j^{\tau(t)}} + \Sigma_j^{-1} \mu_j \right), & \alpha_j^{(t)} &= \left(\frac{\gamma_j^{(t)}}{\sigma_j^{\tau(t)}} + 1 \right)^{\frac{1}{\tau}} \\ \Lambda_j^{(t+1)} &= b^{(t+1)} + \frac{1}{\tau} (\mathbf{Y} - \mathbf{X} \beta_j^{(t+1)})' D_j^{(t+1)} (\mathbf{Y} - \mathbf{X} \beta_j^{(t+1)}) \\ &\quad - \gamma_j^{(t)} (\mathbf{Y} - \mathbf{X} \beta_j^{(t+1)})' Z_j^{(t+1)} + \frac{\gamma_j^{(t)}}{\tau} Z_j^{(t+1)} \mathbf{W}^{-1(t+1)} \\ M_j^{(t+1)} &= \frac{(\mathbf{Y} - \mathbf{X} \beta_j^{(t+1)})' Z_j^{(t+1)} + \sigma_j^{\tau(t)} \varsigma_j}{\tau_j^{\tau} Z_j^{(t+1)} \mathbf{W}^{-1(t+1)} + \sigma_j^{\tau(t)}}, & V_j^{(t+1)} &= \frac{\sigma_j^{\tau(t+1)} \tau_j^{\tau}}{\tau_j^{\tau} Z_j^{(t+1)} \mathbf{W}^{-1(t+1)} \sigma_j^{\tau(t)}}. \end{aligned}$$

۵ مطالعات شبیه‌سازی

در این بخش رهیافت بسامدی و بیزی مدل رگرسیونی آمیخته چوله-لاپلاس (*MixregSL*) در چارچوب یک مطالعه شبیه‌سازی مورد بررسی قرار گرفته و برآوردهای حاصل از آن با برآوردهای حاصل از مدل رگرسیونی آمیخته لاپلاس (*MixregL*) در هر دو رهیافت بسامدی و بیزی مقایسه می‌شود. برای ارزیابی تأثیر اندازه نمونه بر کارایی روش‌های پیشنهادی، مطالعات شبیه‌سازی به‌ازای مقادیر مختلف اندازه نمونه ۵۰، ۱۰۰، ۱۵۰، ۲۵۰ و ۵۰۰ تکرار شده‌اند. مطالعه شبیه‌سازی برای $N = ۱۰۰۰$ نمونه تکرار شده‌اند و میانگین توان‌های دوم خطا (*MSE*) برآوردهای ضرایب رگرسیونی محاسبه و در جدول‌های ۱ الی ۳ ارائه شده‌اند. از نمودارهای اثر و خودهمبستگی برای

تشخیص همگرایی رهیافت بیزی، برای یک نمونه نوعی شبیه‌سازی شده از توزیع پسین برای مدل‌های MixregL و MixregSL استفاده شده است، که در شکل‌های ۱ الی ۴ رسم شده‌اند و به‌خوبی همگرایی زنجیر مارکوف تولید شده از توزیع پسین را نشان می‌دهند. به پیروی از **بای و همکاران (۲۰۱۲)**، شبیه‌سازی بر اساس مدل رگرسیونی آمیخته به‌صورت

$$Y = \begin{cases} -X_1 - X_2 + \varepsilon_1 & Z = 1 \\ +X_1 + X_2 + \varepsilon_2 & Z = 2 \end{cases}$$

انجام می‌گیرد، که در آن $\pi_1 = P(Z = 1) = 0.5$ و X_1 و X_2 از توزیع نیم نرمال شبیه‌سازی می‌شوند. بنابراین در این مدل رگرسیونی $\beta_1 = (\beta_{11}, \beta_{12})' = (-1, -1)'$ و $\beta_2 = (\beta_{21}, \beta_{22})' = (1, 1)'$ است. به‌منظور بررسی کارایی و مقایسه مدل‌ها سه حالت به‌صورت

$$\begin{aligned} \varepsilon_1, \varepsilon_2 &\sim L(\mu = 0, \sigma = 1), \\ \varepsilon_1, \varepsilon_2 &\sim SL(\mu = 0, \sigma = 1, \gamma = 2), \\ \varepsilon_1, \varepsilon_2 &\sim SL(\mu = 0, \sigma = 1, \gamma = -2). \end{aligned}$$

در شبیه‌سازی لحاظ می‌شوند که به ترتیب بیانگر حالت تقارن، چوله به راست و چوله به چپ هستند. برای توضیح بیشتر فرایند شبیه‌سازی برای حالت تقارن یعنی $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \sim L(\mu = 0, \sigma = 1)$ و اندازه نمونه ۱۰۰ به این صورت عمل شد:

۱. X_1, X_2 را به حجم ۱۰۰ از توزیع نیم نرمال استاندارد به‌صورت مستقل تولید کنید.
۲. ε را به حجم ۱۰۰ به‌صورت تصادفی از $L(\mu = 0, \sigma = 1)$ استخراج کنید.
۳. هر $Z_i, (i = 1, 2, \dots, 100)$ را به‌طور تصادفی از مجموعه $\{1, 2\}$ استخراج کنید، در این صورت

$$If (Z_i = 1) \{Y_i = -X_{1i} - X_{2i} + \varepsilon_i\} \text{ else } \{Y_i = +X_{1i} + X_{2i} + \varepsilon_i\}$$

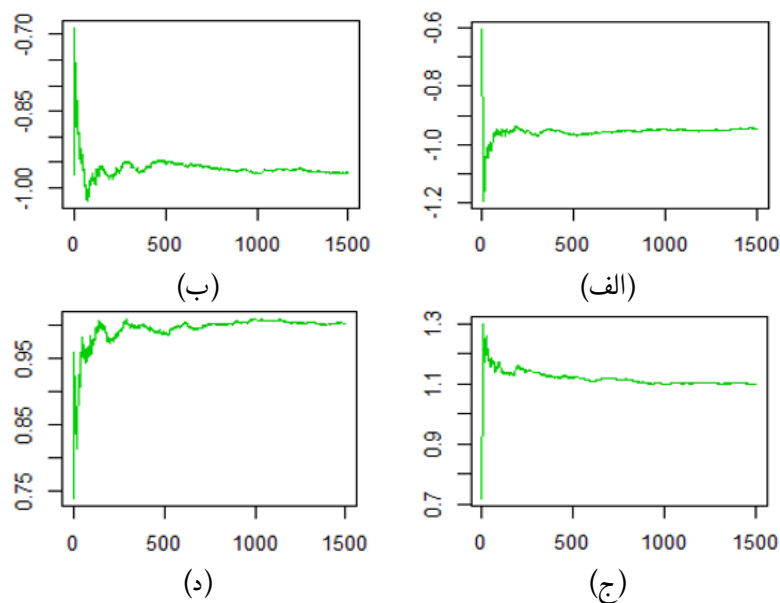
در واقع برای $n = 100$ مرحله سوم باید ۱۰۰ بار تکرار گردد.

۴. سپس برآورد پارامترهای این نمونه توسط مدل‌های MixregL و MixregSL در هر دو رهیافت برآورد و ذخیره می‌شود.

۵. مراحل (۲) الی (۴) هزار بار تکرار شده، بنابراین براساس هریک از مدل‌ها در هر رهیافت هزار برآورد وجود دارد.

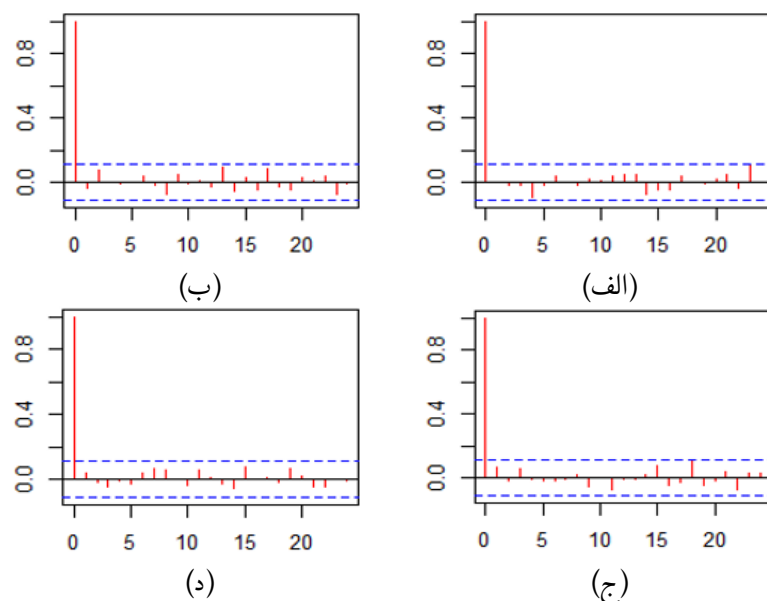
۶. میانگین توان دوم خطای پارامترهای مدل‌ها در هر دو رهیافت محاسبه می‌شود.

بنابراین این شش گام هر سه حالت تقارن، چوله به راست و چوله به چپ و برای حجم نمونه‌های ۵۰، ۱۰۰، ۱۵۰، ۲۵۰ و ۵۰۰ تکرار می‌شود. قبل از هر موضوعی جداول ۱ الی ۳ نشان می‌دهند که رهیافت بیزی، هر دو مدل



شکل ۱. نمودارهای اثر برای نمونه شبیه‌سازی شده مدل MixregSL برای پارامتر الف: β_{11} ، ب: β_{12} ، ج: β_{21} و د: β_{22} .

عملکرد بهتری نسبت به رهیافت بسامدی دارند. زمانی که $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \sim L(\mu = 0, \sigma = 1)$ مدل بیزی MixregL در هر دو رهیافت با اختلاف جزئی دارای عملکرد بهتری است، اما عملکرد مدل MixregSL را، در این حالت نیز نباید نادیده گرفت چرا که عملکرد این مدل اختلاف ناچیزی با مدل MixregL دارد و می‌توان آن را نیز خوب ارزیابی کرد زیرا برآوردهای قابل قبولی را در هر دو رهیافت ارائه داده است. دلیل این امر توانایی توزیع چوله-لاپلاس در مدل‌بندی توام چولگی و تقارن است. گرچه در شرایط تقارن، مدل مبتنی بر لاپلاس در اولویت است. نتایج جداول ۲ و ۳ نیز نشان می‌دهند، که در شرایط چولگی (جدول ۲: چوله به راست و جدول ۳: چوله به چپ) مدل چوله-لاپلاس در هر دو رهیافت، نسبت به مدل لاپلاس دارای کارایی بسیار بالایی است، به‌طوری که رهیافت بیزی این مدل نسبت به رهیافت بسامدی آن، از کارایی بهتری برخوردار است. نتایج این دو جدول نشان می‌دهد که در شرایط چولگی مدل MixregL عملکرد بسیار ضعیفی از خود نشان داده است. همچنین ملاحظه می‌شود که با افزایش حجم نمونه، مقادیر MSE برآوردهای هر دو مدل در هر دو رهیافت، کوچکتر شده و به سمت صفر میل می‌کنند که این امر نشان دهنده سازگاری تمامی برآوردها است. از طرفی با افزایش اندازه نمونه شاهد آن هستیم که نتایج رهیافت بیزی به رهیافت بسامدی نزدیک می‌شود که این موضوع از خصوصیات بارز برآوردهای بیزی است. بنابراین در این مطالعه شبیه‌سازی مشاهده کردیم که مدل MixregSL چه در حالت تقارن و چه در حالت چولگی (راست یا چپ) عملکرد مناسبی از خود نشان می‌دهد، به‌طوری که در حالت تقارن کارایی هر دو مدل MixregSL و MixregSL عالی و بسیار نزدیک به یکدیگر است. اما در شرایط چولگی مدل MixregL دارای کارایی بسیار پایین و برآوردهای بسیار

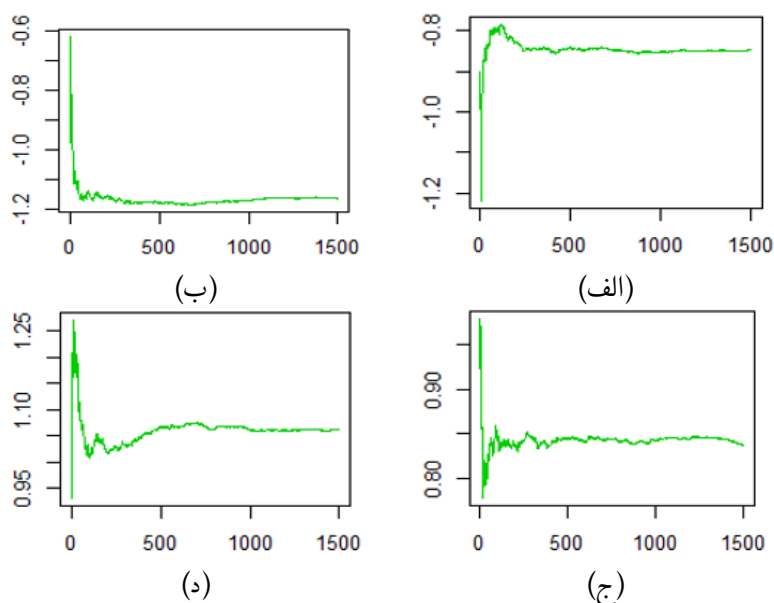


شکل ۲. نمودارهای ود همبستگی برای نمونه شبیه‌سازی شده مدل MixregSL برای پارامتر الف: β_{11} ، ب: β_{12} ، ج: β_{21} و د: β_{22} .

ضعیفی را ارائه می‌کند و در مقابل مدل MixregSL از کارایی بسیار عالی‌ای در این شرایط برخوردار است. بنابراین با توجه به عملکرد بسیار خوب مدل MixregSL در شرایط تقارن و چولگی و از آنجایی که در عالم کاربردی به ندرت با داده‌های کاملاً متقارن برخورد خواهیم کرد، لذا می‌توان از مدل MixregSL بهره برد.

دقت شود که مدل‌های آمیخته مساله‌ای به نام مشقت بعدی چندی^۱ وجود دارد، که در واقع این مشکل به شرایطی اشاره دارد که در یک مرحله یا مرحله‌ای از الگوریتم‌های EM یا MCMC که هنوز همگرایی رخ نداده است، احتمال زیادی دارد که ضریب آمیختگی خیلی کوچک یا خیلی بزرگ و نزدیک یک برآورد شود (دقت شود که هنوز همگرایی رخ نداده و برآورد ضریب آمیختگی دارای اریبی زیادی است)، در این صورت در این مرحله به یک مولفه مشاهدات زیاد و به مولفه دیگر مشاهدات خیلی کمی و حتی کمتر از تعداد پارامترهای آن مولفه، تعلق می‌گیرد و نمی‌تواند الگوریتم به کار خود ادامه دهد و مقادیر واقعی را برآورد و به همگرایی برسد. این مشکل زمانی که حجم نمونه کم باشد، با احتمال خیلی بالاتری رخ می‌دهد. برای مثال فرض کنید حجم نمونه ۳۰ باشد و قبل از همگرایی ضریب آمیختگی برابر با ۰/۸ برآورد شده باشد، لذا در این مرحله ۲۷ مشاهده به مولفه اول و ۳ مشاهده به مولفه دوم تعلق می‌گیرد. بنابراین در این مرحله سه پارامتر مولفه دوم در مدل MixregL و چهار پارامتر مدل MixregSL توسط این سه مشاهده می‌بایست برآورد شوند، که در عمل این امر غیر ممکن و الگوریتم در این مرحله با مشکل مشقت

^۱Curse of dimensionality

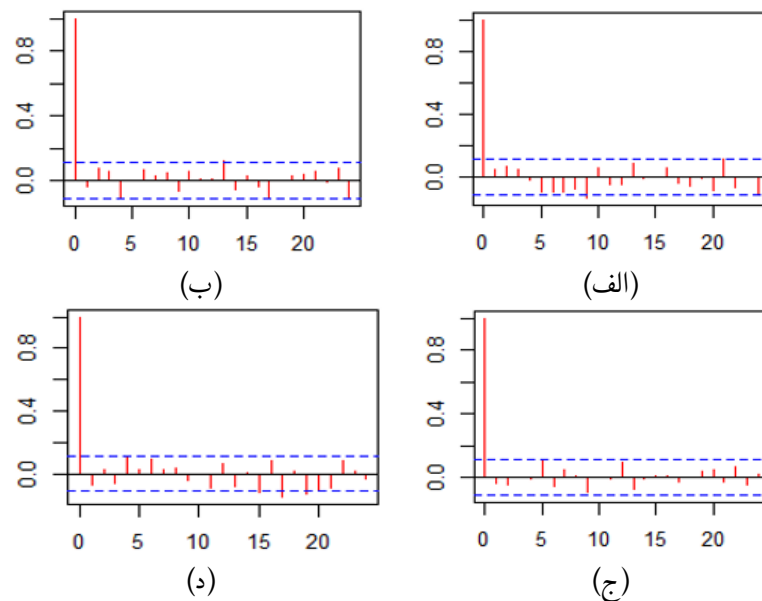


شکل ۳. نمودارهای اثر برای نمونه شبیه‌سازی شده مدل MixregL برای پارامتر الف: β_{11} ، ب: β_{12} ، ج: β_{21} و د: β_{22} .

بعدی‌چندی مواجه شده و خطا می‌زند. دقت شود در پژوهش حاضر چون فرض کردیم جامعه دارای دو مولفه است در نتیجه هر مولفه در مدل MixregL دارای سه پارامتر است (دو ضریب رگرسیونی، واریانس) و با احتساب ضریب آمیختگی این مدل دارای ۷ پارامتر است. همچنین از آنجایی که مدل MixregSL در هر مولفه یک پارامتر چولگی نیز اضافه‌تر دارد، بنابراین این مدل دارای ۹ پارامتر است. بنابراین در پژوهش حاضر برای دوری از این مشکل کمترین حجم نمونه ۵۰ انتخاب شده است. حال اگر تعداد مشاهدات مثلاً ۲۰۰ باشد و حتی اگر مقدار واقعی ضریب آمیختگی نیز برابر با ۰/۸ برآورد شود در این صورت در مولفه دوم ۲۰ مشاهده قرار می‌گیرد که می‌توان به راحتی پارامترهای این مولفه را برآورد نمود.

۶ مثال کاربردی

در این قسمت از مجموعه داده‌های مربوط به تن صدا که توسط کوهن (۱۹۹۸) جمع‌آوری و مورد تحلیل قرار گرفت، استفاده می‌شود. این مجموعه داده شامل دو متغیر tuned (متغیر پاسخ) و stretchratio (متغیر مستقل) است. آماره‌های نیکویی برازش هر دو مدل MixregSL و MixregL در هر دو رهیافت بسامدی و بیزی در جدول ۴ گزارش شده است. همان‌طور که ملاحظه می‌شود، حتی براساس این معیارهای بسامدی، رهیافت بیزی هر دو مدل، نسبت به مدل‌های بسامدی خود، کارایی بیشتری دارند. به‌طوری‌که در هر دو رهیافت مدل MixregSL در مقایسه



شکل ۴. نمودارهای ود همبستگی برای نمونه شبیه‌سازی شده مدل MixregL برای پارامتر الف: β_{11} ، ب: β_{12} ، ج: β_{21} و د: β_{22} .

با مدل MixregL از حمایت بیشتری از سوی مشاهدات برخوردار است و این حمایت در برازش رهیافت بیزی مدل MixregSL به مراتب بیشتر است.

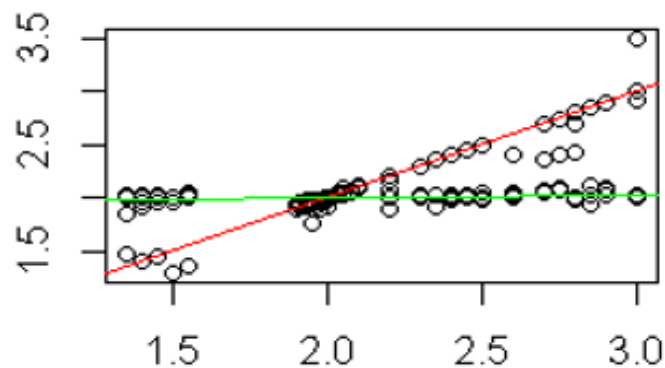
برآوردهای پارامترهای هر دو مدل در هر دو رهیافت در جدول ۵ نشان داده شده است. شکل ۵، رهیافت بیزی برازش مدل MixregSL را به این مجموعه داده نشان می‌دهد، همان‌طور که دیده می‌شود این برازش بخوبی صورت گرفته است.

بحث و نتیجه‌گیری

زمانی که داده‌ها نرمال باشند، استفاده از مدل‌های سنتی مبتنی بر فرض نرمال می‌تواند نتایج منحصر به فردی را ایجاد نمایند و فرمول‌های صریحی را با توجه به خوش تعریفی توزیع نرمال ارائه دهند، اما این فرض همواره برقرار نبوده و در بسیاری از شرایط، یک فرض محدود کننده‌ای است زیرا در عالم کاربردی همواره با مشاهداتی سروکار داریم که دارای چولگی، سنگینی دم‌ها، کشیده و دارای ساختاری چندنمایی هستند. در چنین شرایطی استفاده از مدل‌سازی‌های کلاسیک می‌تواند منجر به برآوردهایی با اریبی و واریانس زیاد شوند و لذا باعث تحلیل‌های اشتباه و به طبع آن تصمیمات نادرست خواهند شد. در این شرایط می‌توان از تعمیم‌های توزیع لاپلاس که توانایی مدل‌بندی

جدول ۱. مقادیر میانگین توان‌های دوم خطا برای حالت $\varepsilon_{j=1,2} \sim SL(\mu = 0, \sigma = 1)$

n	رهیافت	مدل	پارامتر			
			π	β_{22}	β_{21}	β_{11}
۵۰	بسامدی	MixregSL	۰/۰۲۱۷	۰/۰۶۷۲	۰/۰۴۸۱	۰/۰۵۶۷
		MixregL	۰/۰۱۶۹	۰/۰۵۶۷	۰/۰۴۰۲	۰/۰۴۷۳
	بیزی	MixregSL	۰/۰۱۳۷	۰/۰۴۹۱	۰/۰۳۲۳	۰/۰۴۰۳
		MixregL	۰/۰۱۲۸	۰/۰۴۷۵	۰/۰۲۸۵	۰/۰۳۶۷
	بسامدی	MixregSL	۰/۰۱۲۹	۰/۰۵۰۲	۰/۰۳۲۸	۰/۰۴۶۶
		MixregL	۰/۰۱۲۳	۰/۰۵۰۱	۰/۰۳۱۰	۰/۰۳۸۵
۱۰۰	بیزی	MixregSL	۰/۰۱۱۹	۰/۰۴۸۳	۰/۰۲۸۴	۰/۰۳۷۴
		MixregL	۰/۰۱۱۷	۰/۰۴۳۶	۰/۰۲۷۰	۰/۰۳۴۲
	بسامدی	MixregSL	۰/۰۱۰۳	۰/۰۴۲۸	۰/۰۲۴۶	۰/۰۳۱۵
		MixregL	۰/۰۰۹۶	۰/۰۳۵۳	۰/۰۲۰۲	۰/۰۲۹۶
	۱۵۰	MixregSL	۰/۰۰۸۴	۰/۰۳۱۶	۰/۰۱۸۳	۰/۰۱۹۶
		MixregL	۰/۰۰۶۷	۰/۰۲۷۲	۰/۰۱۴۱	۰/۰۱۶۳
۲۵۰	بسامدی	MixregSL	۰/۰۰۶۳	۰/۰۲۱۹	۰/۰۱۰۸	۰/۰۱۴۷
		MixregL	۰/۰۰۴۲	۰/۰۱۸۹	۰/۰۰۸۷	۰/۰۱۳۹
	بیزی	MixregSL	۰/۰۰۳۸	۰/۰۱۲۹	۰/۰۰۵۹	۰/۰۱۲۱
		MixregL	۰/۰۰۲۲	۰/۰۱۰۴	۰/۰۰۵۵	۰/۰۰۹۲
	بسامدی	MixregSL	۰/۰۰۲۱	۰/۰۰۹۲	۰/۰۰۵۳	۰/۰۰۸۴
		MixregL	۰/۰۰۱۸	۰/۰۰۷۲	۰/۰۰۵۱	۰/۰۰۷۶
۵۰۰	بیزی	MixregSL	۰/۰۰۱۴	۰/۰۰۶۲	۰/۰۰۲۷	۰/۰۰۴۱
		MixregL	۰/۰۰۱۳	۰/۰۰۳۱	۰/۰۰۱۵	۰/۰۰۲۳



شکل ۵. خطوط برازش بیزی مدل MixregSL

هر دو حالت چولگی و تقارن را در کنار پوشش داده‌های دور افتاده و کشیده دارند، در مدل‌سازی‌های آماری استفاده نمود و لذا در شرایطی که جامعه علاوه بر ویژگی‌های بیان شده، دارای ساختاری ناهمگن باشد، استفاده از مدل‌های

جدول ۰۲. مقادیر میانگین توان‌های دوم خطا برای حالت $(\mu = 0, \sigma = 1, \gamma = 2)$ $\varepsilon_{j=1,2} \sim SL$

n	رهیافت	مدل	پارامتر				
			β_{11}	β_{12}	β_{21}	β_{22}	π
۵۰	بسامدی	MixregSL	۰/۰۹۲۰	۰/۰۵۰۵	۰/۰۴۱۰	۰/۰۶۲۲	۰/۰۴۴۰
		MixregL	۲/۱۷۴۱	۲/۴۲۱۷	۲/۱۲۸۸	۲/۰۹۹۵	۲/۰۹۵۱
	بیزی	MixregSL	۰/۰۷۹۱	۰/۰۴۴۳	۰/۰۳۱۵	۰/۰۵۸۴	۰/۰۴۴۶
		MixregL	۲/۱۲۶۹	۲/۲۱۰۵	۲/۰۹۶۷	۱/۸۷۹۶	۱/۸۰۰۹
۱۰۰	بسامدی	MixregSL	۰/۰۲۹۳	۰/۰۴۳۳	۰/۰۳۲۲	۰/۰۵۰۱	۰/۰۳۵۶
		MixregL	۲/۰۲۱۷	۲/۱۲۵۸	۲/۰۲۴۱	۲/۰۳۴۶	۲/۰۳۲۲
	بیزی	MixregSL	۰/۰۲۸۲	۰/۰۳۶۱	۰/۰۲۷۷	۰/۰۴۴۱	۰/۰۴۳۷
		MixregL	۱/۶۵۲۱	۲/۰۰۹۶	۱/۶۵۳۴	۱/۷۴۹۲	۱/۶۵۸۴
۱۵۰	بسامدی	MixregSL	۰/۰۲۵۱	۰/۰۳۱	۰/۰۲۳	۰/۰۴۱۳	۰/۰۲۸۶
		MixregL	۰/۸۶۷۲	۱/۶۹۸۴	۱/۴۵۱۳	۱/۵۳۸۵	۱/۵۳۸۴
	بیزی	MixregSL	۰/۰۱۷۳	۰/۰۲۷۹	۰/۰۱۷۹	۰/۰۲۹۲	۰/۰۲۲۷
		MixregL	۰/۶۸۵۱	۰/۰۲۱۶	۰/۹۹۱۵	۱/۰۱۰۵	۱/۰۰۸۶
۲۵۰	بسامدی	MixregSL	۰/۰۱۰۶	۰/۰۱۴۵	۰/۰۱۰۱	۰/۰۲۰۱	۰/۰۱۵۹
		MixregL	۰/۳۱۲۳	۰/۹۳۲۸	۰/۶۰۳۴	۰/۶۰۸۷	۰/۶۰۴۹
	بیزی	MixregSL	۰/۰۰۰۷	۰/۰۱۰۳	۰/۰۰۵۹	۰/۰۱۲۵	۰/۰۰۹۴
		MixregL	۰/۲۸۹۴	۰/۷۵۲۶	۰/۳۹۱	۰/۵۴۶۳	۰/۴۵۶۴
۵۰۰	بسامدی	MixregSL	۰/۰۰۴۲	۰/۰۰۷۹	۰/۰۰۵۳	۰/۰۰۹۱	۰/۰۰۰۹
		MixregL	۰/۱۴۷۶	۰/۴۸۷۶	۰/۳۳۷۴	۰/۴۶۸۹	۰/۴۶۴۴
	بیزی	MixregSL	۰/۰۰۰۲۶	۰/۰۰۲۹	۰/۰۰۲۵	۰/۰۰۴۹	۰۰۰۴۵
		MixregL	۰/۱۱۳۹	۰/۲۱۵۳	۰/۱۳۰۹	۰/۱۸۳۷	۰/۱۵۳۲

آمیخته مبتنی بر این‌گونه توزیع‌های منعطف نتایج منحصر به فردی را بوجود می‌آورند. توزیع چوله-لاپلاس معرفی شده توسط [ارسلان \(۲۰۰۹\)](#) به دلیل داشتن ساختاری ساده، مورد توجه محققان زیادی قرار گرفته است. لذا در این پژوهش مدل‌سازی بیزی رگرسیون آمیخته متناهی چوله-لاپلاس توسعه داده شد. با توجه به مزیت رهیافت بیزی در مواجهه با موارد کوچک نمونه‌ای و رفتار بزرگ نمونه‌ای آن، سبب می‌شود که در مدل‌های آمیخته، برازش‌های قابل اطمینان‌تری را بدست آورند، چرا که همیشه این احتمال وجود دارد که از یک یا چند مولفه از توزیع‌های آمیخته، نمونه‌های کمتری تولید شود. در این پژوهش نشان داده شده که رهیافت بیزی مدل رگرسیون آمیخته چوله-لاپلاس نسبت به برازش بسامدی آن دارای عملکرد بهتری است و همچنین نشان داده شد که برازش هر دو رهیافت مدل رگرسیون آمیخته چوله-لاپلاس را می‌توان در هر دو حالت چولگی و تقارن زیر جوامع استفاده نمود ولی عکس این موضوع برقرار نبوده، چراکه در حالتی که زیر جوامع دارای ساختاری چوله باشند، مدل رگرسیونی آمیخته براساس توزیع لاپلاس عملکرد بدی را بوجود آورده است.

جدول ۳. مقادیر میانگین توان‌های دوم خطا برای حالت $(\mu = 0, \sigma = 1, \gamma = -2)$ $\varepsilon_{j=1,2} \sim SL$

n	رهیافت	مدل	پارامتر			
			β_{11}	β_{12}	β_{21}	π
۵۰	بسامدی	MixregSL	۰/۰۷۲۵	۰/۰۷۵۲	۰/۰۸۲۳	۰/۰۷۲۴
		MixregL	۲/۷۶۱۱	۲/۶۲۰۹	۲/۸۱۸۰	۲/۳۲۳۵
	بیزی	MixregSL	۰/۰۵۲۰	۰/۰۶۱۸	۰/۰۶۱۹	۰/۰۶۴۵
		MixregL	۲/۱۱۴۸	۲/۵۲۳۳	۲/۴۳۹۶	۲/۱۹۲۳
۱۰۰	بسامدی	MixregSL	۰/۰۴۷۶	۰/۰۴۷۷	۰/۰۴۶۰	۰/۰۴۲۰
		MixregL	۲/۰۴۵۵	۲/۱۰۲۳	۲/۰۷۴۵	۲/۱۰۶۱
	بیزی	MixregSL	۰/۰۲۹۱	۰/۰۴۲۱	۰/۰۴۰۱	۰/۰۳۰۱
		MixregL	۱/۸۸۰۸	۱/۹۶۷۰	۱/۷۵۹۱	۱/۹۹۳۱
۱۵۰	بسامدی	MixregSL	۰/۰۳۱۶	۰/۰۳۵۴	۰/۰۳۲۲	۰/۰۳۳۷
		MixregL	۱/۶۴۲۴	۱/۵۲۰۷	۱/۰۹۷۹	۱/۳۳۹۱
	بیزی	MixregSL	۰/۰۲۶۰	۰/۰۲۳۲	۰/۰۲۳۵	۰/۰۲۶۷
		MixregL	۰/۸۸۳۴	۰/۸۱۰۴	۰/۷۲۰۵	۰/۸۶۲۷
۲۵۰	بسامدی	MixregSL	۰/۰۱۲۴	۰/۰۱۲۳	۰/۰۱۹۹	۰/۰۱۳۵
		MixregL	۰/۶۱۱۹	۰/۷۴۴۹	۰/۵۶۲۸	۰/۳۸۹۱
	بیزی	MixregSL	۰/۰۱۱۳	۰/۰۰۷۱	۰/۰۱۲۰	۰/۰۰۹۵
		MixregL	۰/۳۰۳۹	۰/۶۰۹۱	۰/۴۴۱۹	۰/۵۳۵۳
۵۰۰	بسامدی	MixregSL	۰/۰۰۷۱	۰/۰۰۸۹	۰/۰۰۸۶	۰/۰۰۸۴
		MixregL	۰/۳۶۲۵	۰/۲۲۷۶	۰/۱۹۲۸	۰/۳۴۵۸
	بیزی	MixregSL	۰/۰۰۴۶	۰/۰۰۳۹	۰/۰۰۴۵	۰/۰۰۴۱
		MixregL	۰/۱۲۴۰	۰/۱۱۶۹	۰/۱۷۰۱	۰/۱۷۶۰

جدول ۴. مقادیر نیکویی برازش هر دو مدل به داده‌های کوهن (۱۹۹۸)

روش	مدل	LOGLIK	AIC	BIC
بسامدی	MixregSL	-۴۹۲/۹۹۵	-۹۶۳/۹۹۱	-۹۳۰/۸۷۴
	MixregL	-۹۰/۶۲	-۱۶۷/۲۴	-۱۴۶/۱۶۶
بیزی	MixregSL	-۷۰/۴۰۸۹	-۱۳۸۶/۱۸	-۱۳۵۳/۰۶
	MixregL	-۱۵۳/۳۲۶	-۲۹۲/۶۵۲	-۲۷۱/۵۷۸

تقدیر و تشکر

نویسندگان مقاله از سردبیر محترم مجله آماری سپاسگزاری می‌کنند. همچنین از داوران ناشناس مقاله و ویراستار مجله که با پیشنهادها و نظرات خود باعث بارورتر شدن و ارائه بهتر مقاله شدند تقدیر و تشکر داریم. جا دارد از معاونین پژوهشی دانشگاه‌های شیراز، الزهرا و خوارزمی که با پشتیبانی خود موجب به وجود آمدن این اثر علمی شدند قدردانی شود.

جدول ۵. برآورد پارامترهای هر دو مدل به داده‌های کوهن (۱۹۹۸)

روش	پارامتر	MixregL		MixregSL	
		$comp_2$	$comp_1$	$comp_2$	$comp_1$
بیزی	β_0	۱/۹۱۲۳	۰/۰۷۳۴	۱/۸۶۱۳	۰/۰۰۱۳
	β_1	۰/۰۴۵۰	۰/۹۷۱۸	۰/۰۲۳۷	۰/۹۹۹۵
	σ^2	۰/۰۰۴۶	۰/۰۰۲۳	۰/۰۰۰۱	۰/۰۰۱۰
	γ	-	-	۰/۰۰۰۴	-۰/۰۱۴۷
	η	۰/۶۰۶۶	۰/۳۹۳۳	۰/۵۵۳۳	۰/۴۴۶۶
بسامدی	β_0	۱/۷۹۸۸	-۰/۰۰۱۶	۱/۸۳۲۶	۰/۰۱۷۱
	β_1	۰/۰۹۳۴	۰/۹۸۵۴	۰/۰۳۵۷	۰/۹۸۹۵
	σ^2	۰/۰۲۲۸	۰/۰۳۲۵	۰/۰۰۱۴	۰/۰۰۵۷
	γ	-	-	۰/۰۳۸۱	۰/۰۹۷۹
	η	۰/۴۵۸۳	۰/۵۴۱۶	۰/۶۸۸۴	۰/۳۱۱۵

مراجع

امیری دوماری، پ.، نادری، م. و جمالیزاده، ا. (۱۳۹۷)، توزیع چوله - لاپلاس موزون دوپارامتری، مجله علوم آماری، ۱۲(۲)، ۳۶۴-۳۵۱.

Akaike, H. (1973), Information Theory and an Extension of the Maximum Likelihood Principle..

Aitkin, M. and Wilson, G. T. (1980), Mixture Modelse, Outliers and EM Algorithm, *Technometrics*, **22**, 325-331.

Arslan, O. (2009), An Alternative Multivariate Skew Laplace Distribution: Properties and Estimation, *Statistical Papers*, **49(1)**, 1-23.

Bohning, D., Dietz, E., Schaub, R., Schlattmann, P. and Lindsay, B. (1994), The Distribution of the Likelihood Ratio for Mixtures of Densities from the One-Parameter Exponential Family, *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, **46**, 373-388.

Bai, Z.D., Krishnaiah, P.R., Zhao, L.C. (2005), On Rates of Convergence of Efficient Detection Criteria in Signal Processing with White Noise, *IEEE Trans Inform Theor*, **35**, 380-388.

- Cancho, V. G., Dey, K. D., Lachos, V. H. and Andrade, M. (2010), Bayesian Non-linear Regression Models with Scale Mixtures of Skew Normal Distributions: Estimation and Case Influence Diagnostics, *Computational Statistics and Data Analysis*, **55**, 588-602.
- Dempster, A. P., Laird, N. M. and Rubin, D. B. (1977), Maximum Likelihood from Incomplete Data via the EM Algorithm, *Journal of Royal Statistical Society*, **39**, 1-38.
- Dogru, F.Z. and Arslan, O. (2017), Robust Mixture Regression based on the Skew t Distribution, *Rev Colomb Estad*, **40(1)**, 45-64.
- Diebolt, J. and C. P. Robert. (1990), Bayesian Estimation of Finite Mixture Distributions: Part II, Sampling Implementation, *Technical Report III. Paris: Laboratoire de Statistique Thorique et Applique*, Universit Paris VI.
- Gelman, A., A. Jakulin, M. Grazia Pittau, and Y. Su. (2008), A Weakly Informative Default Prior Distribution for Logistic and other Regression Models, *The Annals of Applied Statistics*, **4**, 1360-1383.
- Hawkins, D. S., Allen, D. M. and Stomber, A. J. (2001), Determining the Number of Components in Mixtures of Linear Models, *Comput. Statist. Data Anal* , **38**, 15-48.
- Holla, M.S. and Bhattacharya, S.K. (1986), On a Compound Gaussian Distribution, *Ann. Inst. Statist. Math*, **20**, 331-336.
- Julia, O. and Vives-Rego, J. (2005), Skew-Laplace Distribution in Gramnegative Bacterial Axenic Cultures: New Insights into Intrinsic Cellular Heterogeneity, *Microbiology*, **151**, 749-755.
- Jones, P. N. and McLachlan, G. J. (1992), Fitting Finite Mixture Models in a Regression Context, *Aust. J. Statist* , **34**, 233-2402.
- Kotz, S., Kozubowski, T.J. and Podgorski, K. (2001), The Laplace Distribution and Generalizations, *Birkhauser, Boston*.

- Lachos, V., Ghosh, P. and Arellano-Valle, R. (2010), Likelihood Based Inference for Skew Normal/Independent Linear Mixed Model, *Statistica Sinica*, **20**, 303-322.
- Lavine, M. and M. West. (1992), A Bayesian Method of Classification and Discrimination, *Canadian Journal of Statistics*, **20**, 451-461.
- Lindsay, B. G. (1995), Mixture Models: Theory Geometry and Applications, *Hayward, California: Institute of Mathematical Statistics*.
- Maclachlan, G. and Peel, D. (2000), Finite Mixture Models, Wiley, New York.
- Marin, J. M., Mengersen, K. and C. Robert. (2005), Bayesian Modelling and Inference on Mixtures of Distributions, *In Rao, C. and Dey, D., (editors)*, Handbook of Statistics, 25, Springer-Verlag, New York.
- Purdom, E. and Holmes, SP. (2005), Error Distribution for Gene Expression data, *Sta Appl Genet Molec Biol*, **4(16)**.
- Pearson, K. (1894), Contributions to the Theory of Mathematical Evolution, *Philosophical Transitions of the Royal Society of London*, **185**, 71-110.
- Quandt, R. E. and Ramsey, J. B. (1978), Estimating Mixtures of Normal Distributions and Switching Regressions, *Journal of the American Statistical Association*, **73**, 730-738.
- Quandt, R.E. (1972), A New Approach to Estimating Switching Regressions, *Journal of the American Statistical Association*, **67**, 306-310.
- Richardson, S. and P. J. Green. (1997), On Bayesian Analysis of Mixtures with an Unknown Number of Components (with discusson), *Journal of the Royal Statistical Society*, **59**, 731-792.
- Roeder, K. and Wasserman, L. (1997), Practical Bayesian Density Estimation using Mmixture of Normal, *Journal of the American Statistical Association*, Tobe. published.

- Song, W., Yao, W. and Xing, Y. (2014), Robust Mixture Regression Model Fitting by Laplace Distribution, *Comput Stat Data Anal*, **71**, 128-137.
- Tarami, B., Sanjari Farsipour, N. and Khosravi, H. (2024), Baysian Mixture Regression Approach based on Laplace Distribution, *To be appeared in Journal of Mathematical Research*.
- Turner, T. R. (2000), Estimating the Propagation Rate of a Viral Infection of Potato Plants Via Mixtures of Regressions, *Appl.Statist*, **49**(3), 371-384.
- Wolfe, J.H. (1965), A Computer Program for the Computation of Maximum Likelihood Analysis of Types, *Research Memo. SRM. San Diego: U.S. Naval Personal Research Activity*, 12-65.
- Yao, W., Wei, Y. and Yu, C. (2014), Robust Mixture Regression using the t-distribution, *Comput Stat Data Anal*, **71**, 116-127.
- Yu, K. and Zhang, J. (2005), A Three-Parameter Asymmetric Laplace Distribution and its Extension, *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **34**, 1867-1879.