



## Discrete Chi-Squared Information Measure, Its Generalizations, and an Application in Image Processing

Kharazmi<sup>1</sup>, O.<sup>1</sup>, Shirazi-Niya, F.<sup>2</sup>

<sup>1,2</sup>Department of Statistics, Vali-e-Asr University of Rafsanjan, Rafsanjan, Iran.

**Corresponding author:** O. Kharazmi, [omid.kharazmi@vru.ac.ir](mailto:omid.kharazmi@vru.ac.ir)

Received: 5/3/2025   Revised: 26/5/2025   Accepted and Published Online: 28/5/2025.

### Introduction

Information sources in many real-world applications, such as textual data, are often discrete, where words are selected from a limited vocabulary. Unlike continuous information measures, discrete measures can be directly computed from observed symbol frequencies without knowing the underlying distribution. These measures are valuable in theoretical and practical domains, including machine learning, which aids in feature selection and classification, and image processing, which supports tasks like quality enhancement and edge detection. For example, Shannon entropy and the Gini index are widely used in decision trees and random forests. Discrete Fisher information and the information-generating function help analyze structural features and image similarity. This paper introduces discrete forms of chi-square-based information measures, proposes generalizations using convexity, and explores their behavior for models like escort distributions. Applications in image processing are also presented.

### Material and Methods

This paper presents two applications of the discrete generalized chi-square divergence measure in the context of image quality assessment. The results are also compared with the Peak Signal-to-Noise Ratio (PSNR) performance, a well-known criterion for evaluating image quality. The first image depicts a lake and consists of a  $512 \times 512$  pixel grid, where each pixel holds a grayscale value within a specific range. The second image is a grayscale image of size  $1346 \times 882$ , and its noisy versions are generated by adding Gaussian noise

at different levels. These procedures were implemented using the OpenCV library in Python, which offers a comprehensive set of tools for image processing tasks.

## Results and Discussion

This paper introduces and examines several new chi-square-type information measures for discrete distributions. The generalized discrete chi-square and the relative chi-square divergence are defined and studied for well-known distributions in areas such as coding theory and thermodynamics, including escort and generalized escort distributions, with an illustrative example based on the Bernoulli distribution. The Jensen-type chi-square information measure is also introduced and shown to be expressible as a convex combination of discrete relative chi-square divergences with a direct link to its second-order derivative. A generalization of the Jensen-type chi-square divergence for  $n$  random variables and a weighted version is proposed, and key properties are investigated. Finally, two applications in image quality assessment are presented, where the proposed chi-square divergence shows comparable performance to the widely used Peak Signal-to-Noise Ratio, highlighting its potential as a practical alternative criterion.

## Conclusion

This paper introduces new discrete chi-square-type information measures and highlights their applications in image quality assessment. Specifically, it presents two practical examples of these divergence measures used to evaluate image similarity, comparing their performance to the well-known Peak Signal-to-Noise Ratio. The results show that the generalized chi-square divergence is comparable to the Peak Signal-to-Noise Ratio in detecting quality differences, demonstrating its potential as a reliable alternative for assessing image quality in real-world scenarios.

**Keywords:** Chi-square divergence measure, Convex function, Jensen's inequality, Probability mass function, Escort distribution.

**Mathematics Subject Classification (2020):** 62N05, 62F10.



©The Author(s). The Publisher is Iranian Statistical Society.

This is an open access article distributed under the terms and conditions of [\(CC BY-NC 4.0\)](https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/)

## تعمیم اندازه اطلاع کای-دو گسسته و کاربرد آن در پردازش تصویر

امید خوارزمی، فائزه شیرازی‌نیا

گروه آمار، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه ولی عصر (عج) رفسنجان

نویسنده مسئول: امید خوارزمی، [omid.kharazmi@vru.ac.ir](mailto:omid.kharazmi@vru.ac.ir)

تاریخ دریافت: ۱۴۰۳/۱۲/۱۵ تاریخ بازنگری: ۱۴۰۴/۳/۵ تاریخ پذیرش و انتشار: ۱۴۰۴/۳/۷

**چکیده:** در این مقاله، با در نظر گرفتن اندازه‌های اطلاع کای-دو تعمیم‌یافته و کای-دو تعمیم‌یافته نسبی، نسخه‌های گسسته‌ای از این معیارهای اطلاع معرفی می‌شود. سپس تعمیم‌هایی از این کمیت‌های اطلاع بر اساس خاصیت تحذب آن‌ها ارائه می‌شود. برخی از ویژگی‌های مهم این اندازه‌های جدید و روابط بین آن‌ها مورد مطالعه قرار می‌گیرد. به علاوه، کارکرد این معیارهای جدید اطلاع برای برخی از مدل‌های شناخته‌شده و پرکاربرد در شاخه‌های نظریه کدگذاری و ترمودینامیک از قبیل توزیع‌های اسکورت و اسکورت تعمیم‌یافته مطالعه می‌شود. در پایان هم دو کاربرد برای اندازه اطلاع معرفی شده کای-دو تعمیم‌یافته گسسته در زمینه ارزیابی کیفیت تصاویر بررسی می‌شود. علاوه بر این، نتایج به دست آمده از کارکرد این معیارها با عملکرد معیار مهم نسبت سیگنال به نویز پیک که یک کمیت شناخته‌شده در ارزیابی کیفیت تصاویر است، مقایسه می‌شوند. نشان داده می‌شود که اندازه واگرایی کای-دو تعمیم‌یافته عملکردی مشابه با معیار نسبت سیگنال به نویز پیک دارد و می‌تواند به عنوان یک معیار جایگزین به کار رود.

**واژه‌های کلیدی:** اندازه واگرایی کای-دو، تابع محدب، نامساوی جنسن، توزیع اسکورت.

کد موضوع بندی ریاضی (۲۰۲۰): 62N05، 62F10.

## ۱ مقدمه

در بسیاری از کاربردهای دنیای واقعی، منابع اطلاعاتی اغلب دارای طبیعت گسسته هستند؛ به عنوان مثال، داده‌های متنی که هر کلمه یک مقدار گسسته از یک واژگان محدود را شامل می‌شود. در مقابل، اندازه‌های اطلاع پیوسته به

طور معمول در مواردی استفاده می‌شوند که منبع اطلاع پیوسته است؛ به عنوان مثال، می‌توان به منبع اطلاعاتی در پردازش سیگنال اشاره کرد (برونی و همکاران، ۲۰۱۳). یکی از مزایای مرتبط با معیارهای اطلاع گسسته این است که می‌توانند، بدون نیاز به دانستن توزیع احتمالی زیربنایی، به سادگی از طریق فرکانس‌های مشاهده شده نمادها یا داده‌های مختلف در یک منبع اطلاعاتی، محاسبه شوند. در حقیقت با استفاده از این ویژگی‌ها، امکان به‌کارگیری این معیارها در کاربردهای متنوعی مانند فشرده‌سازی داده، تصحیح خطا و یادگیری ماشین فراهم می‌شود (گری، ۲۰۱۱؛ آنجالی و گوپتا، ۲۰۲۵).

در هر دو نوع اندازه اطلاع پیوسته و گسسته، مزایا و محدودیت‌های خاصی وجود دارد که انتخاب بین آن‌ها را وابسته به کاربرد خاص و ویژگی‌های منبع اطلاع مورد نظر می‌سازد. در حالت پیوسته، معمولاً نیازمند تخمین مدل احتمالی برای متغیرهای تصادفی هستیم، چراکه داده‌ها به صورت یک توزیع پیوسته بیان می‌شوند (صانعی طبس و محتشمی برزادران، ۲۰۱۷؛ احراری و همکاران، ۲۰۱۹). این تخمین ممکن است از طریق برازش یک تابع چگالی احتمال<sup>۱</sup> یا استفاده از روش‌های هسته<sup>۲</sup> انجام شود. در این فرآیند، گسسته‌سازی داده‌ها نیز ممکن است به عنوان یک گام واسطه‌ای به کار رود تا اندازه‌های اطلاع بتوانند روی مجموعه داده‌های پیوسته اعمال شوند. با این حال، این مراحل می‌توانند منجر به خطای تخمین شوند، زیرا هرگونه خطا در تخمین توزیع احتمال اولیه مستقیماً بر محاسبات تأثیر خواهد گذاشت (وانگ و همکاران، ۲۰۲۵). از سوی دیگر، در کاربردهایی که با داده‌های گسسته سر و کار داریم، نیاز به تخمین توزیع احتمالی کمتر احساس می‌شود، زیرا می‌توان مستقیماً از فرکانس‌های مشاهده‌شده در داده‌های گسسته برای محاسبه اندازه‌های اطلاع استفاده کرد (وانگ و فان، ۲۰۲۴). به عنوان مثال، در مسائل مرتبط با پردازش زبان طبیعی، دسته‌بندی متون و داده‌های ژنتیکی، داده‌ها به طور ذاتی ماهیت گسسته دارند و معیارهای اطلاع گسسته می‌توانند بدون نیاز به برآورد توزیع احتمالاتی پیوسته، مستقیماً از توزیع تجربی استفاده شوند. از لحاظ نظری، کار کردن با مدل‌های پیوسته به‌ویژه زمانی که معیارهای اطلاع به‌صورت انتگرالی تعریف شده‌اند و تابع درون انتگرال را می‌توان با استفاده از توابع ریاضی پیوسته یا کمیت‌هایی مرتبط با مشتقات آن‌ها توصیف کرد گاهی ساده‌تر است. برای مثال، در اطلاع فشر پیوسته، از مشتق تابع چگالی احتمال نسبت به پارامترهای آن استفاده می‌شود، درحالی‌که در حالت گسسته، به جای مشتق معمولی، از مشتق تفاضلی در فضای گسسته بهره می‌گیریم که می‌تواند پیچیدگی بیشتری به همراه داشته باشد. بنابراین، بسته به نوع داده‌ها و اهداف مورد نظر، انتخاب میان معیارهای اطلاع پیوسته و گسسته تأثیر قابل توجهی بر کارایی و دقت تحلیل‌های اطلاعاتی خواهد داشت (شانون، ۱۹۴۸).

از مهم‌ترین اندازه‌های اطلاع گسسته در نظریه اطلاع می‌توان به آنترופی شانون<sup>۳</sup>، اکستروپی<sup>۴</sup>، شاخص جینی-

<sup>۱</sup>Probability Density Function

<sup>۲</sup> Kernel

<sup>۳</sup>Shannon entropy

<sup>۴</sup>Extropy

سیمپسون<sup>۱</sup>، اطلاع فیشر گسسته<sup>۲</sup>، و تابع مولد اطلاعات گسسته<sup>۳</sup> اشاره کرد. فرض کنید  $X$  یک متغیر تصادفی گسسته با تابع جرم احتمال  $P = (p_1, \dots, p_n)$  باشد. تعریف اندازه‌های اطلاع بالا به ترتیب عبارتند از:

- آنتروپی شانون:  $H(P) = - \sum_{i=1}^n p_i \log p_i$
- معیار اکستروپی:  $\bar{H}(P) = - \sum_{i=1}^n (1 - p_i) \log(1 - p_i)$
- شاخص جینی-سیمپسون:  $GS(P) = \sum_{i=1}^n p_i(1 - p_i) = 1 - \sum_{i=1}^n p_i^2$
- اطلاع فیشر گسسته:  $p_{n+1} = 0, \mathcal{F}(P) = \sum_{i=1}^n \frac{(p_{i+1} - p_i)^2}{p_i}$
- تابع مولد اطلاع گسسته:  $G_\alpha(P) = \sum_{i=1}^n p_i^\alpha, \alpha > 0$

برای جزئیات بیشتر به (شانون، ۱۹۴۸؛ خوارزمی و بالاکریشنان، ۲۰۲۱، ۲۰۲۳؛ ا؛ خوارزمی و همکاران، ۲۰۲۳؛ خوارزمی و همکاران، ۲۰۲۳؛ خوارزمی و بالاکریشنان، ۲۰۲۴) مراجعه شود. این معیارها نه تنها در حوزه نظری، بلکه در بسیاری از کاربردهای عملی، از جمله یادگیری ماشین و پردازش تصویر، نقش مهمی ایفا می‌کنند. در یادگیری ماشین، این اندازه‌ها برای انتخاب ویژگی، بهینه‌سازی مدل‌های دسته‌بندی و سنجش شباهت داده‌ها مورد استفاده قرار می‌گیرند. به عنوان مثال، آنتروپی شانون در درخت‌های تصمیم‌گیری برای اندازه‌گیری عدم قطعیت یک متغیر تصادفی به کار می‌رود، و شاخص جینی در الگوریتم‌هایی مانند جنگل تصادفی برای تعیین خلوص گره‌ها در فرایند دسته‌بندی استفاده می‌شود (ناوارو و همکاران، ۲۰۲۳). علاوه بر این، در پردازش تصویر، از این معیارها برای بهبود کیفیت تصویر، تشخیص الگو و فشرده‌سازی داده‌های تصویری استفاده می‌شود. به طور خاص، اطلاع فیشر گسسته در ارزیابی میزان تغییرات ساختاری تصاویر و بهینه‌سازی الگوریتم‌های تشخیص لبه مورد استفاده قرار می‌گیرد. همچنین، تابع مولد اطلاع گسسته می‌تواند در تحلیل و توصیف ویژگی‌های پیچیده تصاویر، به ویژه در ارزیابی شباهت و کیفیت تصویر، بکار برده شود. در مجموع، اندازه‌های اطلاع گسسته ابزارهای قدرتمندی برای تحلیل داده‌های گسسته محسوب می‌شوند و در کاربردهای مختلف مورد توجه قرار گرفته‌اند (سوراتی و همکاران، ۲۰۱۹).

فرض کنید  $X$  و  $Y$  دو متغیر تصادفی با توابع چگالی پیوسته به ترتیب  $f$  و  $g$  روی تکیه‌گاه مشترک  $\mathcal{X}$  باشند، آنگاه اندازه‌های واگرایی کای-دو (نلسن و ناک، ۲۰۱۳) و کای-دو تعمیم‌یافته (باسو و همکاران، ۱۹۹۸) به ترتیب به صورت

$$\chi^2(f : g) = \int_{\mathcal{X}} \frac{(f(x) - g(x))^2}{f(x)} dx \quad (۱)$$

$$\chi_\alpha(f : g) = \frac{\alpha + 1}{2} \int_{\mathcal{X}} \frac{(f(x) - g(x))^2}{f^{1-\alpha}(x)} dx \quad (۲)$$

تعریف می‌شوند. خوارزمی و علیزاده (۱۳۹۲) نتایجی بر اساس این معیار کای-دو و ارتباط آن با اندازه واگرایی

<sup>۱</sup>Gini-Simpson index

<sup>۲</sup>Discrete Fisher information

<sup>۳</sup>Discrete information generating function

جنسن-فیشرا ارائه دادند. اخیراً **خوارزمی و بالاکریشن** (۲۰۲۴) با در نظر گرفتن اندازه‌های اطلاع کای-دو در رابطه (۱) و کای دو تعمیم‌یافته در رابطه (۲) یک اندازه اطلاع جدید به صورت

$$D_{\alpha}^{\psi}(f : g) = \frac{1 + \alpha}{2} \int_x \frac{(f(x) - g(x))^2}{\psi^{1-\alpha}(x)} dx, \quad (3)$$

معرفی کردند، که در آن  $f, g$  و  $\psi$  توابع چگالی احتمال هستند. این کمیت اندازه اطلاع  $\chi_{\alpha}^{\psi}$ -نسبی نامیده شد. آن‌ها نشان دادند که این معیار جدید اطلاع، کمیت‌های اطلاع از قبیل کای-دو ( $\chi^2$ )، کای-دو تعمیم یافته ( $\chi_{\alpha}^2$ )، مثلی و بالاکریشن-سانگهای را به عنوان حالات خاص شامل می‌شود. علاوه بر این، نویسندگان اندازه واگرایی از نوع جنسن شامل جنسن- $\chi_{\alpha}^{\psi}$  را بر اساس معیار (۱) به صورت

$$\mathcal{J}_{\alpha}^{\psi}(f_1, f_2; p) = p\chi_{\alpha}^{\psi}(\psi : f_1) + (1 - p)\chi_{\alpha}^{\psi}(\psi : f_2) - \chi_{\alpha}^{\psi}(\psi : pf_1 + (1 - p)f_2) \quad (4)$$

و اندازه واگرایی جنسن- $\chi_{\alpha}^{\psi} - (p, w)$  را به عنوان یک تعمیم از آن معرفی کردند. در حقیقت، معیارهای واگرایی جنسن- $\chi_{\alpha}^{\psi}$  و جنسن- $\chi_{\alpha}^{\psi} - (w, \lambda)$  پیشنهاد شده تعمیم‌هایی از  $D_{\alpha}^{\psi}(f : g)$  هستند که بر اساس خاصیت تحذب این معیارها ارائه شده است. **خوارزمی و بالاکریشن** (۲۰۲۴) نشان دادند که واگرایی جنسن- $\chi_{\alpha}^{\psi}$  را می‌توان به صورت آمیخته‌ای از معیارهای واگرایی نسبی- $\chi_{\alpha}^{\psi}$  به صورت

$$\mathcal{J}_{\alpha}^{\psi}(f_1, f_2; p) = pD_{\alpha}^{\psi}(f_1 : f_T) + (1 - p)D_{\alpha}^{\psi}(f_2 : f_T),$$

نشان داد، که در آن  $0 < p < 1$ . نکته مهم قابل توجه این است که تمام این مطالعات در حالت پیوسته و مرتبط با معیار کای-دو در رابطه (۱) بوده‌اند. در حالی که مطالعه این معیار در حالت گسسته به طور مستقل بررسی نشده است، که یکی از اهداف اصلی مقاله حاضر، پرداختن به این موضوع است. هدف اصلی در این مقاله، معرفی نسخه‌های گسسته از معیارهای اطلاع در رابطه‌های (۲)، (۳) و (۴)، همچنین تعمیم آن‌ها بر اساس خاصیت تحذب و مطالعه روابط بین آن‌ها است. به‌ویژه اینکه علاقه‌مند هستیم تا این کمیت‌های اطلاع را برای برخی از مدل‌های معروف و پرکاربرد در شاخه‌های نظریه کدگذاری و ترمودینامیک از قبیل توزیع‌های اسکورت و اسکورت تعمیم‌یافته (برچر، ۲۰۰۹؛ ۲۰۱۳) نیز مورد مطالعه و بررسی قرار دهیم. در پایان هم دو کاربرد در زمینه پردازش تصویر برای یکی از این معیارهای اطلاع معرفی شده ارائه می‌شود.

بر این اساس ساختار مقاله به صورت زیر خواهد بود: ابتدا در بخش ۲ با در نظر گرفتن اندازه واگرایی کای-دو در رابطه (۲)، اندازه واگرایی‌های کای-دو تعمیم‌یافته گسسته و اندازه واگرایی نسبی- $\chi_{\alpha}^{\psi}$  بین دو تابع جرم احتمال معرفی می‌شود. سپس این اندازه‌های جدید معرفی شده را برای برخی از توزیع‌های شناخته‌شده و پرکاربرد اسکورت و اسکورت تعمیم‌یافته بدست می‌آوریم. علاوه بر این یک مثال مرتبط با توزیع برنولی ارائه و نمودارهای سه بعدی

نیز بررسی می‌شود. در بخش ۳، با در نظر گرفتن اندازه اطلاع  $\chi_\alpha^\gamma$  گسسته، اندازه واگرایی جنسن- $\chi_\alpha^\gamma$  را معرفی می‌کنیم. سپس نشان می‌دهیم که این اندازه اطلاع جدید را می‌توان به صورت یک ترکیب محدب از اندازه‌های واگرایی  $\chi_\alpha^\gamma$  گسسته نسبی بیان کرد. علاوه بر این نشان داده می‌شود که مشتق مرتبه دوم کمیت اندازه واگرایی جنسن- $\chi_\alpha^\gamma$  دارای رابطه مستقیم با  $\chi_\alpha^\gamma$  گسسته نسبی است. در پایان این بخش، یک تعمیم از تعریف اندازه واگرایی جنسن- $\chi_\alpha^\gamma$  برای حالت  $n + 1$  متغیر تصادفی ارائه می‌شود. معرفی معیار واگرایی جنسن- $\chi_\alpha^\gamma(w, \lambda)$  و مطالعه برخی از ویژگی‌های مهم آن در بخش ۴ ارائه می‌شود. در بخش ۵، به منظور بررسی عملکرد معیار  $\chi_\alpha^\gamma$  گسسته در کاربردهای عملی، از آن برای ارزیابی کیفیت تصویر استفاده می‌کنیم. علاوه بر این، کارایی این اندازه اطلاع را با کمیت نسبت سیگنال به نویز<sup>۱</sup> (PSNR) که یک معیار استاندارد برای ارزیابی کیفیت تصویر است، مقایسه و تحلیل می‌کنیم در پایان، مقاله در بخش ۶ نتیجه‌گیری می‌شود.

## ۲ اندازه اطلاع $\chi_\alpha^\gamma$ گسسته و تعمیم آن

تعریف ۱. فرض کنید  $P = (p_1, \dots, p_n)$  و  $Q = (q_1, \dots, q_n)$  دو تابع جرم احتمال باشند. آنگاه اندازه اطلاع  $\chi_\alpha^\gamma$  گسسته بین توابع جرم احتمال  $P$  و  $Q$  به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\chi_\alpha^\gamma(P, Q) = \frac{1 + \alpha}{2} \sum_{i=1}^n \frac{(p_i - q_i)^2}{p_i^{1-\alpha}}. \quad (5)$$

تعریف ۲. فرض کنید  $P = (p_1, \dots, p_n)$ ،  $Q = (q_1, \dots, q_n)$  و  $R = (r_1, \dots, r_n)$  توابع جرم احتمال باشند. آنگاه اندازه اطلاع  $\chi_\alpha^\gamma$  نسبی گسسته بین توابع جرم احتمال  $P$  و  $Q$  نسبت به تابع جرم احتمال  $R$  به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$D_\alpha^R(P, Q) = \frac{1 + \alpha}{2} \sum_{i=1}^n \frac{(p_i - q_i)^2}{r_i^{1-\alpha}}. \quad (6)$$

تذکر ۱. با توجه به تعریف اندازه‌های اطلاع در رابطه‌های (۵) و (۶)، دیده می‌شود که با قراردادن  $R = P$  خواهیم داشت  $D_\alpha^R(P, Q) = \chi_\alpha^\gamma(P, Q)$ .

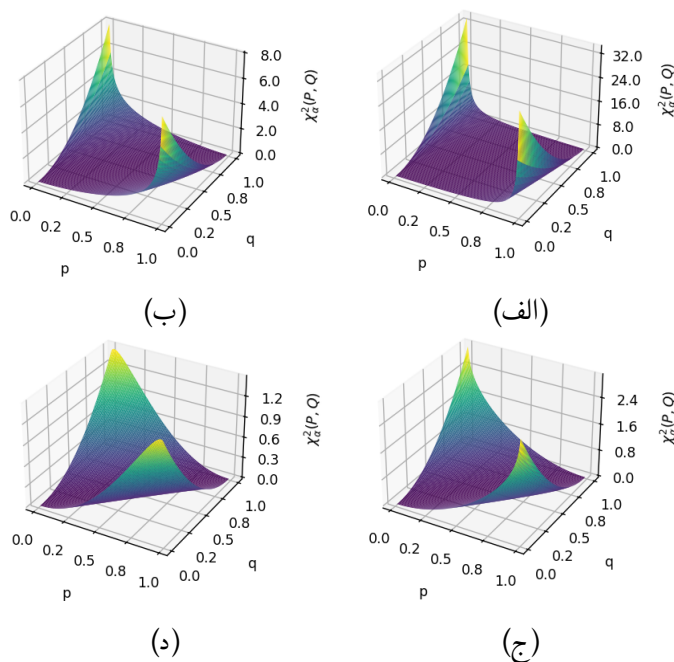
مثال ۱. فرض کنید  $X$  و  $Y$  دو متغیر تصادفی برنولی به ترتیب با پارامترهای  $p$  و  $q$  باشند. آنگاه بردارهای احتمال متناظر با این متغیرها به صورت  $P = (p, 1-p)$  و  $Q = (q, 1-q)$  هستند. اکنون با توجه به تعریف اندازه

<sup>1</sup>Peak Signal-to-Noise Ratio

واگرایی  $\chi_\alpha^2(P, Q)$  گسسته در (۵)، خواهیم داشت

$$\chi_\alpha^2(P, Q) = \frac{1+\alpha}{2}(p-q)^2 \left\{ \frac{1}{p^{1-\alpha}} + \frac{1}{(1-p)^{1-\alpha}} \right\}$$

یک نمودار سه بعدی از  $\chi_\alpha^2(P, Q)$  برای مقادیر انتخاب شده از  $\alpha$ ، یعنی (۰/۱، ۰/۵، ۰/۸، ۱/۲۵) در شکل ۱ رسم شده است. همانطور که ملاحظه می‌شود با افزایش  $\alpha$  از ۰/۱ به ۱/۲۵، مقدار  $\chi_\alpha^2(P, Q)$  کاهش یافته و نمودارها



شکل ۱. نمودار سه بعدی برای الف-  $\alpha = ۰/۱$ ، ب-  $\alpha = ۰/۵$ ، ج-  $\alpha = ۰/۸$  و د-  $\alpha = ۱/۲۵$  اندازه واگرایی  $\chi_\alpha^2(P, Q)$  بر حسب احتمال  $p$  و  $q$ .

صاف‌تر می‌شوند، که بیانگر کاهش حساسیت معیار نسبت به اختلاف بین  $p$  و  $q$  است. این واگرایی در حالت  $p = q$  به حداقل می‌رسد و با افزایش فاصله بین آن‌ها افزایش می‌یابد، که خاصیت جداسازی آن را نشان می‌دهد. همچنین، برای مقادیر کوچک‌تر  $\alpha$ ، قله‌های نمودار تیزتر و مقادیر واگرایی در نواحی دور از خط قطری بیشتر هستند. این رفتار نشان می‌دهد که انتخاب  $\alpha$  نقش مهمی در میزان تمایز قائل شدن بین دو توزیع دارد و بسته به کاربرد، می‌توان  $\alpha$  را برای کنترل حساسیت تنظیم کرد. فرض کنید که متغیر تصادفی  $Z$  نیز به صورت دارای توزیع برنولی با پارامتر  $r$  باشد. اکنون با در نظر گرفتن بردارهای احتمال متناظر با متغیرهای  $X$ ،  $Y$  و  $Z$  به صورت  $P = (p, 1-p)$



خواهیم داشت  $Q = (q, 1 - q)$  و  $R = (r, 1 - r)$  و با توجه به تعریف اندازه واگرایی  $\chi_\alpha^\gamma(P, Q)$  گسسته نسبی در (۶)،

$$D_\alpha^R(P, Q) = \frac{1 + \alpha}{2} (p - q)^2 \left\{ \frac{1}{r^{1-\alpha}} + \frac{1}{(1-r)^{1-\alpha}} \right\}$$

فرض کنید  $P = (p_1, \dots, p_n)$  و  $Q = (q_1, \dots, q_n)$  دو تابع جرم احتمال باشند. سپس، تابع جرم احتمال اسکورت مربوط به  $P$  و تابع جرم احتمال اسکورت تعمیم یافته مربوط به  $P$  و  $Q$  برای  $\eta > 0$  به ترتیب به صورت

$$P_\eta = \left( \frac{p_1^\eta}{\sum_{i=1}^n p_i^\eta}, \dots, \frac{p_n^\eta}{\sum_{i=1}^n p_i^\eta} \right), \quad (7)$$

$$S_\eta = \left( \frac{p_1^\eta q_1^{1-\eta}}{\sum_{i=1}^n p_i^\eta q_i^{1-\eta}}, \dots, \frac{p_n^\eta q_n^{1-\eta}}{\sum_{i=1}^n p_i^\eta q_i^{1-\eta}} \right), \quad (8)$$

تعریف می شوند (برچر، ۲۰۰۹؛ برچر، ۲۰۱۳؛ خوارزمی و بالاکریشن، ۲۰۲۳؛ خوارزمی و همکاران، ۲۰۲۳b).

قضیه ۱. فرض کنید  $P = (p, 1 - p)$  و  $Q = (q, 1 - q)$  دو تابع جرم احتمال و  $P_\eta$  تابع جرم احتمال اسکورت متناظر با  $P$  باشد. سپس، برای  $0 \leq \alpha, \eta \leq 1$ ، و  $R = P_\eta$  داریم

$$D_\alpha^R(P : Q) = \frac{1 + \alpha}{1 + \beta} G_\eta^{1-\alpha}(P) \chi_\beta^\gamma(P : Q),$$

که در آن  $G_\eta(P) = \sum_{i=1}^n p_i^\eta$  و  $\beta = 1 - \eta(1 - \alpha)$  مولد اطلاع گسسته  $P$  با مرتبه  $\eta$  است.

برهان: با فرض اینکه  $R = P_\eta$ ، داریم:

$$\begin{aligned} D_\alpha^R(P : Q) &= \frac{1 + \alpha}{2} \left( \sum_{i=1}^n p_i^\eta \right)^{1-\alpha} \sum_{i=1}^n \frac{(p_i - q_i)^\gamma}{p_i^{\eta-\eta\alpha}} \\ &= \frac{1 + \alpha}{2} G_\eta^{1-\alpha}(P) \sum_{i=1}^n \frac{(p_i - q_i)^\gamma}{p_i^{\eta-\eta\alpha}} \\ &= \frac{1 + \alpha}{1 + \beta} G_\eta^{1-\alpha}(P) \chi_\beta^\gamma(P : Q), \end{aligned}$$

که در آن  $\beta = 1 - \eta(1 - \alpha)$  همچنین برای  $R = S_\eta$  داریم

$$\begin{aligned} {}^\eta D_{\alpha=0}^R(P : Q) &= \sum_{i=1}^n \frac{(p_i - q_i)^\eta}{S_\eta} \\ &= \left( \sum_{i=1}^n p_i^\eta q_i^{1-\eta} \right) \sum_{i=1}^n \frac{(p_i - q_i)^\eta}{p_i^\eta q_i^{1-\eta}} \\ &= \Gamma_\eta(P : Q) \sum_{i=1}^n \frac{(p_i - q_i)^\eta}{p_i^\eta q_i^{1-\eta}}, \end{aligned} \quad (9)$$

که در آن  $\Gamma_\eta(P : Q) = \sum_{i=1}^n p_i^\eta q_i^{1-\eta}$  تابع مولد اطلاع نسبی بین توابع جرم احتمال  $P$  و  $Q$  است.

**قضیه ۲.** یک کران پایین برای کمیت  $D_{\alpha=0}^R(P : Q)$  در (۹) به صورت

$$D_{\alpha=0}^R(P : G) \geq \frac{\Gamma_\eta(P, Q)}{{}^\eta(1 - \eta)} \chi^\eta(P_T : P),$$

است، که در آن  $P_T = \eta P + (1 - \eta)Q$  جرم احتمال آمیخته و  $\chi^\eta(\cdot : \cdot)$  اندازه واگرایی کای-دو است.

**برهان:** از تعریف  $D_\alpha^R(P : Q)$  و فرض اینکه

$$R = S_\eta = \left( \frac{p_1^\eta q_1^{1-\eta}}{\sum_{i=1}^n p_i^\eta q_i^{1-\eta}}, \dots, \frac{p_n^\eta q_n^{1-\eta}}{\sum_{i=1}^n p_i^\eta q_i^{1-\eta}} \right), \quad 0 \leq \eta \leq 1,$$

و با استفاده از نابرابری میانگین هندسی-میانگین حسابی (استیل، ۲۰۰۴) بین توابع جرم احتمال  $P$  و  $Q$  به صورت

$$P^\eta Q^{1-\eta} \leq \eta P + (1 - \eta)Q \text{ است و با توجه به اینکه } Q - P = \frac{1}{1-\eta}(P_T - P) \text{ خواهیم داشت:}$$

$$\begin{aligned} {}^\eta D_{\alpha=0}^R(P : Q) &= \left( \sum_{i=1}^n p_i^\eta q_i^{1-\eta} \right) \sum_{i=1}^n \frac{(p_i - q_i)^\eta}{p_i^\eta q_i^{1-\eta}} \\ &= \Gamma_\eta(P : Q) \sum_{i=1}^n \frac{(p_i - q_i)^\eta}{p_i^\eta q_i^{1-\eta}} \\ &\geq \Gamma_\eta(P : Q) \sum_{i=1}^n \frac{(p_i - q_i)^\eta}{\eta p_i + (1 - \eta)q_i} \\ &= \frac{\Gamma_\eta(P : Q)}{(1 - \eta)^\eta} \chi^\eta(P_T : P). \end{aligned}$$

**تذکر ۲.** با توجه به اثبات قضیه ۲ مشاهده می‌شود که تساوی در کران پایین ارائه شده زمانی برقرار است که  $\eta = 0$

یا  $\eta = 1$ .

### ۳ اندازه اطلاع جنسن- $\chi_\alpha^\gamma$ گسسته

**تعریف ۳.** فرض کنید  $X_1, X_2$  و  $Y$  سه متغیر تصادفی گسسته و دارای توابع جرم احتمال به ترتیب  $P = (p_1, \dots, p_n)$ ،  $Q = (q_1, \dots, q_n)$  و  $R = (r_1, \dots, r_n)$  باشند. آنگاه اندازه اطلاع جنسن- $\chi_\alpha^\gamma$  برای  $1 < w < \infty$  به صورت زیر تعریف می شود.

$$\mathcal{J}_\alpha^R(P, Q; w) = w\chi_\alpha^\gamma(R : P) + (1-w)\chi_\alpha^\gamma(R : Q) - \chi_\alpha^\gamma[R : wP + (1-w)Q] \quad (1^\circ)$$

**لم ۱.** اندازه اطلاع جنسن- $\chi_\alpha^\gamma$  نامنفی است.

**برهان:** با توجه به این که تابع  $\phi(x) = x^\gamma$  محدب است و با استفاده از نامساوی جنسن، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \frac{\gamma}{1+\alpha} \mathcal{J}_\alpha^R(P, Q; w) &= w \sum_{i=1}^n \frac{(p_i - r_i)^\gamma}{r_i^{1-\alpha}} + (1-w) \sum_{i=1}^n \frac{(q_i - r_i)^\gamma}{r_i^{1-\alpha}} \\ &\quad - \sum_{i=1}^n \frac{(wp_i + (1-w)q_i - r_i)^\gamma}{r_i^{1-\alpha}} \\ &= w \sum_{i=1}^n \frac{p_i^\gamma}{r_i^{1-\alpha}} + (1-w) \sum_{i=1}^n \frac{q_i^\gamma}{r_i^{1-\alpha}} \\ &\quad - \sum_{i=1}^n \frac{(wp_i + (1-w)q_i)^\gamma}{r_i^{1-\alpha}} \geq 0. \end{aligned}$$

**قضیه ۳.** فرض کنید متغیرهای تصادفی گسسته  $X_1$  و  $X_2$  دارای توابع جرم احتمال به ترتیب  $P$  و  $Q$  باشند. آنگاه اندازه اطلاع  $\mathcal{J}_\alpha^R(P, Q; w)$  را می توان به صورت آمیخته ای از اندازه اطلاع  $\chi_\alpha^\gamma$  گسسته نسبی،  $D_\alpha^R$ ، به صورت

$$\mathcal{J}_\alpha^R(P, Q; w) = wD_\alpha^R(P : P_T) + (1-w)D_\alpha^R(Q : P_T),$$

بیان کرد، که در آن  $D_\alpha^R(P_i : P_T)$  اندازه اطلاع  $(\gamma)$  و  $P_T$  تابع جرم احتمال آمیخته است.

**برهان:** با توجه به تعریف  $P_T = wP + (1-w)Q$  داریم:

$$\frac{\gamma}{1+\alpha} \mathcal{J}_\alpha^R(P, Q; w) = w \sum_{i=1}^n \frac{p_i^\gamma}{r_i^{1-\alpha}} + (1-w) \sum_{i=1}^n \frac{q_i^\gamma}{r_i^{1-\alpha}} - \sum_{i=1}^n \frac{(wp_i + (1-w)q_i)^\gamma}{r_i^{1-\alpha}}.$$

از طرف دیگر، با قرار دادن  $k = wD_\alpha^R(P : P_T) + (1 - w)D_\alpha^R(Q : P_T)$ ، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \frac{2}{1 + \alpha} k &= w \sum_{i=1}^n \frac{(p_i - p_i^T)^2}{r_i} + (1 - w) \sum_{i=1}^n \frac{(q_i - p_i^T)^2}{r_i^{1-\alpha}} \\ &= w \sum_{i=1}^n \frac{p_i^2}{r_i^{1-\alpha}} - 2p \sum_{i=1}^n \frac{p_i p_i^T}{r_i^{1-\alpha}} + w \sum_{i=1}^n \frac{(p_i^T)^2}{r_i^{1-\alpha}} \\ &\quad + (1 - w) \sum_{i=1}^n \frac{q_i^2}{r_i^{1-\alpha}} - 2(1 - w) \sum_{i=1}^n \frac{q_i p_i^T}{r_i^{1-\alpha}} + (1 - w) \sum_{i=1}^n \frac{(p_i^T)^2}{r_i^{1-\alpha}} \\ &= w \sum_{i=1}^n \frac{p_i^2}{r_i^{1-\alpha}} + (1 - w) \sum_{i=1}^n \frac{q_i^2}{r_i^{1-\alpha}} - 2 \sum_{i=1}^n \frac{(p_i^T)^2}{r_i^{1-\alpha}} + \sum_{i=1}^n \frac{(p_i^T)^2}{r_i^{1-\alpha}}. \end{aligned}$$

**قضیه ۴.** اگر متغیرهای تصادفی گسسته  $X_1$  و  $X_2$  دارای توابع جرم احتمال  $P$  و  $Q$  باشند، آنگاه

$$-\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial w^2} \mathcal{J}_\alpha^R(P, Q; w) = D_\alpha^R(P : Q),$$

برهان: با استفاده از تعریف  $\mathcal{J}_\alpha^R(P, Q; w)$  در رابطه (۱۰) داریم:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial w^2} \mathcal{J}_\alpha^R(P, Q; w) &= -\frac{1 + \alpha}{2} \frac{\partial}{\partial w} \left( \sum_{i=1}^n \frac{(p_i - r_i)^2}{r_i^{1-\alpha}} - \sum_{i=1}^n \frac{(q_i - r_i)^2}{r_i^{1-\alpha}} \right) \\ &\quad + \frac{1 + \alpha}{2} \frac{\partial}{\partial w} \left( \sum_{i=1}^n (p_i - q_i) \frac{w p_i + (1 - w) q_i - r_i}{r_i^{1-\alpha}} \right) \\ &= \frac{1 + \alpha}{2} \sum_{i=1}^n \frac{(p_i - q_i)^2}{r_i^{1-\alpha}}. \end{aligned}$$

اکنون تعریف اندازه اطلاع جنسن- $\chi_\alpha^2$  گسسته در (۱۰) به حالت  $n+1$  متغیر تصادفی تعمیم داده می‌شود.

**تعریف ۴.** فرض کنید  $X_1, \dots, X_n$  و  $Y$  متغیرهای تصادفی گسسته با توابع جرم احتمال به ترتیب  $P_1, \dots, P_n$  و  $(P_i = (p_{i1}, \dots, p_{ik}))$  و  $R = (r_1, \dots, r_k)$  و اعداد حقیقی غیرمنفی باشند به طوری که  $\sum_{i=1}^n w_i = 1$ . آنگاه اندازه جنسن- $\chi_\alpha^2$  عبارت است از:

$$\mathcal{J}_\alpha^R(P_1, \dots, P_n; w) = \sum_{i=1}^n w_i \chi_\alpha^2(R : P_i) - \chi_\alpha^2(R : \sum_{i=1}^n w_i P_i).$$

قضیه ۵. اندازه اطلاع  $\mathcal{J}_\alpha^R(P_1, \dots, P_n; w)$  را می‌توان به صورت ترکیب آمیخته‌ای از اندازه‌های اطلاع نسبی  $D_\alpha^R$  به صورت زیر بیان کرد.

$$\mathcal{J}_\alpha^R(P_1, \dots, P_n; w) = \sum_{i=1}^n w_i D_\alpha^R(P_i : \sum_{i=1}^n w_i P_i), \quad (11)$$

برهان: با استفاده از اثبات قضیه ۳، اثبات به طور مشابه انجام می‌شود.

#### ۴ اندازه اطلاع جنسن- $\chi_\alpha^J(w, \lambda)$

فرض کنید  $f_1$  و  $f_2$  دو تابع چگالی باشند. اندازه واگرایی جنسن-شانون  $(w, \lambda)$  به صورت

$$\begin{aligned} JS_{(w, \lambda)}(f_1, f_2) &= H((1 - \bar{s})f_1 + \bar{s}f_2) - wH((1 - \lambda)f_1 + \lambda f_2) \\ &- (1 - w)H(\lambda f_1 + (1 - \lambda)f_2), \end{aligned}$$

تعریف می‌شود، که در آن  $\bar{s} = \lambda w + (1 - w)(1 - \lambda)$  و  $H$  آنتروپی شانون تابع چگالی  $f$ ، به صورت  $H(f) = -\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \log f(x) dx$  است (نلسن و ناک، ۲۰۱۳؛ ملیورن و همکاران، ۲۰۲۲).

تعریف ۵. فرض کنید  $X_1, X_2$  و  $Y$  سه متغیر تصادفی گسسته و دارای توابع جرم احتمال به ترتیب  $P, Q$  و  $R$  باشند؛ آنگاه اندازه اطلاع جنسن- $\chi_\alpha^J(w, \lambda)$  برای  $(w, \lambda) \in (0, 1)$  به صورت

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_\alpha^R(P, Q; w, \lambda) &= \lambda \chi_\alpha^J(R : (1 - w)P + wQ) \\ &+ (1 - \lambda) \chi_\alpha^J(R : wP + (1 - w)Q) \\ &- \chi_\alpha^J(R : (1 - \bar{w})P + \bar{w}Q), \end{aligned}$$

تعریف می‌شود، که در آن  $\bar{w} = \lambda w + (1 - \lambda)(1 - w)$ .

قضیه ۶. فرض کنید  $X_1$  و  $X_2$  دو متغیر تصادفی گسسته با توابع جرم احتمال به ترتیب  $P$  و  $Q$  هستند. آنگاه اندازه اطلاع  $\mathcal{J}_\alpha^R(P, Q; w, \lambda)$  را می‌توان به صورت آمیخته‌ای از اندازه اطلاع  $\chi_\alpha^J$  گسسته نسبی در (۶) به صورت

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_\alpha^R(P, Q; w, \lambda) &= \lambda D_\alpha^R((1 - w)P + wQ : P_{\bar{w}}^T) \\ &+ (1 - \lambda) D_\alpha^R(wP + (1 - w)Q : P_{\bar{w}}^T), \end{aligned}$$

نوشت، که در آن  $P_{\bar{w}}^T = (1 - \bar{w})P + \bar{w}Q$  تابع جرم احتمال آمیخته است.

برهان: با توجه به تعریف

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_\alpha^R(P, Q; w, \lambda) &= \lambda \chi_\alpha^\gamma(R : (\mathfrak{I} - w)P + wQ) + (\mathfrak{I} - \lambda) \chi_\alpha^\gamma(R : wP + (\mathfrak{I} - w)Q) \\ &\quad - \chi_\alpha^\gamma(R : (\mathfrak{I} - \bar{w})P + \bar{w}Q)\end{aligned}$$

و در نظر گرفتن  $P_w^T = (\mathfrak{I} - \bar{w})P + \bar{w}Q$  خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\frac{\gamma}{\mathfrak{I} + \alpha} \mathcal{J}_\alpha^R(P, Q; w, \lambda) &= \lambda \sum_{i=\mathfrak{I}}^n \frac{((\mathfrak{I} - w)p_i + wq_i)^\gamma}{r_i^{\mathfrak{I} - \alpha}} \\ &\quad + (\mathfrak{I} - \lambda) \sum_{i=\mathfrak{I}}^n \frac{(wp_i + (\mathfrak{I} - w)q_i)^\gamma}{r_i^{\mathfrak{I} - \alpha}} \\ &\quad - \sum_{i=\mathfrak{I}}^n \frac{((\mathfrak{I} - \bar{w})p_i + \bar{w}q_i)^\gamma}{r_i^{\mathfrak{I} - \alpha}}.\end{aligned}$$

از طرف دیگر با قرار دادن مقدار  $k$  در رابطه

$$\frac{\mathfrak{I} + \alpha}{\gamma} k = \lambda D_\alpha^R((\mathfrak{I} - w)P + wQ : P_w^T) + (\mathfrak{I} - \lambda) D_\alpha^R(wP + (\mathfrak{I} - w)Q : P_w^T),$$

و در نظر گرفتن مولفه‌های بردار احتمال به صورت  $P_w^T = (p_1^T, \dots, p_n^T)$  خواهیم داشت:

$$p_i^T = (\mathfrak{I} - \bar{w})p_i + \bar{w}q_i = \lambda((\mathfrak{I} - w)p_i + wq_i) + (\mathfrak{I} - \lambda)(wp_i + (\mathfrak{I} - w)q_i),$$

به قسمی که

$$\begin{aligned}k &= \lambda \sum_{i=\mathfrak{I}}^n \frac{((\mathfrak{I} - w)p_i + wq_i - p_i^T)^\gamma}{r_i^{\mathfrak{I} - \alpha}} + (\mathfrak{I} - \lambda) \sum_{i=\mathfrak{I}}^n \frac{(wp_i + (\mathfrak{I} - w)q_i - p_i^T)^\gamma}{r_i^{\mathfrak{I} - \alpha}} \\ &= \lambda \sum_{i=\mathfrak{I}}^n \frac{((\mathfrak{I} - w)p_i + wq_i)^\gamma}{r_i^{\mathfrak{I} - \alpha}} - \gamma \lambda \sum_{i=\mathfrak{I}}^n \frac{((\mathfrak{I} - w)p_i + wq_i)p_i^T}{r_i^{\mathfrak{I} - \alpha}} + \sum_{i=\mathfrak{I}}^n \frac{(p_i^T)^\gamma}{r_i^{\mathfrak{I} - \alpha}} \\ &\quad + (\mathfrak{I} - \lambda) \sum_{i=\mathfrak{I}}^n \frac{(wp_i + (\mathfrak{I} - w)q_i)^\gamma}{r_i^{\mathfrak{I} - \alpha}} - \gamma (\mathfrak{I} - \lambda) \sum_{i=\mathfrak{I}}^n \frac{(wp_i + (\mathfrak{I} - w)q_i)p_i^T}{r_i^{\mathfrak{I} - \alpha}} \\ &= \lambda \sum_{i=\mathfrak{I}}^n \frac{((\mathfrak{I} - w)p_i + wq_i)^\gamma}{r_i^{\mathfrak{I} - \alpha}} + (\mathfrak{I} - \lambda) \sum_{i=\mathfrak{I}}^n \frac{(wp_i + (\mathfrak{I} - w)q_i)^\gamma}{r_i^{\mathfrak{I} - \alpha}} + \sum_{i=\mathfrak{I}}^n \frac{(p_i^T)^\gamma}{r_i^{\mathfrak{I} - \alpha}},\end{aligned}$$

و اثبات قضیه کامل می‌شود.

فرع ۱. از ارتباط  $\mathcal{J}_\alpha^R(P, Q; w, \lambda)$  و  $\mathcal{J}_\alpha^R(P, Q, \lambda)$  به رابطه زیر می‌رسیم:

$$\mathcal{J}_\alpha^R(P, Q; w, \lambda) = \mathcal{J}_\alpha^R((1-w)P + wQ : wP + (1-w)Q; \lambda).$$

قضیه ۷. اگر  $X_1$  و  $X_2$  دو متغیر تصادفی گسسته با توابع جرم احتمال به ترتیب  $P$  و  $Q$  باشند. آنگاه

$$\mathcal{J}_\alpha^R(P, Q; w, \lambda) = \mathcal{J}_\alpha^R((1-w)P + wQ : wP + (1-w)Q; \lambda), \quad \text{الف-}$$

$$-\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} \mathcal{J}_\alpha^R(P, Q; w, \lambda) = D_\alpha^R((1-w)P + wQ : wP + (1-w)Q), \quad \text{ب-}$$

$$-\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial w^2} \mathcal{J}_\alpha^R(P, Q; w, \lambda) = D_\alpha^R((1-\lambda)P + \lambda Q : \lambda P + (1-\lambda)Q) - D_\alpha^R(P : Q) \quad \text{ج-}$$

برهان: اثبات رابطه (الف) با توجه به تعاریف کمیت‌های  $\mathcal{J}_\alpha^R(P, Q; w, \lambda)$  و  $\mathcal{J}_\alpha^R(P, Q, \lambda)$  به راحتی نتیجه می‌شود. برای اثبات قسمت (ب) با توجه به قضیه ۴ و نتیجه ۱، داریم:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} \mathcal{J}_\alpha^R(P, Q; w, \lambda) &= -\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} \mathcal{J}_\alpha^R((1-w)P + wQ, wQ + (1-w)P) \\ &= D_\alpha^R((1-w)P + wQ : wP + (1-w)Q), \end{aligned}$$

همچنین با توجه به نتیجه ۱ داریم:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial w^2} \mathcal{J}_\alpha^R(P, Q; w, \lambda) &= \\ -\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial w^2} \mathcal{J}_\alpha^R((1-w)P + wQ, wQ + (1-w)P; \lambda) &= \\ D_\alpha^R((1-\lambda)P + \lambda Q : \lambda P + (1-\lambda)Q) - D_\alpha^R(P : Q), \end{aligned}$$

و اثبات قسمت (ج) کامل می‌شود.

## ۵ کاربرد در پردازش تصویر

در این بخش، دو کاربرد برای اندازه واگرایی  $\chi_\alpha^2(P, Q)$  در زمینه ارزیابی کیفیت تصویر ارائه می‌شود. علاوه بر این، نتایج را با عملکرد نسبت سیگنال به نویز پیک<sup>۱</sup> (PSNR) که یک معیار شناخته شده در ارزیابی کیفیت تصاویر است، مقایسه می‌شود (گنزالز، ۲۰۰۹).

### ۵.۱ تصویر دریاچه

شکل ۲ تصویر اصلی یک دریاچه را نشان می‌دهد که شامل یک شبکه  $512 \times 512$  پیکسل است. هر پیکسل در این تصویر دارای سطح خاکستری در محدوده  $[0, 1]$  است، به طوری که مقدار ۰ نمایانگر رنگ سیاه و مقدار ۱ نمایانگر رنگ سفید است. این تصاویر به طور معمول برای تحلیل‌های پردازش تصویر و ارزیابی تکنیک‌های مختلف اصلاح تصویر مورد استفاده قرار می‌گیرند. تصویر اصلی با نام  $X$  همراه با سه نسخه تعدیل شده آن نمایش داده شده است. هر یک از این نسخه‌ها تغییراتی در ویژگی‌های تصویر اصلی اعمال می‌کند تا تأثیرات مختلف فرایندهای پردازش تصویر را نشان دهد و به صورت

- نسخه  $Y = 0.4X + 0.3$ ,

- نسخه  $Z = 0.5X$ ,

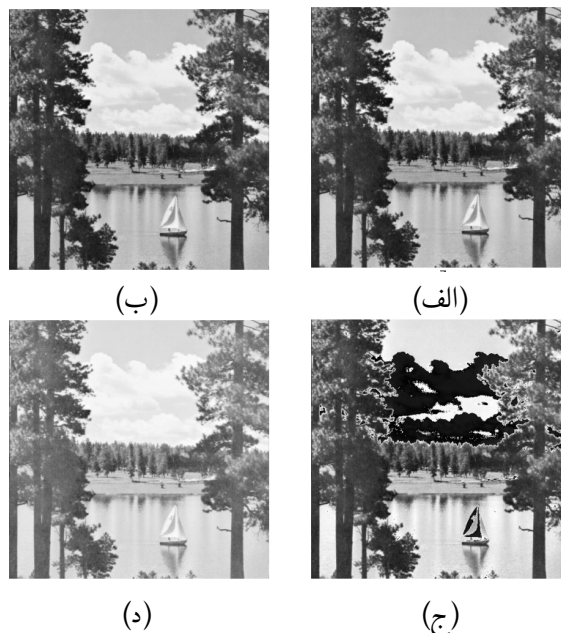
- نسخه  $W = 5\sqrt{X}$ .

تعریف می‌شوند. برای پیاده‌سازی این تغییرات، از بسته OpenCV در پایتون استفاده شده است که ابزارهای جامعی برای پردازش تصویر ارائه می‌دهد (کیلر و برادسکی، ۲۰۱۶؛ وود و گونزالس، ۲۰۰۱). هیستوگرام‌های استخراج شده برای تصاویر  $X, Y, Z, W$  در شکل ۳ ترسیم شده‌اند. از شکل‌های ۲ و ۳ می‌توان دید که بالاترین درجه شباهت ابتدا مربوط به  $Y$  و سپس به  $W$  است، در حالی که  $Z$  بالاترین درجه واگرایی را از تصویر اصلی  $X$  دارد. در نهایت، با محاسبه اندازه واگرایی  $\chi_\alpha^2(P, Q)$  و نسبت سیگنال به نویز پیک (PSNR) بین هیستوگرام‌های نرمال شده تصویر اصلی دریاچه و هر یک از تصاویر تعدیل شده، برای مقادیر انتخابی  $\alpha = 0.5, 1, 2, 3$  مقایسه می‌کنیم. مقدار PSNR یک معیار رایج برای ارزیابی کیفیت تصویر بازسازی شده یا فشرده شده در مقایسه با تصویر اصلی است. این معیار به واحد دسی بل (dB) بیان می‌شود و به صورت  $PSNR = 20 \log_{10} \left( \frac{MAX}{\sqrt{MSE}} \right)$  محاسبه می‌شود، که در آن MSE خطای میانگین مربعات است که تفاوت میانگین مربعات بین مقادیر پیکسل‌های تصویر اصلی  $I$  و تصویر تعدیل شده  $I^*$  را اندازه‌گیری می‌کند و به صورت

$$MSE = \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n [I(i, j) - I^*(i, j)]^2$$

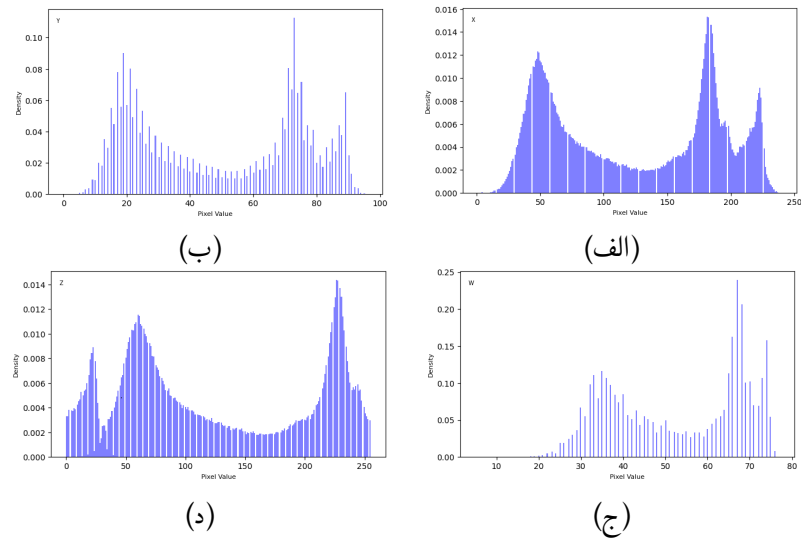
<sup>1</sup>Peak Signal-to-Noise Ratio





شکل ۲. تصویر اصلی دریاچه تصویر  $X$  (الف)، و سه نسخه تعدیل شده آن تصویر  $Y$  (ب)، تصویر  $Z$  (ج) و تصویر  $W$  (د).

تعریف می شود. علاوه بر این،  $MAX$  حداکثر مقدار پیکسل ممکن تصویر است (به عنوان مثال، ۲۵۵ برای تصاویر ۸ بیتی) و  $n$  و  $m$  ابعاد تصاویر هستند.  $PSNR$  بالاتر نشان دهنده شباهت بیشتر بین تصویر تعدیل شده و تصویر اصلی است. مقادیر بالای ۳۰ دسی بل معمولاً کیفیت خوبی برای فشرده سازی را نشان می دهند. برعکس،  $PSNR$  پایین تر نشان دهنده تفاوت های قابل توجه بین تصویر اصلی و تصویر تعدیل شده است، به طوری که مقادیر زیر ۲۰ دسی بل اغلب کیفیت پایین را نشان می دهند. مقادیر  $PSNR$  بین ۲۰ دسی بل و ۳۰ دسی بل بسته به زمینه و کاربرد خاص می توانند قابل قبول باشند (اسکیسیگولا و فیش، ۱۹۹۵؛ گنزالز، ۲۰۰۹). در جدول ۱، اندازه واگرایی کای-دو تعمیم یافته گسسته و کمیت  $PSNR$  بین تصویر اصلی و تصاویر نویزی  $Y$ ،  $Z$  و  $W$  ارائه شده اند. اندازه واگرایی کای دو تعمیم یافته برای  $\alpha$  های مختلف (۰٫۵،  $\alpha = ۰٫۸$ ،  $\alpha = ۱$ ،  $\alpha = ۲$  و  $\alpha = ۳$ ) محاسبه شده است. با توجه به نتایج این جدول دیده می شود که با افزایش  $\alpha$ ، مقدار واگرایی به طور چشمگیری کاهش می یابد، که این کاهش برای تمامی تصاویر نویزی قابل مشاهده است، (شکل ۴). این امر نشان دهنده همگرایی بیشتر توزیع پیکسل ها با افزایش  $\alpha$  است. از سوی دیگر، کمیت  $PSNR$  که معیاری برای اندازه گیری کیفیت بازسازی تصویر است، نشان می دهد که تصویر نویزی  $Y$  با  $PSNR$  برابر با ۲۸٫۰۲۷۴ dB بالاترین کیفیت را در مقایسه با تصاویر  $Z$  و  $W$  دارد. تصاویر  $Z$  و  $W$  نیز به ترتیب  $PSNR$  برابر با ۲۷٫۱۲۰۸ dB و ۲۷٫۸۷۳۱ dB دارند. این نتایج نشان می دهند که

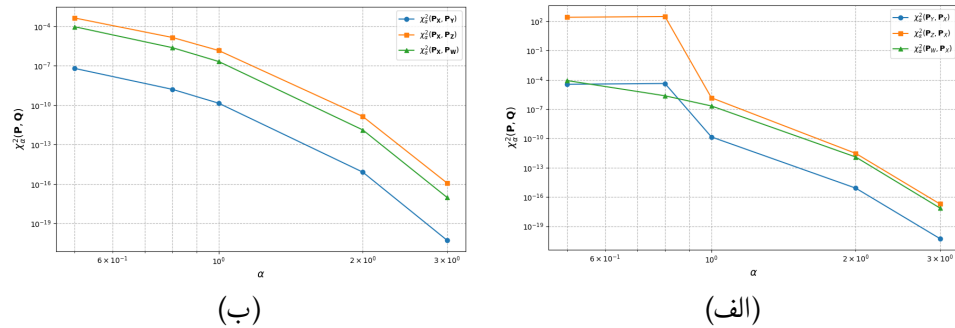


شکل ۳. هیستوگرام‌های تصویر اصلی دریاچه، یعنی تصویر  $X$  (الف)، به همراه سه نسخه تعدیل شده آن: تصویر  $Y$  (ب)، تصویر  $Z$  (ج) و تصویر  $W$  (د).

جدول ۱. اندازه واگرایی کای-دو تعمیم یافته گسسته و کمیت PSNR بین تصویر اصلی و حالت‌های نویزی

| $\alpha$                                    |                        |                        |                       |                       |                       |
|---------------------------------------------|------------------------|------------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| ۳                                           | ۲                      | ۱                      | ۰.۸                   | ۰.۵                   | $\chi^2_\alpha$       |
| $5.33 \times 10^{-21}$                      | $8.12 \times 10^{-16}$ | $1.42 \times 10^{-10}$ | $1.62 \times 10^{-9}$ | $6.34 \times 10^{-8}$ | $(P_X, P_Y)$          |
| $1.21 \times 10^{-16}$                      | $1.39 \times 10^{-11}$ | $1.45 \times 10^{-6}$  | $1.43 \times 10^{-5}$ | $4.33 \times 10^{-4}$ | $(P_X, P_Z)$          |
| $9.70 \times 10^{-18}$                      | $1.32 \times 10^{-12}$ | $2.12 \times 10^{-7}$  | $2.40 \times 10^{-6}$ | $9.34 \times 10^{-5}$ | $(P_X, P_W)$          |
| $5.36 \times 10^{-21}$                      | $8.12 \times 10^{-16}$ | $1.42 \times 10^{-10}$ | $4.23 \times 10^{-5}$ | $3.53 \times 10^{-5}$ | $(P_Y, P_X)$          |
| $1.90 \times 10^{-17}$                      | $2.95 \times 10^{-12}$ | $1.45 \times 10^{-6}$  | $3.08 \times 10^{-2}$ | $2.57 \times 10^{-2}$ | $(P_Z, P_X)$          |
| $7.32 \times 10^{-18}$                      | $1.25 \times 10^{-12}$ | $2.12 \times 10^{-7}$  | $2.33 \times 10^{-6}$ | $8.40 \times 10^{-5}$ | $(P_W, P_X)$          |
| کمیت PSNR بین تصویر اصلی و تصویر نویزی (dB) |                        |                        |                       |                       |                       |
| ۲۸۰۲۷۴                                      |                        |                        |                       |                       | $X \leftrightarrow Y$ |
| ۲۷۱۲۰۸                                      |                        |                        |                       |                       | $X \leftrightarrow Z$ |
| ۲۷۸۷۳۱                                      |                        |                        |                       |                       | $X \leftrightarrow W$ |

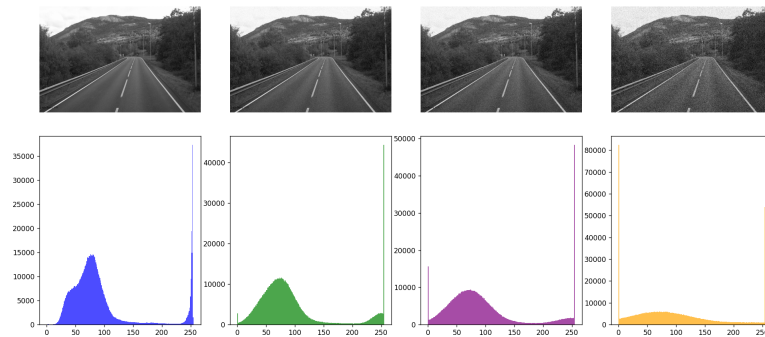
تصویر  $Y$  کمترین میزان نویز را دارد و کیفیت بازسازی بالاتری نسبت به تصاویر  $Z$  و  $W$  دارد. بنابراین، PSNR و واگرایی کای-دو تعمیم یافته هر دو به وضوح نشان می‌دهند که تصویر  $Y$  نزدیک‌ترین تصویر به تصویر اصلی است و تصویر  $Z$  دارای بیشترین انحراف است. اندازه واگرایی کای-دو تعمیم یافته عملکردی مشابه PSNR دارد و می‌تواند به عنوان یک معیار جایگزین به کار برود.



شکل ۴. نمودار مقدار واگرایی کای-دو تعمیم‌یافته گسسته بین تصاویر اصلی (الف) و نویزی (ب).

## ۵.۲ تصویر جاده‌ای در نروژ

در این زیربخش، یک کاربرد مرتبط با ارزیابی کیفیت تصویر با استفاده از معیار واگرایی اندازه  $\chi^2_\alpha$  برای تصویر ”جاده‌ای در نروژ“ ارائه شده است. در شکل ۵، تصویر اصلی خاکستری با ابعاد  $882 \times 1346$  و تصاویر نویزی ایجاد شده با نویز گاوسی در سطوح مختلف  $\sigma = 15$ ،  $\sigma = 25$ ، و  $\sigma = 50$  به همراه هیستوگرام‌های متناظر هر تصویر نمایش داده شده‌اند. برای یک تصویر خاکستری  $I(x, y)$  با ابعاد  $M \times N$ ، نسخه نویزی تصویر، که با  $I_{\text{noisy}}(x, y)$  نمایش داده می‌شود، از طریق افزودن نویز گاوسی  $\epsilon$  به هر پیکسل تصویر اصلی به صورت  $I_{\text{noisy}}(x, y) = I_{\text{original}}(x, y) + \epsilon$ ، ایجاد می‌شود، که در آن  $\epsilon \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ . مشابه زیربخش قبل، اندازه



شکل ۵. ردیف بالا: تصویر اصلی (سمت چپ) و تصاویر حاصل از افزودن نویز گاوسی با انحراف معیارهای ۱۵، ۲۵ و ۵۰، ردیف پایین: هیستوگرام‌های خاکستری متناظر با هر تصویر

جدول ۲. مقادیر واگرایی کای-دو تعمیم یافته  $\chi^2_\alpha$  و کمیت PSNR بین تصویر اصلی و تصاویر نویزی

| (dB) PSNR | $\alpha$               |                       |                       |                       |                       | $\sigma$ |
|-----------|------------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|----------|
|           | ۲۰                     | ۴                     | ۲                     | ۱                     | ۰/۱                   |          |
| ۲۹/۴۰۲۹   | $3.17 \times 10^{-29}$ | $2.19 \times 10^{-7}$ | $1.04 \times 10^{-4}$ | $4.32 \times 10^{-4}$ | $5.82 \times 10^{-1}$ | ۱۵       |
| ۲۸/۶۱۶۲   | $3.32 \times 10^{-29}$ | $2.34 \times 10^{-7}$ | $1.20 \times 10^{-4}$ | $5.74 \times 10^{-3}$ | $2.50 \times 10^0$    | ۲۵       |
| ۲۸/۱۳۳۶   | $3.47 \times 10^{-29}$ | $2.54 \times 10^{-7}$ | $1.57 \times 10^{-4}$ | $1.58 \times 10^{-2}$ | $4.76 \times 10^1$    | ۵۰       |

واگرایی  $\chi^2_\alpha(P, Q)$  و کمیت PSNR بین هیستوگرام‌های نرمال شده تصویر اصلی و هر یک از تصاویر تعدیل شده، برای مقادیر انتخابی  $\alpha = 20, \alpha = 4, \alpha = 2, \alpha = 0.1$  محاسبه و مقایسه شده است. نتایج این تحلیل در جدول ۲ ارائه شده است. مطابق نتایج جدول ۲، مشاهده می‌شود که با افزایش سطح نویز ( $\sigma$ )، مقادیر واگرایی  $\chi^2_\alpha$  در حالت‌های مختلف  $\alpha$  به طور کلی افزایش یافته است، به ویژه برای مقادیر کوچک‌تر  $\alpha$  مانند  $\alpha = 0.1$  و  $\alpha = 1$ . این موضوع بیانگر آن است که اندازه واگرایی  $\chi^2_\alpha$  بین تصویر اصلی و تصاویر نویزی با شدت نویز بیشتر افزایش یافته است. در مقابل، برای مقادیر بزرگ‌تر  $\alpha$  (مانند  $\alpha = 20$ )، مشاهده می‌شود که مقدار واگرایی تقریباً ثابت و بسیار کوچک باقی مانده است که نشان می‌دهد واگرایی برای  $\alpha$ های بزرگ حساسیت کمتری به تغییرات نویز دارد. از سوی دیگر، مشاهده می‌شود که مقادیر PSNR با افزایش شدت نویز کاهش یافته‌اند، که این رفتار نیز مطابق انتظار بوده و افت کیفیت تصویر نویزی نسبت به تصویر اصلی را نشان می‌دهد. بنابراین، روند تخریب کیفیت تصویر هم از دید واگرایی  $\chi^2_\alpha$  و هم از دید PSNR تأیید شده است.

## ۶ بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله، چندین اندازه جدید اطلاع از نوع کای-دو در زمینه توزیع‌های گسسته معرفی و مورد بررسی قرار گرفته‌اند. ابتدا، اندازه‌های واگرایی کای-دو تعمیم یافته گسسته و واگرایی نسبی  $\chi^2_\alpha$  معرفی و برای توزیع‌های شناخته شده و پرکاربرد در شاخه‌های نظریه کدگذاری و ترمودینامیک از قبیل توزیع‌های اسکورت و اسکورت تعمیم یافته مطالعه محاسبه شده و یک مثال در این زمینه در مورد توزیع برنولی بررسی شده است. همچنین، اندازه اطلاع جنسن- $\chi^2_\alpha$  معرفی شده و نشان داده شده است که این اندازه را می‌توان به صورت ترکیب محدب از اندازه‌های واگرایی نسبی  $\chi^2_\alpha$  گسسته بیان کرد. رابطه‌ای مستقیم میان مشتق مرتبه دوم اندازه واگرایی جنسن- $\chi^2_\alpha$  و واگرایی نسبی  $\chi^2_\alpha$  گسسته ارائه شده است. علاوه بر این، تعمیمی از اندازه واگرایی جنسن- $\chi^2_\alpha$  برای حالت  $n + 1$  متغیر تصادفی پیشنهاد شده است. معیار واگرایی جنسن- $\chi^2_\alpha(w, \lambda)$  به عنوان تعمیمی از اندازه اطلاع جنسن- $\chi^2_\alpha$  معرفی و برخی ویژگی‌های مهم آن بررسی شده‌اند. در پایان، دو کاربرد از اندازه واگرایی  $\chi^2_\alpha(P, Q)$  در ارزیابی کیفیت تصویر ارائه شده است. نتایج به دست آمده با عملکرد معیار شناخته شده نسبت سیگنال به نویز پیک (PSNR) مقایسه شده‌اند، که در آن اثربخشی اندازه واگرایی  $\chi^2_\alpha(P, Q)$  نسبت به یک استاندارد معتبر بررسی شده است. نشان داده شده است که اندازه واگرایی کای-دو تعمیم یافته عملکردی مشابه PSNR دارد و می‌تواند به عنوان یک معیار جایگزین به کار گرفته شود.

## تقدیر و تشکر

نویسندگان مراتب سپاس و قدردانی خود را از سردبیر محترم، داوران و ویراستار گرامی که پیشنهادهای ارزشمندشان موجب ارتقای کیفیت مقاله گردید، اعلام می‌دارند.

## مراجع

خوارزمی، ا. و علیزاده، م. (۱۳۹۹)، اندازه‌های اطلاع جنسن-فیشر و جنسن- $\chi^2$  برای توزیع‌های آمیخته متناهی، مجله مدل‌سازی پیشرفته ریاضی، ۱۱، ۱-۱۵.

Ahrari, V. and Habibirad, A. (2019), Quantile Based Tsallis Residual Entropy and its Divergence Measure *Journal of Statistical Sciences*, **12**(2), 295-321.

Anjali, and Gupta, A. (2025), A Novel Shannon Entropy-Based Backward Cloud Model and Cloud K-Means Clustering, *The Journal of Supercomputing*, **81**(1), 65.

Basu, A., Harris, I. R., Hjort, N. L. and Jones, M. C. (1998), Robust and Efficient Estimation by Minimizing a Density Power Divergence, *Biometrika*, **85**, 549-559.

Bercher, J. F. (2009), Source Coding with Escort Distributions and Rényi Entropy Bounds, *Physics Letters A*, **36**, 3235-3238.

Bercher, J. F. (2013), Some Properties of Generalized Fisher Information in the Context of Nonextensive Thermostatistics, *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, **392**, 3140-3154.

Bruni, V., Rossi, E. and Vitulano, D. (2013), Jensen-Shannon Divergence for Visual Quality Assessment, *Signal, Image and Video Processing*, **7**, 411-421.

Gray, R. M. (2011), *Entropy and Information Theory*, Springer Science & Business Media, New York.

Gonzalez, R. C. (2009), *Digital Image Processing*, Prentice-Hall, New York.

- Kaehler, A. and Bradski, G. (2016), *Learning OpenCV 3: Computer Vision in C++ with the OpenCV Library*, O'Reilly Media, Sebastopol.
- Kharazmi, O. and Balakrishnan, N. (2021a), Jensen-Information Generating Function and Its Connections to Some Well-Known Information Measures, *Statistics & Probability Letters*, **170**, 108995.
- Kharazmi, O., Balakrishnan, N. and Ozonur, D. (2023a), Jensen-Discrete Information Generating Function with an Application to Image Processing. *Soft Computing*, **27**, 4543-4552.
- Kharazmi, O., Contreras-Reyes, J. E. and Balakrishnan, N. (2023b), Jensen-Fisher Information and Jensen-Shannon Entropy Measures Based on Complementary Discrete Distributions with an Application to Conway's Game of Life, *Physica D*, **453**, 133822.
- Kharazmi, O., Contreras-Reyes, J. E. and Balakrishnan, N. (2023c), Optimal Information, Jensen-RIG Function and  $\alpha$ -Onicescu's Correlation Coefficient in Terms of Information Generating Functions, *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, **609**, 128362.
- Kharazmi, O. and Balakrishnan, N. (2024a), On Jensen- $\chi_2^\alpha$  Divergence Measure, *Probability in the Engineering and Informational Sciences*, **38**, 403-427.
- Melbourne, J., Talukdar, S., Bhaban, S., Madiman, M. and Salapaka, M. V. (2022), The Differential Entropy of Mixtures: New Bounds and Applications, *IEEE Transactions on Information Theory*, **68**, 2123-2146.
- Navarro, J., Buono, F. and Arevalillo, J. M. (2023), A New Separation Index and Classification Techniques Based on Shannon Entropy, *Methodology and Computing in Applied Probability*, **25**(4), 78.
- Nielsen, F. and Nock, R. (2013), On the Chi Square and Higher-Order Chi Distances for Approximating  $f$ -Divergences, *IEEE Signal Processing Letters*, **21**, 10-13.

- Eskicioglu, A. M. and Fisher, P. S. (1995), Image Quality Measures and Their Performance, *IEEE Transactions on Communications*, **43**, 2959-2965.
- Sanei Tabass, M., and Mohtashami Borzadaran, G. (2017), The Generalization of Maximum Entropy Principle for Generalized Information Measures, *Journal of Statistical Sciences*, **11**(1), 101-118.
- Shannon, C. E. (1948), A Mathematical Theory of Communication. *Bell System Technical Journal*, **27**, 379-423.
- Steele, J. M. (2004), *The Cauchy-Schwarz Master Class: An Introduction to the Art of Mathematical Inequalities*, Cambridge University Press, Cambridge.
- Sourati, J., Gholipour, A., Dy, J. G., Tomas-Fernandez, X., Kurugol, S. & Warfield, S. K. (2019), Intelligent Labeling Based on Fisher Information for Medical Image Segmentation Using Deep Learning, *IEEE Transactions on Medical Imaging*, **38**(11), 2642-2653.
- Wang, S. and Fan, J. (2024), Image Thresholding Method Based on Tsallis Entropy Correlation, *Multimedia Tools and Applications*, 1-37.
- Wang, N., Zhang, H., Kong, X. and Xu, D. (2025), Explicit Entropy Error Bound for Compressive DOA Estimation in Sensor Array, *Digital Signal Processing*, **156**, 104785.
- Woods, R. E. and Gonzalez, R. C. (2001), *Digital Image Processing* (3rd ed.), Computer Science E-Books.