



A Change-point Detection Test in a Class of INAR(1) Processes Using the Empirical Likelihood Method

Nakhaeezadeh, Z. , Jomhoori, S.  Yousefzadeh, F. 

Department of Statistics, University of Birjand, Birjand, Iran.

Corresponding author: S. Jomhoori, sjomhoori@birjand.ac.ir

Received: 27/6/2024 **Revised:** 17/11/2025 **Accepted and Published Online:** 19/11/2025.

Introduction

In many applied fields such as economics, epidemiology, life sciences, environmental studies, and the social sciences, count data arise naturally. To address this, integer-valued autoregressive (INAR) models have been developed. These models use a thinning operator to capture the dependence structure between observations. The classical version of this operator, known as binomial thinning, is typically based on the Bernoulli distribution, in which each unit of the previous count is carried over to the following time period with a fixed probability. However, in practical applications, it has been observed that some count data exhibit overdispersion. In such cases, the data variance is much larger than the mean, and models that rely on the binomial thinning operator cannot adequately capture this feature. To address this issue, researchers have turned to models that incorporate negative binomial thinning. This operator, which is based on the negative binomial distribution, provides a better fit for overdispersed data. On the other hand, recent studies have increasingly focused on the models in which the thinning parameters are random and depend on previous values of the time series. In this context, INAR models with random coefficients have been developed.

Material and Methods

Modeling count time series is usually carried out under the assumption that the model is stable and its parameters remain constant. However, in practice, external shocks and interventions often cause the parameters to shift or drift over time. For example, in the context of public health, particularly in the study of infectious diseases, policy interventions or the introduc-

tion of vaccination programs can significantly affect the number of recorded cases. In other words, at certain predetermined time points denoted by $\tau_j, j = 1, \dots, m$, the model parameters may change. Therefore, detecting structural changes in the parameters is of great importance. Within this framework, testing the null hypothesis of parameter stability is of interest.

Results and Discussion

Common change-point detection methods often rely on strong parametric assumptions or are designed for continuous-time models, making them less suitable for count time series with a random thinning structure. This has led to growing interest in nonparametric approaches such as empirical likelihood (EL), which can effectively handle complex data without requiring a specific distributional form. In this method, statistical inference is based on nonparametric likelihood ratios. A key advantage of the empirical likelihood ratio (ELR) statistic is that its limiting distribution follows a simple chi-square distribution. Moreover, it does not require the data to follow any particular parametric distribution. Even more importantly, when using EL for hypothesis testing, the distribution of the test statistic does not depend on the estimated parameters.

Conclusion

In this paper, an EL-based test was proposed for detecting change points in the parameters of a class of random-coefficient INAR(1) processes based on the negative binomial thinning operator. The asymptotic distribution of the proposed test statistic under the null hypothesis was derived. A simulation study was conducted to evaluate the size and power of the test. Simulation results indicated that the proposed test exhibited good power performance. The test was also applied to two real-world count-time-series datasets to identify potential change points in the model parameters.

Keywords: Change point, Count time series, Empirical likelihood, INAR model.

Mathematics Subject Classification (2020): 62M10, 62G10.



©The Author(s). The Publisher is Iranian Statistical Society.

This is an open access article distributed under the terms and conditions of [CC BY-NC 4.0](https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/)

آزمون تشخیص نقطه تغییر در کلاسی از فرایندهای INAR(1) با استفاده از روش درستنمایی تجربی

زهره نخعی‌زاده، سارا جمهوری، فاطمه یوسف‌زاده

گروه آمار، دانشگاه بیرجند

نویسنده مسئول: سارا جمهوری، sjomhoori@birjand.ac.ir

تاریخ دریافت: ۱۴۰۴/۴/۶ تاریخ بازنگری: ۱۴۰۴/۸/۲۶ تاریخ پذیرش و انتشار: ۱۴۰۴/۸/۲۸

چکیده: مدل‌های سری زمانی صحیح مقدار نقش مهمی در تحلیل داده‌های شمارشی وابسته ایفا می‌کنند. یکی از چالش‌های اساسی در این مدل‌ها تشخیص تغییرات ساختاری در طول زمان است. این تغییرات ممکن است ناشی از مداخله‌های ناگهانی مانند تغییر سیاست‌ها، همه‌گیری‌ها یا خرابی سیستم‌ها باشند. در این مقاله از روش درستنمایی تجربی برای کشف تغییرات ساختاری در کلاسی از فرایندهای خودبازگشتی صحیح مقدار استفاده می‌شود. این روش ابزاری برای هشدار زود هنگام درباره تغییرات ساختاری در این فرایندهاست. به کمک شبیه‌سازی، اندازه‌ها و توان‌های تجربی آزمون به ازای حجم‌های نمونه‌ای مختلف محاسبه و عملکرد آزمون مورد بررسی قرار می‌گیرد. در نهایت کارایی عملی این آزمون با شناسایی نقطه تغییر در دو مجموعه داده واقعی جراثیم مربوط به سرقت و تعداد مرگ و میر ناشی از کووید ۱۹ بررسی شده است.

واژه‌های کلیدی: درستنمایی تجربی، سری زمانی شمارشی، مدل خودبازگشتی صحیح مقدار، نقطه تغییر. کد موضوع‌بندی ریاضی (۲۰۲۰): 62G10، 62M10.

۱ مقدمه

در بسیاری از حوزه‌های کاربردی نظیر اقتصاد، اپیدمیولوژی، علوم زیستی، محیط‌زیست و علوم اجتماعی، داده‌های شمارشی (گسسته و غیرمنفی) به‌طور طبیعی ظاهر می‌شوند. این داده‌ها اغلب دارای ساختار وابستگی زمانی هستند



©نویسندگان). ناشر انجمن آمار ایران است.

این مقاله با دسترسی آزاد تحت شرایط و ضوابط (CC BY-NC 4.0) توزیع شده است.

و مدل‌های کلاسیک سری زمانی با مقادیر پیوسته، همچون مدل‌های اتورگرسیو میانگین متحرک^۱ (ARMA)، برای تحلیل آن‌ها مناسب نیستند. به منظور تحلیل دقیق این نوع داده‌ها، مدل‌های خودبازگشتی صحیح مقدار^۲ (INAR) معرفی شده‌اند. این مدل‌ها، با استفاده از عملگر رقیق‌ساز^۳، وابستگی زمانی بین مشاهدات را مدل‌سازی می‌کنند (ال اوش و الزید، ۱۹۸۷). نسخه کلاسیک این عملگر تحت عنوان رقیق‌ساز دوجمله‌ای، اغلب مبتنی بر توزیع برنولی است و در آن، هر واحد از مقدار قبلی با احتمال ثابتی به دوره بعد منتقل می‌شود (استویتل و فن هارن، ۱۹۷۹).

در کاربردهای واقعی مشاهده شده است که برخی از داده‌های شمارشی، به ویژه در حوزه‌هایی مانند آمار زیستی، اقتصاد و علوم اجتماعی، دارای پراکندگی بیش از حد^۴ نسبت به مدل‌های ساده با رقیق‌ساز دوجمله‌ای هستند. در این موارد، واریانس داده‌ها بسیار بزرگ‌تر از میانگین آن‌ها است و مدل‌های بر پایه عملگر رقیق‌ساز دوجمله‌ای نمی‌توانند این ویژگی را به درستی مدلسازی کنند. در پاسخ به این چالش، توسعه مدل‌هایی با رقیق‌ساز دوجمله‌ای منفی مورد توجه قرار گرفته است. عملگر رقیق‌ساز دوجمله‌ای منفی که مبتنی بر توزیع دوجمله‌ای منفی است، توانایی بهتری در انعکاس پراکندگی بیش از حد داده‌ها دارد. این عملگر با معرفی پارامتر اضافی کنترل پراکندگی، امکان مدل‌سازی واریانس‌های بزرگ‌تر از میانگین را فراهم می‌کند (ریستیک و همکاران، ۲۰۰۹). از سوی دیگر، در سال‌های اخیر توجه ویژه‌ای به مدل‌هایی معطوف شده است که پارامترهای رقیق‌ساز تصادفی و تابعی از مقادیر قبلی سری زمانی هستند. این مدل‌ها ضمن حفظ ساختار خودبازگشتی، قادر به بیان وابستگی‌های غیرخطی و ناهمسانی واریانس در طول زمان نیز می‌باشند. در این راستا، مدل‌های ضرایب تصادفی INAR با رقیق‌ساز دوجمله‌ای یا دوجمله‌ای منفی تصادفی توسعه یافته‌اند که قدرت و انعطاف‌پذیری بالاتری برای تحلیل داده‌های شمارشی پیچیده دارند. شیراوژن و محمدپور (۱۳۹۹) یک مدل جدید خودبازگشتی صحیح مقدار مرتبه اول، بر اساس عملگر دوجمله‌ای منفی معرفی کردند که در آن عبارت خطا به طور متوالی به مقدار فرایند در زمان جاری وابسته است. مباحثی مربوط به سری‌های زمانی صحیح مقدار با ضرایب تصادفی را می‌توان در وایس و کیم (۲۰۱۴)؛ ژنگ و همکاران (۲۰۱۲) یافت. برای جزئیات بیشتر درباره عملگرهای رقیق‌ساز در مدل‌سازی سری‌های زمانی، می‌توان به وایس (۲۰۰۸) مراجعه کرد.

مدل‌سازی سری‌های زمانی شمارشی معمولاً با فرض ثبات مدل و مانایی پارامترها انجام می‌شود. درحالی‌که در واقعیت، به دلیل مداخلات بیرونی، پارامترها دچار تغییر و انحراف می‌شوند. از این رو، شناسایی نقاط تغییر ساختاری در پارامترهای مدل از اهمیت بالایی برخوردار است. روش‌های متداول در شناسایی نقطه‌تغییر، اغلب بر فرضیات پارامتری قوی و یا وابسته به مدل‌های پیوسته تمرکز دارند و برای سری‌های زمانی شمارشی با ساختار رقیق‌ساز تصادفی به طور کامل مناسب نیستند. بنابراین استفاده از روش‌های غیرپارامتری مانند درستنمایی تجربی^۵ (EL) که به طور خاص توانایی کار با داده‌های پیچیده و بدون فرض توزیع خاص را دارند، به عنوان رویکردی

¹Autoregressive Moving Average

²Integer-valued autoregressive

³Thinning operator

⁴Over dispersion

⁵Empirical likelihood

نوبت و کارآمد مورد توجه قرار گرفته است. روش درست‌نمایی تجربی اولین بار توسط آون (۱۹۹۰) معرفی شد و به دلیل ویژگی‌های آماری مطلوبش شناخته شده است. در این روش، استنباط آماری مبتنی بر نسبت‌های درست‌نمایی ناپارامتری انجام می‌شود. مزیت اصلی آماره نسبت درست‌نمایی تجربی^۱ (ELR) در این است که توزیع حدی آن، از توزیع ساده کای دو پیروی می‌کند. افزون بر این، نیازی به فرض توزیع پارامتری خاصی برای داده‌ها نیست. نکته مهم‌تر آن است که هنگام استفاده از روش درست‌نمایی تجربی برای آزمون فرضیه، توزیع آماره آزمون به پارامترهای برآورد شده وابسته نیست. در زمینه سری‌های زمانی پیوسته با مقادیر حقیقی، **باراگونا و همکاران** (۲۰۱۳) روشی مبتنی بر EL را برای آزمون انواع مختلف تغییر ساختاری در سری‌های زمانی پیشنهاد کرده‌اند. **گاماژ و نینگ** (۲۰۲۱) از روش EL برای تشخیص نقطه تغییر در مدل‌های خودبازگشتی استفاده کرده‌اند. در حوزه سری‌های زمانی صحیح مقدار، **ژنگ و همکاران** (۲۰۱۱) برآورد پارامترهای مدل خودرگرسیون صحیح مقدار ضریب تصادفی^۲ (RC-INAR(p)) را با روش EL مورد بررسی قرار دادند. **دینگ و وانگ** (۲۰۱۶) این رویکرد را برای برآورد مدل INAR(1) با متغیرهای توضیحی به کار بردند. **ژو و همکاران** (۲۰۲۲) نیز روش EL را برای مدل‌های ناهمسانی واریانس شرطی خودرگرسیونی تعمیم یافته^۳ (GARCH) با مقادیر صحیح در قالب ساختارهای خطی و لگاریتمی توسعه دادند. مطالعات موجود در حوزه تشخیص نقطه تغییر در مدل‌های سری زمانی شمارشی، عمدتاً بر روی مدل‌های ساده INAR متمرکز بوده‌اند. **کانگ و لی** (۲۰۰۹) مسئله تشخیص نقطه تغییر را در مدل‌های INAR با عملگر دوجمله‌ای تصادفی در نظر گرفتند. آن‌ها با استفاده از آماره مجموع جمعی^۴ (CUSUM) مبتنی بر کمترین توان‌های دوم شرطی و برآوردگرهای شبه درست‌نمایی، آزمونی برای تشخیص نقطه تغییر ارائه نمودند. **یو و همکاران** (۲۰۲۳) با استفاده از روش EL، یک آزمون تشخیص نقطه تغییر در پارامترهای مدل INAR(1) با عملگر رقیق‌ساز دوجمله‌ای غیرتصادفی ارائه کردند. با این وجود، تا کنون ساخت آزمون تشخیص نقطه تغییر با استفاده از رهیافت درست‌نمایی تجربی در مدل‌های INAR(1) مبتنی بر عملگر دوجمله‌ای منفی تصادفی مورد بررسی قرار نگرفته است.

هدف این مقاله، بررسی و توسعه آزمون‌های مبتنی بر درست‌نمایی تجربی برای شناسایی نقطه تغییر در مدل‌های RC-INAR(1) است؛ مدل‌هایی که ضمن بهره‌گیری از عملگر رقیق‌ساز دوجمله‌ای منفی تصادفی، توانایی مدل‌سازی دقیق‌تر پراکندگی و وابستگی در داده‌های صحیح مقدار را دارا می‌باشند. این پژوهش گامی نو در ترکیب روش‌های آماری نوبین با مدل‌های شمارشی پیچیده محسوب می‌شود و می‌تواند کاربردهای گسترده‌ای در تحلیل داده‌های شمارشی واقعی داشته باشد.

سایر بخش‌های مقاله به شرح زیر تنظیم شده است: در بخش ۲، عملگر دوجمله‌ای منفی و مدل مورد نظر مورد بررسی قرار می‌گیرد. در بخش ۳، آماره آزمون مبتنی بر روش ELR و توزیع آن ارائه می‌شود. در بخش ۴، یک مطالعه شبیه‌سازی جامع برای ارزیابی عملکرد آزمون انجام شده است. در بخش ۵، با در نظر گرفتن دو مجموعه داده واقعی از سری‌های زمانی شمارشی، نقاط تغییر در پارامترهای موجود در مدل، به کمک آزمون پیشنهادی شناسایی

¹Empirical likelihood ratio

²Random coefficient integer-valued autoregressive

³Generalized autoregressive conditional heteroscedasticity

⁴Cumulative sum

می‌شوند.

۲ معرفی مدل و خواص آن

تعریف ۱. فرض کنید X یک متغیر تصادفی صحیح مقدار باشد و $\phi \in [0, 1)$. در این صورت، عملگر دوجمله‌ای منفی به صورت $\phi \circ X = \sum_{i=1}^X \omega_i$ تعریف می‌شود، که در آن $\{\omega_i\}$ یک دنباله از متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع با توزیع هندسی و تابع جرم احتمالی به صورت

$$P(\omega_i = x) = \frac{\phi^x}{(1 + \phi)^{1+x}}, \quad x = 0, 1, \dots,$$

است. همچنین فرض می‌شود که دنباله $\{\omega_i\}$ از X مستقل است.

با استفاده از عملگر دوجمله‌ای منفی، مدل INAR(1) به صورت

$$X_t = \phi \circ X_{t-1} + \varepsilon_t, \quad (1)$$

تعریف می‌شود، که در آن $\{\varepsilon_t\}$ یک دنباله از متغیرهای تصادفی شمارشی مستقل و هم‌توزیع با تابع جرم احتمال $f_\varepsilon > 0$ است که از $\{\omega_i\}$ و همچنین از گذشته سری $\{X_s\}_{s < t}$ مستقل است. مدل (۱) را می‌توان به عنوان یک فرآیند بازتولید^۱ تفسیر کرد که در آن هر فرد ممکن است بیش از یک بار تولیدمثل کند. در این مدل، X_t تعداد کل اعضای یک گونه خاص در یک ناحیه در زمان t را نشان می‌دهد، ω_t تعداد فرزندان فرد z -ام (که ممکن است خود فرد را نیز شامل شود) را توصیف می‌کند و ϕ میانگین تعداد فرزندان هر فرد را بیان می‌نماید. همچنین، ε_t تعداد گونه‌هایی را نشان می‌دهد که در دوره زمانی t به ناحیه وارد می‌شوند.

تذکر ۱. نرخ تولیدمثل گونه‌ها تحت تأثیر عوامل محیطی متعددی مانند فضای زیستی و منابع غذایی قرار دارد. از آنجا که این عوامل محیطی ممکن است در طول زمان تغییر کنند و یا محدود بوده و به شدت با تعداد فعلی گونه‌ها مرتبط باشند، منطقی است که ϕ با یک دنباله تصادفی $\{\phi_t\}$ جایگزین و مقدار آن وابسته به مشاهدات قبلی X_{t-1} ، تعریف شود. وضعیتی مشابه نیز در مطالعات مربوط به داده‌های بیماری‌های واگیردار و جرایم مشاهده می‌شود.

با توجه به توضیحات فوق، مدل سری زمانی $\{X_t\}$ ، به صورت بازگشتی

$$X_t = \phi_t \circ X_{t-1} + \varepsilon_t, \quad \log\left(\frac{\phi_t}{1 - \phi_t}\right) = \nu(X_{t-1}; \beta), \quad t \geq 1, \quad (2)$$

^۱Reproduction process

در نظر گرفته می‌شود که در آن β یک بردار پارامتر ℓ -بعدی و تابع $\nu(\cdot; \cdot)$ متعلق به یک خانواده پارامتری خاص از توابع به صورت $\mathcal{G}_\Theta = \{\nu(X_{t-1}; \beta) : \beta \in \Theta\}$ است و Θ یک زیرمجموعه باز از $\mathbb{R}^\ell$ است. فرایند $\{X_t\}$ یک زنجیر مارکوف با تابع احتمال انتقال روی $\mathbb{N}$ به شکل (یو و همکاران، ۲۰۱۹)،

$$\mathbb{P}(X_t = x_t | X_{t-1} = x_{t-1}) = \sum_{k=0}^{x_t} \binom{k + x_{t-1} - 1}{k} \times f_\varepsilon(x_t - k) \frac{e^{k\nu(x_{t-1}; \beta)} (1 + e^{\nu(x_{t-1}; \beta)})^{x_{t-1}}}{(1 + e^{k\nu(x_{t-1}; \beta)})^{x_{t-1} + k}}$$

است. با فرض اینکه $E(\varepsilon_t) = \lambda < \infty$ و $Var(\varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon^2 < \infty$ ، امید ریاضی، واریانس شرطی و کوواریانس فرایند به ترتیب عبارتند از

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_t | X_{t-1}] &= \phi_t X_{t-1} + \lambda, \\ Var[X_t | X_{t-1}] &= \phi_t (1 + \phi_t) X_{t-1} + \sigma_\varepsilon^2, \\ Cov(X_t, X_{t-1}) &= \mathbb{E}(\phi_t X_{t-1}^2) - \mathbb{E}(\phi_t X_{t-1}) \mathbb{E}(X_{t-1}). \end{aligned}$$

تذکر ۲. چنانچه $\sup_{x \in \mathbb{N}_+} \nu(x; \beta) < \infty$ ، فرایند $\{X_t\}$ یک زنجیر مارکوف ارگودیک خواهد بود.

تذکر ۳. در سری‌های زمانی شمارشی، متغیر پاسخ معمولاً تعداد رخدادها در یک بازه زمانی مشخص است. توزیع پواسون به دلیل سادگی نسبی، به طور طبیعی برای مدل‌سازی چنین داده‌هایی مناسب است. لذا بدون کم شدن از کلیت مساله فرض می‌شود که ε_t دارای توزیع پواسون است.

۳ آزمون نقطه تغییر

در بسیاری از کاربردهای واقعی، ممکن است پارامترهای مدل در یک یا چند نقطه زمانی نامعلوم دچار تغییر ناگهانی شوند. به عنوان مثال، در فرایندهای تولید صنعتی، تغییر شیفت یا انجام تعمیرات برنامه‌ریزی شده ممکن است پویایی تولید را دچار تحول کند. در حوزه تحلیل ایمنی ترافیک، اجرای قوانین و مقررات جدید می‌تواند منجر به تغییر ناگهانی در فراوانی تصادفات شود. به‌طور مشابه، در آمارهای جرم و جنایت، تغییرات در نیروی انسانی پلیس یا سیاست‌های انتظامی ممکن است بر شمار وقوع جرایم تأثیر بگذارد. در زمینه بهداشت عمومی، به‌ویژه در مورد بیماری‌های واگیردار، مداخلات سیاستی یا آغاز برنامه‌های واکسیناسیون می‌تواند تأثیر چشمگیری بر تعداد موارد ثبت‌شده داشته باشد. نمونه‌ای بارز در این زمینه، همه‌گیری کووید-۱۹ است که طی آن مقررات دولتی، تعطیلات رسمی و محدودیت‌های اجتماعی از جمله منابع محتمل تغییرات ساختاری در داده‌های اپیدمیولوژیک به شمار می‌روند.

۲۸۴ آزمون تشخیص نقطه تغییر در کلاسی از فرایندهای INAR(1)

به عبارت دیگر، ممکن است در برخی نقاط زمانی از پیش تعیین شده $\tau_j, j = 1, \dots, m$ تغییراتی در پارامترهای مدل رخ دهد و مدل (۲) به صورت قطعه‌ای

$$X_t = \begin{cases} \phi_{1t} \circ X_{t-1} + \varepsilon_{1t}, & 0 = \tau_0 < t \leq \tau_1, \\ \phi_{2t} \circ X_{t-1} + \varepsilon_{2t}, & \tau_1 < t \leq \tau_2, \\ \vdots \\ \phi_{mt} \circ X_{t-1} + \varepsilon_{mt}, & \tau_{m-1} < t \leq \tau_m, \end{cases} \quad (3)$$

تعریف شود. بنابراین تشخیص تغییرات در بردار پارامترهای مدل یعنی $\theta^j = (\beta_j^\top, \lambda_j)^\top$ برای $j = 1, 2, \dots, m$ در طول زمان دارای اهمیت است. در این چارچوب، فرض صفر ثبات پارامترهای مدل یعنی

$$H_0: \theta^1 = \theta^2 = \dots = \theta^m = \theta_0, \quad (4)$$

باید آزمون شود. این آزمون در بسیاری از زمینه‌های کاربردی، نظیر اقتصاد، بهداشت عمومی، تحلیل جرائم و صنعت، از اهمیت بالایی برخوردار است. چرا که نقاط زمانی τ_j می‌توانند نمایانگر تغییرات سیاسی، مداخلات اجرایی، تعطیلات رسمی یا رخداد‌های محیطی باشند که ممکن است ساختار آماری فرآیند تولید داده را به‌طور معناداری تحت تأثیر قرار دهند.

فرض کنید $\{X_t\}$ یک فرآیند مانای اکید و ارگودیک است. بردار پارامترهای $\theta = (\beta^\top, \lambda)^\top$ دارای مقدار واقعی $\theta_0 = (\beta_0^\top, \lambda_0)^\top$ است. به‌منظور مطالعه خواص حدی آماره آزمون، ابتدا مفروضات زیر در مورد تابع $\nu(x; \beta)$ در نظر گرفته می‌شوند. فرض کنید همسایگی B از β و تابع انتگرال‌پذیر $N(x)$ موجود باشند، به قسمی که

A۱ مشتق‌های جزئی مرتبه اول، دوم و سوم تابع $\nu(x; \beta)$ نسبت به مؤلفه‌های β ، یعنی

$$\left| \frac{\partial}{\partial \beta_i} \nu(x; \beta) \right|, \quad \left| \frac{\partial^2}{\partial \beta_i \partial \beta_j} \nu(x; \beta) \right|, \quad \left| \frac{\partial^3}{\partial \beta_i \partial \beta_j \partial \beta_k} \nu(x; \beta) \right|, \quad 1 \leq i, j, k \leq \ell,$$

همگی توابعی پیوسته در β بوده و به ازای هر $\beta \in B$ کران‌دار می‌باشند.

A۲ عدد $\delta > 0$ موجود است به قسمی که $\mathbb{E}[|N(X_t)|^{\delta+\delta}] < \infty$ و $\mathbb{E}[|X_t|^{\delta+\delta}] < \infty$.

A۳ ماتریس $\mathbb{E} \left[\frac{\partial}{\partial \beta_0} \nu(X_t; \beta_0) \left(\frac{\partial}{\partial \beta_0} \nu(X_t; \beta_0) \right)^\top \right]$ دارای رتبه کامل است.

تذکر ۴. توابع زیادی به شکل $\nu(X_{t-1}; \beta)$ وجود دارند که در شرایط فوق صدق می‌کنند. یک انتخاب ساده، استفاده از تابع خطی $\nu(X_{t-1}; \beta) = a + bX_{t-1}$ است. در این حالت به ازای $b \leq 0$ ، فرآیند یک زنجیر

مارکوف ارگودیک است. در غیر این صورت، اگر $b > 0$ باشد، در این صورت $\phi_t = \frac{1}{1 + \exp(-a - bX_{t-1})}$ تابعی افزایشی نسبت به X_{t-1} است. این بدان معناست که اگر X_{t-1} مقدار بزرگی داشته باشد، احتمال شکست ω_i یعنی $\frac{\phi_t}{1 + \phi_t}$ نیز بزرگ است و بنابراین احتمال اینکه X_t نیز مقدار بزرگی داشته باشد افزایش می‌یابد. در نتیجه، این فرآیند به سرعت رشد خواهد کرد. علاوه بر این، با توجه به مقدار $\text{Cov}(X_t, X_{t-1})$ می‌توان نتیجه گرفت که با افزایش مقادیر a و b ، مقدار ϕ_t نیز افزایش یافته و ضریب خودهمبستگی مرتبه اول بزرگ‌تر می‌شود. بنابراین، ساختار خودهمبستگی قوی‌تر خواهد شد.

برای ساخت آزمون ELR، از معادلات برآورد مبتنی بر گشتاورهای شرطی مدل استفاده می‌شود. تابع امتیاز یکی از اشکال این معادلات است که جهت استخراج آماره آزمون به کار می‌رود. در روش حداقل توان دوم شرطی، پارامترها از طریق کمینه‌سازی مجموع توان دوم خطا

$$S_t(\theta) = \sum_{t=1}^n (X_t - E(X_t | X_{t-1}))^2 = \sum_{t=1}^n (X_t - \frac{e^{\nu(X_{t-1}; \phi)}}{1 + e^{\nu(X_{t-1}; \beta)}} X_{t-1} - \lambda)^2,$$

برآورد می‌شوند. با مشتق‌گیری نسبت به بردار پارامتر θ ، تابع امتیاز به صورت

$$-\frac{1}{2} \frac{\partial S_t(\theta)}{\partial \theta} = \mathbf{M}_t(\theta) = (M_{t1}(\theta), \dots, M_{t(\ell+1)}(\theta))^T, \quad (5)$$

به دست می‌آید که در آن به ازای هر $1 \leq i \leq \ell$

$$M_{ti}(\theta) = (X_t - \frac{e^{\nu(X_{t-1}; \beta)}}{1 + e^{\nu(X_{t-1}; \beta)}} X_{t-1} - \lambda) \frac{X_{t-1} e^{\nu(X_{t-1}; \beta)}}{(1 + e^{\nu(X_{t-1}; \beta)})^2} \frac{\partial \nu(X_{t-1}, \beta)}{\partial \beta_i},$$

$$M_{t(\ell+1)}(\theta) = X_t - \frac{e^{\nu(X_{t-1}; \beta)}}{1 + e^{\nu(X_{t-1}; \beta)}} X_{t-1} - \lambda.$$

برآوردگر حداقل توان دوم شرطی پارامتر θ از برابر صفر قرار دادن (۵) به دست می‌آیند. اگر $\mathcal{F}_{t-1}$ تاریخچه فرایند تا زمان $t-1$ باشد، در اینصورت از $E(M_{ti}(\theta) | X_{t-1}) = 0$ نتیجه می‌شود که $\{M_{ti}(\theta) | \mathcal{F}_{t-1}, t > 1\}$ به ازای هر $1 \leq i \leq \ell + 1$ یک مارتینگل است. در نتیجه دنباله $\{\sum_{t=\ell+1}^n M_{ti}(\theta) | \mathcal{F}_{t-1}, t > 1\}$ نیز یک مارتینگل است. بنابراین، تابع نسبت درستنمایی نیم‌رخ برای هر یک از m زیرسری مانا به صورت

$$\mathcal{R}(\theta^j, \tau_j, \tau_{j+1}) = \max_{w_t} \left\{ \prod_{t=\tau_j+1}^{\tau_{j+1}} n_j w_t | w_t \geq 0, \sum_{t=\tau_j+1}^{\tau_{j+1}} w_t = 1, \sum_{t=\tau_j+1}^{\tau_{j+1}} w_t \mathbf{M}_t(\theta) = 0 \right\},$$

نوشته می‌شود، که در آن $n_j = \tau_{j+1} - \tau_j$ ، $j = 0, \dots, m-1$ است. برای حل مسئله ماکسیم‌سازی از رابطه

لاگرانژ

$$L_j = \sum_{t=\tau_j+1}^{\tau_{j+1}} \log(n_j w_t) + \gamma \left(\sum_{t=\tau_j+1}^{\tau_{j+1}} w_t - 1 \right) - n_j \boldsymbol{\eta}^\top \left(\sum_{t=\tau_j+1}^{\tau_{j+1}} w_t \mathbf{M}_t(\boldsymbol{\theta}) \right),$$

با ضرایب لاگرانژ γ و $\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^{\ell+1}$ نسبت به w_t مشتق گرفته می‌شود. بنابر شرط $\sum_{t=\tau_j+1}^{\tau_{j+1}} w_t \mathbf{M}_t(\boldsymbol{\theta}) = 0$ داریم
 $\sum_{t=\tau_j+1}^{\tau_{j+1}} w_t \frac{\partial L_j}{\partial w_t} = n_j + \gamma = 0$ و بنابراین، $n_j = -\gamma$ است. در نتیجه $w_t = \frac{1}{n_j (1 + \boldsymbol{\eta}^\top \mathbf{M}_t(\boldsymbol{\theta}))}$ و لذا

$$g(\boldsymbol{\eta}) = \frac{1}{n_j} \sum_{t=\tau_j+1}^{\tau_{j+1}} \frac{\mathbf{M}_t(\boldsymbol{\theta})}{1 + \boldsymbol{\eta}^\top \mathbf{M}_t(\boldsymbol{\theta})} = 0.$$

به این ترتیب، مقدار $\boldsymbol{\eta}$ را می‌توان با استفاده از الگوریتم‌های عددی و تحت شرط $\boldsymbol{\eta}^\top \mathbf{M}_t(\boldsymbol{\theta}) \geq -1$ محاسبه کرد.

قضیه ۱. فرض کنید $\{X_t\}$ از فرآیند (۳) با $m-1$ نقطه تغییر پیروی کند که در آن $m \geq 2$ و ضمناً شرایط $A1$ تا $A3$ برقرار باشند. در این صورت تحت فرض صفر بیان شده در رابطه (۴)، وقتی $n_j, n \rightarrow \infty$ آنگاه

$$-2 \sum_{j=0}^{m-1} \log \mathcal{R}(\boldsymbol{\theta}_*, \tau_j, \tau_{j+1}) \xrightarrow{d} \chi_{m(\ell+1)}^2,$$

که در آن $\mathcal{R}(\boldsymbol{\theta}_*, \tau_j, \tau_{j+1})$ تابع نسبت درستی نیم‌رخ برای زیرسری j -ام تحت فرض صفر است.
برهان: فرض کنید $\{X_t\}$ یک فرآیند مانا، ارگودیک و مفروضات قضیه برقرار باشد، با توجه به رابطه (۱۳) از **یو و همکاران (۲۰۱۹)**، به ازای هر $j = 0, 1, \dots, m-1$ داریم

$$-2 \log \mathcal{R}(\boldsymbol{\theta}_*, \tau_j, \tau_{j+1}) = n_j \overline{\mathbf{M}}_{n_j}(\boldsymbol{\theta}_*)^\top \mathbf{W}_{n_j}^{-1}(\boldsymbol{\theta}_*) \overline{\mathbf{M}}_{n_j}(\boldsymbol{\theta}_*) + o_p(1), \quad (6)$$

که در آن،

$$\overline{\mathbf{M}}_{n_j}(\boldsymbol{\theta}_*) = \frac{1}{n_j} \sum_{t=\tau_j+1}^{\tau_{j+1}} \mathbf{M}_t(\boldsymbol{\theta}_*),$$

$$\mathbf{W}_{n_j}(\boldsymbol{\theta}_*) = \frac{1}{n_j} \sum_{t=\tau_j+1}^{\tau_{j+1}} \mathbf{M}_t(\boldsymbol{\theta}_*) \mathbf{M}_t^\top(\boldsymbol{\theta}_*).$$

یو و همکاران (۲۰۱۹) نشان دادند که

$$n_j \overline{M}_{n_j}(\theta_*)^\top W_{n_j}^{-1}(\theta_*) \overline{M}_{n_j}(\theta_*) \xrightarrow{d} \chi_{(\ell+1)}^2.$$

در نتیجه

$$-2 \log \mathcal{R}(\theta_*, \tau_j, \tau_{j+1}) \xrightarrow{d} \chi_{(\ell+1)}^2.$$

برای اثبات استقلال آماره‌های $\mathcal{R}(\theta_*, \tau_j, \tau_{j+1})$, $j = *, 1, \dots, m-1$ بردارهای مجموع جزئی

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_{n_*}^{(*)}(v) &= \frac{1}{\sqrt{n_*}} \sum_{t=\tau_*+1}^{\tau_*+[v.n_*]} M_t(\theta_*), \\ &\vdots \\ \mathbf{W}_{n_{m-1}}^{(m-1)}(v) &= \frac{1}{\sqrt{n_{m-1}}} \sum_{t=\tau_{m-1}+1}^{\tau_{m-1}+[v.n_{m-1}]} M_t(\theta_*), \end{aligned}$$

را در هر یک از زیرسری‌ها در نظر می‌گیریم، که در آن $v \in [*, 1]$. از لم ۱ در یو و همکاران (۲۰۱۹) نتیجه می‌شود که $M_t(\theta)$ یک سری بطور فراموضعی مانا در کواریانس (وایت، ۲۰۰۱) با ماتریس کواریانس نامنفرد $W(\theta) = E(M_t(\theta)M_t^\top(\theta))$ است. با توجه به قضیه حدمرکزی تابعی چندمتغیره (قضیه ۷.۲۹ از وایت (۲۰۰۱))، به ازای هر $v \in [*, 1]$ ، فرایند مجموع جزئی $W_{n_j}^{(j)}(v)$ در توزیع، به فرایند وینر $W^{(j)}(v)$ همگرا است. به ازای هر $j = *, 1, \dots, m-1$ ، مولفه‌های فرایند $W_{n_j}^{(j)}(v)$ ، مجموع‌های جزئی به صورت

$$W_{n_j,i}^{(j)}(v) = \frac{1}{\sqrt{n_j}} \sum_{t=\tau_j+1}^{\tau_j+[v.n_j]} M_{ti}(\theta_*), \quad i = 1, \dots, \ell+1,$$

هستند. باتوجه به مارتینگل بودن دنباله $M_t(\theta_*)$ و از آنجایی که $E(M(\theta_*)) = *$ ، نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned} \text{Cov}(\mathbf{W}_{n_j}^{(j)}(v), \mathbf{W}_{n_k}^{(k)}(v)) &= E(\mathbf{W}_{n_j}^{(j)}(v)\mathbf{W}_{n_k}^{(k)}(v)) - E(\mathbf{W}_{n_j}^{(j)}(v))E(\mathbf{W}_{n_k}^{(k)}(v)) \\ &= \frac{1}{\sqrt{n_j n_k}} E \left(\begin{bmatrix} \sum_{s=\tau_j+1}^{\tau_j+[v.n_j]} M_{s1}(\theta_*) \\ \vdots \\ \sum_{s=\tau_j+1}^{\tau_j+[v.n_j]} M_{s(\ell+1)}(\theta_*) \end{bmatrix} \left(\sum_{t=\tau_k+1}^{\tau_k+[v.n_k]} M_{t1}(\theta_*), \dots, \sum_{t=\tau_k+1}^{\tau_k+[v.n_k]} M_{t(\ell+1)}(\theta_*) \right) \right), \end{aligned}$$

و این یک ماتریس $(\ell+1) \times (\ell+1)$ بعدی است.

بدون کم شدن از کلیت مساله فرض کنید $k < j$. در اینصورت درایه $(1, 1)$ این ماتریس کوواریانس به صورت

$$\frac{1}{\sqrt{n_j n_k}} \sum_{s=\tau_j+1}^{\tau_j+[v.n_j]} \sum_{t=\tau_k+1}^{\tau_k+[v.n_k]} \mathbb{E}(M_{s1}(\theta_*) M_{t1}(\theta_*))$$

است. اما به ازای هر $s < \ell$ داریم:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[M_{s1}(\theta_*) M_{t1}(\theta_*)] &= \mathbb{E}[E(M_{s1}(\theta_*) M_{t1}(\theta_*)) | \mathcal{F}_{\ell-1}] \\ &= \mathbb{E}[M_{s1}(\theta_*) E(M_{t1}(\theta_*) | \mathcal{F}_{\ell-1})] \\ &= \mathbb{E}[M_{s1}(\theta_*) \times 0] = 0. \end{aligned}$$

بنابراین $Cov(\mathbf{W}_{n_j}^{(j)}(v), \mathbf{W}_{n_k}^{(k)}(v)) = 0$. اکنون با استفاده از قضیه نگاشت پیوسته و قضیه اسلاتسکی داریم:

$$Cov(\mathbf{W}^{(j)}(v), \mathbf{W}^{(k)}(v)) \stackrel{d}{=} Cov(\mathbf{W}_{n_j}^{(j)}(v), \mathbf{W}_{n_k}^{(k)}(v)) = 0.$$

از طرفی می‌دانیم $\mathbf{W}^{(j)}(v)$ به ازای هر $j = 0, 1, \dots, m-1$ از توزیع $N(0, v\mathbf{W}(\theta_*))$ پیروی می‌کند. بنابراین، $\mathbf{W}_{n_k}^{(k)}(v)$ و $\mathbf{W}_{n_j}^{(j)}(v)$ به ازای هر $j, k = 0, \dots, m-1, j \neq k$ به‌طور مجانبی مستقل از یکدیگر هستند. از طرف دیگر به ازای هر $j = 0, 1, \dots, m-1$ جمله اول از سمت راست رابطه (۶) را می‌توان به صورت

$$\begin{aligned} & n_j \overline{\mathbf{M}}_{n_j}(\theta_*)^\top \mathbf{W}_{n_j}^{-1}(\theta_*) \overline{\mathbf{M}}_{n_j}(\theta_*) \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{n_j}} \sum_{t=\tau_j+1}^{\tau_{j+1}} \mathbf{M}_t(\theta_*) \right)^\top \left(\frac{1}{n_j} \sum_{t=\tau_j+1}^{\tau_{j+1}} \mathbf{M}_t(\theta_*) \mathbf{M}_t^\top(\theta_*) \right)^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{n_j}} \sum_{t=\tau_j+1}^{\tau_{j+1}} \mathbf{M}_t(\theta_*) \right), \end{aligned}$$

نوشت. لذا توابع ELR

$$-2 \log \mathcal{R}(\theta_*, \tau_j, \tau_{j+1}), \quad j = 0, 1, \dots, m-1,$$

به‌طور مجانبی مستقل از یکدیگرند. در نتیجه $-2 \sum_{j=0}^{m-1} \log \mathcal{R}(\theta_*, \tau_j, \tau_{j+1})$ دارای توزیع کای دو با $m(\ell+1)$ درجه آزادی است و برهان قضیه کامل می‌شود.

فرض کنید $\hat{\theta}_j$ ، برآوردگر بیشینه درستنمایی تجربی پارامتر θ در زیرسری j -ام باشد که از طریق بیشینه سازی تابع $\mathcal{R}(\theta, \tau_j, \tau_{j+1})$ به دست آمده است. قرار دهید

$$Q(\theta_*) = 2 \sum_{j=0}^{m-1} \{ \log \mathcal{R}(\hat{\theta}_j, \tau_j, \tau_{j+1}) - \log \mathcal{R}(\theta_*, \tau_j, \tau_{j+1}) \}.$$

قضیه ۲. فرض کنید $\{X_t\}$ از فرآیند (۳) با $m - 1$ نقطه تغییر پیروی کند به طوری که $m \geq 2$ و ضمناً شرایط $A1$ تا $A3$ برقرار باشند. در این صورت تحت فرض H_0 ، وقتی $n, n \rightarrow \infty$ ، آنگاه آماره $Q(\theta_0)$ به توزیع خی دو با $m(\ell + 1)$ درجه آزادی همگراست، یعنی $Q(\theta_0) \xrightarrow{d} \chi^2_{m(\ell+1)}$.

برهان: بنابر قضیه ۲ از **کین و لاولس (۱۹۹۴)**، به ازای هر $j = 0, 1, \dots, m - 1$ ،

$$\log \mathcal{R}(\hat{\theta}_j, \tau_j, \tau_{j+1}) - \log \mathcal{R}(\theta_0, \tau_j, \tau_{j+1}) \xrightarrow{d} \chi^2_{(\ell+1)}.$$

به طریق مشابه با برهان قضیه ۱، می‌توان نشان داد که متغیرهای تصادفی

$$\log \mathcal{R}(\hat{\theta}_j, \tau_j, \tau_{j+1}) - \log \mathcal{R}(\theta_0, \tau_j, \tau_{j+1}), \quad j = 0, 1, \dots, m - 1,$$

مستقل از یکدیگرند. در نتیجه $Q(\theta_0) \xrightarrow{d} \chi^2_{m(\ell+1)}$ و برهان کامل می‌شود.

با توجه به قضیه ۲، فرض H_0 در سطح معنی‌داری α رد می‌شود، هرگاه $Q(\theta_0) > \chi^2_{m(\ell+1), \alpha}$ ، که در آن $\chi^2_{m(\ell+1), \alpha}$ چندک $1 - \alpha$ -ام توزیع کای دو با $m(\ell + 1)$ درجه آزادی است.

۴ مطالعه شبیه‌سازی

در این بخش با انجام شبیه‌سازی، عملکرد آزمون مبتنی بر آماره $Q(\theta_0)$ ارزیابی می‌شود. بدون کم شدن از کلیت مساله فرض می‌شود که تنها یک نقطه تغییر در پارامترها وجود داشته باشد. سطح معنی‌داری آزمون برابر 0.05 و تعداد تکرارهای شبیه‌سازی 1000 فرض شده است. نقطه تغییر احتمالی τ ، بر اساس نسبتی از اندازه نمونه انتخاب می‌شود، به طوری که $\frac{\tau}{n} \in \{0.1, 0.3, 0.5, 0.7\}$. برای محاسبه توان و اندازه آزمون فرض می‌شود که $\nu(X_t; \beta) = a + bX_{t-1}$. جداول ۱ و ۲ سطح معنی‌داری تجربی آزمون را در ارزیابی فرض $H_0: \theta^* = (a_0, b_0, \lambda_0)^\top$ نشان می‌دهند. با افزایش حجم نمونه، اندازه‌های تجربی به سطح معنی‌داری واقعی 0.05 نزدیک می‌شوند. با این حال، ملاحظه می‌شود که در نمونه‌های کوچکتر، اگر نقطه تغییر τ نزدیک به ابتدا یا انتهای سری باشد ($\frac{\tau}{n} = 0.1, 0.7$)، آزمون تمایل دارد بزرگتر از اندازه واقعی عمل کند. در این وضعیت، باید برای رد کردن فرض صفر با احتیاط بیشتر عمل کرد. در مقابل برای نمونه‌های بزرگتر ($n > 800$)، اگر نقطه تغییر τ ، در میانه سری باشد ($\frac{\tau}{n} = 0.3, 0.5$)، اندازه‌های تجربی به اندازه اسمی نزدیک هستند و لذا آزمون پیشنهادی در کاربردهای عملی عملکرد قابل قبولی از خود نشان می‌دهد. برای بررسی توان آزمون، با در نظر گرفتن $\theta_0 = (1, 0, 1)$ ، سه وضعیت متفاوت در فرضیه جانشین ممکن است اتفاق بیفتد که به صورت مجزا در زیر تشریح شده‌اند.

جدول ۰.۱. اندازه آزمون برای مقادیر مختلف $\frac{\pi}{n}$ و $b_0 = 0$

n				$\frac{\pi}{n}$	(a_0, λ_0)
۱۰۰۰	۸۰۰	۵۰۰	۳۰۰	۰/۱	(-۲, ۲)
۰/۵۹	۰/۶۹	۰/۷۳	۰/۱۲۰	۰/۳	
۰/۴۴	۰/۵۹	۰/۶۰	۰/۶۱	۰/۵	
۰/۴۷	۰/۶۴	۰/۴۸	۰/۶۵	۰/۷	
۰/۴۲	۰/۶۴	۰/۶۱	۰/۶۸		(۰, ۲)
۰/۶۹	۰/۷۲	۰/۷۴	۰/۱۱۳	۰/۱	
۰/۶۴	۰/۶۵	۰/۵۹	۰/۸۱	۰/۳	
۰/۶۰	۰/۶۵	۰/۵۳	۰/۸۰	۰/۵	
۰/۵۵	۰/۵۲	۰/۷۱	۰/۸۳	۰/۷	(۰, ۱)
۰/۸۹	۰/۸۷	۰/۸۴	۰/۱۲۲	۰/۱	
۰/۵۳	۰/۷۲	۰/۸۰	۰/۷۹	۰/۳	
۰/۶۴	۰/۷۵	۰/۷۷	۰/۷۷	۰/۵	
۰/۶۹	۰/۶۹	۰/۵۹	۰/۹۲	۰/۷	(۱, ۱)
۰/۸۰	۰/۷۲	۰/۸۲	۰/۸۶	۰/۱	
۰/۵۰	۰/۶۴	۰/۶۳	۰/۷۶	۰/۳	
۰/۴۷	۰/۵۸	۰/۶۲	۰/۸۷	۰/۵	
۰/۵۶	۰/۵۲	۰/۶۰	۰/۷۴	۰/۷	(۱, ۲)
۰/۸۱	۰/۷۷	۰/۷۹	۰/۱۲۶	۰/۱	
۰/۶۶	۰/۵۸	۰/۵۵	۰/۸۹	۰/۳	
۰/۶۳	۰/۵۳	۰/۶۸	۰/۶۹	۰/۵	
۰/۶۱	۰/۶۰	۰/۵۸	۰/۹۵	۰/۷	(۲, ۲)
۰/۸۲	۰/۱۰۶	۰/۱۰۶	۰/۱۷۷	۰/۱	
۰/۵۴	۰/۷۹	۰/۸۴	۰/۹۹	۰/۳	
۰/۶۶	۰/۷۲	۰/۶۴	۰/۸۰	۰/۵	
۰/۷۳	۰/۶۷	۰/۷۰	۰/۹۲	۰/۷	

حالت اول: تغییر در یکی از پارامترهای a, b یا λ

در ابتدا، حالتی را بررسی می‌کنیم که تنها یکی از پارامترها دستخوش تغییر شده است. مقادیر توان تجربی آزمون مبتنی بر آماره $Q(\theta_0)$ وقتی فقط یکی از پارامترهای a, b یا λ تغییر می‌کند، به ازای مقادیر مختلف $\frac{\pi}{n}$ در جدول ۳ گزارش شده‌اند. ملاحظه می‌شود که با افزایش حجم نمونه، توان تجربی آزمون، در اکثر موارد به مقدار یک نزدیک است. با این حال، نرخ همگرایی توان آزمون به سمت یک، تحت تأثیر انتخاب مقدار $\frac{\pi}{n}$ قرار دارد. سرعت همگرایی برای مقادیر بزرگ $\frac{\pi}{n}$ ، کندتر از مقادیر کوچک و میانی است؛ به عبارت دیگر، تغییرات اولیه در سری آسان‌تر از تغییرات دیر هنگام شناسایی می‌شوند. همچنین، توان آزمون در شناسایی تغییر پارامتر عرض از مبدا (a) در حجم نمونه‌های کوچک، ضعیف‌تر از دو پارامتر دیگر است. با این حال، نکته حائز اهمیت آن است که اگر مقادیر پارامترهای تغییر یافته به مقدار متناظر در θ_0 نزدیک باشند، سرعت همگرایی توان آزمون به سمت یک کندتر از سایر حالات خواهد بود. بر اساس نتایج ثبت شده، می‌توان نتیجه گرفت که هرچه تفاوت میان پارامتر تغییر یافته و مقدار اولیه آن بیشتر باشد، سرعت همگرایی توان آزمون به سمت یک نیز بیشتر خواهد بود.

جدول ۲. اندازه آزمون برای مقادیر مختلف $\frac{\tau}{n}$ و $b_0 = -0.5$

n				$\frac{\tau}{n}$	(a_0, λ_0)
۱۰۰۰	۸۰۰	۵۰۰	۳۰۰		
۰.۷۷	۰.۸۳	۰.۱۱۷	۰.۱۳۸	۰.۱	(-۲, ۲)
۰.۶۴	۰.۵۹	۰.۰۶۱	۰.۰۷۱	۰.۳	
۰.۵۹	۰.۵۵	۰.۰۷۸	۰.۰۸۳	۰.۵	
۰.۶۳	۰.۶۴	۰.۰۶۶	۰.۰۷۸	۰.۷	
۰.۷۹	۰.۶۶	۰.۰۸۷	۰.۱۵۶	۰.۱	(۰, ۲)
۰.۶۶	۰.۵۳	۰.۰۶۸	۰.۰۶۸	۰.۳	
۰.۵۶	۰.۵۱	۰.۰۷۲	۰.۰۷۵	۰.۵	
۰.۵۶	۰.۴۴	۰.۰۶۲	۰.۰۸۵	۰.۷	
۰.۹۵	۰.۷۶	۰.۱۱۸	۰.۱۶۵	۰.۱	(۰, ۱)
۰.۴۸	۰.۶۶	۰.۰۷۳	۰.۰۸۳	۰.۳	
۰.۷۵	۰.۵۷	۰.۰۶۷	۰.۰۸۳	۰.۵	
۰.۶۸	۰.۶۷	۰.۰۷۶	۰.۰۸۵	۰.۷	
۰.۷۳	۰.۹۵	۰.۱۱۷	۰.۱۸۳	۰.۱	(۱, ۱)
۰.۶۸	۰.۷۴	۰.۰۷۶	۰.۰۹۳	۰.۳	
۰.۵۸	۰.۶۲	۰.۰۷۰	۰.۰۸۲	۰.۵	
۰.۶۵	۰.۶۳	۰.۰۸۰	۰.۰۸۷	۰.۷	
۰.۵۹	۰.۷۲	۰.۰۹۹	۰.۱۶۴	۰.۱	(۱, ۲)
۰.۵۰	۰.۴۲	۰.۰۷۹	۰.۰۸۰	۰.۳	
۰.۵۶	۰.۴۶	۰.۰۷۶	۰.۰۶۷	۰.۵	
۰.۵۶	۰.۴۰	۰.۰۶۹	۰.۰۷۷	۰.۷	
۰.۷۷	۰.۸۳	۰.۱۱۷	۰.۱۳۸	۰.۱	(۲, ۲)
۰.۶۴	۰.۵۹	۰.۰۶۱	۰.۰۷۱	۰.۳	
۰.۵۹	۰.۵۵	۰.۰۷۸	۰.۰۸۳	۰.۵	
۰.۶۳	۰.۶۴	۰.۰۶۶	۰.۰۷۸	۰.۷	

حالت دوم: تغییر در دو پارامتر

مطابق با نتایج ارائه شده در جدول ۴، مشاهده می‌شود که در حجم نمونه‌های مختلف، توان تجربی آزمون برای تمامی ترکیب‌های ممکن از گروه‌های پارامتری، نزدیک به یک است. با این وجود، زمانی که نقطه تغییر در انتهای سری باشد، به‌ویژه اگر تغییرات موجود در پارامترها در مقایسه با θ_0 خیلی محسوس نباشند، توان کاهش می‌یابد. این نتایج نشان می‌دهد که آزمون در شناسایی تغییرات شدید هم‌زمان در دو پارامتر از توان بسیار خوبی برخوردار است.

حالت سوم: تغییر هم‌زمان در سه پارامتر مدل

وقتی سه پارامتر به‌طور هم‌زمان با یکدیگر تغییر می‌کنند، مطابق با نتایج جدول ۵، در حجم نمونه‌های مختلف و انتخاب‌های متفاوتی از a, b, λ و $\frac{\tau}{n}$ ، توان تجربی آزمون بسیار مطلوب است. این موضوع نشان‌دهنده عملکرد پایدار و کارآمد آزمون مبتنی بر آماره $Q(\theta_0)$ در شناسایی تغییرات هم‌زمان در تمامی پارامترها است.

جدول ۳. توان آزمون با تغییر یکی از پارامترهای a, b یا λ .

n				$\frac{\tau}{n}$	(a, b, λ)
۱۰۰۰	۸۰۰	۵۰۰	۳۰۰		
۱	۱	۰.۹۷۰	۰.۸۷۱	۰.۱	$(1, -0.1, 1)$
۱	۰.۹۹۳	۰.۸۸۹	۰.۶۴۴	۰.۳	
۰.۹۷۹	۰.۹۳۴	۰.۷۰۸	۰.۴۶۸	۰.۵	
۰.۸۱۶	۰.۶۷۸	۰.۴۴۷	۰.۲۹۱	۰.۷	
۱	۱	۱	۱	۰.۱	$(1, -0.3, 1)$
۱	۱	۱	۱	۰.۳	
۱	۱	۱	۰.۹۹۵	۰.۵	
۱	۱	۰.۹۹۵	۰.۹۳۲	۰.۷	
۱	۱	۱	۱	۰.۱	$(1, -0.4, 1)$
۱	۱	۱	۱	۰.۳	
۱	۱	۱	۱	۰.۵	
۱	۱	۱	۰.۹۸۰	۰.۷	
۱	۱	۱	۰.۹۹۵	۰.۱	$(0, 0, 1)$
۱	۱	۰.۹۹۹	۰.۹۷۲	۰.۳	
۱	۱	۰.۹۸۶	۰.۸۹۱	۰.۵	
۰.۹۹۶	۰.۹۸۸	۰.۸۸۳	۰.۶۶۳	۰.۷	
۱	۰.۹۹۹	۰.۹۹۸	۰.۹۶۹	۰.۱	$(2, 0, 1)$
۱	۱	۰.۹۸۱	۰.۹۱۹	۰.۳	
۰.۹۹۷	۰.۹۹۴	۰.۹۳۸	۰.۸۰۷	۰.۵	
۰.۹۷۴	۰.۹۵۲	۰.۸۳۸	۰.۶۲۷	۰.۷	
۱	۱	۱	۰.۹۹۹	۰.۱	$(-0.1, 0, 1)$
۱	۱	۰.۹۹۹	۰.۹۹۴	۰.۳	
۱	۱	۰.۹۹۷	۰.۹۴۳	۰.۵	
۱	۰.۹۹۸	۰.۹۳۱	۰.۷۳۵	۰.۷	
۰.۲۱۱	۰.۱۹۵	۰.۱۶۷	۰.۱۹۲	۰.۱	$(1, 0, 1/1)$
۰.۱۷۴	۰.۱۴۸	۰.۱۲۴	۰.۱۱۶	۰.۳	
۰.۱۳۱	۰.۱۱۱	۰.۱۰۱	۰.۰۹۲	۰.۵	
۰.۱۰۴	۰.۱۰۸	۰.۰۹۰	۰.۱۰۵	۰.۷	
۱	۰.۹۹۹	۰.۹۷۵	۰.۸۴۹	۰.۱	$(1, 0, 1.5)$
۰.۹۹۹	۰.۹۹۸	۰.۹۲۳	۰.۷۳۸	۰.۳	
۰.۹۷۸	۰.۹۵۲	۰.۷۹۳	۰.۵۴۹	۰.۵	
۰.۸۷۲	۰.۷۷۵	۰.۵۵۷	۰.۳۷۹	۰.۷	
۱	۱	۱	۱	۰.۱	$(1, 0, 2)$
۱	۱	۱	۰.۹۹۹	۰.۳	
۱	۱	۱	۰.۹۸۵	۰.۵	
۱	۱	۰.۹۸۸	۰.۸۴۷	۰.۷	

جدول ۴. توان آزمون در تغییر همزمان دو پارامتر مدل

n				$\frac{\tau}{n}$	(a, b, λ)
۱۰۰۰	۸۰۰	۵۰۰	۳۰۰		
۱	۱	۱	۱	۰/۱	
۱	۱	۱	۱	۰/۳	
۱	۱	۱	۰/۹۹۹	۰/۵	$(0, -0/1, 1)$
۱	۱	۰/۹۹۶	۰/۹۳۵	۰/۷	
۱	۱	۱	۱	۰/۱	
۱	۱	۱	۱	۰/۳	
۱	۱	۱	۰/۹۹۹	۰/۵	$(-0/1, -0/1, 1)$
۱	۱	۱	۰/۹۵۳	۰/۷	
۱	۱	۱	۱	۰/۱	
۱	۱	۱	۱	۰/۳	
۱	۱	۱	۱	۰/۵	$(0, -0/4, 1)$
۱	۱	۱	۱	۰/۷	
۱	۱	۱	۰/۹۷۲	۰/۱	
۱	۱	۰/۹۸۴	۰/۹۰۵	۰/۳	$(1, -0/1, 1/5)$
۰/۹۹۹	۰/۹۹۷	۰/۹۵۷	۰/۷۵۰	۰/۵	
۰/۹۷۴	۰/۹۳۷	۰/۷۹۰	۰/۵۴۶	۰/۷	
۱	۱	۱	۱	۰/۱	
۱	۱	۱	۱	۰/۳	
۱	۱	۱	۱	۰/۵	$(1, -0/3, 1/1)$
۱	۱	۰/۹۹۷	۰/۹۲۰	۰/۷	
۱	۱	۱	۱	۰/۱	
۱	۱	۱	۱	۰/۳	
۱	۱	۱	۱	۰/۵	$(1, -0/3, 1/5)$
۱	۱	۱	۰/۹۹۹	۰/۷	
۱	۰/۹۹۷	۰/۹۵۴	۰/۸۴۶	۰/۱	
۰/۹۹۶	۰/۹۸۷	۰/۹۰۰	۰/۷۶۸	۰/۳	$(0, 0, 1/5)$
۰/۹۷۲	۰/۹۲۹	۰/۷۹۷	۰/۶۴۶	۰/۵	
۰/۸۴۰	۰/۷۶۸	۰/۶۲۲	۰/۴۴۶	۰/۷	
۱	۱	۰/۹۹۶	۰/۹۵۶	۰/۱	
۱	۰/۹۹۸	۰/۹۸۳	۰/۹۰۵	۰/۳	$(0, 0, 2)$
۱	۰/۹۹۴	۰/۹۴۱	۰/۷۸۰	۰/۵	
۰/۹۷۶	۰/۹۳۰	۰/۷۹۱	۰/۶۱۳	۰/۷	
۱	۱	۱	۱	۰/۱	
۱	۱	۱	۱	۰/۳	
۱	۱	۱	۰/۹۹۷	۰/۵	$(2, 0, 1/5)$
۱	۱	۰/۹۹۵	۰/۹۶۴	۰/۷	

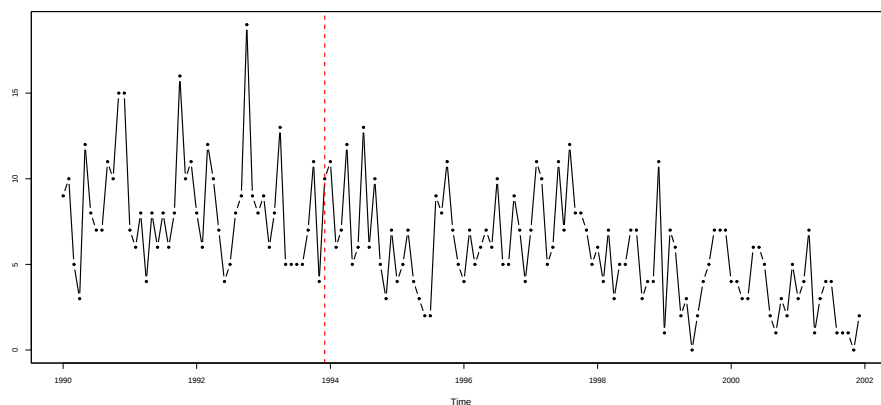
۵ کاربرد در دنیای واقعی

الف- تحلیل داده‌های سرقت: عوامل متعدد اجتماعی و اقتصادی می‌توانند به‌طور بالقوه بر فعالیت‌های مجرمانه در یک منطقه خاص تأثیر بگذارند. عواملی نظیر بی‌ثباتی اقتصادی، زیرساخت‌های رفاه ملی، فرصت‌های آموزشی برای

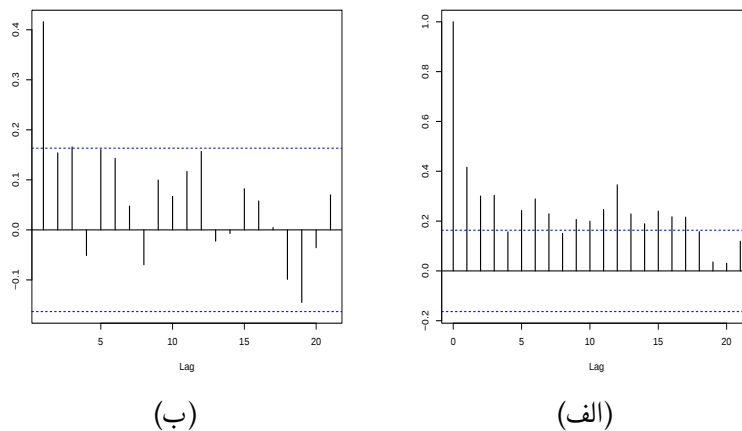
جدول ۵. توان آزمون در تغییر همزمان سه پارامتر مدل				
n				$\frac{\pi}{n}$
۱۰۰۰	۸۰۰	۵۰۰	۳۰۰	
۱	۱	۱	۱	۰/۱
۱	۱	۱	۱	۰/۳
۱	۱	۱	۰/۹۹۳	۰/۵
۱	۱	۰/۹۹۷	۰/۹۱۲	۰/۷
۱	۱	۱	۱	۰/۱
۱	۱	۱	۱	۰/۳
۱	۱	۱	۱	۰/۵
۱	۱	۱	۰/۹۹۷	۰/۷
۱	۱	۱	۱	۰/۱
۱	۱	۱	۱	۰/۳
۱	۱	۱	۱	۰/۵
۱	۱	۱	۰/۹۸۳	۰/۷
۱	۱	۱	۱	۰/۱
۱	۱	۱	۱	۰/۳
۱	۱	۱	۱	۰/۵
۱	۱	۱	۰/۹۹۹	۰/۷
۱	۱	۱	۱	۰/۱
۱	۱	۱	۱	۰/۳
۱	۱	۱	۱	۰/۵
۱	۱	۱	۰/۹۹۹	۰/۷

جوانان، و توانمندی نیروی انسانی در دستگاه‌های انتظامی، می‌توانند به‌طور قابل توجهی بر دینامیک جرم اثرگذار باشند. مطالعات نشان می‌دهند که بودجه عمومی تامین امنیت اجتماعی در شهر پیتسبورگ از سال ۱۹۹۵، به‌طور قابل توجهی افزایش یافته است به‌طوری که برنامه‌های جذب و آموزش نیروهای پلیس در سال‌های ۱۹۹۴ و ۱۹۹۵ نسبت به سال‌های پیشین افزایش چشمگیری یافته است. افزون بر این، استراتژی‌های درون‌سازمانی نیز تحول پیدا کردند و با رویکردی هدفمند، نیروهای پلیس تعامل بیشتری با جامعه پیدا کردند و در نتیجه از جرائم مواد مخدر، به‌طور هدفمندانه پیشگیری شد. بنابراین، می‌توان فرض منطقی‌ای مطرح کرد که این اقدامات جامع دولتی، به‌ویژه پس از سال ۱۹۹۳ (مطابق با نقطه زمانی $\tau = 48$)، احتمالاً منجر به کاهش در تعداد جرائم شده‌اند. برای بررسی این فرضیه، آمار ماهانه و جامع سرقت‌های ثبت‌شده در حوزه استحقاظی ناحیه بیست و چهارم پلیس پیتسبورگ طی دوره‌ای بلندمدت از ژانویه ۱۹۹۰ تا دسامبر ۲۰۰۱، برگرفته از پایگاه داده به آدرس <http://www.forecastingprinciples.com> مورد تحلیل قرار گرفت. این داده‌ها مشتمل بر ۱۴۴ نقطه زمانی متمایز هستند. شکل ۱، سری زمانی تعداد سرقت‌های ماهانه در ناحیه بیست و چهارم شهر پیتسبورگ را نشان می‌دهد. تابع خودهمبستگی (ACF) و خودهمبستگی جزئی (PACF) مربوط به داده‌های این سری زمانی در شکل ۲ آمده است. با توجه به معنی‌داری خودهمبستگی جزئی در تاخیر اول، مدل INAR(1) برای برازش به داده‌ها مناسب به نظر می‌رسد. پارامتر θ با روش حداقل توان دوم شرطی برآورد می‌شود که مقادیر برآوردشده مولفه‌های آن به صورت $\tilde{a} = 1/2718$ ، $\tilde{b} = -0/1133$ و $\tilde{\lambda} = 2/6864$ است.

با توجه به شکل ۱، علی‌رغم آن‌که نمودار کاهش تدریجی در تعداد سرقت‌ها را نشان می‌دهد، برای ارزیابی دقیق‌تر، فرض صفر تغییر در نقطه زمانی $\tau = 48$ مورد بررسی قرار می‌گیرد. در این راستا، مقادیر بردار پارامتر θ در دو بازه زمانی مجزای پیش و پس از آستانه زمانی $\tau = 48$ با یکدیگر مقایسه می‌شوند. با انتخاب $\theta_0 = (\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{\lambda})^T$ ، مقدار آماره آزمون برابر $Q(\theta_0) = 22,2973$ و p -مقدار متناظر با چندک χ^2_2 ، برابر با 0.0006 به دست می‌آید که به وضوح کمتر از 0.05 است و در نتیجه فرض صفر رد می‌شود. این نتیجه حاکی از کاهش قابل توجه در تعداد جرائم پس از مداخله‌های مذکور است.

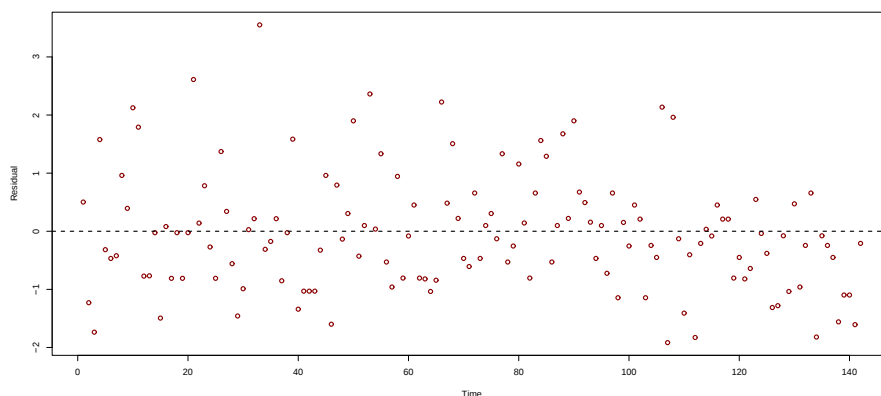


شکل ۱. سری زمانی تعداد سرقت‌ها در پیتسبورگ

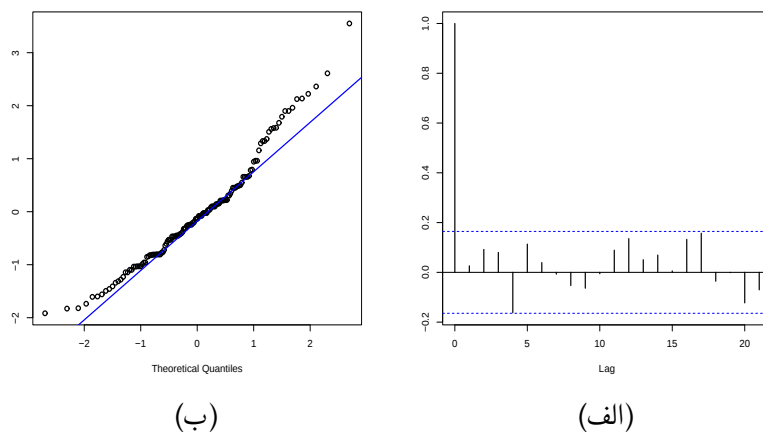


شکل ۲. نمودارهای الف- ACF و ب- PACF نظیر داده‌های سرقت

شکل ۳، نمودار پراکنش مانده‌های مدل را نشان می‌دهد. باتوجه به این شکل، هیچ روند و الگوی مشخصی در مانده‌ها مشاهده نمی‌شود. باتوجه به شکل ۴، مانده‌های استانداردشده به طور تقریبی روی خط راست قرار دارند و بررسی ACF مانده‌ها حاکی از عدم خودهمبستگی معنی‌دار بین مانده‌هاست. بنابراین فرض استقلال مانده‌ها معتبر است. از طرف دیگر، با توجه به شکل ۵، چون در تمام تاخیرها سطح معنی‌داری آزمون لیونگ-باکس^۱ بیشتر از ۵٪ است، هیچ خودهمبستگی معنی‌داری در مانده‌های استانداردشده مدل وجود ندارد و مدل برای پیش‌بینی و تحلیل‌های بعدی قابل اطمینان است.

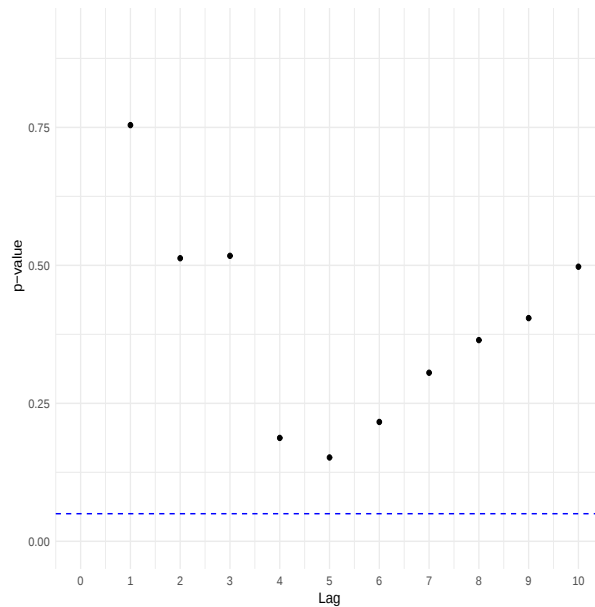


شکل ۳. نمودار پراکنش مانده‌های مدل برازش یافته به داده‌های سرقت



شکل ۴. نمودارهای الف-ACF و ب-احتمال نرمال مانده‌های مدل برازش یافته به داده‌های سرقت

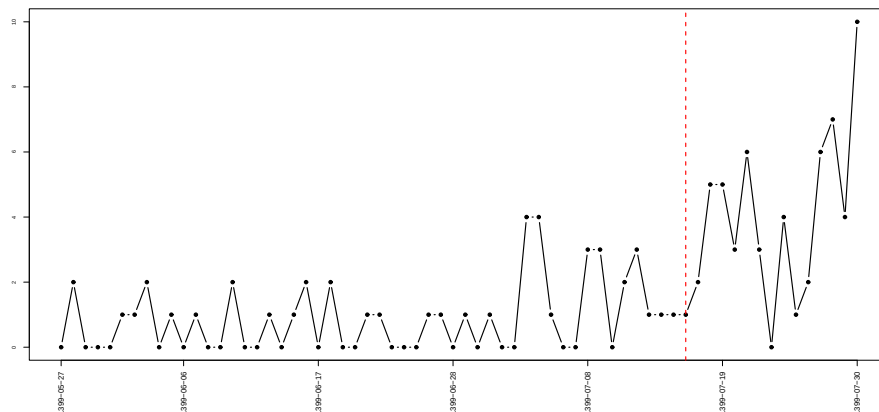
^۱Ljung-Box



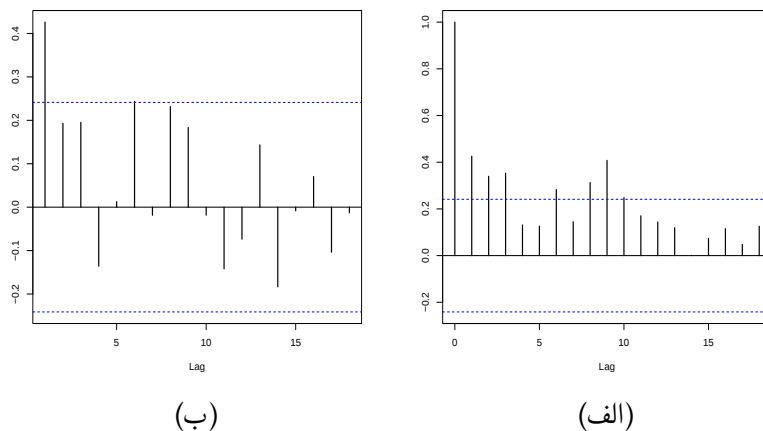
شکل ۵. p -مقدارهای آزمون لیونگ باکس در مدل برازش یافته به داده‌های سرقت

ب- تحلیل داده‌های کوید ۱۹: شکل ۶، نمودار سری زمانی تعداد فوتی‌های روزانه ناشی از کوید ۱۹ در فاصله ۲۷ مرداد تا ۳۰ مهر ۱۳۹۹ ($n = ۶۶$) در استان خراسان جنوبی را نشان می‌دهد. این داده‌ها از معاونت بهداشتی دانشگاه علوم پزشکی بیرجند اخذ شده است. باتوجه به شکل، یک روند تدریجی افزایشی در تعداد فوتی‌ها، وجود دارد. به وضوح، روز ۱۶ مهر ۱۳۹۹ (مطابق با نقطه زمانی $\tau = ۵۲$) یک نقطه تغییر در سری زمانی است. این تغییر ممکن است به دلیل کاهش حساسیت مردم، اطمینان خاطر کاذب ایجاد شده، عدم رعایت پروتکل‌ها و مهم‌تر از همه مسافرت‌های انجام شده در تابستان ۱۳۹۹ باشد. شکل ۷، نمودار ACF و PACF این سری زمانی را نمایش می‌دهد. با توجه به نمودار PACF، به نظر می‌رسد که مدل $INAR(1)$ برای برازش به داده‌ها مناسب باشد. بنابراین، فرض صفر ثابت بودن پارامتر θ در دو زیرسری پیش از نقطه زمانی ۱۶ مهرماه و بعد از آن مورد آزمون قرار می‌گیرد.

برآورد مولفه‌های بردار θ ، با روش حداقل توان دوم شرطی، به صورت $\tilde{a} = ۰.۳۶۷۴$ ، $\tilde{b} = ۰$ و $\tilde{\lambda} = ۰.۷۳۴۲$ به دست آمده است. با انتخاب $\theta_0 = (\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{\lambda})^T$ ، مقدار آماره آزمون برابر $Q(\theta_0) = ۱۵۳۲۰۱$ و مقدار متناظر با چندک $\chi^2_{۱۷۹}$ برابر ۰.۰۱۷۹ به دست می‌آید، لذا فرض صفر رد می‌شود.



شکل ۶. نمودار سری زمانی تعداد فوتی‌های ناشی از کووید ۱۹



شکل ۷. نمودارهای الف- ACF و ب- PACF تعداد فوتی‌های ناشی از کووید ۱۹

بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله، با استفاده از روش درستنمایی تجربی، آزمونی برای تشخیص نقطه تغییر در پارامترهای یک کلاس از فرایندهای INAR(1) با ضرایب تصادفی و مبتنی بر رقیق‌ساز دوجمله‌ای منفی معرفی شد. توزیع مجانبی آماره آزمون پیشنهادی تحت فرض صفر به‌دست آمد. در یک مطالعه شبیه‌سازی، اندازه‌ها و توان‌های این آزمون مورد ارزیابی قرار گرفت. با افزایش حجم نمونه، اندازه تجربی آزمون، به سطح معنی‌داری اسمی ۰/۰۵ نزدیک می‌شود. در نمونه‌های بزرگ‌تر ($n \geq 800$)، اگر نقطه تغییر در موقعیت وسط داده‌های سری زمانی باشد ($(\frac{\tau}{n} = 0.3, 0.5)$ ،

عملکرد آزمون پیشنهادی قابل قبول بوده و اندازه تجربی به اندازه اسمی نزدیک است. در نمونه‌های کوچک‌تر و زمانی که نقطه تغییر نزدیک به ابتدا یا انتهای سری است ($\frac{\pi}{n} = 0.1, 0.7$)، اندازه تجربی آزمون بیشتر از مقدار واقعی است. همچنین بر اساس نتایج به‌دست آمده، آزمون از نظر توان، عملکرد مطلوبی دارد. از این آزمون برای شناسایی نقاط تغییر در پارامترهای مدل سری زمانی در دو مجموعه داده واقعی استفاده شد. در مقایسه با پژوهش‌های کانگ و لی (۲۰۰۹) و یو و همکاران (۲۰۱۹)، این پژوهش یک چارچوب آماری قوی و ناپارامتری برای تشخیص تغییرات ساختاری در مدل‌های پیچیده‌تر RC-INAR(1) که مبتنی بر عملگر دوجمله‌ای منفی تصادفی هستند، ارائه می‌دهد. با توجه به عملکرد مطلوب آماره آزمون در شبیه‌سازی و کاربرد آن در داده‌های واقعی، می‌توان از این آزمون به‌طور گسترده‌ای در زمینه‌هایی مانند اقتصاد، اپیدمیولوژی، و آمار جرم و جنایت استفاده کرد. از دیدگاه کاربردی، این آزمون یک ابزار قابل اعتماد برای نظارت مستمر بر پدیده‌های شمارشی ارائه می‌دهد و می‌تواند یک هشدار زود هنگام درباره تغییرات ناگهانی در داده‌های شمارشی وابسته فراهم آورد. شناسایی دقیق نقطه تغییر، به مدیران در جهت مدیریت ریسک، کمک خواهد کرد.

تقدیر و تشکر

بدین وسیله از زحمات سردبیر، داوران و ویراستار ارجمند مجله برای ارائه نظرات سازنده و تلاش ارزشمندی که در بررسی دقیق و کارشناسانه این مقاله اختصاص دادند، صمیمانه سپاسگزاری می‌شود.

مراجع

شیراوژن، م.، محمدپور، م. (۱۳۹۹)، مدل خودبازگشتی صحیح مقدار مرتبه اول براساس عملگر نازک دوجمله‌ای منفی با نوفه‌های وابسته، مجله علوم آماری، ۱، ۲۱۵-۲۳۲.

Al-Osh, M. A. and Alzaid, A. A. (1987), First-Order Integer-Valued Autoregressive (INAR(1)) Process, *Journal of Time Series Analysis*, **8**, 261–275.

Baragona, R., Battaglia, F. and Cucina D. (2013), Empirical Likelihood for Break Detection in Time Series, *Electron Journal of Statistics*, **7**, 3089–3123.

Ding, X. and Wang, D. (2016), Empirical Likelihood Inference for INAR(1) Model with Explanatory Variables, *Journal of Korean Statistical Society*, **45**, 623–632.

Gamage, R. D. P. and Ning, W. (2021) Empirical Likelihood for Change Point

- Detection in Autoregressive Models, *Journal of Korean Statistical Society*, **50**, 69–97.
- Kang, J., Lee, S. (2009), Parameter Change Test for Random Coefficient Integer-Valued Autoregressive Processes with Application to Polio Data Analysis, *Journal of Time Series Analysis*, **30**, 239–258.
- Owen A. B. (1990), Empirical Likelihood Ratio Confidence Regions. *Annals of Statistics*, **18**, 90–120.
- Qin, J. and Lawless, J. (1994), Empirical Likelihood and General Estimating Equations, *The Annals of Statistics*, **22**, 300–325.
- Ristić, M. M., Bakouch, H. S. and Nastić, A. S. (2009), A New Geometric First-Order Integer-Valued Autoregressive (NGINAR(1)) Process, *Journal of Statistical Planning and Inference*, **139**, 2218–2226.
- Steutel, F. and van Harn, K. (1979), Discrete Analogues of Self-Decomposability and Stability, *The Annals of Probability*, **7**, 893–899.
- White, H. (2001), *Asymptotic Theory for Econometricians*, London: Academic Press.
- Weiβ, C. H. (2008), Thinning Operations for Modeling Time Series of Counts: a Survey, *ASTA Advances in Statistical Analysis*, **92**, 319–343.
- Weiβ, C. H. and Kim, H. Y. (2014), Diagnosing and Modelling Extra-Binomial Variation for Time-Dependent Counts, *Applied Stochastic Models in Business and Industry*, **30**, 588–608.
- Yu, K., Wang, H. and Weiβ, C. H. (2023), An Empirical-Likelihood Based Structural-Change Test for INAR Processes, *Journal of Statistical Computation and Simulation*, **93**, 442–458.
- Yu, M., Wang, D. and Yang, K. (2019), A Class of Observation-Driven Random Coefficient INAR (1) Processes Based on Negative Binomial Thinning, *Journal of the Korean Statistical Society*, **48**, 248–264.

Zhang, H., Wang, D., and Zhu, F. (2011), Empirical Likelihood Inference for Random Coefficient INAR(p) Process. *Journal of Time Series Analysis*, **32**, 195–203.

Zhang, H., Wang, D. and Zhu, F. (2012), Generalized RCINAR(1) Process with Signed Thinning Operator, *Communications in Statistics: Theory and Methods*, **41**, 1750–1770.

Zhu, F., Liu, M., Ling, S. and Cai, Z. (2022), Testing for Structural Change of Predictive Regression Model to Threshold Predictive Regression Model, *Journal of Business and Economic Statistics*, **41**, 228-240.