



Reliability Estimation of the Stress-Strength Model in Coherent Systems Based on Exponential Distribution

Rostami, A. , Khanjari Sadegh, M. , Khorashadizadeh, M. 

Department of Statistics, University of Birjand, Birjand, Iran.

Corresponding author: A. Rostami, Alirostami@birjand.ac.ir

Received: 16/1/2023 **Revised:** 3/6/2023 **Accepted and Published Online:** 6/6/2023.

Introduction

A system is exposed to one or more stresses and remains active if the strength of the system is greater than the stress or stresses. Each system component is sometimes subjected to a particular stress at the component level. If the system is exposed to stresses, the probability of the system remaining active has been considered as the reliability of the stress-strength model. In this article, the reliability of the stress-strength model is studied in a coherent system at the component level. Consider a coherent system including n components. The components have random strengths $Y_1, \dots, Y_n$, and each component is subjected to random stresses $X_1, \dots, X_n$, respectively. All stresses and strengths are independent. A state variable Z_i is defined for each component so that $Z_i = 1$, whenever $X_i < Y_i$ and $Z_i = 0$, whenever $X_i \geq Y_i$. The stress-strength model's reliability has been presented using minimal path sets. The reliabilities of the stress-strength model of n -component series, n -component parallel and radar systems have been obtained.

Material and Methods

In this article, it is assumed that each of the random stresses and each of the random strengths has an Exponential distribution with its unknown scale parameter. The stress-strength model's reliability is obtained based on the Exponential distribution. In each of the r -component series, r -component parallel and radar systems, the reliability of the stress-strength model is presented. The methods of maximum likelihood and uniformly minimum variance unbiased estimations have obtained the estimations of this reliability. Also, the Bayes estimation of this reliability has been obtained under

the quadratic loss function.

Results and Discussion

In this article, simulation studies have been carried out. In the γ -component series, γ -component parallel and radar systems, different values are considered for the parameters of Exponential distributions. The value of stress-strength reliability has been obtained for each combination of the parameters. Also, for each combination of parameters, different sample sizes are considered. For each combination of parameters, samples were produced to the considered sizes. For stress-strength reliability, the estimation values were calculated. In the γ -component series and radar systems, the maximum likelihood estimation and the γ -component parallel system, the uniformly minimum variance unbiased estimation, have better results, respectively. It can also be seen that the estimation values of the stress-strength reliability in the series system are smaller than in the parallel system. In the real data sets, the values of the mentioned estimations are calculated for the reliability of the stress-strength model of γ -component series, γ -component parallel and radar systems. Like the results obtained in the simulations, the values of the stress-strength reliability in the series system are smaller than the radar system and, in the radar system, are smaller than the parallel system.

Conclusion

In case of the stress is at the component level, this study specifies the method of determining and estimating the reliability of the stress-strength model for all coherent systems. Further research can be done for other coherent systems based on the different distributions and other estimation methods.

Keywords: Reliability, Stress-Strength, Maximum Likelihood Estimation, Uniformly Minimum Variance Unbiased Estimation, Bayes Estimation.

Mathematics Subject Classification (2010): 62N02, 62N05.



©The Author(s). The Publisher is Iranian Statistical Society.

This is an open access article distributed under the terms and conditions of [\(CC BY-NC 4.0\)](https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/)

برآورد قابلیت اعتماد تنش-مقاومت در سیستم‌های منسجم بر اساس توزیع نمایی

علی رستمی، محمد خنجری صادق، محمد خراشادی‌زاده

گروه آمار، دانشگاه بیرجند

نویسنده مسئول: علی رستمی، Alirostami@birjand.ac.ir

تاریخ دریافت: ۱۴۰۱/۱۰/۲۶ تاریخ بازنگری: ۱۴۰۲/۳/۱۳ تاریخ پذیرش و انتشار: ۱۴۰۲/۳/۱۶

چکیده: در این مقاله، قابلیت اعتماد تنش-مقاومت یک سیستم منسجم در حالت تنش در سطح مولفه در نظر گرفته شده است. سیستم‌های منسجم سری، موازی و رادار مورد بررسی قرار می‌گیرند. برای سیستم‌های ۲- مولفه‌ای سری یا موازی و سیستم رادار، این قابلیت اعتماد بر اساس توزیع نمایی و به روش‌های ماکسیمم درستنمایی، ناریب بطور یکنواخت با کمترین واریانس و بیز، برآورد می‌شود. همچنین برای بررسی عملکرد برآوردها مطالعات شبیه‌سازی انجام شده‌اند و داده‌های واقعی تحلیل می‌شوند. **واژه‌های کلیدی:** قابلیت اعتماد، تنش-مقاومت، برآورد ماکسیمم درستنمایی، برآورد ناریب بطور یکنواخت با کمترین واریانس، برآورد بیزی. کد موضوع بندی ریاضی (۲۰۱۰): 62N02, 62N05.

۱ مقدمه

در زمینه‌های قابلیت اعتماد، مدل‌های تنش-مقاومت مطالعه می‌شوند. یک مولفه یا سیستم در معرض یک یا چند تنش قرار می‌گیرد و در صورتی که مقاومت مولفه یا سیستم بیشتر از تنش یا تنش‌ها باشد، فعال باقی می‌ماند. اولین بار **بیرنهام (۱۹۵۶)** تنش را متغیری تصادفی مانند X و مقاومت را متغیری تصادفی مانند Y در نظر گرفت و پارامتر $R = P(X < Y)$ را بعنوان قابلیت اعتماد معرفی کرد. برخی از نویسندگان R را بر اساس انواع توزیع‌های احتمال و با استفاده از روش‌های نمونه‌گیری مختلف برآورد کرده‌اند. **کاتس و همکاران (۲۰۰۳)** مروری بر روند این مدل تا آن زمان ارائه کرده‌اند. برای نمونه **سنجری فارسی‌پور و ریاحی (۱۳۹۲)**، **شادریخ و یعقوب‌زاده شهرستانی (۱۳۹۸)**،



ژوانوویچ (۲۰۲۱)، الامری و همکاران (۲۰۲۱)، همتی و همکاران (۲۰۲۲) و حسن و همکاران (۲۰۲۳) را ببینید. برای یک سیستم با بیش از یک مولفه، باتاچاریا و جانسون (۱۹۷۴) مدل تنش-مقاومت چندمولفه‌ای را معرفی کردند. این سیستم n مولفه دارد که مولفه‌ها مقاومت‌های مستقل و هم‌توزیع دارند و یک تنش مشترک که مستقل از مقاومت‌ها است، به هر کدام از مولفه‌ها وارد می‌شود. این سیستم فعال است هرگاه حداقل k ($1 \leq k \leq n$) مولفه آن سالم باشند. آنها احتمال فعال بودن سیستم را به عنوان قابلیت اعتماد مدل تنش-مقاومت چندمولفه‌ای تعریف کردند. به این مدل، مدل تنش-مقاومت k از n از نوع سالم گفته می‌شود. بسیاری از پژوهشگران مدل تنش-مقاومت فوق را مطالعه کرده‌اند که می‌توان به شاوکی و خان (۲۰۲۲)، جانا و برا (۲۰۲۲)، ژانگ و همکاران (۲۰۲۲)، یوسف و همکاران (۲۰۲۲)، لیو و همکاران (۲۰۲۲) و کهن‌سال و همکاران (۲۰۲۳) اشاره کرد. برخی محققان قابلیت اعتماد سیستم‌های منسجم را بررسی کرده‌اند. دیوانجی و رائو (۲۰۰۱) قابلیت اعتماد تنش-مقاومت را برای یک سیستم منسجم در نظر گرفتند و دو حالت را مطالعه کردند. حالت اول تنش در سطح سیستم است، یعنی مولفه‌های سیستم تحت یک تنش مشترک قرار می‌گیرند و حالت دوم تنش در سطح مولفه است، یعنی هر مولفه تحت تنش خاصی قرار می‌گیرد. ارلماز (۲۰۱۰) در حالت تنش در سطح سیستم، یک عبارت برای قابلیت اعتماد تنش-مقاومت یک سیستم منسجم، بصورت ترکیبی خطی از قابلیت اعتماد سیستم‌های سری بدست آورد. باتاچاریا و رویچاودھاری (۲۰۱۳) در حالت‌های تنش در سطح سیستم و تنش در سطح مولفه، قابلیت اعتماد تنش-مقاومت یک سیستم را بصورت تابعی از قابلیت اعتماد تنش-مقاومت جداگانه مولفه‌های آن بیان کردند.

توزیع طول عمر نمایی توصیف خوبی از طول عمر یک واحد ارایه می‌دهد که با گذشت زمان پیر نمی‌شود، بعبارت دیگر ویژگی فقدان حافظه دارد. توزیع نمایی تنها توزیع پیوسته‌ای است که این ویژگی را دارد. همچنین توزیع نمایی تنها توزیعی است که تابع نرخ شکست آن ثابت است. از توزیع نمایی بطور مثال برای مدارهای الکترونیکی که شامل چند مولفه هستند استفاده می‌شود. تابع چگالی احتمال، تابع توزیع و تابع نرخ شکست توزیع نمایی با پارامتر مقیاس α ، $\text{Exp}(\alpha)$ ، به ترتیب بصورت

$$f_X(x) = \alpha e^{-\alpha x}, \quad F_X(x) = 1 - e^{-\alpha x}, \quad r_X(x) = \alpha, \quad x > 0, \quad \alpha > 0,$$

هستند. در این مقاله، قابلیت اعتماد تنش-مقاومت یک سیستم منسجم در حالت تنش در سطح مولفه که در آن همه تنش‌ها و مقاومت‌ها مستقل هستند، بررسی می‌شود. در بخش ۲، قابلیت اعتماد تنش-مقاومت یک سیستم منسجم را در حالت تنش در سطح مولفه مطالعه می‌کنیم. در بخش ۳، سیستم‌های ۲-مولفه‌ای سری، ۲-مولفه‌ای موازی و رادار را در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم متغیرهای تصادفی تنش‌ها و مقاومت‌ها توزیع نمایی با پارامترهای مقیاس مختلف داشته باشند. برآورد ماکسیمم درستنمایی^۱ (MLE)، برآورد نااریب بطور یکنواخت با کمترین واریانس^۲ (UMVUE) و برآورد بیزی، قابلیت اعتماد تنش-مقاومت این سیستم‌ها به دست آورده می‌شود. در بخش ۴، برای

¹Maximum Likelihood Estimation

²Uniformly Minimum Variance Unbiased Estimation

بررسی عملکرد این مدل‌ها، مطالعات شبیه‌سازی و تحلیل داده‌های واقعی انجام می‌شوند.

۲ قابلیت اعتماد تنش-مقاومت یک سیستم منسجم

یک سیستم منسجم شامل n مولفه را در نظر بگیرید، که در آن مولفه‌ها، دارای مقاومت‌های $Y_1, \dots, Y_n$ هستند. برای $j = 1, \dots, n$ ، Z_j ، j امین مولفه در معرض تنش X_j ، قرار دارد. فرض کنید همه تنش‌ها و مقاومت‌ها، متغیرهای تصادفی مستقل هستند. j امین مولفه خراب است هرگاه $X_j \geq Y_j$. متغیر وضعیت j امین مولفه بصورت

$$Z_j = \begin{cases} 1, & X_j < Y_j \\ 0, & X_j \geq Y_j \end{cases}$$

تعریف می‌شود. **باتاچاریا و رویچاودهاری (۲۰۱۳)**، قابلیت اعتماد تنش-مقاومت را در یک سیستم منسجم با مجموعه‌های مسیر مینیمال $P_1, \dots, P_r$ و با تنش‌ها و مقاومت‌های مستقل به صورت

$$h(\mathbf{p}) = \sum_{k=1}^r \prod_{j \in P_k} p_j - \sum_{k < k'} \prod_{j \in P_k \cup P_{k'}} p_j + \dots,$$

در نظر گرفتند، که در آن

$$p_j = P(Z_j = 1) = \int P(Z_j = 1 | X_j = x_j) dF_j(x_j) = \int P(Y_j > x_j) dF_j(x_j), \quad (1)$$

و F_j تابع توزیع X_j است. جزییات سیستم‌های منسجم در **بارلو و پروسچان (۱۹۷۱)** ارائه شده است. برای یک سیستم سری با یک مجموعه مسیر مینیمال $P_1 = \{1, \dots, n\}$ داریم $P_1 = \prod_{j=1}^n p_j$ و در یک سیستم سری ۲-مولفه‌ای نتیجه می‌شود

$$R_S = h(\mathbf{p}) = p_1 p_2. \quad (2)$$

همچنین برای یک سیستم موازی با مجموعه‌های مسیر مینیمال $P_1 = \{1\}, \dots, P_n = \{n\}$ ، $h(\mathbf{p}) = 1 - \prod_{j=1}^n (1 - p_j)$ است و در یک سیستم موازی ۲-مولفه‌ای نتیجه می‌شود

$$R_P = h(\mathbf{p}) = p_1 + p_2 - p_1 p_2. \quad (3)$$

برای سیستم رادار با مجموعه‌های مسیر مینیمال $P_1 = \{1, 2\}$ و $P_2 = \{1, 3\}$ داریم

$$R_r = h(p) = p_1 p_2 + p_1 p_3 - \prod_{j=1}^3 p_j. \quad (4)$$

۳ برآوردهای R_P ، R_S و R_r

فرض کنید برای $j = 1, \dots, n$ ، متغیر تصادفی تنش X_j و متغیر تصادفی مقاومت Y_j مستقل و به ترتیب دارای توزیع‌های نمایی $\text{Exp}(\alpha_j)$ و $\text{Exp}(\beta_j)$ باشند. بنا بر (۱)، داریم

$$p_j = \int_0^\infty P(Y_j > x_j) f(x_j) dx_j = \int_0^\infty e^{-\beta_j x_j} \alpha_j e^{-\alpha_j x_j} dx_j = \frac{\alpha_j}{\alpha_j + \beta_j}.$$

رابطه (۲) برای یک سیستم سری $\frac{\alpha_j}{\alpha_j + \beta_j}$ و قابلیت اعتماد سیستم سری ۲-مولفه‌ای به صورت

$$R_S = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \beta_1} \times \frac{\alpha_2}{\alpha_2 + \beta_2}, \quad (5)$$

است. رابطه (۳) برای یک سیستم موازی $1 - \prod_{j=1}^n (1 - \frac{\alpha_j}{\alpha_j + \beta_j})$ و قابلیت اعتماد سیستم موازی ۲-مولفه‌ای به صورت

$$R_P = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \beta_1} + \frac{\alpha_2}{\alpha_2 + \beta_2} - \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \beta_1} \times \frac{\alpha_2}{\alpha_2 + \beta_2}, \quad (6)$$

است. بنا بر رابطه (۴) قابلیت اعتماد سیستم رادار عبارت است از

$$R_r = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \beta_1} \frac{\alpha_2}{\alpha_2 + \beta_2} + \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \beta_1} \frac{\alpha_3}{\alpha_3 + \beta_3} - \prod_{j=1}^3 \frac{\alpha_j}{\alpha_j + \beta_j}. \quad (7)$$

برآوردهای R_S : فرض کنید برای $j = 1, 2$ ، نمونه‌های تصادفی $x_j = (x_{j,1}, \dots, x_{j,n_j})$ و $y_j = (y_{j,1}, \dots, y_{j,m_j})$ مستقل و به ترتیب توزیع‌های $\text{Exp}(\beta_j)$ و $\text{Exp}(\alpha_j)$ داشته باشند. برآوردهای ماکسیم درست‌نمایی پارامترهای α_j و β_j به ترتیب بصورت

$$\hat{\alpha}_j = \frac{1}{\frac{1}{n_j} \sum_{i=1}^{n_j} x_{j,i}} = \frac{1}{\bar{x}_j}, \quad \hat{\beta}_j = \frac{1}{\frac{1}{m_j} \sum_{i=1}^{m_j} y_{j,i}} = \frac{1}{\bar{y}_j}, \quad j = 1, 2, \quad (8)$$

هستند. بنا بر پایایی MLE و از (۵)، MLE برای R_S برابر $\hat{R}_S^M = \prod_{j=1}^2 \frac{\bar{y}_j}{\bar{x}_j + \bar{y}_j}$ است.

لم ۱. فرض کنید آماره $M = (M_1, M_2)$ برای خانواده توزیع‌های $\{p_{(\theta_1, \theta_2)}, (\theta_1, \theta_2) \in \Theta\}$ که در آن $\Theta = \Theta_1 \times \Theta_2$ و $\theta_1 \in \Theta_1, \theta_2 \in \Theta_2$ ، بسنده کامل باشد و M_1 و M_2 مستقل و به ترتیب برای خانواده توزیع‌های $\{p_{\theta_1}, \theta_1 \in \Theta_1\}$ و $\{p_{\theta_2}, \theta_2 \in \Theta_2\}$ بسنده کامل باشند. در صورتی که برآوردهای $\hat{\theta}_1$ و $\hat{\theta}_2$ مستقل و به ترتیب UMVUE برای پارامترهای θ_1 و θ_2 باشند، آنگاه $\hat{\theta}_1 \hat{\theta}_2$ یک UMVUE برای $\theta_1 \theta_2$ است.

برهان: فرض کنید آماره‌های g_1 و g_2 مستقل و به ترتیب برای θ_1 و θ_2 نااریب باشند، آنگاه $g_1 g_2$ برای $\theta_1 \theta_2$ نااریب است و نتیجه می‌شود

$$E(g_1 g_2 | M) = E(g_1 | M) E(g_2 | M) = E(g_1 | M_1) E(g_2 | M_2) = \hat{\theta}_1 \hat{\theta}_2.$$

قضیه ۱. آماره بسنده کامل

$T = (T_{1,1}, T_{1,2}, T_{2,1}, T_{2,2}) = (\sum_{i=1}^{n_1} X_{1,i}, \sum_{i=1}^{m_1} Y_{1,i}, \sum_{i=1}^{n_2} X_{2,i}, \sum_{i=1}^{m_2} Y_{2,i})$ برای خانواده توزیع‌های $\{p_{(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2)}, (\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2) \in \Theta\}$ که در آن $\alpha_1 \in (0, \infty), \beta_1 \in (0, \infty), \alpha_2 \in (0, \infty), \beta_2 \in (0, \infty)$ و $\Theta = (0, \infty) \times (0, \infty) \times (0, \infty) \times (0, \infty)$ ، آماره $j = 1, 2$ ، بسنده کامل $(T_{j,1}, T_{j,2}) = (\sum_{i=1}^{n_j} X_{j,i}, \sum_{i=1}^{m_j} Y_{j,i})$ برای خانواده $\{p_{(\alpha_j, \beta_j)}, (\alpha_j, \beta_j) \in \Theta_j\}$ که در آن $\Theta_j = (0, \infty) \times (0, \infty)$ و $V_j = \frac{T_{j,1}}{T_{j,2}}$ را در نظر بگیرید. UMVUE برای p_j بصورت

$$\hat{p}_j^U = \begin{cases} Q(V_j, 1), & V_j \leq 1 \\ Q(V_j, \frac{1}{V_j}), & V_j > 1 \end{cases} \quad (۹)$$

است، که در آن

$$Q(V_j, a) = \int_0^a (1 - s_{j,1} V_j)^{m_j-1} (n_j - 1) (1 - s_{j,1})^{n_j-2} ds_{j,1}.$$

همچنین UMVUE برای R_S عبارت است از

$$\hat{R}_S^U = \prod_{j=1}^2 \hat{p}_j^U. \quad (۱۰)$$

برهان: اریلماز (۲۰۱۰) در بخش ۴، در یک سیستم سری با i مولفه و بر اساس توزیع نمایی، UMVUE برای $P(X < Y_{1:i}) = \frac{\alpha}{\alpha + i\beta}$ را به دست آورده است، که در آن $Y_{1:i}$ اولین مقاومت مرتب‌شده است. به ازای $i = 1$ ، UMVUE برای $p_j = \frac{\alpha_j}{\alpha_j + \beta_j}$ ، $j = 1, 2$ ، بصورت رابطه (۹) بدست می‌آید. همچنین بنا بر لم ۱، در صورتی که

۶۸ برآورد قابلیت اعتماد تنش-مقاومت در سیستم‌های منسجم

$M = T$ باشد، بدلیل استقلال $M_1 = T_1$ و $M_2 = T_2$ ، $M_2 = T_2$ و $M_1 = T_1$ برای R_S حاصل می‌شود.

لم ۲. نمونه‌های تصادفی مستقل $z_1 = (z_{1,1}, \dots, z_{1,k_1})$ و $z_2 = (z_{2,1}, \dots, z_{2,k_2})$ به ترتیب از توزیع‌های $f_{\theta_1}(z)$ و $f_{\theta_2}(z)$ را در نظر بگیرید. اگر $\hat{\theta}_1$ و $\hat{\theta}_2$ مستقل و تحت تابع زیان درجه دوم، به ترتیب برآوردهای بیزی θ_1 و θ_2 باشند، آنگاه $\hat{\theta}_1 \hat{\theta}_2$ برآورد بیزی $\theta_1 \theta_2$ است.

برهان: چون $\hat{\theta}_1$ و $\hat{\theta}_2$ مستقل هستند، نتیجه می‌شود

$$E(\theta_1 \theta_2 | z) = E(\theta_1 | z) E(\theta_2 | z) = E(\theta_1 | z_1) E(\theta_2 | z_2) = \hat{\theta}_1 \hat{\theta}_2.$$

قضیه ۲. فرض کنید برای $j = 1, 2$ ، پارامترهای α_j و β_j متغیرهای تصادفی مستقل و دارای توزیع‌های پیشین گاما به ترتیب با پارامترهای (μ_j, γ_j) و (ν_j, λ_j) باشند. تحت تابع زیان درجه دوم، برآورد بیزی p_j به صورت

$$\hat{p}_j^B = \frac{n_j + \mu_j}{n_j + \mu_j + m_j + \nu_j} \times \begin{cases} M_1 & |D_j| < 1 \\ M_{-1} & D_j \leq -1 \end{cases} \quad \text{اگر} \quad (11)$$

است، که در آن

$$\begin{aligned} M_1 &= G_j^{n_j + \mu_j} {}_2F_1(n_j + \mu_j + m_j + \nu_j, n_j + \mu_j + 1, n_j + \mu_j + m_j + \nu_j + 1; D_j), \\ M_{-1} &= G_j^{-(m_j + \nu_j)} {}_2F_1(n_j + \mu_j + m_j + \nu_j, m_j + \nu_j, n_j + \mu_j + m_j + \nu_j + 1; \frac{D_j}{1 - D_j}), \\ D_j &= 1 - G_j, G_j = \frac{A_j}{B_j}, B_j = m_j \bar{y}_j + \lambda_j, A_j = n_j \bar{x}_j + \gamma_j \end{aligned}$$

(آبراموویتز و استگان، ۱۹۷۲) است. همچنین برآورد بیزی R_S عبارت است از

$$\hat{R}_S^B = \prod_{j=1}^2 \hat{p}_j^B. \quad (12)$$

برهان: کاتس و همکاران (۲۰۰۳) برآورد بیزی $\frac{\alpha}{\alpha + \beta}$ را به دست آورده‌اند. در صورتی که $\mu^* = n_j + \mu_j$ ، $\nu^* = m_j + \nu_j$ ، $\gamma^* = A_j$ و $\lambda^* = B_j$ در نظر گرفته شوند، برآورد بیزی $p_j = \frac{\alpha_j}{\alpha_j + \beta_j}$ ، بصورت رابطه (۱۱) حاصل می‌شود. بنا بر لم ۲ و بدلیل استقلال نمونه‌های تصادفی $z_1 = (x_1, y_1)$ و $z_2 = (x_2, y_2)$ و استقلال $\hat{p}_1^B$ و $\hat{p}_2^B$ ، برآورد بیزی R_S بدست می‌آید.

برآوردهای R_P : بنابر رابطه (۸) و بر اساس ویژگی پایایی MLE، برآورد ماکسیمم درستنمایی R_P بصورت

$$\hat{R}_P^M = \sum_{j=1}^2 \frac{\bar{y}_j}{\bar{x}_j + \bar{y}_j} - \prod_{j=1}^2 \frac{\bar{y}_j}{\bar{x}_j + \bar{y}_j},$$

است. با استفاده از (۹) و (۱۰)، $UMVUE$ برای R_P برابر $\hat{R}_P^U = \sum_{j=1}^3 \hat{p}_j^U - \prod_{j=1}^3 \hat{p}_j^U$ است. با استفاده از (۱۱) و (۱۲)، برآورد بیزی R_P برابر $\hat{R}_P^B = \sum_{j=1}^3 \hat{p}_j^B - \prod_{j=1}^3 \hat{p}_j^B$ است. برآوردهای R_r : از (۸) و بر اساس ویژگی پایایی MLE، برآورد ماکسیمم درستنمایی R_r بصورت

$$\hat{R}_r^M = \frac{\bar{y}_1}{\bar{x}_1 + \bar{y}_1} \frac{\bar{y}_2}{\bar{x}_2 + \bar{y}_2} + \frac{\bar{y}_1}{\bar{x}_1 + \bar{y}_1} \frac{\bar{y}_3}{\bar{x}_3 + \bar{y}_3} - \prod_{j=1}^3 \frac{\bar{y}_j}{\bar{x}_j + \bar{y}_j},$$

است. برای برآورد $UMVUE$ برای R_r ، به ازای $j = 1, 2, 3$ ، $\hat{p}_j^U$ مشابه (۹) است. بنابراین $UMVUE$ برای R_r برابر $\hat{R}_r^U = \hat{p}_1^U \hat{p}_2^U + \hat{p}_1^U \hat{p}_3^U - \prod_{j=1}^3 \hat{p}_j^U$ است. به ازای $j = 1, 2, 3$ ، توزیع‌های پیشین α_j و β_j را مشابه قضیه ۲ در نظر بگیرید. بنابراین $\hat{p}_j^B$ مشابه (۱۱) است و برآورد بیزی R_r عبارت است از

$$\hat{R}_r^B = \hat{p}_1^B \hat{p}_2^B + \hat{p}_1^B \hat{p}_3^B - \prod_{j=1}^3 \hat{p}_j^B. \quad (13)$$

۴ مطالعه شبیه‌سازی

مطالعات شبیه‌سازی برای R_P ، R_S و R_r انجام می‌شوند. برای R_P و R_S ، به ازای $j = 1, 2$ ، مقادیری متفاوت برای پارامترهای α_j و β_j و مقدار $(\mu_j, \gamma_j, \nu_j, \lambda_j)$ برابر $(1, 1, 1, 1)$ در نظر گرفته شده‌اند. برای R_r به ازای $j = 1, 2, 3$ ، مقادیری متفاوت برای پارامترهای α_j و β_j و مقدار $(\mu_j, \gamma_j, \nu_j, \lambda_j)$ برابر $(1, 1, 1, 1)$ در نظر گرفته شده‌اند. نمونه‌هایی به حجم‌های $10, 20, 30, 40, 50$ با $n = n_1 = m_1 = n_2 = m_2 = 10000$ بار تکرار، از توزیع نمایی تولید شدند. از روابط (۵)، (۶) و (۷) مقادیر پارامترهای R_P ، R_S و R_r محاسبه شدند و برای آنها مقادیر $\hat{R}_P^M$ ، $\hat{R}_P^U$ ، $\hat{R}_P^B$ ، $\hat{R}_S^M$ ، $\hat{R}_S^U$ ، $\hat{R}_S^B$ ، $\hat{R}_r^M$ ، $\hat{R}_r^U$ و $\hat{R}_r^B$ بدست آمدند. همچنین ارببی و میانگین مربع خطا^۱ (MSE) برای برآوردها محاسبه شدند.

در جدول‌های ۱ و ۲، نتایج مربوط به R_S در سیستم سری آمده است. مشاهده می‌شود که با افزایش n ، روند قدرمطلق ارببی هر سه برآوردگر کاهش می‌یابد. در بیشتر موارد قدرمطلق ارببی $UMVUE$ کمتر از قدرمطلق ارببی MLE و قدرمطلق ارببی MLE کمتر از قدرمطلق ارببی برآورد بیزی (به ازای $(\mu_j, \gamma_j, \nu_j, \lambda_j) = (1, 1, 1, 1)$) است. همچنین با افزایش n ، MSE برای هر سه برآورد همواره کاهش می‌یابد. در نتیجه از موارد MSE برای MLE کمتر از MSE برای برآورد بیزی است و در نتیجه دیگر MSE برای برآورد بیزی کمتر از MSE برای MLE است. در بیشتر موارد MSE برای هر دو برآورد MLE و بیزی کمتر از MSE برای $UMVUE$ است. بنابراین در سیستم سری، با توجه به ارببی‌ها و MSEها، برآورد MLE نتایج بهتری دارد.

در جدول‌های ۳ و ۴، نتایج مربوط به R_P در سیستم موازی آمده است. مشاهده می‌شود که با افزایش n ،

¹Mean Squared Error

۷۰ برآورد قابلیت اعتماد تنش-مقاومت در سیستم‌های منسجم

روند قدر مطلق اریبی هر سه برآوردگر کاهشی است. در بیشتر موارد قدر مطلق اریبی UMVUE کمتر از MLE و MLE کمتر از برآورد بیزی است. همچنین با افزایش n ، MSE برای هر سه برآوردگر همواره کاهشی هستند. در موارد بیشتری MSE برای UMVUE کمتر از MSE برای دو برآورد دیگر است. بنابراین در سیستم موازی، با توجه به اریبی‌ها و MSE‌ها، برآورد UMVUE نتایج بهتری دارد. همچنین انتظار داریم مقادیر قابلیت اعتماد در سیستم سری کوچکتر از مقادیر متناظر آنها در سیستم موازی باشد، که این مطلب در جدول‌ها مشاهده می‌شود.

در جدول‌های ۵ و ۶، نتایج مربوط به R_r در سیستم رادار آمده است. مشاهده می‌شود که با افزایش n ، روند قدر مطلق اریبی هر سه برآوردگر کاهشی است. در بیشتر موارد قدر مطلق اریبی UMVUE کمتر از MLE و MLE کمتر از برآورد بیزی به ازای $(\mu_j, \gamma_j, \nu_j, \lambda_j) = (375, 1, 275, 1)$ است. همچنین با افزایش n ، MSE برای هر سه برآوردگر همواره کاهشی هستند. در موارد بیشتری MSE برای MLE کمتر از MSE برای دو برآورد دیگر است. در بیشتر موارد MSE برای هر دو برآورد MLE و بیزی کمتر از MSE برای UMVUE است. بنابراین در سیستم رادار، با توجه به اریبی‌ها و MSE‌ها، برآورد MLE نتایج بهتری دارد. همانگونه که در جدول‌های ۱ تا ۶ ملاحظه می‌شود، چون UMVUE برآوردگری نااریب است، قدر مطلق اریبی آن از دو برآوردگر دیگر کوچکتر است.

۵ تحلیل داده‌های واقعی

در این بخش مجموعه‌های داده برگرفته از رائو (۲۰۱۳)، میرجلیلی و همکاران (۲۰۱۶) و خان و خاتون (۲۰۱۹) تحلیل می‌شوند. مجموعه داده‌های اول طول عمر ترانزیستورها بر حسب هفته در یک آزمایش طول عمر تسریع‌یافته است و مجموعه داده‌های دوم زمان بین خرابی‌های متوالی تجهیزات تهویه مطبوع در هواپیمای بویینگ ۷۲۰ است. مجموعه داده‌های اول (X_1) : $\{3, 4, 5, 6, 7, 8, 8, 9, 9, 9, 10, 10, 11, 11, 11, 13, 13, 13, 13\}$. مجموعه داده‌های دوم (Y_1) : $\{12, 21, 26, 27, 29, 29, 48, 57, 59, 70, 74, 153, 326, 386\}$. مجموعه داده‌های سوم و چهارم، مقاومت‌های شکست یک نوع فیبر به ترتیب با طول‌های ۲۰ و ۱۰ میلیمتر هستند. مجموعه داده‌های سوم (X_2) : $\{46/71, 02/419, 64/284, 57/585, 60/456, 85/113, 85/187, 16/688, 66/662, 58/45, 62/578, 70/356, 29/494, 49/166, 72/99, 14/765, 13/187, 96/145, 70/350, 44/547, 99/116, 81/375\}$. مجموعه داده‌های چهارم (Y_2) : $\{60/581, 86/119, 16/48, 16/200, 75/36, 53/244, 55/83\}$. مجموعه داده‌های پنجم و ششم، زمان به ثمر رسیدن اولین گل در بازی‌های مرحله نهایی در دو سال متوالی (۲۰۱۱-۲۰۱۲ و ۲۰۱۲-۲۰۱۳) بصورت جداگانه برای بازی‌های برگشت و اولین بازی‌های لیگ قهرمانان هستند. مجموعه داده‌های پنجم (X_3) : $\{0/111, 0/33\}$.

جدول ۱. MLE برای R_S ، اربیی و MSE

$MSE(\hat{R}_S^M)$	$Bias(\hat{R}_S^M)$	$\hat{R}_S^M$	R_S	n	$(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2)$
۰/۰۰۰۷۷	-۰/۰۰۰۱۳	۰/۳۱۱۲	۰/۳۱۲۵	۱۰	(۱/۵، ۰/۵، ۲/۵، ۳/۵)
۰/۰۰۰۳۸	-۰/۰۰۰۱۵	۰/۳۱۱۰	۰/۳۱۲۵	۲۰	
۰/۰۰۰۲۶	-۰/۰۰۰۰۴	۰/۳۱۲۱	۰/۳۱۲۵	۳۰	
۰/۰۰۰۱۹	-۰/۰۰۰۰۵	۰/۳۱۲۰	۰/۳۱۲۵	۴۰	
۰/۰۰۰۱۶	-۰/۰۰۰۰۵	۰/۳۱۲۰	۰/۳۱۲۵	۵۰	
۰/۰۰۰۹۰	-۰/۰۰۰۸۶	۰/۴۲۸۹	۰/۴۳۷۵	۱۰	(۱/۵، ۰/۵، ۳/۵، ۲/۵)
۰/۰۰۰۴۴	-۰/۰۰۰۵۳	۰/۴۳۲۲	۰/۴۳۷۵	۲۰	
۰/۰۰۰۳۰	-۰/۰۰۰۳۰	۰/۴۳۴۵	۰/۴۳۷۵	۳۰	
۰/۰۰۰۲۲	-۰/۰۰۰۲۲	۰/۴۳۵۳	۰/۴۳۷۵	۴۰	
۰/۰۰۰۱۸	-۰/۰۰۰۲۰	۰/۴۳۵۵	۰/۴۳۷۵	۵۰	
۰/۰۰۰۸۶	۰/۰۰۰۱۳	۰/۳۲۹۵	۰/۳۲۸۱	۱۰	(۳/۵، ۰/۵، ۱/۵، ۲/۵)
۰/۰۰۰۴۲	۰/۰۰۰۰۲	۰/۳۲۸۰	۰/۳۲۸۱	۲۰	
۰/۰۰۰۲۹	۰/۰۰۰۰۵	۰/۳۲۸۷	۰/۳۲۸۱	۳۰	
۰/۰۰۰۲۲	۰/۰۰۰۰۱	۰/۳۲۸۲	۰/۳۲۸۱	۴۰	
۰/۰۰۰۱۷	۰/۰۰۰۰۱	۰/۳۲۸۳	۰/۳۲۸۱	۵۰	
۰/۰۰۰۹۴	-۰/۰۰۰۱۰۶	۰/۵۳۶۲	۰/۵۴۶۹	۱۰	(۳/۵، ۰/۵، ۲/۵، ۱/۵)
۰/۰۰۰۴۶	-۰/۰۰۰۶۲	۰/۵۴۰۷	۰/۵۴۶۹	۲۰	
۰/۰۰۰۳۱	-۰/۰۰۰۳۵	۰/۵۴۳۴	۰/۵۴۶۹	۳۰	
۰/۰۰۰۲۳	-۰/۰۰۰۲۹	۰/۵۴۴۰	۰/۵۴۶۹	۴۰	
۰/۰۰۰۱۹	-۰/۰۰۰۲۳	۰/۵۴۴۵	۰/۵۴۶۹	۵۰	
۰/۰۰۰۷۰	-۰/۰۰۰۱۱	۰/۲۸۴۶	۰/۲۸۵۷	۱۰	(۲، ۱، ۳، ۴)
۰/۰۰۰۳۴	-۰/۰۰۰۱۴	۰/۲۸۴۳	۰/۲۸۵۷	۲۰	
۰/۰۰۰۲۴	-۰/۰۰۰۰۴	۰/۲۸۵۳	۰/۲۸۵۷	۳۰	
۰/۰۰۰۱۸	-۰/۰۰۰۰۴	۰/۲۸۵۴	۰/۲۸۵۷	۴۰	
۰/۰۰۰۱۴	-۰/۰۰۰۰۵	۰/۲۸۵۳	۰/۲۸۵۷	۵۰	
۰/۰۰۰۸۴	-۰/۰۰۰۶۶	۰/۳۷۴۴	۰/۳۸۱۰	۱۰	(۲، ۱، ۴، ۳)
۰/۰۰۰۴۱	-۰/۰۰۰۴۲	۰/۳۷۶۷	۰/۳۸۱۰	۲۰	
۰/۰۰۰۲۸	-۰/۰۰۰۲۳	۰/۳۷۸۶	۰/۳۸۱۰	۳۰	
۰/۰۰۰۲۱	-۰/۰۰۰۱۷	۰/۳۷۹۳	۰/۳۸۱۰	۴۰	
۰/۰۰۰۱۷	-۰/۰۰۰۱۶	۰/۳۷۹۳	۰/۳۸۱۰	۵۰	
۰/۰۰۰۸۰	-۰/۰۰۰۰۵	۰/۳۱۹۵	۰/۳۲۰۰	۱۰	(۴، ۱، ۲، ۳)
۰/۰۰۰۴۰	-۰/۰۰۰۱۱	۰/۳۱۸۹	۰/۳۲۰۰	۲۰	
۰/۰۰۰۲۷	-۰/۰۰۰۰۲	۰/۳۱۹۸	۰/۳۲۰۰	۳۰	
۰/۰۰۰۲۰	-۰/۰۰۰۰۳	۰/۳۱۹۷	۰/۳۲۰۰	۴۰	
۰/۰۰۰۱۶	-۰/۰۰۰۰۳	۰/۳۱۹۷	۰/۳۲۰۰	۵۰	
۰/۰۰۰۹۲	-۰/۰۰۰۹۸	۰/۴۷۰۲	۰/۴۸۰۰	۱۰	(۴، ۱، ۳، ۲)
۰/۰۰۰۴۵	-۰/۰۰۰۵۸	۰/۴۷۴۲	۰/۴۸۰۰	۲۰	
۰/۰۰۰۳۱	-۰/۰۰۰۳۳	۰/۴۷۶۷	۰/۴۸۰۰	۳۰	
۰/۰۰۰۲۳	-۰/۰۰۰۲۶	۰/۴۷۷۴	۰/۴۸۰۰	۴۰	
۰/۰۰۰۱۸	-۰/۰۰۰۲۲	۰/۴۷۷۸	۰/۴۸۰۰	۵۰	

جدول ۲. UMVUE و برآورد بیزی برای R_S ، اربیی و MSE

$MSE(\hat{R}_S^B)$	$Bias(\hat{R}_S^B)$	$\hat{R}_S^B$	$MSE(\hat{R}_S^U)$	$Bias(\hat{R}_S^U)$	$\hat{R}_S^U$	n	$(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2)$
۰/۰۱۴۷	۰/۰۰۰۶	۰/۳۱۳۱	۰/۰۰۸۵	-۰/۰۰۰۳	۰/۳۱۲۲	۱۰	(۱/۵، ۰/۵، ۲/۵، ۳/۵)
۰/۰۱۰۱	-۰/۰۰۴۶	۰/۳۰۸۰	۰/۰۰۴۰	-۰/۰۰۰۱	۰/۳۱۱۴	۲۰	
۰/۰۰۶۸	-۰/۰۰۱۵	۰/۳۱۱۰	۰/۰۰۲۷	-۰/۰۰۰۱	۰/۳۱۲۴	۳۰	
۰/۰۰۵۰	-۰/۰۰۰۶	۰/۳۱۲۰	۰/۰۰۲۰	-۰/۰۰۰۲	۰/۳۱۲۳	۴۰	
۰/۰۰۳۷	۰/۰۰۰۲	۰/۳۱۲۷	۰/۰۰۱۶	-۰/۰۰۰۳	۰/۳۱۲۲	۵۰	
۰/۰۰۶۱	-۰/۰۱۴۱	۰/۴۲۳۴	۰/۰۰۹۸	-۰/۰۰۰۴	۰/۴۳۷۱	۱۰	(۱/۵، ۰/۵، ۳/۵، ۴/۵)
۰/۰۰۳۴	-۰/۰۰۸۳	۰/۴۲۹۲	۰/۰۰۴۶	-۰/۰۰۰۱	۰/۴۳۶۴	۲۰	
۰/۰۰۲۵	-۰/۰۰۵۳	۰/۴۳۲۲	۰/۰۰۳۱	-۰/۰۰۰۲	۰/۴۳۷۳	۳۰	
۰/۰۰۲۰	-۰/۰۰۴۱	۰/۴۳۳۵	۰/۰۰۲۳	-۰/۰۰۰۱	۰/۴۳۷۴	۴۰	
۰/۰۰۱۶	-۰/۰۰۳۵	۰/۴۳۴۰	۰/۰۰۱۸	-۰/۰۰۰۳	۰/۴۳۷۲	۵۰	
۰/۰۳۰۳	-۰/۰۳۵۳	۰/۲۹۲۹	۰/۰۰۹۴	-۰/۰۰۰۴	۰/۳۲۷۷	۱۰	(۳/۵، ۰/۵، ۱/۵، ۲/۵)
۰/۰۲۶۲	-۰/۰۴۳۸	۰/۲۸۴۴	۰/۰۰۴۴	-۰/۰۰۰۱	۰/۳۲۷۰	۲۰	
۰/۰۲۱۸	-۰/۰۳۹۴	۰/۲۸۸۸	۰/۰۰۳۰	-۰/۰۰۰۱	۰/۳۲۸۰	۳۰	
۰/۰۱۹۸	-۰/۰۳۸۷	۰/۲۸۹۵	۰/۰۰۲۲	-۰/۰۰۰۴	۰/۳۲۷۷	۴۰	
۰/۰۱۷۲	-۰/۰۳۴۴	۰/۲۹۳۷	۰/۰۰۱۸	-۰/۰۰۰۳	۰/۳۲۷۹	۵۰	
۰/۰۰۷۳	-۰/۰۳۰۴	۰/۵۱۶۵	۰/۰۱۰۱	-۰/۰۰۰۵	۰/۵۴۶۴	۱۰	(۳/۵، ۰/۵، ۲/۵، ۱/۵)
۰/۰۰۳۹	-۰/۰۱۶۸	۰/۵۳۰۱	۰/۰۰۴۷	-۰/۰۰۰۱	۰/۵۴۵۸	۲۰	
۰/۰۰۲۸	-۰/۰۱۱۰	۰/۵۳۶۰	۰/۰۰۳۲	-۰/۰۰۰۱	۰/۵۴۶۸	۳۰	
۰/۰۰۲۱	-۰/۰۰۸۵	۰/۵۳۸۴	۰/۰۰۲۴	-۰/۰۰۰۳	۰/۵۴۶۶	۴۰	
۰/۰۰۱۷	-۰/۰۰۷۰	۰/۵۴۰۰	۰/۰۰۱۹	-۰/۰۰۰۳	۰/۵۴۶۶	۵۰	
۰/۰۱۰۲	۰/۰۰۶۶	۰/۲۹۲۳	۰/۰۰۷۸	-۰/۰۰۰۳	۰/۲۸۵۵	۱۰	(۲، ۱، ۳، ۴)
۰/۰۰۶۴	۰/۰۰۱۹	۰/۲۸۷۶	۰/۰۰۳۶	-۰/۰۰۰۱	۰/۲۸۴۷	۲۰	
۰/۰۰۴۳	۰/۰۰۲۸	۰/۲۸۸۵	۰/۰۰۲۴	-۰/۰۰۰۱	۰/۲۸۵۶	۳۰	
۰/۰۰۳۰	۰/۰۰۳۰	۰/۲۸۸۷	۰/۰۰۱۸	-۰/۰۰۰۱	۰/۲۸۵۶	۴۰	
۰/۰۰۲۳	۰/۰۰۲۷	۰/۲۸۸۴	۰/۰۰۱۵	-۰/۰۰۰۳	۰/۲۸۵۴	۵۰	
۰/۰۰۵۳	-۰/۰۰۹۸	۰/۳۷۱۱	۰/۰۰۹۳	-۰/۰۰۰۳	۰/۳۸۰۷	۱۰	(۲، ۱، ۴، ۳)
۰/۰۰۳۱	-۰/۰۰۶۲	۰/۳۷۴۷	۰/۰۰۴۳	-۰/۰۰۰۱	۰/۳۷۹۹	۲۰	
۰/۰۰۲۳	-۰/۰۰۴۰	۰/۳۷۷۰	۰/۰۰۲۹	-۰/۰۰۰۲	۰/۳۸۰۸	۳۰	
۰/۰۰۱۸	-۰/۰۰۳۰	۰/۳۷۸۰	۰/۰۰۲۲	-۰/۰۰۰۰	۰/۳۸۰۹	۴۰	
۰/۰۰۱۵	-۰/۰۰۲۷	۰/۳۷۸۲	۰/۰۰۱۷	-۰/۰۰۰۳	۰/۳۸۰۶	۵۰	
۰/۰۱۹۴	-۰/۰۱۹۰	۰/۳۰۱۰	۰/۰۰۸۹	-۰/۰۰۰۳	۰/۳۱۹۷	۱۰	(۴، ۱، ۲، ۳)
۰/۰۱۴۹	-۰/۰۲۰۷	۰/۲۹۹۳	۰/۰۰۴۱	-۰/۰۰۰۱	۰/۳۱۸۹	۲۰	
۰/۰۱۰۷	-۰/۰۱۴۲	۰/۳۰۵۸	۰/۰۰۲۸	-۰/۰۰۰۱	۰/۳۱۹۷	۳۰	
۰/۰۰۸۶	-۰/۰۱۲۲	۰/۳۰۷۸	۰/۰۰۲۱	-۰/۰۰۰۳	۰/۳۱۹۷	۴۰	
۰/۰۰۶۷	-۰/۰۰۹۱	۰/۳۱۰۹	۰/۰۰۱۷	-۰/۰۰۰۳	۰/۳۱۹۷	۵۰	
۰/۰۰۶۸	-۰/۰۳۱۲	۰/۴۴۸۸	۰/۰۱۰۰	-۰/۰۰۰۴	۰/۴۷۹۶	۱۰	(۴، ۱، ۳، ۲)
۰/۰۰۳۷	-۰/۰۱۷۹	۰/۴۶۲۱	۰/۰۰۴۷	-۰/۰۰۰۱	۰/۴۷۸۹	۲۰	
۰/۰۰۲۷	-۰/۰۱۱۹	۰/۴۶۸۱	۰/۰۰۳۱	-۰/۰۰۰۲	۰/۴۷۹۹	۳۰	
۰/۰۰۲۱	-۰/۰۰۹۲	۰/۴۷۰۸	۰/۰۰۲۳	-۰/۰۰۰۲	۰/۴۷۹۸	۴۰	
۰/۰۰۱۷	-۰/۰۰۷۶	۰/۴۷۲۴	۰/۰۰۱۹	-۰/۰۰۰۳	۰/۴۷۹۷	۵۰	

جدول ۳. MLE برای R_P ، اربیی و MSE

$MSE(\hat{R}_P^M)$	$Bias(\hat{R}_P^M)$	$\hat{R}_P^M$	R_P	n	$(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2)$
۰/۰۰۰۳۴	-۰/۰۰۰۴۵	۰/۸۴۹۷	۰/۸۵۴۲	۱۰	(۱/۵، ۰/۵، ۲/۵، ۳/۵)
۰/۰۰۰۱۶	-۰/۰۰۰۲۵	۰/۸۵۱۶	۰/۸۵۴۲	۲۰	
۰/۰۰۰۱۱	-۰/۰۰۰۱۷	۰/۸۵۲۵	۰/۸۵۴۲	۳۰	
۰/۰۰۰۰۸	-۰/۰۰۰۰۹	۰/۸۵۳۲	۰/۸۵۴۲	۴۰	
۰/۰۰۰۰۶	-۰/۰۰۰۱۱	۰/۸۵۳۱	۰/۸۵۴۲	۵۰	
۰/۰۰۰۲۲	-۰/۰۰۰۵۰	۰/۸۹۰۹	۰/۸۹۵۸	۱۰	(۱/۵، ۰/۵، ۳/۵، ۲/۵)
۰/۰۰۰۱۰	-۰/۰۰۰۲۷	۰/۸۹۳۱	۰/۸۹۵۸	۲۰	
۰/۰۰۰۰۷	-۰/۰۰۰۱۸	۰/۸۹۴۱	۰/۸۹۵۸	۳۰	
۰/۰۰۰۰۵	-۰/۰۰۰۱۲	۰/۸۹۴۷	۰/۸۹۵۸	۴۰	
۰/۰۰۰۰۴	-۰/۰۰۰۱۲	۰/۸۹۴۷	۰/۸۹۵۸	۵۰	
۰/۰۰۰۱۳	-۰/۰۰۰۴۶	۰/۹۱۷۳	۰/۹۲۱۹	۱۰	(۳/۵، ۰/۵، ۱/۵، ۲/۵)
۰/۰۰۰۰۶	-۰/۰۰۰۲۴	۰/۹۱۹۵	۰/۹۲۱۹	۲۰	
۰/۰۰۰۰۴	-۰/۰۰۰۱۶	۰/۹۲۰۳	۰/۹۲۱۹	۳۰	
۰/۰۰۰۰۳	-۰/۰۰۰۱۰	۰/۹۲۰۹	۰/۹۲۱۹	۴۰	
۰/۰۰۰۰۲	-۰/۰۰۰۱۰	۰/۹۲۰۹	۰/۹۲۱۹	۵۰	
۰/۰۰۰۰۷	-۰/۰۰۰۴۰	۰/۹۴۹۱	۰/۹۵۳۱	۱۰	(۳/۵، ۰/۵، ۲/۵، ۱/۵)
۰/۰۰۰۰۳	-۰/۰۰۰۲۱	۰/۹۵۱۱	۰/۹۵۳۱	۲۰	
۰/۰۰۰۰۲	-۰/۰۰۰۱۴	۰/۹۵۱۸	۰/۹۵۳۱	۳۰	
۰/۰۰۰۰۱	-۰/۰۰۰۰۹	۰/۹۵۲۲	۰/۹۵۳۱	۴۰	
۰/۰۰۰۰۱	-۰/۰۰۰۰۹	۰/۹۵۲۳	۰/۹۵۳۱	۵۰	
۰/۰۰۰۴۷	-۰/۰۰۰۳۱	۰/۸۰۶۵	۰/۸۰۹۵	۱۰	(۲، ۱، ۳، ۴)
۰/۰۰۰۲۲	-۰/۰۰۰۱۹	۰/۸۰۷۶	۰/۸۰۹۵	۲۰	
۰/۰۰۰۱۶	-۰/۰۰۰۱۲	۰/۸۰۸۳	۰/۸۰۹۵	۳۰	
۰/۰۰۰۱۱	-۰/۰۰۰۰۶	۰/۸۰۸۹	۰/۸۰۹۵	۴۰	
۰/۰۰۰۰۹	-۰/۰۰۰۰۹	۰/۸۰۸۶	۰/۸۰۹۵	۵۰	
۰/۰۰۰۳۳	-۰/۰۰۰۴۴	۰/۸۵۲۸	۰/۸۵۷۱	۱۰	(۲، ۱، ۴، ۳)
۰/۰۰۰۱۶	-۰/۰۰۰۲۵	۰/۸۵۴۶	۰/۸۵۷۱	۲۰	
۰/۰۰۰۱۱	-۰/۰۰۰۱۶	۰/۸۵۵۶	۰/۸۵۷۱	۳۰	
۰/۰۰۰۰۸	-۰/۰۰۰۱۰	۰/۸۵۶۱	۰/۸۵۷۱	۴۰	
۰/۰۰۰۰۷	-۰/۰۰۰۱۱	۰/۸۵۶۱	۰/۸۵۷۱	۵۰	
۰/۰۰۰۲۶	-۰/۰۰۰۴۹	۰/۸۷۵۱	۰/۸۸۰۰	۱۰	(۴، ۱، ۲، ۳)
۰/۰۰۰۱۲	-۰/۰۰۰۲۷	۰/۸۷۷۳	۰/۸۸۰۰	۲۰	
۰/۰۰۰۰۸	-۰/۰۰۰۱۸	۰/۸۷۸۲	۰/۸۸۰۰	۳۰	
۰/۰۰۰۰۶	-۰/۰۰۰۱۰	۰/۸۷۹۰	۰/۸۸۰۰	۴۰	
۰/۰۰۰۰۵	-۰/۰۰۰۱۲	۰/۸۷۸۸	۰/۸۸۰۰	۵۰	
۰/۰۰۰۱۵	-۰/۰۰۰۴۹	۰/۹۱۵۱	۰/۹۲۰۰	۱۰	(۴، ۱، ۳، ۲)
۰/۰۰۰۰۷	-۰/۰۰۰۲۶	۰/۹۱۷۴	۰/۹۲۰۰	۲۰	
۰/۰۰۰۰۵	-۰/۰۰۰۱۷	۰/۹۱۸۳	۰/۹۲۰۰	۳۰	
۰/۰۰۰۰۳	-۰/۰۰۰۱۱	۰/۹۱۸۹	۰/۹۲۰۰	۴۰	
۰/۰۰۰۰۳	-۰/۰۰۰۱۱	۰/۹۱۸۹	۰/۹۲۰۰	۵۰	

جدول ۴. UMVUE و برآورد بیزی برای R_P ، ارببی و MSE

$MSE(\hat{R}_P^B)$	$Bias(\hat{R}_P^B)$	$\hat{R}_P^B$	$MSE(\hat{R}_P^U)$	$Bias(\hat{R}_P^U)$	$\hat{R}_P^U$	n	$(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2)$
۰/۰۰۳۹	-۰/۰۰۷۱	۰/۸۴۷۱	۰/۰۰۳۵	-۰/۰۰۰۱	۰/۸۵۴۱	۱۰	(۱/۵۰، ۰/۵۰، ۲/۵۰، ۳/۵)
۰/۰۰۲۳	-۰/۰۰۵۴	۰/۸۴۸۸	۰/۰۰۱۶	-۰/۰۰۰۳	۰/۸۵۳۸	۲۰	
۰/۰۰۱۶	-۰/۰۰۳۳	۰/۸۵۰۹	۰/۰۰۱۱	-۰/۰۰۰۲	۰/۸۵۴۰	۳۰	
۰/۰۰۱۱	-۰/۰۰۲۰	۰/۸۵۲۲	۰/۰۰۰۸	۰/۰۰۰۲	۰/۸۵۴۳	۴۰	
۰/۰۰۰۹	-۰/۰۰۱۷	۰/۸۵۲۵	۰/۰۰۰۶	-۰/۰۰۰۲	۰/۸۵۳۹	۵۰	
۰/۰۰۱۷	-۰/۰۰۸۶	۰/۸۸۷۲	۰/۰۰۲۲	-۰/۰۰۰۱	۰/۸۹۵۷	۱۰	(۱/۵۰، ۰/۵۰، ۳/۵۰، ۲/۵)
۰/۰۰۰۹	-۰/۰۰۴۸	۰/۸۹۱۱	۰/۰۰۱۰	-۰/۰۰۰۳	۰/۸۹۵۶	۲۰	
۰/۰۰۰۶	-۰/۰۰۳۲	۰/۸۹۲۶	۰/۰۰۰۷	-۰/۰۰۰۱	۰/۸۹۵۷	۳۰	
۰/۰۰۰۵	-۰/۰۰۲۳	۰/۸۹۳۶	۰/۰۰۰۵	۰/۰۰۰۱	۰/۸۹۵۹	۴۰	
۰/۰۰۰۴	-۰/۰۰۲۱	۰/۸۹۳۸	۰/۰۰۰۴	-۰/۰۰۰۲	۰/۸۹۵۷	۵۰	
۰/۰۰۲۹	-۰/۰۰۲۶۱	۰/۸۹۵۸	۰/۰۰۱۳	-۰/۰۰۰۰	۰/۹۲۱۸	۱۰	(۳/۵۰، ۰/۵۰، ۱/۵۰، ۲/۵)
۰/۰۰۱۵	-۰/۰۰۱۷۶	۰/۹۰۴۳	۰/۰۰۰۶	-۰/۰۰۰۲	۰/۹۲۱۷	۲۰	
۰/۰۰۱۱	-۰/۰۰۱۳۴	۰/۹۰۸۵	۰/۰۰۰۴	-۰/۰۰۰۱	۰/۹۲۱۸	۳۰	
۰/۰۰۰۹	-۰/۰۰۱۱۱	۰/۹۱۰۸	۰/۰۰۰۳	۰/۰۰۰۱	۰/۹۲۲۰	۴۰	
۰/۰۰۰۷	-۰/۰۰۰۹۷	۰/۹۱۲۲	۰/۰۰۰۲	-۰/۰۰۰۱	۰/۹۲۱۷	۵۰	
۰/۰۰۰۸	-۰/۰۰۱۴۸	۰/۹۳۸۴	۰/۰۰۰۶	-۰/۰۰۰۱	۰/۹۵۳۱	۱۰	(۳/۵۰، ۰/۵۰، ۲/۵۰، ۱/۵)
۰/۰۰۰۳	-۰/۰۰۰۷۸	۰/۹۴۵۴	۰/۰۰۰۳	-۰/۰۰۰۱	۰/۹۵۳۰	۲۰	
۰/۰۰۰۲	-۰/۰۰۰۵۲	۰/۹۴۷۹	۰/۰۰۰۲	-۰/۰۰۰۱	۰/۹۵۳۱	۳۰	
۰/۰۰۰۲	-۰/۰۰۰۳۸	۰/۹۴۹۳	۰/۰۰۰۱	۰/۰۰۰۱	۰/۹۵۳۲	۴۰	
۰/۰۰۰۱	-۰/۰۰۰۳۲	۰/۹۴۹۹	۰/۰۰۰۱	-۰/۰۰۰۱	۰/۹۵۳۰	۵۰	
۰/۰۰۴۸	-۰/۰۰۰۰۹	۰/۸۰۸۶	۰/۰۰۰۵۰	-۰/۰۰۰۱	۰/۸۰۹۴	۱۰	(۲۰، ۱۰، ۳۰، ۴)
۰/۰۰۲۷	-۰/۰۰۰۱۲	۰/۸۰۸۳	۰/۰۰۰۲۳	-۰/۰۰۰۴	۰/۸۰۹۱	۲۰	
۰/۰۰۱۹	-۰/۰۰۰۰۳	۰/۸۰۹۲	۰/۰۰۰۱۶	-۰/۰۰۰۲	۰/۸۰۹۳	۳۰	
۰/۰۰۱۴	۰/۰۰۰۰۵	۰/۸۱۰۰	۰/۰۰۰۱۲	۰/۰۰۰۲	۰/۸۰۹۷	۴۰	
۰/۰۰۱۱	۰/۰۰۰۰۲	۰/۸۰۹۷	۰/۰۰۰۱۰	-۰/۰۰۰۳	۰/۸۰۹۲	۵۰	
۰/۰۰۲۲	-۰/۰۰۰۶۸	۰/۸۵۰۳	۰/۰۰۰۳۵	-۰/۰۰۰۲	۰/۸۵۷۰	۱۰	(۲۰، ۱۰، ۴۰، ۳)
۰/۰۰۱۲	-۰/۰۰۰۴۰	۰/۸۵۳۱	۰/۰۰۰۱۶	-۰/۰۰۰۴	۰/۸۵۶۸	۲۰	
۰/۰۰۰۹	-۰/۰۰۰۲۷	۰/۸۵۴۴	۰/۰۰۰۱۱	-۰/۰۰۰۲	۰/۸۵۷۰	۳۰	
۰/۰۰۰۷	-۰/۰۰۰۱۹	۰/۸۵۵۲	۰/۰۰۰۰۸	۰/۰۰۰۱	۰/۸۵۷۲	۴۰	
۰/۰۰۰۶	-۰/۰۰۰۱۸	۰/۸۵۵۳	۰/۰۰۰۰۷	-۰/۰۰۰۲	۰/۸۵۶۹	۵۰	
۰/۰۰۴۲	-۰/۰۰۰۲۶۱	۰/۸۵۳۹	۰/۰۰۰۲۶	-۰/۰۰۰۱	۰/۸۷۹۹	۱۰	(۴۰، ۱۰، ۲۰، ۳)
۰/۰۰۲۳	-۰/۰۰۰۱۷۱	۰/۸۶۲۹	۰/۰۰۰۱۲	-۰/۰۰۰۳	۰/۸۷۹۷	۲۰	
۰/۰۰۱۶	-۰/۰۰۰۱۱۹	۰/۸۶۸۱	۰/۰۰۰۰۸	-۰/۰۰۰۲	۰/۸۷۹۸	۳۰	
۰/۰۰۱۲	-۰/۰۰۰۰۹۱	۰/۸۷۱۰	۰/۰۰۰۰۶	۰/۰۰۰۰۲	۰/۸۸۰۲	۴۰	
۰/۰۰۰۹	-۰/۰۰۰۰۷۴	۰/۸۷۲۶	۰/۰۰۰۰۵	-۰/۰۰۰۰۲	۰/۸۷۹۸	۵۰	
۰/۰۰۱۵	-۰/۰۰۰۱۸۸	۰/۹۰۱۲	۰/۰۰۰۰۱۵	-۰/۰۰۰۰۱	۰/۹۱۹۹	۱۰	(۴۰، ۱۰، ۳۰، ۲)
۰/۰۰۰۷	-۰/۰۰۰۱۰۴	۰/۹۰۹۶	۰/۰۰۰۰۰۷	-۰/۰۰۰۰۲	۰/۹۱۹۸	۲۰	
۰/۰۰۰۵	-۰/۰۰۰۰۷۱	۰/۹۱۲۹	۰/۰۰۰۰۰۵	-۰/۰۰۰۰۱	۰/۹۱۹۹	۳۰	
۰/۰۰۰۳	-۰/۰۰۰۰۵۳	۰/۹۱۴۷	۰/۰۰۰۰۰۳	۰/۰۰۰۰۰۲	۰/۹۲۰۱	۴۰	
۰/۰۰۰۳	-۰/۰۰۰۰۴۵	۰/۹۱۵۵	۰/۰۰۰۰۰۳	-۰/۰۰۰۰۰۲	۰/۹۱۹۹	۵۰	

جدول ۵. MLE برای R_r ، اربیی و MSE

$MSE(\hat{R}_r^M)$	$Bias(\hat{R}_r^M)$	$\hat{R}_r^M$	R_r	n	$(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \alpha_3, \beta_3)$
۰/۰۰۰۷۷	-۰/۰۰۰۴۰	۰/۵۰۵۴	۰/۵۰۹۴	۱۰	(۱/۵، ۰/۵، ۲/۵، ۳/۵، ۴/۵، ۵/۵)
۰/۰۰۰۳۸	-۰/۰۰۰۲۷	۰/۵۰۶۶	۰/۵۰۹۴	۲۰	
۰/۰۰۰۲۶	-۰/۰۰۰۰۹	۰/۵۰۸۵	۰/۵۰۹۴	۳۰	
۰/۰۰۰۱۸	-۰/۰۰۰۱۱	۰/۵۰۸۳	۰/۵۰۹۴	۴۰	
۰/۰۰۰۱۵	-۰/۰۰۰۱۲	۰/۵۰۸۲	۰/۵۰۹۴	۵۰	
۰/۰۰۰۷۶	-۰/۰۰۰۹۹	۰/۵۹۹۵	۰/۶۰۹۴	۱۰	(۱/۵، ۰/۵، ۳/۵، ۲/۵، ۵/۵، ۴/۵)
۰/۰۰۰۳۷	-۰/۰۰۰۵۸	۰/۶۰۳۶	۰/۶۰۹۴	۲۰	
۰/۰۰۰۲۴	-۰/۰۰۰۲۹	۰/۶۰۶۵	۰/۶۰۹۴	۳۰	
۰/۰۰۰۱۸	-۰/۰۰۰۲۴	۰/۶۰۷۰	۰/۶۰۹۴	۴۰	
۰/۰۰۰۱۵	-۰/۰۰۰۲۳	۰/۶۰۷۱	۰/۶۰۹۴	۵۰	
۰/۰۰۰۷۳	-۰/۰۰۰۰۱	۰/۵۹۴۳	۰/۵۹۴۴	۱۰	(۵/۵، ۰/۵، ۱/۵، ۲/۵، ۳/۵، ۴/۵)
۰/۰۰۰۳۶	-۰/۰۰۰۰۳	۰/۵۹۴۱	۰/۵۹۴۴	۲۰	
۰/۰۰۰۲۵	۰/۰۰۰۰۳	۰/۵۹۴۷	۰/۵۹۴۴	۳۰	
۰/۰۰۰۱۸	-۰/۰۰۰۰۳	۰/۵۹۴۱	۰/۵۹۴۴	۴۰	
۰/۰۰۰۱۵	-۰/۰۰۰۰۳	۰/۵۹۴۱	۰/۵۹۴۴	۵۰	
۰/۰۰۰۴۴	-۰/۰۰۰۹۲	۰/۷۵۷۱	۰/۷۶۶۳	۱۰	(۵/۵، ۰/۵، ۲/۵، ۱/۵، ۴/۵، ۳/۵)
۰/۰۰۰۲۱	-۰/۰۰۰۴۹	۰/۷۶۱۴	۰/۷۶۶۳	۲۰	
۰/۰۰۰۱۴	-۰/۰۰۰۲۸	۰/۷۶۳۵	۰/۷۶۶۳	۳۰	
۰/۰۰۰۱۰	-۰/۰۰۰۲۴	۰/۷۶۳۹	۰/۷۶۶۳	۴۰	
۰/۰۰۰۰۸	-۰/۰۰۰۲۱	۰/۷۶۴۲	۰/۷۶۶۳	۵۰	
۰/۰۰۰۸۱	-۰/۰۰۰۳۲	۰/۴۵۵۷	۰/۴۵۸۹	۱۰	(۲، ۱، ۳، ۴، ۵، ۶)
۰/۰۰۰۴۰	-۰/۰۰۰۲۵	۰/۴۵۶۴	۰/۴۵۸۹	۲۰	
۰/۰۰۰۲۷	-۰/۰۰۰۰۶	۰/۴۵۸۲	۰/۴۵۸۹	۳۰	
۰/۰۰۰۲۰	-۰/۰۰۰۰۸	۰/۴۵۸۰	۰/۴۵۸۹	۴۰	
۰/۰۰۰۱۶	-۰/۰۰۰۱۰	۰/۴۵۷۹	۰/۴۵۸۹	۵۰	
۰/۰۰۰۸۷	-۰/۰۰۰۷۷	۰/۵۲۹۱	۰/۵۳۶۸	۱۰	(۲، ۱، ۴، ۳، ۶، ۵)
۰/۰۰۰۴۳	-۰/۰۰۰۴۹	۰/۵۳۱۹	۰/۵۳۶۸	۲۰	
۰/۰۰۰۲۹	-۰/۰۰۰۲۱	۰/۵۳۴۷	۰/۵۳۶۸	۳۰	
۰/۰۰۰۲۱	-۰/۰۰۰۱۸	۰/۵۳۵۰	۰/۵۳۶۸	۴۰	
۰/۰۰۰۱۷	-۰/۰۰۰۱۹	۰/۵۳۴۹	۰/۵۳۶۸	۵۰	
۰/۰۰۰۷۲	-۰/۰۰۰۲۸	۰/۵۶۸۷	۰/۵۷۱۴	۱۰	(۶، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵)
۰/۰۰۰۳۵	-۰/۰۰۰۱۸	۰/۵۶۹۶	۰/۵۷۱۴	۲۰	
۰/۰۰۰۲۴	-۰/۰۰۰۰۶	۰/۵۷۰۹	۰/۵۷۱۴	۳۰	
۰/۰۰۰۱۷	-۰/۰۰۰۰۹	۰/۵۷۰۵	۰/۵۷۱۴	۴۰	
۰/۰۰۰۱۴	-۰/۰۰۰۰۹	۰/۵۷۰۵	۰/۵۷۱۴	۵۰	
۰/۰۰۰۵۶	-۰/۰۰۰۱۰۴	۰/۶۹۴۴	۰/۷۰۴۸	۱۰	(۶، ۱، ۳، ۲، ۵، ۴)
۰/۰۰۰۲۶	-۰/۰۰۰۵۷	۰/۶۹۹۱	۰/۷۰۴۸	۲۰	
۰/۰۰۰۱۸	-۰/۰۰۰۳۱	۰/۷۰۱۷	۰/۷۰۴۸	۳۰	
۰/۰۰۰۱۳	-۰/۰۰۰۲۶	۰/۷۰۲۲	۰/۷۰۴۸	۴۰	
۰/۰۰۰۱۰	-۰/۰۰۰۲۳	۰/۷۰۲۴	۰/۷۰۴۸	۵۰	

جدول ۶. UMVUE و برآورد بیزی برای R_T ، اریبی و MSE

$MSE(\hat{R}_T^B)$	$Bias(\hat{R}_T^B)$	$\hat{R}_T^B$	$MSE(\hat{R}_T^U)$	$Bias(\hat{R}_T^U)$	$\hat{R}_T^U$	n	$(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \alpha_3, \beta_3)$
۰/۰۰۸۷	۰/۰۰۳۳	۰/۵۱۲۷	۰/۰۰۸۴	-۰/۰۰۰۴	۰/۵۰۹۰	۱۰	(۱/۵۰۰/۵۰۲/۵۰۳/۵۰۴/۵۰۵/۵)
۰/۰۰۵۴	۰/۰۰۰۶	۰/۵۱۰۰	۰/۰۰۳۹	-۰/۰۰۰۹	۰/۵۰۸۵	۲۰	
۰/۰۰۳۹	۰/۰۰۲۲	۰/۵۱۱۶	۰/۰۰۲۶	۰/۰۰۰۳	۰/۵۰۹۷	۳۰	
۰/۰۰۲۶	۰/۰۰۲۷	۰/۵۱۲۱	۰/۰۰۱۹	-۰/۰۰۰۲	۰/۵۰۹۲	۴۰	
۰/۰۰۲۱	۰/۰۰۲۱	۰/۵۱۱۵	۰/۰۰۱۵	-۰/۰۰۰۴	۰/۵۰۸۹	۵۰	
۰/۰۰۵۷	-۰/۰۱۷۵	۰/۵۹۱۹	۰/۰۰۸۰	-۰/۰۰۰۴	۰/۶۰۸۹	۱۰	(۱/۵۰۰/۵۰۳/۵۰۴/۵۰۵/۵)
۰/۰۰۳۱	-۰/۰۰۹۹	۰/۵۹۹۵	۰/۰۰۳۷	-۰/۰۰۱۰	۰/۶۰۸۴	۲۰	
۰/۰۰۲۱	-۰/۰۰۵۷	۰/۶۰۳۷	۰/۰۰۲۵	۰/۰۰۰۴	۰/۶۰۹۷	۳۰	
۰/۰۰۱۶	-۰/۰۰۴۶	۰/۶۰۴۸	۰/۰۰۱۸	۰/۰۰۰۰	۰/۶۰۹۴	۴۰	
۰/۰۰۱۴	-۰/۰۰۴۱	۰/۶۰۵۳	۰/۰۰۱۵	-۰/۰۰۰۴	۰/۶۰۹۰	۵۰	
۰/۰۱۶۶	-۰/۰۲۸۲	۰/۵۶۶۲	۰/۰۰۸۱	-۰/۰۰۰۳	۰/۵۹۴۲	۱۰	(۵/۵۰۰/۵۰۱/۵۰۲/۵۰۳/۵۰۴/۵)
۰/۰۱۲۳	-۰/۰۲۶۵	۰/۵۶۷۹	۰/۰۰۳۸	-۰/۰۰۰۵	۰/۵۹۳۹	۲۰	
۰/۰۱۰۴	-۰/۰۲۳۷	۰/۵۷۰۷	۰/۰۰۲۶	۰/۰۰۰۱	۰/۵۹۴۵	۳۰	
۰/۰۰۷۸	-۰/۰۲۰۹	۰/۵۷۳۵	۰/۰۰۱۸	-۰/۰۰۰۵	۰/۵۹۴۰	۴۰	
۰/۰۰۷۱	-۰/۰۱۹۵	۰/۵۷۴۹	۰/۰۰۱۵	-۰/۰۰۰۵	۰/۵۹۴۰	۵۰	
۰/۰۰۴۶	-۰/۰۳۹۸	۰/۷۲۶۵	۰/۰۰۴۵	-۰/۰۰۰۳	۰/۷۶۶۰	۱۰	(۵/۵۰۰/۵۰۲/۵۰۳/۵۰۴/۵)
۰/۰۰۲۱	-۰/۰۲۱۰	۰/۷۴۵۳	۰/۰۰۲۱	-۰/۰۰۰۵	۰/۷۶۵۸	۲۰	
۰/۰۰۱۴	-۰/۰۱۳۷	۰/۷۵۲۶	۰/۰۰۱۴	۰/۰۰۰۲	۰/۷۶۶۴	۳۰	
۰/۰۰۱۰	-۰/۰۱۰۶	۰/۷۵۵۷	۰/۰۰۱۰	-۰/۰۰۰۲	۰/۷۶۶۱	۴۰	
۰/۰۰۰۸	-۰/۰۰۸۷	۰/۷۵۷۶	۰/۰۰۰۸	-۰/۰۰۰۳	۰/۷۶۶۰	۵۰	
۰/۰۰۷۳	۰/۰۰۷۳	۰/۴۶۶۱	۰/۰۰۸۹	-۰/۰۰۰۳	۰/۴۵۸۶	۱۰	(۲۰۱۰۳۰۴۰۵۰۶)
۰/۰۰۴۵	۰/۰۰۳۷	۰/۴۶۲۶	۰/۰۰۴۲	-۰/۰۰۱۰	۰/۴۵۷۸	۲۰	
۰/۰۰۳۱	۰/۰۰۴۸	۰/۴۶۳۶	۰/۰۰۲۸	۰/۰۰۰۴	۰/۴۵۹۲	۳۰	
۰/۰۰۲۱	۰/۰۰۴۳	۰/۴۶۳۲	۰/۰۰۲۰	-۰/۰۰۰۱	۰/۴۵۸۸	۴۰	
۰/۰۰۱۸	۰/۰۰۳۵	۰/۴۶۲۳	۰/۰۰۱۶	-۰/۰۰۰۴	۰/۴۵۸۵	۵۰	
۰/۰۰۶۰	-۰/۰۱۳۰	۰/۵۲۳۸	۰/۰۰۹۴	-۰/۰۰۰۴	۰/۵۳۶۴	۱۰	(۲۰۱۰۴۰۵۰۶۰۵)
۰/۰۰۳۴	-۰/۰۰۷۸	۰/۵۲۹۰	۰/۰۰۴۴	-۰/۰۰۱۱	۰/۵۳۵۷	۲۰	
۰/۰۰۲۴	-۰/۰۰۴۳	۰/۵۳۲۵	۰/۰۰۲۹	۰/۰۰۰۴	۰/۵۳۷۲	۳۰	
۰/۰۰۱۸	-۰/۰۰۳۵	۰/۵۳۳۳	۰/۰۰۲۱	۰/۰۰۰۱	۰/۵۳۶۹	۴۰	
۰/۰۰۱۵	-۰/۰۰۳۳	۰/۵۳۳۶	۰/۰۰۱۷	-۰/۰۰۰۴	۰/۵۳۶۴	۵۰	
۰/۰۱۱۲	-۰/۰۲۷۱	۰/۵۴۴۳	۰/۰۰۷۹	-۰/۰۰۰۳	۰/۵۷۱۱	۱۰	(۶۰۱۰۲۰۳۰۴۰۵)
۰/۰۰۷۷	-۰/۰۱۸۹	۰/۵۵۲۶	۰/۰۰۳۷	-۰/۰۰۰۷	۰/۵۷۰۸	۲۰	
۰/۰۰۵۸	-۰/۰۱۲۹	۰/۵۵۸۵	۰/۰۰۲۵	۰/۰۰۰۲	۰/۵۷۱۶	۳۰	
۰/۰۰۴۰	-۰/۰۰۹۵	۰/۵۶۱۹	۰/۰۰۱۸	-۰/۰۰۰۳	۰/۵۷۱۱	۴۰	
۰/۰۰۳۲	-۰/۰۰۷۳	۰/۵۶۴۲	۰/۰۰۱۵	-۰/۰۰۰۵	۰/۵۷۱۰	۵۰	
۰/۰۰۶۲	-۰/۰۵۰۴	۰/۶۵۴۳	۰/۰۰۵۸	-۰/۰۰۰۴	۰/۷۰۴۴	۱۰	(۶۰۱۰۳۰۴۰۵۰۴)
۰/۰۰۲۸	-۰/۰۲۸۰	۰/۶۷۶۸	۰/۰۰۲۷	-۰/۰۰۰۷	۰/۷۰۴۱	۲۰	
۰/۰۰۱۸	-۰/۰۱۸۵	۰/۶۸۶۳	۰/۰۰۱۸	۰/۰۰۰۲	۰/۷۰۵۰	۳۰	
۰/۰۰۱۳	-۰/۰۱۴۴	۰/۶۹۰۴	۰/۰۰۱۳	-۰/۰۰۰۱	۰/۷۰۴۷	۴۰	
۰/۰۰۱۱	-۰/۰۱۱۹	۰/۶۹۲۹	۰/۰۰۱۰	-۰/۰۰۰۳	۰/۷۰۴۴	۵۰	

۰/۳۴۴، ۰/۲۲۲، ۰/۰۷۸، ۰/۶۲۲، ۰/۱۳۳، ۰/۶۳۳، ۰/۴۲۲، ۰/۰۱۱، ۰/۱۰۰، ۰/۲۷۸، ۰/۰۸۹، ۰/۱۸۹، ۰/۵۰۰، ۰/۸۲۲، ۰/۸۳۳، ۰/۴۸۹، ۰/۶۴۴، ۰/۴۵۶، ۰/۲۲۲، ۰/۱۶۷، ۰/۳۱۱، ۰/۳۰۰، ۰/۹۵۶. مجموعه داده‌های ششم (Y_6) : {۰/۲۶۷، ۰/۶۱۱، ۰/۳۴۴، ۰/۵۳۳، ۰/۴۷۸، ۰/۲۰۰، ۰/۵۶۰، ۰/۵۵۶، ۰/۷۱۱، ۰/۰۷۸، ۰/۵۳۳، ۰/۹۲۲، ۰/۰۶۷، ۰/۳۸۹، ۰/۲۸۹، ۰/۲۳۳، ۰/۱۴۴، ۰/۱۰۰، ۰/۲۷۸، ۰/۵۰۰، ۰/۰۷۸، ۰/۲۸۹، ۰/۳۱۱، ۰/۱۲۲}.

برای هر مجموعه داده‌ها، برازش توزیع نمایی با استفاده از آزمون کولموگوروف-اسمیرنوف^۱ $(K - S)$ آزمون شد. در هر کدام از مجموعه داده‌ها، مقدار برآورد پارامتر توزیع نمایی، فاصله $K - S$ بین تابع توزیع تجربی و تابع توزیع برازش داده شده (D) و p -مقدار در جدول ۷ ارائه شده‌اند. ملاحظه می‌شود که در هر کدام از مجموعه داده‌ها، با توجه به p -مقدارها، توزیع نمایی بطور معنی‌داری برازش داده می‌شود. برآوردهای قابلیت اعتماد تنش-مقاومت سیستم‌های سری، موازی و رادار با استفاده از روابط (۹)، (۱۰)، (۱۲) و (۱۳) محاسبه و در جدول ۸ ارائه شده‌اند. عدد ۰/۶۲۱۹ عبارت است از برآورد ماکسیمم درستنمایی احتمال اینکه در صورت وارد شدن تنش‌های X_1 ، X_2 و X_3 ، سیستم رادار به فعالیت خود ادامه دهد. بنابراین در سیستم رادار، چون $۰/۵ > ۰/۶۲۱۹$ ، مقاومت سیستم رادار بیشتر از تنش‌های وارد شده است. همین تحلیل را در خصوص سیستم‌های سری و موازی می‌توان انجام داد. همانگونه که ملاحظه می‌شود، در هر کدام از روش‌های برآورد، مقدار برآورد قابلیت اعتماد مدل تنش-مقاومت در سیستم سری کوچکتر از مقدار متناظر در سیستم رادار و در سیستم رادار کوچکتر از سیستم موازی است.

جدول ۷. برآورد پارامترها

مجموعه داده	برآورد	D	p -مقدار
اول (X_1)	۰/۵۲۹	۰/۱۸۳۶	۰/۲۰۱۸
دوم (Y_1)	۰/۱۰۶	۰/۲۴۱۱	۰/۳۸۹۹
سوم (X_2)	۰/۰۰۲۹	۰/۱۳۲۸	۰/۶۱۸۳
چهارم (Y_2)	۰/۰۰۲۷	۰/۱۷۵۰	۰/۲۸۳۱
پنجم (X_3)	۲/۷۸۸۶	۰/۱۱۵۵	۰/۸۹۲۷
ششم (Y_3)	۳/۰۷۸۱	۰/۱۶۰۴	۰/۵۴۱۱

جدول ۸. برآورد قابلیت اعتماد

سیستم	MLE	UMVUE	بیزی
سری	۰/۴۳۱۰	۰/۴۳۵۴	۰/۴۳۳۴
رادار	۰/۶۲۱۹	۰/۶۱۶۹	۰/۶۲۴۴
موازی	۰/۹۱۹۳	۰/۹۲۳۱	۰/۹۱۷۰

¹Kolmogorov-Smirnov Test

۶ بحث و نتیجه‌گیری

در یک سیستم منسجم n مولفه‌ای که هر مولفه در معرض یک تنش هست، برای هر مولفه یک متغیر وضعیت تعریف و قابلیت اعتماد سیستم‌های سری، موازی و رادار مطالعه شده است. با فرض اینکه توزیع تنش‌ها و مقاومت‌ها نمایی است، در حالت سیستم سری ۲- مولفه‌ای، سیستم موازی ۲- مولفه‌ای و سیستم رادار، برآوردهای MLE، UMVUE و بیزی مطالعه شدند. نتایج شبیه‌سازی نشان می‌دهند که قدرمطلق اریبی برآوردها روند کاهشی دارد و MSE آنها همواره کاهشی است. همچنین با استفاده از معیارهای قدرمطلق اریبی و MSE، مشاهده شد در سیستم سری ۲- مولفه‌ای و سیستم رادار، برآورد MLE و در سیستم موازی ۲- مولفه‌ای برآورد UMVUE نتایج بهتری دارند. در حالت تنش در سطح مولفه، معرفی قابلیت اعتماد مدل تنش-مقاومت سیستم منسجم و برآورد آن در سیستم‌های مطرح‌شده، نحوه تعیین و برآورد قابلیت اعتماد مدل تنش-مقاومت را برای کلیه سیستم‌های منسجم مشخص می‌کند. در این مدل تنش-مقاومت، تحقیقات بیشتر را می‌توان برای سایر سیستم‌های منسجم و با سایر توزیع‌های احتمال برای تنش‌ها و مقاومت‌ها و روش‌های برآوردیابی دیگر، مطالعه کرد.

تقدیر و تشکر

نویسندگان از نظرات و پیشنهادات داوران محترم، رهنمودهای ارزنده سردبیر، هیئت تحریریه و ویراستار محترم مجله که باعث ارتقا کیفی و ارائه بهتر مقاله شد، کمال تشکر و قدردانی را دارند.

مراجع

- سنجری فارسی‌پور، ن. و ریاحی، ه. (۱۳۹۲)، استنباط درست‌نمایی و بیزی مدل تنش-نیرو بر اساس داده‌های رکوردی در خانواده‌های نرخ خطر متناسب و معکوس متناسب، مجله علوم آماری، ۷، ۲، ۲۳۲-۲۰۷.
- شادرخ، ع. و یعقوب‌زاده شهرستانی، ش. (۱۳۹۸)، برآوردهای E -بیز و بیز سلسله مراتبی پارامتر تنش-مقاومت در توزیع رایلی تحت تابع زیان لاینکس، مجله علوم آماری، ۱۳، ۲، ۴۹۶-۴۸۳.
- Abramowitz, M. and Stegun, I. A. (1972), *Handbook of Mathematical Functions With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, (Pages 556, 558 and 559).
- Alamri, O. A., Abd El-Raouf, M. M., Ismail, E. A., Almaspoor, Z., Alsaedi, B. S. O., Khosa, S. K. and Yusuf, M. (2021), Estimate Stress-Strength Reliability Model Using Rayleigh and Half-Normal Distribution, *Computational Intelligence and Neuroscience*, Article ID 7653581, (10 pages).

- Barlow, R. E. and Proschan, F. (1971), *Statistical Theory of Reliability and Life Testing*, Holt, Rinehart and Winston, New york.
- Bhattacharya, D. and Roychowdhury, S. (2013), Reliability of a Coherent System in a Multicomponent Stress-Strength Model, *American Journal of Mathematical and Management Sciences*, **32**(1), 40-52.
- Bhattacharyya, G. K. and Johnson, R. A. (1974), Estimation of Reliability in a Multicomponent Stress-Strength Model, *Journal of the American Statistical Association*, **69**, 966-970
- Birnbaum, Z. W. (1956), On a Use of Mann-Whitney Statistics, *Proceedings of the 3rd Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, **1**, 13-17.
- Dewanji, A. and Rao, T. S. (2001), On System Reliability Under Stress-Strength Modeling, *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **30**(6), 1185-1196.
- Eryilmaz, S. (2010), On System Reliability in Stress-Strength Setup, *Statistics and Probability Letters*, **80**, 834-839.
- Hassan, A., Almanjahie, I. M., Al-Omari, A. I., Alzoubi, L. and Alzoubi, H. F. (2023), Stress-Strength Modeling Using Median-Ranked Set Sampling: Estimation, Simulation, and Application, *Mathematics*, **11**(2), 318.
- Hemati, A., Khodadadi, Z., Zare, K. and Jafarpour, H. (2022), Bayesian and Classical Estimation of Strength-Stress Reliability for Gompertz Distribution Based on Upper Record Values, *Journal of Mathematical Extension*, **16**(7), 5, 1-27.
- Jana, N. and Bera, S. (2022), Estimation of Parameters of Inverse Weibull Distribution and Application to Multicomponent Stress-Strength Model, *Journal of Applied Statistic*, **49**(1), 169-194.
- Jovanovic, M., Milosevic, B., Obradovic, M. and Vidovic, Z. (2021), Inference on Reliability of Stress-Strength Model with Peng-Yan Extended Weibull Distributions, *Filomat*, **35**(6), 1927-1968.

- Khan, M. J. S. and Khatoon, B. (2019), Statistical Inferences of $R = P(X < Y)$ for Exponential Distribution Based on Generalized Order Statistics, *Annals of Data Science*, **7**, 525-545.
- Kohansal, A., Gonzalez, C. J. P. and Fernandez, A. J. (2023), Multicomponent Reliability Inference in Modified Weibull Extension Distribution and Progressive Censoring Scheme, *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Societ*, **46**(2), 61.
- Kotz, S., Lumelskii, Y. and Pensky, M. (2003), *The Stress-Strength Model and its Generalizations*, World Scientific, Singapore.
- Lio, Y., Tsai, T. R., Wang, L. and Tejada, I. P. C. (2022) Inferences of the Multi-component Stress-Strength Reliability for Burr-XII Distributions, *Mathematics*, **10**, 114, 2478.
- Mirjalili, S. M., Torabi, H., Nadeb, H. and Bafekri, S. F. (2016), Stress-Strength Reliability of Exponential Distribution Based on Type-I Progressively Hybrid Censored Samples, *Journal of Statistical Research*, **13**, 89-105.
- Rao, G. S. (2013), Estimation of Reliability in Multicomponent Stress-Strength Based on Inverse Exponential Distribution, *International Journal of Statistics and Economics*, **10**(1), 28-37.
- Shawky, A. I. and Khan, K. (2022), Reliability Estimation in Multicomponent Stress-Strength Based on Inverse Weibull Distribution, *Processes*, **10**(2), 226.
- Yousef, M. M., Hassan, A. S., Alshanbari, H. M., El-Bagoury, A. A. H. and Almetwally, E. M. (2022), Bayesian and Non-Bayesian Analysis of Exponentiated Exponential Stress-Strength Model Based on Generalized Progressive Hybrid Censoring Process, *Axioms*, **11**(9), 455.
- Zhang, L., Xu, A., An, L. and Li, M. (2022), Bayesian Inference of System Reliability for Multicomponent Stress-Strength Model under Marshall-Olkin Weibull Distribution, *Systems*, **10**(6), 196.