



Prediction for Coherent System Lifetime Based on Type-II Censored Data from Half Logistic Distribution

Fallah, A. , Zaman, R. 

Department of Statistics, University of Payame Noor, Tehran, Iran.

Corresponding author: A. Fallah, adelehfallah@pnu.ac.ir

Received: 22/4/2024 Revised: 11/11/2024 Accepted and Published Online: 12/11/2024.

Introduction

Prediction of unobserved or censored observations is an interesting topic, especially from the viewpoint of actuarial, medical, and engineering sciences. In reliability and system lifetime data analysis, the study of coherent systems is one of the essential topics. Researchers and experimenters are interested in learning the lifetime characteristics of the system as well as the lifetime characteristics of the components that make up the system. There are numerous situations in which the lifetimes of k -component coherent systems can be observed, but not the lifetimes of the components, and the prediction of future failures is of interest. In this paper, the prediction of the lifetime of k -component coherent systems is studied using classical and Bayesian approaches, with type-II censored system lifetime data. The system structure and signature are assumed to be known, and the component lifetime distribution follows a half-logistic model.

Material and Methods

Various point predictors, including the maximum likelihood predictor, the best-unbiased predictor, the conditional median predictor, and the Bayesian point predictor under a squared error loss function, are calculated for the coherent system lifetime. Since the integrals required for Bayes prediction do not have closed forms, the Metropolis-Hastings algorithm and importance sampling methods are applied to approximate these integrals. For type-II censored lifetime data, prediction interval based on the pivotal quantity, prediction interval HCD, and Bayesian prediction interval are considered.

Results and Discussion

Comparing the Bayes estimators obtained using the Metropolis-Hastings algorithm and importance sampling methods, we observe that the Metropolis-Hastings algorithm method is better than the importance sampling method. By comparing the classical predictors and the Bayesian predictor, it can be seen that in all coherent systems, the Bayesian predictor performs better than the classical predictors. Also, among the methods for constructing prediction intervals considered here, the pivotal quantity method can provide prediction intervals for all the censored system failures. It gives the best performance in terms of coverage probabilities and average widths.

Conclusion

Using Monte Carlo simulation for several coherent systems, we recommend using the Bayesian predictor for point prediction unless reliable prior information on the unknown parameter is unavailable. For interval prediction, we suggest using the pivotal quantity method to construct prediction intervals for the censored system failures.

Keywords: Coherent system, Half logistic distribution, Point predictors, Prediction intervals, Metropolis-Hastings algorithm.

Mathematics Subject Classification (2010): 62N05, 90B25.



©The Author(s). The Publisher is Iranian Statistical Society.

This is an open access article distributed under the terms and conditions of [\(CC BY-NC 4.0\)](https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/)

پیش‌بینی برای طول عمر سیستم منسجم بر اساس داده‌های سانسور شده نوع دو از توزیع نیمه لجستیک

عادلۀ فلاح، روشنک زمان

گروه آمار، دانشگاه پیام نور، تهران

نویسنده مسئول: عادلۀ فلاح، adelehfallah@pnu.ac.ir

تاریخ دریافت: ۱۴۰۳/۲/۳ تاریخ بازنگری: ۱۴۰۳/۸/۲۱ تاریخ پذیرش و انتشار: ۱۴۰۳/۸/۲۲

چکیده: در این مقاله، پیش‌بینی طول عمر در سیستم‌های منسجم k مولفه‌ای هنگامی که داده‌های طول عمر سیستم، سانسور شده نوع دو هستند، بر اساس رویکردهای کلاسیک و بیزی مورد مطالعه قرار گرفته است. در این سیستم‌های منسجم، فرض می‌شود ساختار و اثر مشخصه سیستم مشخص هستند. همچنین، توزیع طول عمر مولفه‌ها، توزیع نیمه لجستیک است. پیش‌بینی‌کننده‌های نقطه‌ای مختلفی از جمله، پیش‌بینی‌کننده ماکسیم درست‌نمایی، پیش‌بینی‌کننده نااریب، پیش‌بینی‌کننده میانه شرطی و پیش‌بینی‌کننده بیزی تحت تابع زیان مربع خطا برای طول عمر سیستم‌های منسجم محاسبه شده است. از آن جایی که به نظر می‌رسد انتگرال‌های مرتبط با پیش‌بینی بیزی دارای فرم‌های بسته نیستند، از الگوریتم متروپلیس-هستینگز و نمونه‌گیری نقاط مهم برای تقریب این انتگرال‌ها استفاده شده است. همچنین، بر اساس داده‌های طول عمر سیستم سانسور شده نوع دو، فاصله پیش‌بینی بر اساس کمیت محوری، فاصله پیش‌بینی HCD و فاصله پیش‌بینی بیزی برای طول عمر مولفه‌ها نیز مورد بررسی قرار گرفته است. یک مطالعه شبیه‌سازی و یک مثال عددی برای ارزیابی و مقایسه عملکرد روش‌های مختلف پیش‌بینی ارائه شده است. واژه‌های کلیدی: سیستم منسجم، توزیع نیمه لجستیک، پیش‌بینی‌کننده‌های نقطه‌ای، فواصل پیش‌بینی، الگوریتم متروپلیس-هستینگز.

کد موضوع‌بندی ریاضی (۲۰۱۰): 62N02، 90B25.



©نویسندگان). ناشر انجمن آمار ایران است.

این مقاله با دسترسی آزاد تحت شرایط و ضوابط (CC BY-NC 4.0) توزیع شده است.

۱ مقدمه

در آزمایش‌های طول عمر و قابلیت اعتماد، همیشه توزیع طول عمر سیستم و توزیع طول عمر اجزای سازنده سیستم، مورد توجه محققان بوده است. در بسیاری از موارد، طول عمر سیستمی که دارای k مولفه است را می‌توان از طریق آزمایش طول عمر مشاهده کرد اما طول عمر مولفه‌های سیستم را نمی‌توان مشاهده نمود. این مشکل زمانی ایجاد می‌شود که بعد از ساخته شدن سیستم و زمانی که سیستم شروع به فعالیت می‌کند، محققان قادر نخواهند بود مولفه‌های سیستم را به طور جداگانه مورد آزمایش قرار دهند. لذا اطلاعات مربوط به اینکه کدام مولفه منجر به خرابی سیستم شده است معمولاً ناشناخته باقی می‌ماند. زیرا محققان اغلب توانایی شناسایی قطعه خراب را ندارند. در برخی شرایط دنیای واقعی، ما باید بر اساس اطلاعات کمتر تصمیمات مهمی بگیریم، زیرا به دست آوردن اطلاعات بیشتر هزینه منابعی مانند زمان، تلاش و پول را به همراه خواهد داشت. به عنوان مثال، سیستم‌های منسجم پیچیده و مهم از قبیل سفینه‌های فضایی، نیروگاه‌های هسته‌ای و هواپیماهای غول پیکر سرعتی باورنکردنی با ساختار شناخته شده را در نظر بگیرید. اگر اطلاعاتی در مورد طول عمر این سیستم‌های منسجم با ساختار مشابه داشته باشیم، به راحتی می‌توانیم پیش‌بینی و فواصل پیش‌بینی دقیق و کارآمدی را پیدا کنیم. اما این سیستم‌ها گران هستند و دستیابی به اطلاعات پرهزینه خواهد بود. با توجه به این که برخی اطلاعات در مورد طول عمر اجزای سیستم در دسترس است ما علاقمند به یافتن پیش‌بینی و فواصل پیش‌بینی برای طول عمر آینده سیستم هستیم.

در یک آزمایش سانسور شده نوع دوم، n سیستم k مولفه‌ای مستقل با ساختار سیستمی یکسان در معرض آزمایش طول عمر قرار می‌گیرند. آزمایش‌های طول عمر زمانی به پایان می‌رسند که در آن فقط اولین m شکست سیستم ($m \leq n$)، مشاهده شود. داده‌های طول عمر سیستم‌های به دست آمده از چنین آزمایش طول عمر را با $T_{1:n} < \dots < T_{m:n}$ نشان داده و آن را نمونه سانسور شده نوع دو می‌نامند. در این مقاله برای ساده سازی، نمونه سانسور شده نوع دو مشاهده شده، با $t_1 < \dots < t_m$ نشان داده می‌شود. تابع درستنمایی بر اساس یک نمونه سانسور شده نوع دو به صورت

$$L(\mathbf{t}; \lambda) = \frac{n!}{(n-m)!} \prod_{j=1}^m f(t_j; \theta) [1 - F(t_m; \theta)]^{n-m}, \quad (1)$$

است. در این مقاله، پیش‌بینی و فواصل پیش‌بینی برای طول عمر سیستم‌های منسجم k مولفه‌ای که ساختارشان مشخص است و داده‌های طول عمر سیستم سانسور شده نوع دو هستند مورد مطالعه قرار گرفته است. پیش‌بینی‌کننده‌های نقطه‌ای مختلفی از جمله پیش‌بینی‌کننده درستنمایی ماکسیم^۱ (MLP)، پیش‌بینی‌کننده نااریب^۲ (BUP)، پیش‌بینی‌کننده میانه شرطی^۳ (CMP) و پیش‌بینی‌کننده بیزی برای طول عمر سیستم‌های منسجم محاسبه شده است. همچنین،

¹Maximum likelihood predictor

²Best unbiased predictor

³Conditional median predictor

فواصل پیش‌بینی برای $(s+m)$ امین داده‌های طول عمر سیستم سانسور شده نوع دو یعنی، $T' = T_{s+m:n}(s = 1, \dots, n-m)$ بر اساس رویکردهای کلاسیک و بیزی به‌دست آورده می‌شود. ساختار این مقاله به صورت زیر است. در بخش ۲، مفهوم اثر مشخصه سیستم و روابط بین طول عمر سیستم و اجزا ارائه شده است که در بخش‌های بعدی مقاله، از آنها استفاده می‌شود. در بخش ۳، پیش‌بینی طول عمر سیستم‌های منسجم بر اساس رویکردهای کلاسیک و بیزی بحث شده است. در بخش ۴، فواصل پیش‌بینی مختلفی برای $(s+m)$ امین داده‌های طول عمر سیستم سانسور شده نوع دو، بر اساس رویکردهای کلاسیک و بیزی محاسبه شده است. در بخش ۵، یک مثال عددی برای تشریح روش‌های پیش‌بینی استفاده شده ارائه شده است. در بخش ۶، یک شبیه‌سازی مونت کارلو برای مقایسه و بررسی رفتار پیش‌بینی‌کننده‌های نقطه‌ای و فاصله‌ای ارائه شده است. در نهایت، بحث و نتیجه‌گیری به‌ترتیب در بخش ۷ آمده است.

در سال‌های اخیر، استنباط آماری برای توزیع طول عمر مولفه‌ها بر اساس داده‌های طول عمر سیستم زمانی که اثر مشخصه معلوم است، مورد بحث قرار گرفته است. برای اطلاع بیشتر درباره تحقیقات انجام شده می‌توان به سامانیگو (۲۰۰۷)، ناوارو و همکاران (۲۰۰۸)، باتاچاریا و سامانیگو (۲۰۱۰)، ناوارو و رابو (۲۰۱۰)، بالاکریشنان و همکاران (۲۰۱۱)، تونی و همکاران (۲۰۱۲)، زانگ و همکاران (۲۰۱۵)، هرمنس و کرامر (۲۰۱۷)، کالکرانی و راجرشی (۲۰۲۰)، توانگر و اسدی (۲۰۲۰)، ناوارو (۲۰۲۱)، فلاح و همکاران (b,a۲۰۲۱)، فلاح (۲۰۲۳) مراجعه کرد.

۲ مفاهیم اولیه

یک سیستم منسجم k مولفه‌ای را با طول عمر مولفه‌ها $X_1, \dots, X_k$ در نظر بگیرید. فرض کنید در این سیستم طول عمر مولفه‌ها متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع با تابع توزیع مشترک $F_X(\cdot)$ ، تابع چگالی احتمال مشترک $f_X(\cdot)$ و تابع قابلیت اعتماد $\bar{F}_X(\cdot) = 1 - F_X(\cdot)$ باشند. همچنین، فرض کنید T طول عمر این سیستم منسجم k مولفه‌ای با تابع توزیع مشترک $F_T(\cdot)$ ، تابع چگالی احتمال مشترک $f_T(\cdot)$ و تابع قابلیت اعتماد $\bar{F}_T(\cdot) = 1 - F_T(\cdot)$ هستند. سامانیگو (۱۹۸۵) نشان داد که تابع قابلیت اعتماد و تابع چگالی طول عمر سیستم T را می‌توان به صورت‌های

$$\bar{F}_T(t) = \sum_{i=1}^k p_i \sum_{j=0}^{i-1} \binom{k}{j} [F_X(t)]^j [\bar{F}_X(t)]^{k-j},$$

$$f_T(t) = \sum_{i=1}^k p_i \binom{n}{i} i f_X(t) [F_X(t)]^{i-1} [\bar{F}_X(t)]^{k-i}$$

۳۲۰ پیش‌بینی برای طول عمر سیستم منسجم بر اساس داده‌های سانسور شده نوع دو

بیان کرد. بردار k مولفه‌ای $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_k)$ را بردار اثر مشخصه یک سیستم منسجم با طول عمر T گویند، هرگاه مولفه i ام به صورت $i = 1, \dots, k$ ، $p_i = \Pr(T = X_{i:k})$ ، تعریف شود. همچنین، $\sum_{i=1}^k p_i = 1$. شایان ذکر است که $X_{1:k} < \dots < X_{k:k}$ آماره‌های ترتیبی متناظر با طول عمر مولفه‌های این سیستم هستند. **ناوارو و همکاران (۲۰۰۷)** نشان دادند که تابع قابلیت اعتماد و تابع چگالی طول عمر یک سیستم منسجم را می‌توان به صورت

$$\bar{F}_T(t) = \sum_{i=1}^k a_i \bar{F}_{1:i}(t) = \sum_{i=1}^k a_i [\bar{F}_X(t)]^i, \quad (2)$$

$$f_T(t) = \sum_{i=1}^k a_i i f_X(t) [\bar{F}_X(t)]^{i-1}, \quad (3)$$

بیان نمود. که در آن $\bar{F}_{1:i}(t)$ تابع قابلیت اعتماد طول عمر یک سیستم سری با i مولفه است. بردار k مولفه‌ای $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_k)$ را بردار اثر مشخصه مینیمال می‌نامند. مولفه‌های $a_1, \dots, a_k$ اعداد صحیح هستند که وابسته به $F_X(\cdot)$ نبوده و $\sum_{i=1}^k a_i = 1$. برای اطلاع بیشتر درباره تحقیقات انجام شده در زمینه اثر مشخصه و اثر مشخصه مینیمال می‌توان به **ناوارو و رابو (۲۰۱۰)**، **سامانیگو (۲۰۰۷)** و **کوچر و همکاران (۱۹۹۹)** مراجعه کرد. توزیع نیمه لجستیک یکی از توزیع‌های رایج در مدل‌بندی توزیع‌های طول عمر است که کاربردهای فراوانی در تحلیل داده‌های قابلیت دارد. فرض کنید متغیر تصادفی X دارای توزیع نیمه لجستیک با تابع چگالی احتمال به صورت

$$f_X(x) = \frac{2\lambda e^{-\lambda x}}{(1 + e^{-\lambda x})^2} \quad x \geq 0, \quad \lambda > 0. \quad (4)$$

و تابع توزیع تجمعی به صورت

$$F_X(x) = \frac{(1 - e^{-\lambda x})}{(1 + e^{-\lambda x})} \quad x \geq 0, \quad \lambda > 0. \quad (5)$$

است. تابع نرخ خطر نیمه لجستیک

$$h_X(x) = \frac{\lambda}{(1 + e^{-\lambda x})} \quad x \geq 0, \quad \lambda > 0. \quad (6)$$

است که بر حسب x تابعی صعودی است. این ویژگی بیانگر آن است که احتمال خرابی مولفه‌های آزمایشی در فواصل زمانی آینده بیشتر از احتمال خرابی آنها در زمان گذشته است، یعنی مولفه‌ها با گذشت زمان فرسوده می‌شوند و از کارایی آنها کاسته می‌شود. به همین دلیل توزیع نیمه لجستیک، مدل مناسبی در آزمایشات مربوط به طول عمر قطعات مکانیکی که با گذشت زمان فرسوده می‌شوند، است. برای اطلاع بیشتر از تحقیقات انجام شده در زمینه توزیع

نیمه لجستیک می‌توان به بالا کریشان و اصغرزاده (۲۰۰۵)، بالا کریشان و صالح (۲۰۱۱) و اصغرزاده و همکاران (۱۳۹۴) مراجعه کرد. با جایگذاری روابط (۴) و (۶) در روابط (۲) و (۴)، تابع قابلیت اعتماد و تابع چگالی طول عمر سیستم منسجمی که مولفه‌های آن دارای توزیع نیمه لجستیک هستند، به ترتیب به صورت

$$\bar{F}_T(t) = \sum_{i=1}^k \frac{\gamma^i a_i e^{-i\lambda t}}{(1 + e^{-\lambda t})^i}, \quad t \geq 0, \quad \lambda > 0, \quad (7)$$

$$f_T(t) = -\frac{d}{dt} \bar{F}_T(t) = \sum_{i=1}^k \frac{\gamma^i i a_i \lambda e^{-i\lambda t}}{(1 + e^{-\lambda t})^{i+1}}, \quad t \geq 0, \quad \lambda > 0. \quad (8)$$

به دست آورده می‌شوند. با توجه به روابط (۷)، (۸) و (۱) تابع درستنمایی عبارت است از

$$L(\mathbf{t}; \lambda) = \frac{n!}{(n-m)!} \lambda^m \left\{ \prod_{j=1}^m \sum_{i=1}^k \frac{\gamma^i i a_i e^{-i\lambda t_j}}{(1 + e^{-\lambda t_j})^{i+1}} \right\} \left(\sum_{i=1}^k \frac{\gamma^i a_i e^{-i\lambda t_m}}{(1 + e^{-\lambda t_m})^i} \right)^{n-m}, \quad (9)$$

که در آن $t_1, \dots, t_m$ نمونه‌های سانسور شده نوع دو مشاهده شده از داده‌های طول عمر سیستم فوق هستند. با مشتق‌گیری از لگاریتم تابع درستنمایی نسبت به λ ، معادله درستنمایی به صورت

$$\begin{aligned} \frac{d \log L(\mathbf{t}; \lambda)}{d\lambda} &= \frac{m}{\lambda} - \sum_{j=1}^m \left(\frac{A_1(\lambda, t_j) - A_\gamma(\lambda, t_j)}{A_\gamma(\lambda, t_j)} \right) \\ &- (n-m) \left[\frac{A_\gamma(\lambda, t_m) - A_\delta(\lambda, t_m)}{A_\delta(\lambda, t_m)} \right] = 0, \end{aligned} \quad (10)$$

به دست آورده می‌شود، که در آن

$$\begin{aligned} A_1(\lambda, t_j) &= \sum_{i=1}^k \frac{\gamma^i i a_i t_j e^{-i\lambda t_j}}{(1 + e^{-\lambda t_j})^{i+1}}, & A_\gamma(\lambda, t_j) &= \sum_{i=1}^k \frac{\gamma^i i(i+1) a_i t_j e^{-(i+1)\lambda t_j}}{(1 + e^{-\lambda t_j})^{i+2}}, \\ A_\gamma(\lambda, t_j) &= \sum_{i=1}^k \frac{\gamma^i i a_i e^{-i\lambda t_j}}{(1 + e^{-\lambda t_j})^{i+1}}, & A_\gamma(\lambda, t_m) &= \sum_{i=1}^k \frac{\gamma^i i a_i t_m e^{-i\lambda t_m}}{(1 + e^{-\lambda t_m})^i} \\ A_\delta(\lambda, t_m) &= \sum_{i=1}^k \frac{\gamma^i i a_i t_m e^{-(i+1)\lambda t_m}}{(1 + e^{-\lambda t_m})^{i+1}}, & A_\delta(\lambda, t_m) &= \sum_{i=1}^k \frac{\gamma^i a_i e^{-i\lambda t_m}}{(1 + e^{-\lambda t_m})^i}. \end{aligned}$$

با حل معادله (۱۰) به روش‌های عددی مانند نیوتن رافسون و تکراری نقطه ثابت می‌توان برآورد ماکسیمم درستنمایی (MLE) پارامتر λ را محاسبه کرد.

۳ پیش‌بینی‌کننده‌های نقطه‌ای

$T_{1:n}, \dots, T_{m:n}$ یک نمونه سانسور شده نوع دو از یک سیستم منسجم با طول عمر T است. بر اساس خاصیت مارکوفی آماره‌های ترتیبی سانسور شده، توزیع $T' = T_{s+m:n}$ به شرط $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_m)$ برابر است با توزیع T' به شرط $T_{m:n} = t_m$ (برای اطلاع بیشتر کامنسکی و نیلسون (۱۹۹۸) و آرنولد و همکاران (۲۰۰۸) را ملاحظه نمایید). بنابراین توزیع شرطی T' به شرط $T_{m:n} = t_m$ به صورت

$$f(t'|t_m; \lambda) = s \binom{n-m}{s} f(t'; \lambda) [F(t'; \theta) - F(t_m; \lambda)]^{s-1} [1 - F(t'; \lambda)]^{n-m-s} \times [1 - F(t_m; \lambda)]^{-(n-m)}, \quad t' \geq t_m. \quad (11)$$

است. با توجه به روابط (۷)، (۸) و (۱۱) توزیع شرطی T' به شرط t_m عبارت است از

$$f(t'|t_m; \lambda) = s \binom{n-m}{s} \lambda \left(\sum_{i=1}^k \frac{\Psi^i a_i e^{-i\lambda t'}}{(1 + e^{-\lambda t'})^{i+1}} \right) \left(\sum_{i=1}^k \frac{\Psi^i a_i e^{-i\lambda t'}}{(1 + e^{-\lambda t'})^i} \right)^{n-m-s} \times \left[\sum_{i=1}^k \frac{\Psi^i a_i e^{-i\lambda t_m}}{(1 + e^{-\lambda t_m})^i} - \sum_{i=1}^k \frac{\Psi^i a_i e^{-i\lambda t'}}{(1 + e^{-\lambda t'})^i} \right]^{s-1} \times \left(\sum_{i=1}^k \frac{\Psi^i a_i e^{-i\lambda t_m}}{(1 + e^{-\lambda t_m})^i} \right)^{-(n-m)} \quad (12)$$

پیش‌بینی‌کننده‌های کلاسیک: در این بخش، پیش‌بینی‌کننده‌های کلاسیک مختلفی از جمله، پیش‌بینی‌کننده درست‌نمایی ماکسیمم، پیش‌بینی‌کننده نااریب و پیش‌بینی‌کننده میانه شرطی برای طول عمر سیستم‌های منسجم، $T' = T_{s+m:n}$ ($s = 1, \dots, n-m$) به دست آورده می‌شوند.

کامنسکی و رودین (۱۹۸۵)، اصل ماکسیمم درست‌نمایی را برای پیش‌بینی و برآورد توام متغیر تصادفی آینده و پارامتر استفاده شده به کار گرفتند. تابع درست‌نمایی پیش‌بینی‌کننده T' و λ عبارت است از

$$L(T', \lambda | \mathbf{t}) = f(t' | \mathbf{t}; \lambda) L(\mathbf{t}; \lambda) = f(t' | t_m; \lambda) L(\mathbf{t}; \lambda). \quad (13)$$

به طور کلی اگر $\widehat{T'} = u(\mathbf{T})$ و $\widehat{\lambda} = \nu(\mathbf{T})$ آماره‌هایی باشند که

$$L(u(\mathbf{t}), \nu(\mathbf{t}) | \mathbf{t}) = \sup_{(t', \lambda)} L(t', \lambda | \mathbf{t}),$$

آنگاه $u(\mathbf{T})$ ، MLP برای T' و $\nu(\mathbf{T})$ برآورد ماکسیمم درستنمایی پیش‌گویانه^۱ (PMLE)، پارامتر λ نامیده می‌شوند. با توجه به روابط (۹)، (۱۲) و (۱۳)، لگاریتم تابع پیش‌بینی‌کننده درستنمایی به صورت

$$\begin{aligned} \log L(T', \lambda | \mathbf{t}) &= \log \left(\frac{n!}{(s-1)!(n-m-s)!} \right) + (m+1) \log \lambda \\ &+ (s-1) \log \left[\sum_{i=1}^k \frac{\Upsilon^i a_i e^{-i\lambda t_m}}{(\Upsilon + e^{-\lambda t_m})^i} - \sum_{i=1}^k \frac{\Upsilon^i a_i e^{-i\lambda t'}}{(\Upsilon + e^{-\lambda t'})^i} \right] \\ &+ \sum_{j=1}^m \log \left\{ \sum_{i=1}^k \frac{\Upsilon^i i a_i e^{-i\lambda t_j}}{(\Upsilon + e^{-\lambda t_j})^{i+1}} \right\} + \log \left(\sum_{i=1}^k \frac{\Upsilon^i i a_i e^{-i\lambda t'}}{(\Upsilon + e^{-\lambda t'})^{i+1}} \right) \\ &+ (n-m-s) \log \left(\sum_{i=1}^k \frac{\Upsilon^i a_i e^{-i\lambda t'}}{(\Upsilon + e^{-\lambda t'})^i} \right), \end{aligned}$$

به دست آورده می‌شود. معادلات درستنمایی پیش‌بینی‌کننده به صورت‌های

$$\begin{aligned} \frac{\partial \log L(T', \lambda | \mathbf{t})}{\partial t'} &= \lambda \left[\frac{-B_1(\lambda, t') + B_2(\lambda, t')}{A_2(\lambda, t')} \right] + \lambda(s-1) \left[\frac{B_2(\lambda, t') - B_2(\lambda, t')}{A_2(\lambda, t_m) - A_2(\lambda, t')} \right] \\ &- \lambda(n-m-s) \left[\frac{B_2(\lambda, t') - B_2(\lambda, t')}{A_2(\lambda, t')} \right] = 0, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln L(T', \lambda | \mathbf{t})}{\partial \lambda} &= \frac{m+1}{\lambda} - \left(\frac{A_1(\lambda, t') - A_2(\lambda, t')}{A_2(\lambda, t')} \right) - \sum_{j=1}^m \left(\frac{A_1(\lambda, t_j) - A_2(\lambda, t_j)}{A_2(\lambda, t_j)} \right) \\ &+ (s-1) \left[\frac{-A_2(\lambda, t_m) + A_2(\lambda, t_m) + A_2(\lambda, t') - A_2(\lambda, t')}{A_2(\lambda, t_m) - A_2(\lambda, t')} \right] \\ &- (n-m-s) \left(\frac{A_2(\lambda, t') - A_2(\lambda, t')}{A_2(\lambda, t')} \right) = 0, \end{aligned} \quad (15)$$

هستند، که در آن

$$\begin{aligned} B_1(\lambda, t') &= \sum_{i=1}^k \frac{\Upsilon^i i a_i e^{-i\lambda t'}}{(\Upsilon + e^{-\lambda t'})^{i+1}}, & B_2(\lambda, t') &= \sum_{i=1}^k \frac{\Upsilon^i i(i+1) a_i e^{-(i+1)\lambda t'}}{(\Upsilon + e^{-\lambda t'})^{i+2}}, \\ B_2(\lambda, t') &= \sum_{i=1}^k \frac{\Upsilon^i i a_i e^{-i\lambda t'}}{(\Upsilon + e^{-\lambda t'})^i}, & B_2(\lambda, t') &= \sum_{i=1}^k \frac{\Upsilon^i i a_i e^{-(i+1)\lambda t'}}{(\Upsilon + e^{-\lambda t'})^{i+1}}, \\ B_2(\lambda, t') &= \sum_{i=1}^k \frac{\Upsilon^i i a_i e^{-i\lambda t'}}{(\Upsilon + e^{-\lambda t'})^i}, & B_2(\lambda, t') &= \sum_{i=1}^k \frac{\Upsilon^i i a_i e^{-(i+1)\lambda t'}}{(\Upsilon + e^{-\lambda t'})^{i+1}}. \end{aligned}$$

¹Predictive maximum likelihood estimator

۳۲۴ پیش‌بینی برای طول عمر سیستم منسجم بر اساس داده‌های سانسور شده نوع دو

همانطور که مشاهده می‌شود، با استفاده از معادلات درستنمایی پیش‌بینی‌کننده، جواب صریحی برای PMLE پارامتر λ و همچنین MLP، T' به دست نمی‌آیند. توجه شود که برای حل معادلات غیر خطی (۱۲) و (۱۳) از بسته نرم افزاری nleqslv، هیسلمن (۲۰۱۸) و همچنین دستور optim() در نرم افزار R استفاده شده است. آماره $\widehat{T'}$ دارای خطای پیش‌بینی صفر و واریانس خطای پیش‌بینی کمتر یا مساوی واریانس هر پیش‌بینی‌کننده نااریب T' است، بهترین پیش‌بینی‌کننده نااریب (BUP) برای T' نامیده می‌شود. با استفاده از رابطه (۱۲) بهترین پیش‌بینی‌کننده نااریب، از حل معادله

$$\widehat{T'}_{BUP} = E_{\lambda}(T'|t) = E_{\lambda}(T'|t_m) = \int_{t_m}^{\infty} t' f(t'|t_m; \lambda) dt'$$

حاصل می‌شود. در صورت نامعلوم بودن λ می‌توان از برآورد ماکسیمم درستنمایی آن استفاده کرد.

پیش‌بینی‌کننده میانه شرطی (CMP) که اولین بار توسط راکب و ناگاراچا (۱۹۹۵) ارائه شد، میانه تابع چگالی شرطی T' به شرط t_m است. یعنی،

$$Pr_{\lambda}(T' \leq \widehat{T'}|t_m) = Pr_{\lambda}(T' \geq \widehat{T'}|t_m).$$

با تعریف متغیر تصادفی $Z = \frac{1-F(t'; \lambda)}{1-F(t_m; \lambda)}$ ، چگالی شرطی T' به شرط t_m را می‌توان به صورت

$$\begin{aligned} f(t'|t_m; \lambda) &= s \binom{n-m}{s} f(t'; \lambda) [1 - F(t_m; \lambda)]^{-1} \left[\frac{1 - F(t'; \lambda)}{1 - F(t_m; \lambda)} \right]^{n-m-s} \\ &\times \left[1 - \frac{1 - F(t'; \lambda)}{1 - F(t_m; \lambda)} \right]^{s-1}, \end{aligned}$$

باز نویسی کرد. بنابراین، به سادگی می‌توان نشان داد که توزیع شرطی Z به شرط t_m به صورت

$$f(z|t_m) = s \binom{n-m}{s} z^{n-m-s} (1-z)^{s-1},$$

محاسبه می‌شود. در نتیجه

$$z = \frac{\sum_{i=1}^k \frac{y^i a_i e^{-i\lambda \widehat{T'}}}{(1+e^{-\lambda \widehat{T'}})^i}}{\sum_{i=1}^k \frac{y^i a_i e^{-i\lambda t_m}}{(1+e^{-\lambda t_m})^i}} = Med(B),$$

که در آن $Med(B)$ میانه توزیع بتای $Beta(n - m - s + 1, s)$ است. بنابراین، CMP برای

$T' = T_{s+m:n}$ ($s = 1, \dots, n - m$) از حل معادله غیر خطی

$$\left(\sum_{i=1}^k \frac{r^i a_i e^{-i\lambda \widehat{T}'}}{(1 + e^{-\lambda \widehat{T}'})^i} \right) - \left(\sum_{i=1}^k \frac{r^i a_i e^{-i\lambda t_m}}{(1 + e^{-\lambda t_m})^i} \right) Med(B) = 0, \quad (16)$$

حاصل می‌شود، که با استفاده از دستور uniroot() در نرم افزار R قابل انجام است.

پیش‌بینی‌کننده بیزی: در این بخش، پیش‌بینی بیزی برای طول عمر سیستم‌های منسجم تحت تابع زیان متقارن مربع خطا به‌دست آورده می‌شود. برای پیش‌بینی بیزی، توزیع پیشین مناسبی برای پارامتر λ در نظر گرفته می‌شود. فرض کنید λ دارای توزیع پیشین گاما با پارامترهای α و β و تابع چگالی احتمال

$$\pi(\lambda) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \lambda^{\alpha-1} e^{-\beta\lambda}, \quad \lambda > 0, \beta > 0, \alpha > 0, \quad (17)$$

است، که در آن α و β مقادیر مثبت و معلوم هستند. توزیع پیشین گاما یک توزیع انعطاف‌پذیر است، زیرا با انتخاب مقادیر مناسبی از α و β توزیع پیشین آگاهی بخش و توزیع پیشین ناآگاهی بخش حاصل می‌شود. با توجه به (۹) و (۱۷)، تابع چگالی پسین θ به‌صورت

$$\pi(\lambda|\mathbf{t}) = \frac{\lambda^{m+\alpha-1}}{m(\mathbf{t})} e^{-\beta\lambda} \left\{ \prod_{j=1}^m \sum_{i=1}^k \frac{r^i i a_i e^{-i\lambda t_j}}{(1 + e^{-\lambda t_j})^{i+1}} \right\} \left(\sum_{i=1}^k \frac{r^i a_i e^{-i\lambda t_m}}{(1 + e^{-\lambda t_m})^i} \right)^{n-m}, \quad (18)$$

محاسبه می‌شود، که

$$m(\mathbf{t}) = \int_0^\infty \lambda^{m+\alpha-1} e^{-\beta\lambda} \left\{ \prod_{j=1}^m \sum_{i=1}^k \frac{r^i i a_i e^{-i\lambda t_j}}{(1 + e^{-\lambda t_j})^{i+1}} \right\} \left(\sum_{i=1}^k \frac{r^i a_i e^{-i\lambda t_m}}{(1 + e^{-\lambda t_m})^i} \right)^{n-m} d\lambda.$$

تابع چگالی احتمال پیش‌بینی‌کننده بیزی برای $t' > t_m$ عبارت است از

$$f^*(t'|t_m) = \int_0^\infty f(t'|t_m; \lambda) \pi(\lambda|t) d\lambda. \quad (19)$$

پیش‌بینی بیزی $T' = T_{s+m:n}$, ($s = 1, \dots, n - m$) تحت تابع زیان مربع خطا به‌صورت

$$T'_{Bayes} = \int_{t_m}^\infty t' f^*(t'|t_m) dt' = \int_0^\infty I_1(t_m; \lambda) \pi(\lambda|t) d\lambda, \quad (20)$$

ارائه می‌شود، که در آن $I_1(t_m; \lambda) = \int_{t_m}^\infty t' f(t'|t_m; \lambda) dt'$. به دلیل پیچیدگی تابع چگالی پیش‌بینی‌کننده

۳۲۶ پیش‌بینی برای طول عمر سیستم منسجم بر اساس داده‌های سانسور شده نوع دو

بیزی $f^*(t'|t_m)$ ، پیش‌بینی‌کننده بیزی در رابطه (۱۹) به صورت ساده و صریح به دست آورده نمی‌شود. بنابراین، برای برآورد تابع چگالی پیش‌بینی‌کننده بیزی $f^*(t'|t_m)$ از روش زنجیر مارکوف مونت کارلو^۱ (MCMC) و روش نمونه‌گیری نقاط مهم استفاده شده است. در روش MCMC، الگوریتم متروپلیس-هستینگز به کار برده شده است.

الگوریتم ۱. الگوریتم متروپلیس-هستینگز برای تولید از چگالی پسین: (رابرت و کسلا، ۲۰۰۴)

گام ۱- مقدار اولیه $\lambda^{(۰)}$ را برای پارامتر λ در نظر بگیرید. مقدار اولیه را می‌توان برآورد ماکسیمم درستنمایی در نظر گرفت.

گام ۲- قرار دهید $q = ۱$.

گام ۳- با الگوریتم متروپلیس-هستینگز $\lambda^{(q)}$ از $\pi(\lambda^{(q-۱)}|y)$ با توزیع پیشنهادی $N(\lambda^{(q-۱)}, S_\lambda^2)$ تولید می‌شود. که در آن S_λ^2 معکوس اطلاع فشر است.

گام ۴- قرار دهید $q = q + ۱$.

گام ۵- گام‌های ۲ و ۳ را N بار تکرار کنید تا نمونه $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ تولید شود.

در نتیجه، بر اساس رابطه (۱۹) برآورد تابع چگالی پیش‌بینی‌کننده بیزی $f^*(t'|t_m)$ ، به صورت

$$\hat{f}^*(t'|t_m) = \frac{1}{N-M} \sum_{q=M+1}^N f(t'|t_m; \lambda_q), \quad (21)$$

به دست آورده می‌شود. که M تعداد θ های سوخته است. با استفاده از روابط (۲۰) و (۲۱)، پیش‌بینی‌کننده بیزی برای $T' = T_{s+m:n}$, ($s = 1, \dots, n-m$) تحت تابع زیان مربع خطا به صورت

$$\widehat{T'}_{Bayes} = \int_{t_m}^{\infty} t' \hat{f}^*(t'|t_m) dt' = \frac{1}{N-M} \sum_{q=M+1}^N I_1(t_m; \lambda_q).$$

محاسبه می‌شود. برای محاسبه برآورد بیز به روش الگوریتم متروپلیس-هستینگز از بسته نرم افزاری MHadaptive، **چپورس** (۲۰۰۲) در نرم افزار R استفاده شده است.

روش نمونه‌گیری نقاط مهم: تابع احتمال پسین پارامتر λ که در رابطه (۱۶) داده شده است، را می‌توان به صورت

$$\pi(\lambda|\mathbf{t}) \propto g(\lambda|\mathbf{t})h(\lambda, \mathbf{t}), \quad (22)$$

¹Markov chain Monte Carlo

نوشت، که در آن تابع چگالی توزیع $g(\lambda|\mathbf{t})$ تابع چگالی توزیع $Gamma(m + \alpha, \beta + \sum_{j=1}^m t_j + (n - m)t_m)$ و

$$h(\lambda, \mathbf{t}) = \left\{ \prod_{j=1}^m \sum_{i=1}^k \frac{\gamma^i a_i e^{-(i-1)\lambda t_j}}{(1 + e^{-\lambda t_j})^{i+1}} \right\} \left(\sum_{i=1}^k \frac{\gamma^i a_i e^{-(i-1)\lambda t_m}}{(1 + e^{-\lambda t_m})^i} \right)^{n-m}.$$

هستند. بر اساس رابطه (۱۹)، تابع چگالی احتمال پیش‌بینی‌کننده بیزی به صورت

$$f^*(t'|t_m) = \int_0^\infty f(t'|t_m; \lambda) g(\lambda|\mathbf{t}) h(\lambda, \mathbf{t}). \quad (23)$$

ارائه می‌شود، که به دلیل پیچیدگی الگوریتم تولید نمونه‌ها با استفاده از روش نمونه‌گیری نقاط مهم به صورت زیر بیان می‌شود (کامرون و تریودی، ۲۰۰۵).

الگوریتم ۲. الگوریتم تولید نمونه‌ها از چگالی پسین با روش نمونه‌گیری نقاط مهم:
 گام ۱- ابتدا λ از توزیع $Gamma(m + \alpha, \beta + \sum_{j=1}^m t_j + (n - m)t_m)$ تولید شود.
 گام ۲- N بار تکرار شود تا نمونه $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ به دست آورده شود.
 گام ۳- برای $q = 1, \dots, N$ برآورد تابع چگالی پیش‌بینی‌کننده بیزی عبارت است از

$$\hat{f}^*(t'|t_m) = \frac{\sum_{q=1}^N f(t'|t_m; \lambda_q) h(\lambda_q, \mathbf{t})}{\sum_{q=1}^N h(\lambda_q, \mathbf{t})}. \quad (24)$$

بر اساس روابط (۲۰) و (۲۴)، پیش‌بینی‌کننده بیزی برای $T' = T_{s+m:n}$ ($s = 1, \dots, n - m$) تحت تابع زیان مربع خطا به صورت زیر به دست آورده می‌شود.

$$\widehat{T'}_{Bayes} = \frac{\sum_{q=1}^N I_1(t_m; \lambda_q) h(\lambda_q, \mathbf{t})}{\sum_{q=1}^N h(\lambda_q, \mathbf{t})},$$

۴ فواصل پیش‌بینی

در این بخش، فواصل پیش‌بینی برای $(s + m)$ امین داده‌های طول عمر سیستم سانسور شده نوع دو یعنی $T' = T_{s+m:n}$ ($s = 1, \dots, n - m$) به دست آورده می‌شود.

فاصله پیش‌بینی با روش محوری: متغیر تصادفی Z ، به شرط t_m دارای توزیع $Beta(n - m - s + 1, s)$ است، بنابراین Z ، یک کمیت محوری است و با استفاده از آن، بک فاصله پیش‌بینی $\% (1 - \gamma) 100$ برای T' از

۳۲۸ پیش‌بینی برای طول عمر سیستم منسجم بر اساس داده‌های سانسور شده نوع دو

رابطه

$$\Pr(B_{\frac{\gamma}{2}} < Z < B_{1-\frac{\gamma}{2}} | T_{m:n} = t_m) = 1 - \gamma \quad (25)$$

به‌دست می‌آید، که در آن B_γ چندک بالای 100γ درصد از توزیع $Beta(n-m-s+1, s)$ است. کران‌های پایین و بالای این فاصله به صورت $(L_1(\mathbf{T}), U_1(\mathbf{T}))$ هستند که به‌ترتیب از حل معادلات زیر به‌دست آورده می‌شوند.

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{i=1}^k \frac{\gamma^i a_i e^{-i\lambda t_m}}{(1 + e^{-\lambda t_m})^i} \right) B_{\frac{\gamma}{2}} - \left(\sum_{i=1}^k \frac{\gamma^i a_i e^{-i\lambda L_1(\mathbf{T})}}{(1 + e^{-\lambda L_1(\mathbf{T})})^i} \right) = 0, \\ & \left(\sum_{i=1}^k \frac{\gamma^i a_i e^{-i\lambda t_m}}{(1 + e^{-\lambda t_m})^i} \right) B_{1-\frac{\gamma}{2}} - \left(\sum_{i=1}^k \frac{\gamma^i a_i e^{-i\lambda U_1(\mathbf{T})}}{(1 + e^{-\lambda U_1(\mathbf{T})})^i} \right) = 0. \end{aligned}$$

فاصله پیش‌بینی بالاترین چگالی شرطی: فاصله $[w_1, w_2]$ یک فاصله پیش‌بینی HCD، در سطح $(1-\gamma)$ است هرگاه $[0, 1] \supset \{w : w \in [0, 1], f(w|t_m) \geq k\} \subset [0, 1]$ و برای بعضی $k > 0$ داشته باشیم:

$$\int_{w_1}^{w_2} f(z|t_m) dz = 1 - \gamma.$$

تابع Z به شرط t_m دارای توزیع $Beta(n-m-s+1, s)$ است و برای $1 < s < n-m$ ، یک تابع تک مدی است و حداکثر مقدار این تابع در $(0, 1)$ $\xi = (s-1)/(n-m-1) \in (0, 1)$ به‌دست می‌آید. بنابراین روش HCD، مستلزم یافتن دو نقطه $w_1 = w_{\gamma/2} \leq \xi \leq w_2 = w_{1-\gamma/2}$ تحت عنوان صدکهای $(\gamma/2)$ درصد و $(1-\gamma/2)$ درصد است که به ترتیب در روابط

$$\int_{w_1}^{w_2} f(z|t_m) dz = 1 - \gamma, \quad f(w_1|t_m) = f(w_2|t_m). \quad (26)$$

صدق کند (برگر، ۱۹۸۵؛ کسلا و برگر، ۲۰۰۲). همچنین، روابط (۲۶) را می‌توان به‌صورت

$$B_{w_2}(n-m-s+1, s) - B_{w_1}(n-m-s+1, s) = 1 - \gamma,$$

$$\text{و } \left(\frac{1-w_2}{1-w_1} \right)^{s-1} = \left(\frac{w_1}{w_2} \right)^{n-m-s}$$

$$B_t(a, b) = \frac{1}{B(a, b)} \int_0^t x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx$$

توزیع بتای ناقص است. فاصله پیش‌بینی $\% (1 - \gamma) 100$ برای T' بر اساس روش HCD، عبارت است از $(L_r(\mathbf{T}), U_r(\mathbf{T}))$ ، که کران‌های پایین و بالای آن به‌ترتیب از معادلات زیر به‌دست آورده می‌شوند.

$$\left(\sum_{i=1}^k \frac{\gamma^i a_i e^{-i\lambda t_m}}{(1 + e^{-\lambda t_m})^i} \right) w_1 - \left(\sum_{i=1}^k \frac{\gamma^i a_i e^{-i\lambda L_r(\mathbf{T})}}{(1 + e^{-\lambda L_r(\mathbf{T})})^i} \right) = 0,$$

$$\left(\sum_{i=1}^k \frac{\gamma^i a_i e^{-i\lambda t_m}}{(1 + e^{-\lambda t_m})^i} \right) w_2 - \left(\sum_{i=1}^k \frac{\gamma^i a_i e^{-i\lambda U_r(\mathbf{T})}}{(1 + e^{-\lambda U_r(\mathbf{T})})^i} \right) = 0.$$

توجه شود که برای $s = 1$ و $s = n - m$ تابع $f(z|t_m)$ تک مدی نخواهد بود و فاصله پیش‌بینی HCD برای این حالت‌ها محاسبه نمی‌شود.

فاصله پیش‌بینی بیزی: فاصله پیش‌بینی بیزی $\% (1 - \gamma) 100$ برای $(s + m)$ امین داده‌های طول عمر سیستم سانسور شده نوع دو عبارت است از $(L(t_m), U(t_m))$ ، که مقادیر $L(t_m)$ و $U(t_m)$ کران پایین و کران بالای فاصله پیش‌بینی بیزی به‌ترتیب از حل معادلات زیر به‌دست آورده می‌شوند.

$$\Pr(T' > L(t_m)|t_m) = \int_{L(t_m)}^{\infty} f^*(t'|t_m) dt' = 1 - \frac{\gamma}{\gamma}, \quad (27)$$

$$\Pr(T' > U(t_m)|t_m) = \int_{U(t_m)}^{\infty} f^*(t'|t_m) dt' = \frac{\gamma}{\gamma}, \quad (28)$$

با استفاده از نمونه‌های تولید شده توسط الگوریتم متروپلیس-هستینگز و برآورد تابع چگالی پیش‌بینی بیزی $f^*(t'|t_m)$ رابطه (۲۱)، کران‌های پایین و بالای فاصله پیش‌بینی به‌ترتیب از حل معادلات

$$1 - \frac{\gamma}{\gamma} = \frac{1}{N - M} \sum_{q=M+1}^N \int_{L(t_m)}^{\infty} f(t'|t_m; \lambda_q) dt',$$

$$\frac{\gamma}{\gamma} = \frac{1}{N - M} \sum_{q=M+1}^N \int_{U(t_m)}^{\infty} f(t'|t_m; \lambda_q) dt'.$$

به‌دست آورده می‌شوند. به طور مشابه، برآورد تابع چگالی پیش‌بینی‌کننده بیزی $f^*(t'|t_m)$ به کمک روش نمونه‌گیری نقاط مهم از رابطه (۲۴) به دست آمده است. در نتیجه، با استفاده از روابط (۲۷) و (۲۸) کران‌های پایین

۳۳۰ پیش‌بینی برای طول عمر سیستم منسجم بر اساس داده‌های سانسور شده نوع دو

و بالای فاصله پیش‌بینی به‌ترتیب از حل معادلات

$$1 - \frac{\gamma}{2} = \frac{\sum_{q=1}^N I_2(L(t_m); \lambda_q) h(\lambda_q, t)}{\sum_{i=1}^N h(\lambda_q, t)},$$

$$\frac{\gamma}{2} = \frac{\sum_{q=1}^N I_2(U(t_m); \lambda_q) h(\lambda_q, t)}{\sum_{i=1}^N h(\lambda_q, t)},$$

به‌دست آورده می‌شوند، که در آن $I_2(Len; \lambda) = \int_{Len}^{\infty} f(t'|t_m; \lambda) dt'$ توجه شود که برای محاسبه فواصل پیش‌بینی از دستور `uniroot()` در نرم افزار R استفاده شده است.

۵ محاسبه و ارزیابی برآوردها

n سیستم منسجم k مولفه‌ای مستقل با ساختار سیستمی یکسان و اثر مشخصه $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_k)$ را در نظر بگیرید. فرض کنید $X_1, \dots, X_k$ طول عمر مولفه‌های سیستم فوق هستند، به طوری که مولفه‌های این سیستم، مستقل و هم‌توزیع و دارای توزیع نیمه لجستیک هستند. الگوریتم زیر نحوه تولید داده‌های طول عمر سیستم $T_1, \dots, T_m$ را نشان می‌دهد (فلاح و همکاران، ۱۴۰۲a).

الگوریتم ۳. تولید داده‌های طول عمر سیستم :

گام ۱- $u_1, \dots, u_k$ از توزیع $U(0, 1)$ تولید شوند.

گام ۲- برای $i = 1, \dots, k$ ، X_i که بیانگر طول عمر مولفه‌های سیستم منسجم هستند از تابع توزیع $X_i = \frac{-1}{\lambda} \log\left(\frac{1-u_i}{1+u_i}\right)$ تولید شوند.

گام ۳- $X_1, \dots, X_k$ به صورت صعودی $X_{1:k} < \dots < X_{k:k}$ مرتب شوند.

گام ۴- برای هر i که $\sum_{i=1}^{j-1} p_i < u < \sum_{i=1}^j p_i$ ، $j = 1, \dots, k$ ، قرار دهید $T = X_{j:k}$ یعنی،

$$T = \begin{cases} X_{1:k} & 0 < u < p_1, \\ X_{2:k} & p_1 < u < p_1 + p_2, \\ \vdots & \vdots \\ X_{k:k} & \sum_{i=1}^{k-1} p_i < u < \sum_{i=1}^k p_i. \end{cases}$$

گام ۵- از n بار تکرار گام‌های ۱ تا گام ۴ داده‌های طول عمر سیستم منسجم $T_1, \dots, T_n$ به‌دست آیند.

مثال ۱. یک سیستم منسجم ۴ مولفه‌ای را در نظر بگیرید. طول عمر این سیستم عبارت است از

$$T = \min\{X_1, \max\{X_2, X_3\}, \max\{X_2, X_4\}\},$$

که در آن X_i طول عمر مولفه i است ($i = 1, 2, 3, 4$). اثر مشخصه و اثر مشخصه مینمال این سیستم منسجم به‌ترتیب عبارتند از $\mathbf{p} = (1/4, 7/12, 1/6, 0)$ و $\mathbf{a} = (0, 1, 1, -1)$. با استفاده از الگوریتم تولید داده‌های طول عمر سیستم، یک نمونه به حجم $n = 30$ از این سیستم منسجم تولید می‌شود. فرض می‌شود مولفه‌های طول عمر این سیستم منسجم مستقل و هم‌توزیع با توزیع نیمه لجستیک با پارامتر $\lambda = 1$ هستند. داده‌های طول عمر سیستم تولید شده عبارتند از:

۰/۴۷۷۸	۰/۴۳۵۹	۰/۲۸۷۲	۰/۲۲۲۶	۰/۱۲۳۴	۰/۰۲۱۹	۰/۰۱۰۰	۰/۰۰۰۶
۰/۸۳۶۵	۰/۸۰۴۱	۰/۷۸۴۰	۰/۷۶۷۵	۰/۷۲۵۴	۰/۷۰۹۹	۰/۵۱۲۲	۰/۴۷۷۹
۱/۳۰۷۸	۱/۲۴۰۷	۱/۱۶۴۷	۱/۱۱۷۶	۱/۰۲۲۵	۰/۹۶۲۲	۰/۸۸۶۲	۰/۸۶۷۴
۲/۸۰۵۴	۲/۵۴۷۸	۲/۰۶۴۹	۱/۴۶۷۰	۱/۴۶۵۶	۱/۴۴۷۰		

برای نمونه‌های طول عمر سیستم تولید شده، اولین m مشاهده اول را در نظر گرفته تا نمونه‌های سانسور نوع دو از داده‌های طول عمر این سیستم به‌دست آیند. بنابراین، برای $m = 20$ نمونه‌های سانسور شده نوع دو مشاهده شده عبارتند از:

۰/۴۷۷۸	۰/۴۳۵۹	۰/۲۸۷۲	۰/۲۲۲۶	۰/۱۲۳۴	۰/۰۲۱۹	۰/۰۱۰۰	۰/۰۰۰۶
۰/۸۳۶۵	۰/۸۰۴۱	۰/۷۸۴۰	۰/۷۶۷۵	۰/۷۲۵۴	۰/۷۰۹۹	۰/۵۱۲۲	۰/۴۷۷۹
				۱/۰۲۲۵	۰/۹۶۲۲	۰/۸۸۶۲	۰/۸۶۷۴

برای تشریح نتایج به‌دست آمده در بخش‌های ۳ و ۳، پیش‌بینی‌کننده‌های نقطه‌ای و فاصله‌ای مختلفی برای طول عمر سیستم‌های منسجم $T' = T_{s+m:n}, (s = 1, \dots, n-m)$ به‌دست آمده است. نتایج در جداول ۱ و ۲ گزارش شده است. از آنجایی که هیچ اطلاعی درباره توزیع پیشین نداریم، برای محاسبه پیش‌بینی‌های بیزی از توزیع پیشین ناآگاهی بخش، $\alpha = \beta = 0$ استفاده شده است. در الگوریتم متروپلیس-هستینگز مقدار اولیه $\lambda^{(0)} = 0/9749$ ، برآورد ماکسیمم درست‌نمایی و S_λ^2 واریانس توزیع پیشنهادی، معکوس اطلاع فیشر در نظر گرفته شده است. با استفاده از الگوریتم فوق نمونه‌ای به حجم $N = 50000$ تا از λ ها با $S_\lambda^2 = 0/0027$ و درصد پذیرش % ۷۰ تولید شده است. برای از بین بردن اثر نقاط آغازین، $M = 5000$ نمونه اولیه حذف شده است. بنابراین برای پیش‌بینی‌کننده‌های بیزی از $N - M = 45000$ ، λ تولید شده استفاده شده است. هیستوگرام زنجیره دنباله λ های به‌دست آمده از الگوریتم متروپلیس-هستینگز در شکل ۱ ارائه شده است. این نمودار نشان می‌دهد که انتخاب توزیع نرمال به عنوان تقریبی از تابع چگالی پسین و توزیع پیشنهادی انتخابی کاملاً مناسب است. برای بررسی همگرایی زنجیره‌های تولید شده در الگوریتم از نمودار اثر استفاده شده است. این نمودار نشان می‌دهد که مقادیر λ های تولید شده در

۳۳۲ پیش‌بینی برای طول عمر سیستم منسجم بر اساس داده‌های سانسور شده نوع دو

الگوریتم متروپولیس-هستینگز به طور تصادفی در اطراف میانگین پراکنده شده‌اند. توجه شود در مثال فوق، برای بررسی وجودیت و یکتایی برآورد ماکسیمم درست‌نمایی پارامتر λ ، نمودار تابع لگاریتم ماکسیمم درست‌نمایی $L(\lambda)$ رسم شده است. شکل ۲ نشان می‌دهد که تابع لگاریتم ماکسیمم درست‌نمایی در بازه $(0, \infty)$ یک تابع تک مدی است و لذا برآورد ماکسیمم درست‌نمایی وجود دارد و یکتاست. همچنین برای اثبات و وجودیت پیش‌بینی‌کننده میانه شرطی (CMP) معادله (۱۶) را برابر با $K(T')$ در نظر گرفته و برای مثال فوق، نمودار تابع $K(T')$ رسم شده است. شکل ۲ نیز نشان می‌دهد که تابع $K(T')$ در بازه $(0, \infty)$ یک تابع نزولی از مقداری مثبت به مقداری منفی است. لذا پیش‌بینی‌کننده میانه شرطی که از حل معادله $K(T') = 0$ بدست می‌آید، وجود دارد و یکتاست.

جدول ۱. پیش‌بینی‌کننده‌های نقطه‌ای برای طول عمر سیستم‌های منسجم

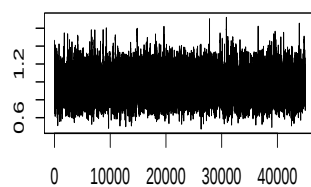
s	Exact	PMLE	MLP	BUP	CMP	روش بیزی	
						نمونه‌گیری نقاط مهم	متروپولیس-هستینگز
۱	۱/۱۱۷۶	۱/۰۱۰۸	۱/۰۲۲۵	۱/۰۹۱۹	۱/۰۶۹۷	۱/۰۹۵۶	۱/۰۸۴۷
۲	۱/۱۶۴۷	۱/۰۰۹۴	۱/۰۹۴۹	۱/۱۶۶۹	۱/۱۴۱۳	۱/۱۷۵۵	۱/۱۵۲۰
۳	۱/۲۴۰۷	۱/۰۰۸۱	۱/۱۷۳۵	۱/۲۴۹۰	۱/۲۲۰۳	۱/۲۶۲۰	۱/۲۲۵۰
۴	۱/۳۰۷۸	۱/۰۰۷۰	۱/۲۵۹۹	۱/۳۴۰۳	۱/۳۰۷۹	۱/۳۵۷۶	۱/۳۰۸۲
۵	۱/۴۴۷۰	۱/۰۰۶۱	۱/۳۵۶۸	۱/۴۴۳۸	۱/۴۰۹۶	۱/۴۶۵۴	۱/۴۰۱۲
۶	۱/۴۶۵۶	۱/۰۰۵۰	۱/۴۶۷۹	۱/۵۶۴۶	۱/۵۲۱۹	۱/۵۹۲۲	۱/۵۱۰۳
۷	۱/۴۶۷۰	۱/۰۰۴۰	۱/۶۰۰۱	۱/۷۱۱۲	۱/۶۶۰۵	۱/۷۴۴۲	۱/۶۴۳۰
۸	۲/۰۶۴۹	۱/۰۰۳۰	۱/۷۶۴۸	۱/۹۰۱۰	۱/۸۳۷۹	۱/۹۴۴۶	۱/۸۱۶۲
۹	۲/۵۴۷۸	۱/۰۰۲۰	۱/۸۸۹۹	۲/۱۷۶۹	۲/۰۹۰۴	۲/۲۲۴۸	۲/۰۶۸۳
۱۰	۲/۸۰۵۴	۱/۰۰۱۲	۲/۳۶۱۳	۲/۷۱۰۳	۲/۵۵۳۶	۲/۷۸۵۴	۲/۵۵۸۴

۶ مطالعه شبیه‌سازی

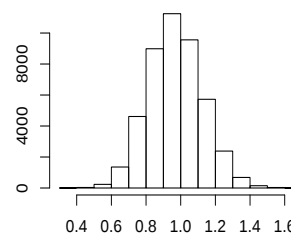
در این بخش، یک مطالعه شبیه‌سازی به منظور مقایسه و بررسی عملکرد پیش‌بینی‌کننده‌های نقطه‌ای و فاصله‌ای کلاسیک و بیزی پیشنهاد شده در این مقاله ارائه می‌گردد. با استفاده از الگوریتم تولید داده‌های طول عمر سیستم، نمونه‌های سانسور نوع دو از داده‌های طول عمر سیستم منسجم $T_1, \dots, T_m$ تولید می‌شود. در این شبیه‌سازی، سه سیستم منسجم ۴ مولفه‌ای با اثر مشخصه و اثر مشخصه مینیمال معلوم را انتخاب نموده که در جدول ۳ گزارش شده است. همچنین، مولفه‌های سیستم مستقل و هم‌توزیع با توزیع نیمه لجستیک با پارامتر $\lambda = 3$ هستند. پیش‌بینی‌کننده‌های نقطه‌ای و فاصله‌ای مختلفی برای پیش‌بینی طول عمر سیستم به‌دست آمده است. برای محاسبه پیش‌بینی بیزی از توزیع پیشین ناآگاهی بخش، $\alpha = \beta = 0$ استفاده شده است. برای هر سیستم منسجم، شبیه‌سازی

جدول ۲. فواصل پیش‌بینی برای داده‌های طول عمر سیستم

s	روش محوری	HCD	روش بیزی	
			نمونه‌گیری نقاط مهم	متروپولیس-هستینگز
۱	(۱/۰۲۴, ۱/۲۶۴)	—	(۱/۰۲۴, ۱/۳۰۹)	(۱/۰۲۴, ۱/۲۵۷)
۲	(۱/۰۴۰, ۱/۳۹۹)	(۱/۰۲۷, ۱/۳۵۰)	(۱/۰۴۰, ۱/۴۷۰)	(۱/۰۳۷, ۱/۴۰۱)
۳	(۱/۰۶۹, ۱/۵۳۲)	(۱/۰۵۵, ۱/۴۸۹)	(۱/۰۶۹, ۱/۶۰۴)	(۱/۰۶۲, ۱/۵۴۷)
۴	(۱/۱۱۰, ۱/۶۷۲)	(۱/۰۹۸, ۱/۶۴۲)	(۱/۱۱۱, ۱/۸۱۳)	(۱/۰۹۴, ۱/۶۹۰)
۵	(۱/۱۶۱, ۱/۸۲۹)	(۱/۱۵۶, ۱/۸۱۷)	(۱/۱۵۹, ۱/۹۸۷)	(۱/۱۳۸, ۱/۸۷۴)
۶	(۱/۲۲۳, ۲/۰۱۴)	(۱/۲۲۸, ۲/۰۳)	(۱/۲۲۱, ۲/۲۳۸)	(۱/۱۸۶, ۲/۰۴۷)
۷	(۱/۳۰۰, ۲/۲۴۳)	(۱/۳۱۹, ۲/۳۱۱)	(۱/۲۹۸, ۲/۵۲۱)	(۱/۲۵۳, ۲/۳۰۳)
۸	(۱/۳۹۸, ۲/۵۵۵)	((۱/۴۳۵, ۲/۷۴۱))	(۱/۳۹۶, ۲/۸۳۲)	(۱/۳۳۲, ۲/۶۱۸)
۹	(۱/۵۳۰, ۳/۰۵۲)	(۱/۵۹۵, ۳/۶۷۶)	(۱/۴۹۹, ۳/۳۴۵)	(۱/۴۳۵, ۳/۱۰۸)
۱۰	(۱/۷۳۹, ۴/۲۰۷)	—	(۱/۷۲۴, ۴/۶۵۲)	(۱/۶۱۳, ۴/۲۴۲)



(ب)



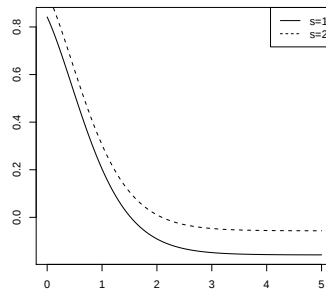
(الف)

شکل ۱. الف- نمودار هیستوگرام، ب- نمودار اثر

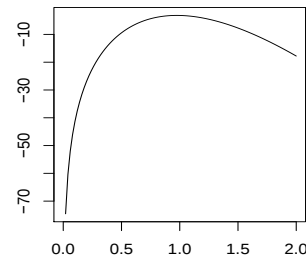
را ۱۰۰۰ بار تکرار می‌کنیم و عملکرد پیش‌بینی‌کننده‌های نقطه‌ای بر اساس میانگین اریبی و میانگین توان دوم خطای پیش‌بینی (MSPE) مقایسه می‌شوند. میانگین اریبی و میانگین توان دوم خطای پیش‌بینی به‌ترتیب

$$Bias = \frac{1}{1000} \sum_{i=1}^{1000} (\hat{T}'_i - T'_i), \quad MSPE = \frac{1}{1000} \sum_{i=1}^{1000} (\hat{T}'_i - T'_i)^2,$$

۳۳۴ پیش‌بینی برای طول عمر سیستم منسجم بر اساس داده‌های سانسور شده نوع دو



(ب)



(الف)

شکل ۲. الف- نمودار تابع لگاریتم ماکسیمم درستنمایی $L(\lambda)$ ، ب- نمودار $K(T)$

جدول ۳. اثرات مشخصه و مشخصه مینیمال سیستم‌های منسجم ۴ مولفه‌ای

شماره سیستم (no.)	طول عمر T	اثر مشخصه (P)	اثر مشخصه مینیمال (a)
۱	$\max\{X_1, \min\{X_r, X_r, X_r\}\}$	$(\circ, \frac{1}{p}, \frac{1}{p}, \frac{1}{p})$	$(1, \circ, 1, -1)$
۲	$\min\{\max\{X_1, X_r\}, \max\{X_r, X_r\}\}$	$(\circ, \frac{1}{p}, \frac{1}{p}, \circ)$	$(\circ, 4, -4, 1)$
۳	$\max\{X_1, \min\{X_r, X_r\}, \min\{X_r, X_r\}\}$	$(\circ, \frac{1}{p}, \frac{1}{p}, \frac{1}{p})$	$(1, 2, -3, 1)$

هستند، که در آن $\hat{T}'_i$ پیش‌بینی $T' = T_{s+m:n}$, $(s = 1, \dots, n-m)$ ، در i امین شبیه‌سازی است. همچنین، فواصل پیش‌بینی به‌دست آمده، را با استفاده از میانگین طول فواصل پیش‌بینی (AW) و احتمال پوشش فاصله‌ها (CP) مورد مقایسه قرار می‌دهیم. فاصله (L_i, U_i) ، فاصله پیش‌بینی T' در مرحله i ام شبیه‌سازی است. بنابراین، احتمال پوشش برای $i = 1, \dots, 1000$ از رابطه

$$CP = \frac{1}{1000} \sum_{i=1}^{1000} I\{L_i < T' < U_i\},$$

به‌دست می‌آید. تابع $I\{\cdot\}$ یک تابع نشانگر است. میانگین اریبی و میانگین توان دوم خطای پیش‌بینی و همچنین میانگین طول فواصل پیش‌بینی و احتمال پوشش فاصله‌ها برای مقادیر مختلفی از $(n = 7, m = 5)$ و $(n = 15, m = 10)$ به‌دست آمده است. همان‌طور که در جدول ۴ ملاحظه می‌شود:

- ۱- در همه سیستم‌های منسجم، برای مقادیر ثابتی از m و n با افزایش s مقدار MSPE افزایش می‌یابد.
- ۲- در میان پیش‌بینی‌کننده‌های نقطه‌ای کلاسیک، پیش‌بینی‌کننده ناریب هم از نظر اریبی و هم از نظر میانگین توان

- دوم خطای پیش‌بینی بهتر از پیش‌بینی‌کننده‌های دیگر کلاسیک عمل می‌کند.
- ۳- پیش‌بینی‌کننده بیزی به‌دست آمده از روش الگوریتم متروپولیس-هستینگز از نظر اریبی و میانگین توان دوم خطای پیش‌بینی، بهتر از پیش‌بینی‌کننده بیزی به‌دست آمده از روش نمونه‌گیری نقاط مهم عمل می‌کند.
- ۴- با مقایسه پیش‌بینی‌کننده‌های کلاسیک و پیش‌بینی‌کننده بیزی مشاهده می‌شود که در همه سیستم‌های منسجم، پیش‌بینی‌کننده بیزی نسبت به پیش‌بینی‌کننده‌های کلاسیک عملکرد بهتری دارد. همچنین، پیش‌بینی‌کننده ماکسیمم درستمایی در همه سیستم‌ها نسبت به پیش‌بینی‌کننده‌های دیگر عملکرد خوبی ندارد.
- با توجه به جدول ۵ و با مقایسه فواصل پیش‌بینی مختلف، ملاحظه می‌شود که:
- ۱- برای مقادیر ثابتی از m و n با افزایش s میانگین طول فواصل پیش‌بینی افزایش می‌یابد.
 - ۲- میانگین طول فواصل پیش‌بینی بیزی به‌دست آمده از روش الگوریتم متروپولیس-هستینگز نسبت به میانگین طول فواصل پیش‌بینی به‌دست آمده از روش نمونه‌گیری نقاط مهم کمتر هستند.
 - ۳- در همه سیستم‌های منسجم، فواصل پیش‌بینی HCD، فواصل پیش‌بینی محوری و فواصل پیش‌بینی بیزی به‌دست آمده از روش الگوریتم متروپولیس-هستینگز به‌ترتیب کمترین میانگین طول فواصل پیش‌بینی را دارا هستند.

۷ بحث و نتیجه‌گیری

با توجه به کاربردهای وسیع سیستم‌های منسجم در علوم مختلف، تحقیقات و پژوهش‌ها در این زمینه، بسیار کاربردی و قابل توجه هستند. در این سیستم‌های منسجم، تابع ساختار و اثر مشخصه مشخص و مولفه‌های سیستم مستقل و هم توزیع با توزیع نیمه لجستیک هستند. در این مقاله، پیش‌بینی طول عمر در سیستم‌های منسجم k مولفه‌ای هنگامی که داده‌های طول عمر سیستم، سانسور شده نوع دو هستند، بر اساس رویکردهای کلاسیک و بیزی مورد مطالعه قرار گرفته است. از مطالعه شبیه‌سازی مونت کارلو برای ارزیابی عملکرد روش‌های پیش‌بینی‌کننده‌های نقطه‌ای و فاصله‌ای در نظر گرفته شده در این مقاله استفاده شده است. بر اساس نتایج شبیه‌سازی پیشنهاد می‌شود که از میان پیش‌بینی‌کننده‌های نقطه‌ای، پیش‌بینی‌کننده بیزی و در میان فواصل پیش‌بینی، از روش کمیت محوری استفاده شود.

تقدیر و تشکر

نویسندگان از نظرات و پیشنهادهای داوران، سردبیر، هیئت تحریریه و ویراستار محترم مجله در ارتقای علمی و ارائه بهتر مقاله قدردانی و تشکر می‌کنند.

جدول ۴. میانگین اریبی و میانگین توان دوم خطای پیش‌بینی برای T' .

رهیافت بیزی		MCMC	CMP	BUP	MLP	s	سیستم	m	n
نمونه‌گیری نقاط مهم									
۰/۰۸۳	۰/۰۸۲	۰/۰۵۷۴	۰/۰۵۲	۰/۰۸۳۶	Bias	۱	۱	۵	۷
۰/۰۳۵۰	۰/۰۳۴۹	۰/۰۳۶۰	۰/۰۳۵۱	۰/۰۶۵۲	MSPE				
۰/۰۳۲۰	۰/۰۳۱۷	۰/۰۷۵۹	۰/۰۱۷۲	۰/۰۲۸۸۷	Bias	۲			
۰/۰۱۶۶۲	۰/۰۱۶۶۲	۰/۰۱۶۷۲	۰/۰۱۶۶۴	۰/۰۲۳۰۰	MSPE				
۰/۰۰۳۷	۰/۰۰۳۵	۰/۰۱۷۸	۰/۰۰۴۷	۰/۰۷۲۵	Bias	۱		۱۰	۱۵
۰/۰۰۶۱	۰/۰۰۶۰	۰/۰۰۷۸	۰/۰۰۶۲	۰/۰۰۸۶	MSPE				
۰/۰۰۹۲	۰/۰۰۹۰	۰/۰۲۵۷	۰/۰۰۵۲	۰/۰۸۴۳	Bias	۲			
۰/۰۱۳۴	۰/۰۱۳۳	۰/۰۱۴۵	۰/۰۱۳۵	۰/۰۲۰۴	MSPE				
۰/۰۱۲۸	۰/۰۱۲۱	۰/۰۲۳۸	۰/۰۰۵۶۷	۰/۰۹۵۳	Bias	۳			
۰/۰۲۳۱	۰/۰۲۲۹	۰/۰۲۳۶	۰/۰۲۳۲	۰/۰۳۰۸	MSPE				
۰/۰۱۷۲	۰/۰۱۶۸	۰/۰۳۳۹	۰/۰۰۷۰	۰/۰۱۳۰۱	Bias	۴			
۰/۰۴۵۴	۰/۰۴۵۳	۰/۰۴۶۱	۰/۰۴۵۵	۰/۰۶۱۳	MSPE				
۰/۰۹۷۹	۰/۰۹۷۸	۰/۰۴۲۸	۰/۰۰۸۱	۰/۰۸۳۲	Bias	۵			
۰/۰۱۴۰۶	۰/۰۱۴۰۵	۰/۰۱۴۲۵	۰/۰۱۴۰۷	۰/۰۱۶۳۰	MSPE				
۰/۰۰۶۸	۰/۰۰۶۸	۰/۰۲۵۰	۰/۰۰۶۳	۰/۰۱۱۳۱	Bias	۱	۲	۵	۷
۰/۰۱۲۱	۰/۰۱۲۰	۰/۰۱۲۴	۰/۰۱۲۲	۰/۰۲۴۱	MSPE				
۰/۰۲۵۰	۰/۰۲۴۸	۰/۰۱۰۳۳	۰/۰۰۶۰۸	۰/۰۲۱۱۸	Bias	۲			
۰/۰۷۲۰	۰/۰۷۱۸	۰/۰۷۳۰	۰/۰۷۲۲	۰/۰۸۰۹	MSPE				
۰/۰۰۳۷	۰/۰۰۳۶	۰/۰۰۲۲۸	۰/۰۰۰۹۳	۰/۰۵۷۴	Bias	۱		۱۰	۱۵
۰/۰۰۳۲	۰/۰۰۳۱	۰/۰۰۰۴۵	۰/۰۰۰۳۳	۰/۰۰۰۶۲	MSPE				
۰/۰۰۰۴۱	۰/۰۰۰۴۱	۰/۰۰۲۴۹	۰/۰۰۱۰۲	۰/۰۰۶۲۲	Bias	۲			
۰/۰۰۰۷۳	۰/۰۰۰۷۳	۰/۰۰۰۷۷	۰/۰۰۰۷۴	۰/۰۰۱۰۷	MSPE				
۰/۰۰۰۸۸	۰/۰۰۰۸۴	۰/۰۰۴۱۱	۰/۰۰۰۲۵۰	۰/۰۰۸۲۶	Bias	۳			
۰/۰۰۱۱۴	۰/۰۰۱۱۳	۰/۰۰۱۳۴	۰/۰۰۱۱۵	۰/۰۰۱۷۷	MSPE				
۰/۰۰۰۹۵	۰/۰۰۰۹۲	۰/۰۰۰۳۳۲	۰/۰۰۰۱۲۷	۰/۰۰۸۶۱	Bias	۴			
۰/۰۰۲۳۷	۰/۰۰۲۳۶	۰/۰۰۲۴۲	۰/۰۰۲۳۷	۰/۰۰۲۹۸	MSPE				
۰/۰۰۱۳۵	۰/۰۰۱۳۴	۰/۰۰۴۰۲	۰/۰۰۰۱۳۵	۰/۰۰۱۲۵۹	Bias	۵			
۰/۰۰۰۷۳۰	۰/۰۰۰۷۲۹	۰/۰۰۰۷۳۲	۰/۰۰۰۷۳۱	۰/۰۰۸۴۲	MSPE				
۰/۰۰۱۲۵	۰/۰۰۱۲۲	۰/۰۰۰۴۸۱	۰/۰۰۰۰۷۴	۰/۰۰۱۵۷۱	Bias	۱	۳	۵	۷
۰/۰۰۲۴۸	۰/۰۰۲۴۸	۰/۰۰۲۷۷	۰/۰۰۲۵۰	۰/۰۰۴۷۹	MSPE				
۰/۰۰۶۴۸	۰/۰۰۶۴۷	۰/۰۰۷۳۲	۰/۰۰۰۶۴۹	۰/۰۰۱۷۲۹	Bias	۲			
۰/۰۰۱۱۴۸	۰/۰۰۱۱۴۷	۰/۰۰۱۲۳۴	۰/۰۰۱۱۴۸	۰/۰۰۱۴۹۷	MSPE				
۰/۰۰۰۵۴	۰/۰۰۰۴۲	۰/۰۰۰۲۲۰	۰/۰۰۰۰۳۴	۰/۰۰۰۶۸۲	Bias	۱		۱۰	۱۵
۰/۰۰۰۴۹	۰/۰۰۰۴۸	۰/۰۰۰۵۹	۰/۰۰۰۰۴۸	۰/۰۰۰۰۹۰	MSPE				
۰/۰۰۰۹۶	۰/۰۰۱۰۹	۰/۰۰۰۲۳۸	۰/۰۰۰۱۰۸	۰/۰۰۰۷۶۵	Bias	۲			
۰/۰۰۱۲۳	۰/۰۰۱۲۲	۰/۰۰۱۳۲	۰/۰۰۱۲۳	۰/۰۰۱۹۶	MSPE				
۰/۰۰۱۱۲	۰/۰۰۱۱۲	۰/۰۰۰۲۶۹	۰/۰۰۰۱۱۶	۰/۰۰۰۹۷۵	Bias	۳			
۰/۰۰۲۳۹	۰/۰۰۲۳۸	۰/۰۰۲۴۷	۰/۰۰۲۴۰	۰/۰۰۴۱۹	MSPE				
۰/۰۰۱۳۸	۰/۰۰۱۳۶	۰/۰۰۰۴۴۵	۰/۰۰۰۱۵۴	۰/۰۰۱۲۸۳	Bias	۴			
۰/۰۰۷۰۷	۰/۰۰۷۰۵	۰/۰۰۷۱۰	۰/۰۰۷۰۸	۰/۰۰۸۵۰	MSPE				
۰/۰۰۲۱۲	۰/۰۰۲۱۱	۰/۰۰۴۸۹	۰/۰۰۰۲۰۰۶	۰/۰۰۱۷۵۰	Bias	۵			
۰/۰۰۱۱۱۳	۰/۰۰۱۱۱۲	۰/۰۰۱۱۹۹	۰/۰۰۱۱۱۴	۰/۰۰۱۳۷۱	MSPE				

جدول ۵. میانگین طول (AW) و درصد پوشش (CP) فواصل پیش‌بینی ۹۵٪ برای T' .

n	m	شماره سیستم	s	روش محوری	HCD	MCMC	رهیافت بیزی نمونه‌گیری نقاط مهم
۷	۵	۱	۱	AW	۰/۶۴۰۸	۰/۷۷۳۳	۰/۸۰۵۵
				CP	۰/۹۶۰	۰/۹۶۰	۰/۹۶۰
			۲	AW	۱/۴۳۴۶	۱/۷۴۴۶	۱/۷۹۰۴
				CP	۰/۹۷۰	۰/۹۹۰	۰/۹۸۰
			۱	AW	۰/۲۶۱۲	۰/۲۸۹۱	۰/۳۰۲۲
				CP	۰/۹۷۰	۰/۹۶۰	۰/۹۸۰
			۲	AW	۰/۴۲۳۵	۰/۳۸۳۲	۰/۴۸۶۸
				CP	۰/۹۸۰	۰/۹۶۰	۰/۹۷۰
			۳	AW	۰/۶۱۲۸	۰/۶۱۲۳	۰/۷۳۸۱
				CP	۰/۹۵۰	۰/۹۶۰	۰/۹۵۰
۷	۵	۲	۱	AW	۰/۸۹۶۸	۰/۸۱۰۴	۱/۰۸۱۵
				CP	۰/۹۴۰	۰/۹۵۰	۰/۹۴۰
			۲	AW	۱/۵۶۸۳	۱/۸۵۶۱	۱/۹۳۷۲
				CP	۰/۹۵۰	۰/۹۴۰	۰/۹۵۰
			۱	AW	۰/۳۹۱۰	۰/۵۱۶۸	۰/۵۲۰۴
				CP	۰/۹۴۰	۰/۹۴۰	۰/۹۴۰
			۲	AW	۰/۸۱۲۴	۱/۰۰۰۵	۱/۰۱۳۹
				CP	۰/۹۳۰	۰/۹۴۰	۰/۹۴۰
			۱	AW	۰/۱۷۶۵	۰/۱۸۹۶	۰/۱۹۷۴
				CP	۰/۹۵۰	۰/۹۵۰	۰/۹۴۰
۷	۵	۳	۲	AW	۰/۲۷۴۶	۰/۲۵۱۱	۰/۳۰۹۵
				CP	۰/۹۵۰	۰/۹۴۰	۰/۹۴۰
			۳	AW	۰/۳۷۷۳	۰/۳۷۷۰	۰/۴۳۲۰
				CP	۰/۹۵۰	۰/۹۶۰	۰/۹۳۰
			۴	AW	۰/۵۲۱۷	۰/۵۲۱۱	۰/۶۰۱۹
				CP	۰/۹۴۰	۰/۹۵۰	۰/۹۴۰
			۵	AW	۰/۸۵۸۳	۰/۹۳۳۶	۰/۹۷۴۲
				CP	۰/۹۶۰	۰/۹۴۰	۰/۹۴۰
			۱	AW	۰/۵۹۱۷	۰/۷۳۴۶	۰/۷۳۵۲
				CP	۰/۹۷۰	۰/۹۶۰	۰/۹۶۰
۷	۵	۱۰	۲	AW	۱/۳۵۸۴	۱/۵۷۴۴	۱/۶۲۶۰
				CP	۰/۹۷۰	۰/۹۸۰	۰/۹۸۰
			۱	AW	۰/۲۴۱۱	۰/۲۶۳۹	۰/۲۹۸۳
				CP	۰/۹۶۰	۰/۹۷۰	۰/۹۷۰
			۲	AW	۰/۳۸۸۷	۰/۳۵۱۰	۰/۴۷۵۴
				CP	۰/۹۴۰	۰/۹۵۰	۰/۹۶۰
			۳	AW	۰/۵۶۰۴	۰/۵۶۰۳	۰/۶۵۲۹
				CP	۰/۹۵۰	۰/۹۴۰	۰/۹۴۰
			۴	AW	۰/۸۳۰۸	۰/۸۲۰۵	۰/۹۸۸۶
				CP	۰/۹۵۰	۰/۹۶۰	۰/۹۶۰
۷	۵		۵	AW	۱/۵۰۳۷	۱/۶۹۱۴	۱/۸۳۶۶
				CP	۰/۹۴۰	۰/۹۱۰	۰/۹۱۰

مراجع

اصغرزاده، ا.، عزیزپور، م. و ولی اللهی، ر. (۱۳۹۴)، استنباط برای توزیع نیمه لوژیستیک بر اساس نمونه‌های سانسور هیبرید فزاینده نوع دو، *مجله علوم آماری*، ۹(۱)، ۴۱-۱۵.

رستمی، ع.، خنجری صادق، م. و خراشادی زاده، م. (۱۴۰۲)، برآورد قابلیت اعتماد تنش-مقاومت در سیستم های منسجم بر اساس توزیع نمایی، *مجله علوم آماری*، ۱، ۸۰-۶۱.

Arnold, B.C. Balakrishnan, N. Nagaraja, H. N. (2008), A First Course in Order Statistics, Classic edn, SIAM, Philadelphia.

Balakrishnan, N. and Asgharzadeh, A. (2005), Inference for the Scaled Half-Logistic Distribution based on Progressively Type II Censored Samples, *communication in statistics-theory and methods*, **34**, 73-87.

Balakrishnan, N. Ng, H. K. T. and Navarro, J. (2011a), Linear Inference for Type-II Censored Lifetime Data of Reliability Systems with Known Signatures, *IEEE Transactions on Reliability*, **60**, 426-440.

Balakrishnan, N. and Saleh, H. M. (2011), Relations for Moments of Progressively Type-II Censored Order Statistics from Half-Logistic Distribution with Applications to Inference, *Computational Statistics and Data Analysis*, **55**, 2775-2792.

Berger. J.O. (1985), Statistical decision theory and Bayesian analysis, 2nd edn. Springer, New York

Bhattacharya, D. and Samaniego, F. J. (2010), Estimating Component Characteristics from System Failure Time Data, *Naval Research Logistics*, **57**, 380-389.

Cameron, A. C. and Trivedi, P. K. (2005), Microeconometrics Methods and Applications, Cambridge University Press, Cambridge.

Casella. G, and Berger, R. L (2002), Statistical inference, 2nd edn. Duxbury, California.

Chivers, C. (2012). MHadaptive: General Markov Chain Monte Carlo for Bayesian Inference using adaptive Metropolis-Hastings sampling, R package.

- Fallah, A. (2023), Prediction for the Future System Failures based on Type-II Censored Coherent systems Data under a Proportional Hazard Model, *Journal of Statistical Modelling: Theory and Applications*, **3**(2), 119-143.
- Fallah, A. Asgharzadeh, A. and Ng, H. K. T. (2021), Statistical Inference for Component Lifetime Distribution from Coherent System Lifetimes under a Proportional Reversed Hazard Model, *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **50**(16), 3809-3833.
- Fallah, A. Asgharzadeh, A. and Ng, H. K. T. (2021), Prediction based on Type-II Censored Coherent System Lifetime Data under a Proportional Reversed Hazard Rate Model, *Journal of the Iranian Statistical Society*, **20**(02), 153-181.
- Hasselman, B. (2018), nleqslv: Solve Systems of Nonlinear Equations, R package version 3.3.2, "https://CRAN.R-project.org/package=nleqslv".
- Hermanns, M. and Cramer, E. (2017), Likelihood Inference for the Component Lifetime Distribution based on Progressively Censored Parallel Systems Data. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, **87**, 607-630.
- Kaminsky, K. S. and Nelson, P. I (1998), Prediction of Order Statistics. In: Balakrishnan N, Rao CR (eds) Handbook of Statistics, Order Statistics: Applications, vol 17. North Holland. Amsterdam, The Netherlands, 43-50.
- Kaminsky, K. S. and Rhodin, L. S. (1985), Maximum Likelihood Prediction, *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, **37**, 507-517.
- Kochar, S. Mukerjee, H. and Samaniego, F. J. (1999), The Signature of a Coherent System and its Application to Comparisons Among Systems, *Naval Research Logistics*, **46**, 507-523.
- Kulkarni, M. G. and Rajarshi, M. B. (2020), Estimation of Parameters Component Lifetime Distribution in a Coherent System, *Statistical Papers* , **61**, 403-421.
- Navarro, J. (2021), Coherent System Lifetime, *Introduction to System Reliability Theory*, 23-70.

- Navarro, J. and Rubio, R. (2010), Computations of Coherent Systems with five Components, *Communications in Statistics – Simulation and Computation*, **39**, 68-84.
- Navarro, J. Ruiz, J. M. and Sandoval, C. J. (2007), Properties of Coherent Systems with Dependent Components, *Communications in Statistics – Theory and Methods*, **36**, 175-191.
- Navarro, J. Samaniego, F. J. Balakrishnan, N. and Bhattacharya, D. (2008), On the Application and Extension of System Signatures in Engineering Reliability, *Naval Research Logistics*, **55**, 313-327.
- Ng, H. K. T. Navarro, J. and Balakrishnan, N. (2012), Parametric Inference from System Lifetime Data under a Proportional Hazard Rate Model, *Metrika*, **75**, 367-388.
- Raqab, M. Z. and Nagaraja, H. N. (1995), On Some Predictors of Future Order Statistics, *Metron*, **53** 185-204.
- Robert, C. and Casella, G. (2004), Monte Carlo Statistical Methods. 2nd ed. New York: Springer.
- Samaniego, F. J. (1985), On Closure of the IFR Class under Formation of Coherent Systems, *IEEE Transactions on Reliability Theory*, **34**, 69-72.
- Samaniego, F. J. (2007), System Signatures and their Applications in Engineering Reliability, International Series in Operations Research and Management Science 110, Springer, New York.
- Tavangar, M. and Asadi, M. (2020), Component Reliability Estimation based on System Failure-Time Data. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, **17**(90), 3232-3249.
- Zhang, J. Ng, H. K. T. and Balakrishnan, N. (2015a), Statistical Inference of Component Lifetimes with Location-Scale Distributions from Censored System Failure Data with Known Signature, *IEEE Transactions on Reliability*, **64**, 613-626.