



Comparative Analysis of Parameter Estimation Methods for Periodic Autoregressive Models with Scale Mixture of Skew Normal Distributions in the Face of Outliers and Heavy Tailed Data

Manouchehri, T. , Nematollahi, A. R. 

Department of Statistics, Shiraz University, Shiraz, Iran.

Corresponding author: T. Manouchehri, t.manouchehri@shirazu.ac.ir

Received: 24/9/2025 Revised: 7/12/2025 Accepted and Published Online: 8/12/2025.

Introduction

Periodic autoregressive (PAR) models provide a flexible framework for modeling time series with seasonal or cyclic dynamics. However, their performance is sharply reduced in the presence of outliers, asymmetric behavior, or heavy-tailed observations, which commonly arise in financial and environmental data. To overcome these limitations, this study incorporates the scale mixture of skew-normal (SMSN) family as the innovation distribution of PAR(1) models. This family includes several important heavy-tailed and skewed distributions, such as SN, ST, SL, and SCN, thereby enabling robust modeling under skewness, tail-heaviness, and data contamination.

Material and Methods

We evaluate the performance of three estimation approaches, namely maximum likelihood (ML), maximum a posteriori (MAP), and Bayesian inference, within the SMSN-PAR(1) framework. A comprehensive simulation study is conducted under various innovation structures and different sample sizes. The accuracy of the estimates is evaluated using standard performance measures, including bias, MSE, and the defect (DEF) index. For Bayesian estimation, Markov chain Monte Carlo (MCMC) sampling is implemented to obtain posterior summaries and credible intervals. In addition, the proposed methodology is applied to Google stock return data to demonstrate the practical relevance of the model in the presence of outliers and heavy tails.

Results and Discussion

The results indicate that the choice of innovation distribution and estimation method has a substantial impact on parameter estimation quality. Across all scenarios, the Bayesian approach achieves the smallest DEF, suggesting superior stability and robustness, particularly in small samples and under highly skewed or heavy-tailed conditions. While the estimator generally performs well, it is sensitive to data contamination. The MAP estimator, however, exhibits the highest estimation error in most settings. Among the innovation structures, ST and SN show the most stable behavior, whereas SL and SCN produce larger estimation errors due to their stronger skewness and contamination characteristics. The empirical analysis on Google stock returns confirms the presence of heavy tails and periodic behavior, and Bayesian estimation under ST innovations provides the best fit.

Conclusion

This study demonstrates that combining PAR models with SMSN innovations offers a powerful and flexible approach for analyzing periodic time series affected by skewness, heavy tails, and outliers. The Bayesian method consistently outperforms ML and MAP in terms of accuracy and stability. The findings emphasize the importance of selecting an appropriate innovation distribution and estimation strategy when dealing with complex periodic structures and contaminated data.

Keywords: Periodic Autoregressive Models, Scale Mixture of Skew Normal, ML Estimate, ECM Algorithms, MAP Estimate, Bayesian Analysis, MCMC Algorithms, Heavy Tails, Outliers.

Mathematics Subject Classification (2010): 62H12, 60G10.



©The Author(s). The Publisher is Iranian Statistical Society.

This is an open access article distributed under the terms and conditions of [\(CC BY-NC 4.0\)](https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/)

تحلیل تطبیقی روش‌های برآورد پارامترهای مدل‌های خودبازگشتی متناوب با توزیع‌های ترکیبی مقیاسی چوله‌نرمال در مواجهه با داده‌های پرت و دم‌سنگین

طاهره منوچهری، علیرضا نعمت‌اللهی

بخش آمار، دانشکده علوم، دانشگاه شیراز

نویسنده مسئول: طاهره منوچهری، t.manouchehri@shirazu.ac.ir

تاریخ دریافت: ۱۴۰۴/۷/۲ تاریخ بازنگری: ۱۴۰۴/۹/۱۶ تاریخ پذیرش و انتشار: ۱۴۰۴/۹/۱۷

چکیده: در این مقاله، مروری جامع و تحلیلی-مقایسه‌ای بر روش‌های برآوردیابی مدل‌های خودبازگشتی متناوب با نوآورهایی از نوع توزیع ترکیبی مقیاسی چوله‌نرمال ارائه می‌شود. این خانواده از توزیع‌ها، چارچوبی انعطاف‌پذیر برای مدل‌سازی داده‌های متقارن و نامتقارن فراهم می‌سازد. در این راستا، الگوریتم ECM برای توسعه سه روش برآوردیابی ماکسیم درستنمایی، ماکسیم احتمال پسین، و بیزی به‌کار گرفته شده‌اند. کارایی این روش‌ها و ویژگی‌های مجانبی، استواری برآوردگرها در برابر داده‌های پرت، قله‌های شدید و دم‌های سنگین از طریق مطالعات شبیه‌سازی، مورد بررسی قرار گرفته‌اند. همچنین، به‌منظور بررسی کاربردهای واقعی از سری زمانی ماهانه قیمت سهام شرکت گوگل برای مدل‌سازی مدل پیشنهادی، استفاده شده است.

واژه‌های کلیدی: مدل‌های خودبازگشتی متناوب، توزیع ترکیبی مقیاسی چوله‌نرمال، برآورد ماکسیم درستنمایی، برآورد ماکسیم احتمال پسین، برآورد بیزی.
کد موضوع‌بندی ریاضی (۲۰۲۰): 60G10، 62H12.

۱ مقدمه

سری‌های زمانی متناوب همبسته که نخستین‌بار توسط **گلدیشف** (۱۹۶۱) معرفی شدند، به‌عنوان مدل‌هایی بسیار مفید برای توصیف رفتارهای متناوب در بسیاری از پدیده‌ها در حوزه‌های مختلف علم و فناوری از جمله اقلیم‌شناسی،



©نویسندگان). ناشر انجمن آمار ایران است.
این مقاله با دسترسی آزاد تحت شرایط و ضوابط (CC BY-NC 4.0) توزیع شده است.

آشناسی، اقتصاد، مهندسی برق و پردازش سیگنال شناخته می‌شوند. فرایند تصادفی درجه دوم $X = \{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ با میانگین صفر و تابع کوواریانس $R(t, s)$ یک فرایند متناوب همبسته با تناوب T نامیده می‌شود، هرگاه عدد صحیح مثبتی مانند T وجود داشته باشد به طوری که:

$$R(t, s) = R(t + T, s + T), \quad t, s \in \mathbb{Z} \quad (۱)$$

که در آن T کوچک‌ترین عدد صحیح مثبتی است که این شرط را برآورده می‌سازد. مطالعات گسترده و ادبیات غنی پیرامون مدل‌های سری زمانی متناوب و کاربردهای آن‌ها وجود دارد. برای آشنایی بیشتر، به چاری و همکاران (۲۰۱۷)، نعمت‌اللهی و همکاران (۲۰۱۷) و دیگر منابع ارجاع داده شده در آن‌ها مراجعه شود. کلاس مهمی از مدل‌های تصادفی برای توصیف سری‌های زمانی با همبستگی متناوب، مدل‌های خودبازگشتی متناوب^۱ (PAR) هستند که نخستین بار توسط توماس و فیرینگ (۱۹۶۲) معرفی شدند. در این مدل‌ها، پارامترهای مدل به صورت متناوب با فصل تغییر می‌کنند. مدل خودبازگشتی متناوب زمانی به مدل کلاسیک خودبازگشتی کاهش می‌یابد که $T = ۱$ باشد. سری زمانی مرتبه دوم X_t دارای یک مدل خودبازگشتی متناوب از مرتبه p یا $PAR(p)$ است، هرگاه در رابطه

$$X_t = \sum_{i=1}^p \phi_{it} X_{t-i} + \varepsilon_t, \quad (۲)$$

صدق کند، که در آن $\{\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z}\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی با میانگین صفر و واریانس متناوب $\sigma_t^2 = \sigma_{t+T}^2$ است که نویز سفید متناوب^۲ نامیده می‌شود.

وقتی نوآور از توزیع نرمال پیروی نمی‌کند، روش‌های کلاسیک که بر پایه توزیع نرمال بنا شده‌اند، ممکن است برازش‌های ضعیف و نادرستی ارائه دهند. به عنوان مثال، در تحلیل سری‌های زمانی مالی، پدیده‌هایی چون دم‌سنگینی و چولگی مشاهده می‌شوند که نیاز به نوآورهای غیر از نرمال را نشان می‌دهند. در میان توزیع‌های غیر نرمال، توزیع‌های ترکیبی مقیاسی چوله نرمال^۳ (SMSN) به عنوان جایگزین‌هایی منعطف معرفی شده‌اند که برای مدل‌سازی داده‌های مالی که چوله و دم‌سنگین هستند، به کار رفته‌اند (زلی و همکاران، ۲۰۱۶؛ ملکی و همکاران، ۲۰۱۸).

توزیع SMSN از طریق نمایش تصادفی $Y = \mu + U^{-1/2}X$ با توزیع چوله نرمال^۴ (SN) مرتبط است، که در آن $X \sim SN(0, \sigma^2, \alpha)$ و U یک متغیر تصادفی مثبت با پارامتر مقیاس ν و تابع توزیع $H(u; \nu)$ است و

^۱Periodic Autoregressive

^۲Periodic White Noise

^۳Scale Mixtures of Skew-normal

^۴Skew Normal

مستقل از X می‌باشد. چگالی احتمال متغیر تصادفی Y به صورت

$$f_Y(y) = \int_0^\infty \varphi\left(\frac{u^{1/2}(y-\mu)}{\sigma}\right) \Phi\left(\alpha \frac{u^{1/2}(y-\mu)}{\sigma}\right) dH(u; \nu), \quad (3)$$

بیان می‌شود، که در آن ϕ و Φ به ترتیب تابع چگالی و تابع تجمعی توزیع نرمال استاندارد هستند و $H(u; \nu)$ تابع تجمعی متغیر تصادفی مثبت U با پارامتر ν است. در صورت وجود، چگالی U را با $h(u; \nu)$ نشان می‌دهیم. در حالتی خاص که $\alpha = 0$ ، توزیع SMSN به توزیع ترکیبی مقیاسی نرمال تقلیل می‌یابد که در آن $X \sim N(0, \sigma^2)$ و چگالی Y به صورت

$$f_Y(y) = \int_0^\infty \phi\left(\frac{u^{1/2}(y-\mu)}{\sigma}\right) dH(u; \nu), \quad (4)$$

است. برخی حالت‌های خاص از توزیع SMSN عبارتند از توزیع چوله‌نرمال، زمانی که U یک متغیر ثابت برابر با ۱ باشد و توزیع تی چوله، زمانی که $U \sim \text{Gamma}(\nu/2, \nu/2)$ باشد (زیر و همکاران، ۲۰۱۶).

روش‌های گوناگونی برای برآورد پارامترهای مدل PAR وجود دارد؛ از جمله روش حداقل مربعات که توسط فرانسس و پاپ (۲۰۰۴) برای حالت تک‌متغیره استفاده شده است؛ روش گشتاورها بر پایه معادلات یول-واکر و تحلیل‌های مجانبی ارائه شده توسط هیپل و مک‌لنود (۱۹۹۴) و برآورد ماکسیمم درستنمایی که توسط باساوا و لوند (۲۰۰۱) توسعه داده شده است. همچنین، رهیافت بیزی و ماکسیمم احتمال پسین برای برآورد پارامترهای مدل PAR توسط منوچهری و نعمت‌اللهی (۲۰۱۹ الف، ب، ۲۰۲۲) ارائه شده است. در سال‌های اخیر، مدل‌های خودبازگشتی و رگرسیونی مبتنی بر توزیع‌های چوله و سنگین‌دم توسعه یافته‌اند. به عنوان نمونه، فریرا و دیاس (۲۰۲۴) مدل‌های رگرسیونی نیمه‌پارامتری با توزیع‌های چوله-مقیاسی نرمال ارائه کرده‌اند، یعقوبی و فرنوش (۲۰۲۵) روش خوشه‌بندی سری‌های زمانی چندمتغیره با توزیع‌های نرمال چوله چندمتغیره و امتیاز خودبازگشتی تعمیم‌یافته معرفی کرده‌اند.

در زمینه مدل‌های خودبازگشتی متناوب نیز مطالعاتی توسط زولاوینسکی و همکاران (۲۰۲۳) روش‌های برآورد و تشخیص تناوب را در شرایط نوآورهای گاوسی و داده‌های با واریانس نامتناهی مورد بررسی قرار گرفته است. زولاوینسکی و همکاران (۲۰۲۴)، آماره‌های مقاومی برای تشخیص تناوب پنهان در مدل‌های نویزی ارائه داده‌اند و گیری و همکاران (۲۰۲۲)، روش تغییر یافته یول-واکر را برای مدل‌های چندبعدی متناوب با واریانس نامتناهی توسعه داده‌اند. در پژوهش حاضر، با تعمیم چارچوب مدل‌های خودبازگشتی متناوب به حالت توزیع‌های چوله-مقیاسی ترکیبی تلاش شده است، ادبیات پژوهش از منظر مدل‌سازی داده‌های مالی سنگین‌دم و پرت تکمیل گردد.

در این مقاله، الگوریتم‌های ماکسیمم‌سازی شرطی امیدریاضی^۱ (ECM) برای توسعه سه روش برآوردیابی ماکسیمم درستنمایی، ماکسیمم احتمال پسین و بیزی در مدل‌های خودبازگشتی متناوب با نوآورهای از نوع ترکیبی مقیاسی چوله‌نرمال به کار گرفته شده‌اند. سپس در حضور داده‌های پرت و دارای دم‌های سنگین ارزیابی جامعی از این

¹Expectation Conditional Maximization

روش‌ها از طریق شبیه‌سازی انجام شده است و بر ویژگی‌های مجانبی، استواری روش‌ها در برابر داده‌های پرت، قله‌های شدید، و توزیع‌های دم‌سنگین تأکید شده است. نوآوری اصلی پژوهش شامل ارائه چارچوب جامع مدل چوله-مقیاسی ترکیبی، توسعه روش‌های مقاوم برآورد و مطالعات شبیه‌سازی گسترده برای مقایسه عملکرد روش‌ها در سناریوهای مختلف است. در پژوهش حاضر به تعمیم این رهیافتها به حالت متناوب و ترکیب ویژگی‌های چولگی و دم‌سنگینی در قالب مدل‌های SMSN پرداخته‌ایم که ضمن تعمیم مطالعات پیشین به حالت کلی‌تر، دیدگاه تازه‌ای در خصوص تأثیر تناوب و ساختار نوآور بر رفتار برآوردگرها را ارائه می‌دهد. این نتایج زمینه استفاده عملی از مدل‌های چوله-مقیاسی ترکیبی را در تحلیل داده‌های مالی و اقتصادی با نوسانات متناوب و وجود داده‌های پرت فراهم می‌سازد.

ساختار مقاله به شرح زیر است: بخش ۲ به معرفی مدل خودبازگشتی متناوب با نوآوری‌های ترکیبی مقیاسی چوله‌نرمال، همراه با مروری بر روش‌های برآوردیابی پارامترها می‌پردازد. در بخش ۳، سه مطالعه شبیه‌سازی به بررسی ویژگی‌های مجانبی، استواری در برابر داده‌های پرت و دم‌سنگین، و حساسیت مدل نسبت به داده‌های پرت اختصاص دارد. بخش ۴ شامل تحلیل داده‌های واقعی (قیمت ماهانه سهام گوگل) است و در بخش ۵، نتایج و جمع‌بندی نهایی ارائه می‌شود.

۲ مدل‌های خودبازگشتی متناوب و روش‌های برآوردیابی

فرایند تصادفی مرتبه دوم X_t را یک مدل خودبازگشتی متناوب با نوآوری‌های از نوع ترکیبی مقیاسی چوله‌نرمال با مرتبه p و دوره تناوب T ، (SMSN-PAR(p)) می‌نامیم اگر در رابطه

$$X_t = \sum_{i=1}^p \phi_{it} X_{t-i} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \stackrel{\text{ind}}{\sim} SMSN(\circ, \sigma_t^2, \alpha_t, \nu_t), \quad (5)$$

صدق کند، که در آن $\phi_{it} = \phi_{i(t+T)}$ ، $\sigma_t^2 = \sigma_{(t+T)}^2$ ، $\alpha_t = \alpha_{(t+T)}$ و $\nu_t = \nu_{(t+T)}$ برای $i = 1, \dots, p$ به صورت متناوب تغییر می‌کنند. متناظر با هر سری زمانی PAR با دوره تناوب T ، یک مدل برداری خودبازگشتی مانا به صورت $\mathbf{Y}_t = (X_{tT}, X_{tT+1}, \dots, X_{tT+T-1})'$ وجود دارد. با استفاده از بردار $\mathbf{Y}_t$ ، می‌توان رابطه (۵) را به صورت

$$\mathbf{Y}_t = \sum_{j=1}^P \Phi_j^{-1} \Phi_j^* \mathbf{Y}_{t-j} + \mathbf{Z}_t, \quad t \in \mathbb{Z}, \quad (6)$$

بازنویسی کرد، که در آن $\mathbf{E}_t = (\varepsilon_{tT}, \varepsilon_{tT+1}, \dots, \varepsilon_{tT+T-1})'$ ، $\mathbf{Z}_t = \Phi_0^{-1} \mathbf{E}_t$ و علامت $P = \lfloor \frac{p+T-1}{T} \rfloor$ نشان‌دهنده بخش صحیح است و Φ_0 و Φ_j^* ماتریس‌های ضرایب مدل با ابعاد $T \times T$ هستند. در این مدل،

$\mathbf{Z}_t$ ها یک دنباله از بردارهای تصادفی مستقل با تابع چگالی احتمال

$$f(\mathbf{z}_t, \mathbf{u}_t; \Sigma_{\mathbf{u}_t}^*, \Gamma_{\mathbf{u}_t}^*, \nu_1, \dots, \nu_T) = \int_0^\infty \dots \int_0^\infty f_{CSN}(\mathbf{z}_t; \circ, \Sigma_{\mathbf{u}_t}^*, \Gamma_{\mathbf{u}_t}^*, \circ, \mathbf{I}_T) \\ \times dH(u_{T-(T-1)}; \nu_1) \dots dH(u_{Tt}; \nu_T),$$

است، که در آن f_{CSN} تابع چگالی توزیع چوله‌نرمال بسته^۱ (CSN) چندمتغیره به صورت

$$f_{CSN}(\mathbf{z}_t; \circ, \Sigma_{\mathbf{u}_t}^*, \Gamma_{\mathbf{u}_t}^*, \circ, \mathbf{I}_T) = \mathbf{r}^T \phi_T(\mathbf{z}_t; \circ, \Sigma_{\mathbf{u}_t}^*) \Phi_T(\Gamma_{\mathbf{u}_t}^* \mathbf{z}_t; \circ, \mathbf{I}_T),$$

است و $\alpha = \text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_T)$ ، $\Gamma_{\mathbf{u}_t}^* = \Sigma_{\mathbf{u}_t}^{-1/2} \alpha \Phi$ ، $\Sigma_{\mathbf{u}_t}^* = \Phi^{-1} \Sigma_{\mathbf{u}_t} (\Phi^{-1})'$ و $\Sigma_{\mathbf{u}_t} = \text{diag}(u_{T-(T-1)}^{-1} \sigma_1^2, \dots, u_{Tt}^{-1} \sigma_T^2)$ که همگی ماتریس‌های قطری $T \times T$ هستند و $\phi_p(\cdot; \mu, \Sigma)$ و $\Phi_p(\cdot; \mu, \Sigma)$ به ترتیب نشان‌دهنده توابع چگالی و توزیع نرمال چندمتغیره با میانگین μ و ماتریس کوواریانس Σ هستند. تابع درستنمایی شرطی بردار پارامترها $\theta = (\Phi_1, \dots, \Phi_P, \Sigma_{\mathbf{u}_t}^*, \Gamma_{\mathbf{u}_t}^*, \nu_1, \dots, \nu_T)$ با فرض مشاهده ماتریس داده‌های $\mathbf{Y} = (\mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{Y}_n)$ به صورت

$$CL(\theta | \mathbf{Y}) = \prod_{t=P+1}^n f(\mathbf{Y}_t | \mathbf{Y}_{t-1}, \dots, \mathbf{Y}_{t-P}, \theta) \\ = \prod_{t=P+1}^n \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \mathbf{r}^T \Phi_T(\Gamma_{\mathbf{u}_t}^* (\mathbf{y}_t - \mu_t); \circ, \mathbf{I}_T) \\ \times \phi_T(\mathbf{y}_t; \mu_t, \Sigma_{\mathbf{u}_t}^*) dH(u_{T-(T-1)}; \nu_1) \dots dH(u_{Tt}; \nu_T), \quad (7)$$

است، که در آن $\Phi_j = \Phi_j^{-1} \Phi_j^*$ و $\mu_t = \sum_{j=1}^P \Phi_j \mathbf{y}_{t-j}$ (منوچهری و نعمت‌اللهی، ۲۰۱۹، ب، ۲۰۲۲).

۲.۱ روش‌های برآورد پارامترها

الف- روش ماکسیمم درستنمایی: در این روش، برآورد پارامترها با ماکسیمم‌سازی تابع درستنمایی شرطی به صورت $\hat{\theta}_{ML} = \arg \max_{\theta} CL(\theta | \mathbf{Y})$ به دست می‌آید. با توجه به ساختار پیچیده مدل پیشنهادی، ماکسیمم‌سازی مستقیم تابع درستنمایی بسیار زمان‌بر و دشوار است. از این رو، الگوریتم ماکسیمم‌سازی امیدریاضی به عنوان روشی مؤثر در مدل‌های دارای متغیرهای پنهان به کار می‌رود. در این مقاله از نسخه ECM این الگوریتم استفاده شده است که در آن گام ماکسیمم‌سازی به یک دنباله از گام‌های ماکسیمم‌سازی شرطی تقسیم می‌شود (منگ و روبین، ۱۹۹۳؛ لیو و روبین، ۱۹۹۴).

¹Closed Skew Normal

ب- رهیافت بیزی: برآورد پارامتر در چارچوب بیزی به‌عنوان مقدار حداقل ریسک تعریف می‌شود:

$$\hat{\theta}_{Bayesian} = \arg \min_{\hat{\theta}} R(\hat{\theta}|\mathbf{y}) = \arg \min_{\hat{\theta}} \left[\int_{\theta} L(\hat{\theta}, \theta) f_{\mathbf{Y}|\theta}(\mathbf{y}|\theta) f_{\theta}(\theta) d\theta \right].$$

در رهیافت بیزی، نیاز به تعریف توزیع پیشین برای تمام پارامترهای مدل وجود دارد. در یک روش معمول، با توجه به عدم دسترسی به اطلاعات قبلی، توزیع‌های پیشین ناآگاهی‌بخش و مستقل برای پارامترها فرض می‌شوند. جهت نمونه‌گیری نیز از توزیع پسین، از الگوریتم‌های زنجیره مارکوف مونت‌کارلو^۱ (MCMC) از جمله نمونه‌گیری گیبس، متروپولیس-هاستینگز، و الگوریتم ضربه-اجرا^۲ استفاده می‌شود.

ج- روش ماکسیمم احتمال پسین: برآورد ماکسیمم احتمال پسین به‌عنوان مقداری از بردار پارامتر تعریف می‌شود که ماکسیمم توزیع احتمال پسین را فراهم می‌کند:

$$\hat{\theta}_{MAP} = \arg \max_{\theta} f_{\theta|\mathbf{Y}}(\theta|\mathbf{y}) = \arg \max_{\theta} f_{\mathbf{Y}|\theta}(\mathbf{y}|\theta) f_{\theta}(\theta).$$

در صورتی که توزیع پیشین ناآگاهی‌بخش و یکنواخت در نظر گرفته شود، برآورد MAP در عمل به برآورد ماکسیمم درستنمایی تقلیل می‌یابد. در این مقاله، برآورد MAP با استفاده از الگوریتم کارآمد ECM محاسبه می‌گردد [منوچهری و نعمت‌اللهی \(۱۹۲۰الف، ب، ۲۰۲۲\)](#).

۲.۲ معیارهای انتخاب مدل

برای انتخاب مدل بهینه از معیارهای آکائیک و بیزی که به ترتیب به صورت

$$AIC = -2 \sum_{t=P+1}^n \log(f(\mathbf{Y}_t|\mathbf{Y}_{t-1}, \dots, \mathbf{Y}_{t-P}, \theta)) + 2k,$$

$$BIC = -2 \sum_{t=P+1}^n \log(f(\mathbf{Y}_t|\mathbf{Y}_{t-1}, \dots, \mathbf{Y}_{t-P}, \theta)) + k \log(n^*),$$

تعریف می‌شوند استفاده می‌شود، که در آن $n^* = n - P$ و $P = \lfloor \frac{p+T-1}{T} \rfloor$ و k تعداد پارامترهای آزاد مدل است. سایر معیارهای انتخاب مدل بر پایه دقت پیش‌بینی نیز شامل میانگین مربعات خطای پیش‌بینی^۳ (RMSPE)، میانگین قدرمطلق خطای پیش‌بینی^۴ (MAPE) و میانگین نسبی خطای پیش‌بینی^۵ (RMAPE) هستند. آخرین

^۱Markov Chain Monte Carlo

^۲Hit-and-Run

^۳Root Mean Square Prediction Error

^۴Mean Absolute Prediction Error

^۵Relative Mean Absolute Prediction Error

معیار به صورت $(\frac{|y_{t+i} - \hat{y}_{t+i}|}{y_{t+i}} \times 100) \sum_{i=1}^m$ محاسبه می‌شود که در آن m تعداد مشاهدات بخش آزمون است.

۳ مطالعات شبیه‌سازی

در این بخش، سه مطالعه شبیه‌سازی مونت‌کارلو به منظور ارزیابی ویژگی‌های مجانبی برآوردها، بررسی استواری مدل پیشنهادی در مواجهه با داده‌های با قله‌های زیاد و دم‌های سنگین، و نیز سنجش حساسیت مدل در حضور داده‌های پرت انجام شده است. مطالعه نخست برای بررسی رفتار مجانبی و دقت روش‌ها در برآوردیابی پارامترهای مدل، مطالعه دوم برای ارزیابی پایداری مدل در داده‌های با توزیع‌های دم‌سنگین و چوله، و مطالعه سوم برای تحلیل مقاومت مدل‌ها در برابر آلودگی داده‌ها و پرت‌ها طراحی گردیده است. برای بررسی عملکرد سه روش برآوردیابی پیشنهادی، این شبیه‌سازی‌ها در قالب مدل خودبازگشتی متناوب با نوآورهایی از نوع ترکیب مقیاسی چوله‌نرمال طراحی شده‌اند. در این مطالعات، کارایی نسبی سه روش ماکسیمم درستنمایی، ماکسیمم احتمال پسین و بیزی مورد مقایسه قرار می‌گیرد. در روش بیزی، میانگین پسین با تابع زیان مربع به عنوان برآورد نهایی برای پارامترهای Φ و Σ در نظر گرفته شده است. تمام محاسبات و شبیه‌سازی‌ها در محیط نرم‌افزار R (v4.3) انجام شده‌اند تا امکان بازتولید نتایج فراهم گردد. برای هر سناریو، ۵۰۰ تکرار مستقل انجام شده است تا نوسانات تصادفی کاهش یابد و برآوردهای پایدار حاصل شوند. برای برآورد بیزی پارامترها، از الگوریتم نمونه‌گیری گیبس با ۱۰۰۰۰ تکرار در چارچوب MCMC استفاده شده است و ۵۰۰ تکرار ابتدایی به عنوان داغیدن حذف شده‌اند تا استواری نتایج تضمین شود. برای روش‌های ماکسیمم درستنمایی و ماکسیمم احتمال پسین، الگوریتم ECM به کار رفته است. برای مقاردهی اولیه پارامترهای Σ ، α و ν ، به ترتیب از ماتریس همبستگی و بردار واحد استفاده شده است. برای ضرایب Φ_i ، از برآورد $\hat{\Phi}_i = (\sum_{t=P}^n y_{t-i} y'_{t-i})^{-1} (\sum_{t=P}^n y_{t-i} y'_{t-i})$ بهره گرفته شده است. گام‌های الگوریتم ECM تا زمان همگرایی ادامه یافته‌اند. همگرایی زمانی حاصل شده است که معیار $|\frac{\ell(\theta^{(k+1)})}{\ell(\theta^{(k)})} - 1| \leq 10^{-3}$ برقرار باشد.

داده‌ها از مدل $PAR(1)$ با نوآوری‌های SMSN برای اندازه‌های نمونه ۶۰، ۱۰۰، ۱۶۰، ۲۰۰ تولید شده‌اند. در شبیه‌سازی‌ها مقادیر پارامترها به صورت $(\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4) = (1.5, 0.2, -2, 1)$ ، $(\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4) = (0.5, 0.1, 1, 2)$ ، $(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \sigma_3^2, \sigma_4^2) = (0.5, 0.5, 0.5, 1)$ ، $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = (0.2, -1.5, -0.5, 1)$ ، $(\nu, \alpha, \sigma^2) = (0.4, 0.3, 0.2)$ ، $(\nu, \alpha, \sigma^2) = (0.5, 0.5, 0.2)$ و $(\nu, \alpha, \sigma^2) = (0.4, 0.3, 0.2)$ در نظر گرفته شده‌اند. برای هر اندازه نمونه، ۵۰۰ نمونه مانا تولید شده و میانگین، اربیی، میانگین مربعات خطا و معیار نقص^۱ (DEF) به ترتیب

¹Deficiency

به صورت

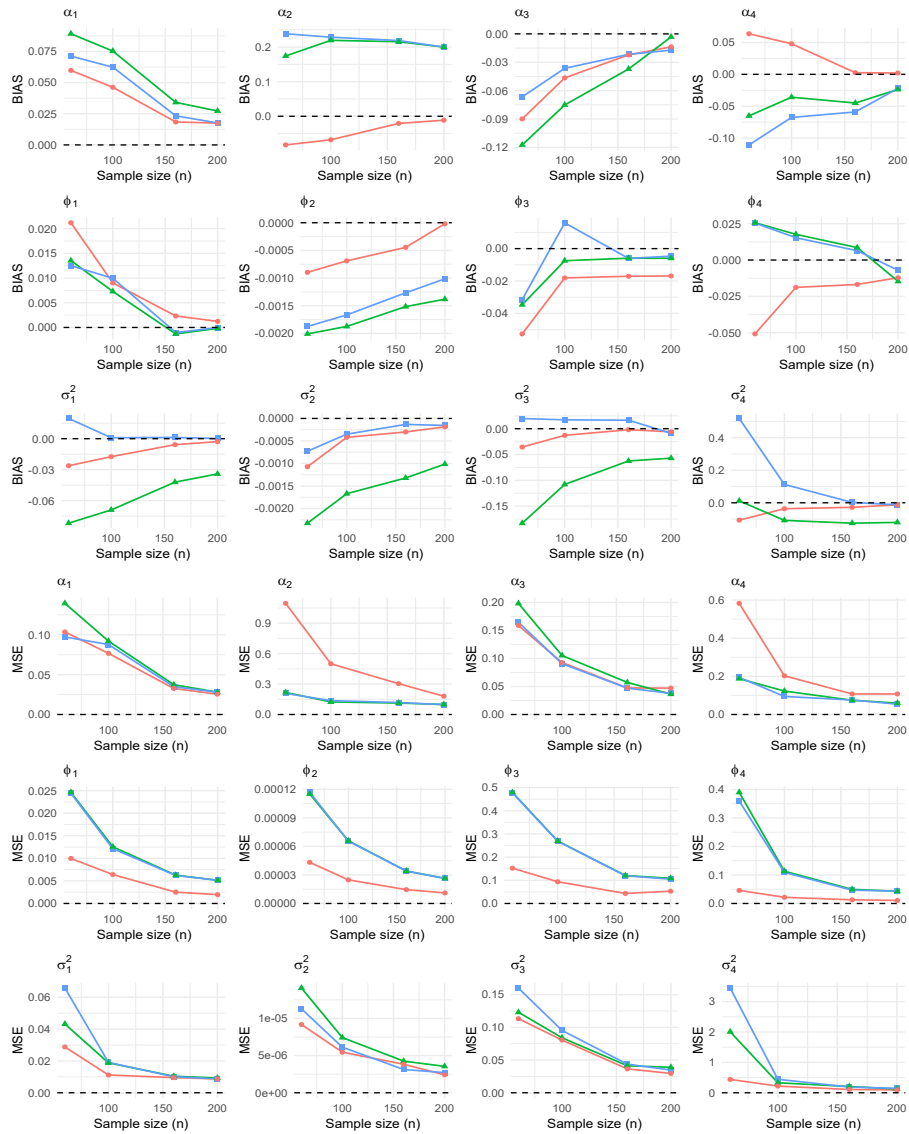
$$\text{Mean} = \frac{1}{500} \sum_{i=1}^{500} \hat{\theta}_i, \quad \text{Bias} = \theta - \text{Mean},$$

$$\text{MSE} = \frac{1}{500} \sum_{i=1}^{500} (\hat{\theta}_i - \theta)^2, \quad \text{DEF} = \sum_{k=1}^T \text{MSE}(\hat{\theta}_k),$$

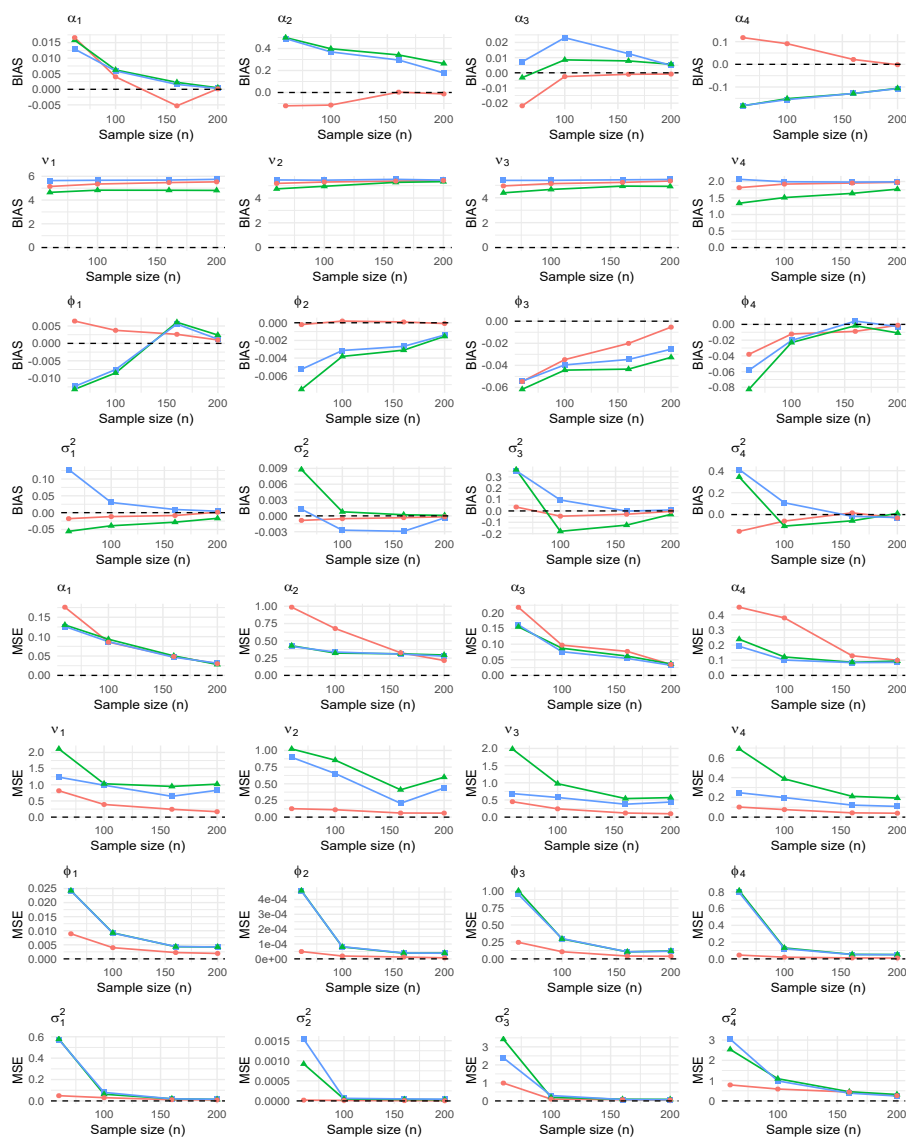
محاسبه شده‌اند. معیار DEF به‌عنوان شاخصی تجمعی برای سنجش دقت کلی برآورد در ابعاد زمانی متناوب بکار می‌رود. در مقایسه روش‌ها، روشی که مقدار DEF پایین‌تری دارد از منظر دقت میانگین برتر تلقی می‌شود. همچنین DEF قابلیت مقایسه عملکرد روش‌ها در حضور نوسانات ساختاری و چولگی را نیز دارد، چرا که حساسیت آن به خطاهای محلی کمتر از MSE یک پارامتری است.

در شکل‌های ۱ تا ۵، اریبی و میانگین مربعات خطا برای سه روش برآوردیابی به‌صورت توابع خطی پله‌ای نمایش داده شده‌اند. در این نمودارها، نماد ■ مربوط به روش ML، نماد ▲ معرف روش MAP و نماد ● معرف روش بیزی است. این نمایش گرافیکی امکان مقایسه مستقیم روند تغییرات خطا با افزایش اندازه نمونه را فراهم می‌سازد.

نتایج بیانگر آن است که اندازه نمونه تأثیر قابل‌توجهی بر اریبی و میانگین مربعات خطا در مدل خودبازگشتی متناوب دارد و با افزایش حجم نمونه، هر دو معیار کاهش می‌یابند. در مقایسه میان توزیع‌های نوآور، توزیع SN (چوله‌نرمال) دقیق‌ترین و استوارترین برآوردها را ارائه می‌دهد و کمترین میزان اریبی و MSE را داراست؛ درحالی‌که توزیع‌های SCN، SL و ST نیز عملکرد قابل‌قبولی دارند. به‌طور کلی، روش بیزی باوجود پیچیدگی محاسباتی، در بیشتر سناریوها کمترین خطای کلی را داشته و نسبت به روش‌های ML و MAP پایدارتر عمل کرده است. شکل ۵ تغییرات DEF را برای چهار توزیع نوآور و سه روش برآوردی نشان می‌دهد. مقدار DEF در تمامی حالت‌ها با افزایش نمونه کاهش می‌یابد که بیانگر بهبود دقت و پایداری برآوردگرهاست. روش بیزی در همه سناریوها کمترین مقدار DEF را دارد و کاراترین روش است؛ درحالی‌که ML عملکردی قابل‌قبول اما ضعیف‌تر از بیزی دارد و روش MAP بیشترین مقدار DEF و کمترین دقت را ثبت کرده است. از میان ساختارهای نوآور، توزیع‌های SN و ST کمترین DEF و پایداری بیشتری نشان می‌دهند، درحالی‌که SL و به‌خصوص SCN به دلیل چولگی و آلودگی بالاتر، DEF بیشتری دارند. کاهش سریع‌تر DEF در روش بیزی حتی در نمونه‌های کوچک نشان‌دهنده توان بالای آن در ارائه برآوردهای پایدار است. در مجموع، نتایج نشان می‌دهد که افزایش حجم نمونه موجب کاهش معنی‌دار خطای برآورد شده و ترکیب روش بیزی با توزیع‌های نوآور ST و SN مناسب‌ترین چارچوب را برای مدل‌سازی داده‌های متناوب با توزیع‌های چوله و دم‌سنگین فراهم می‌کند.



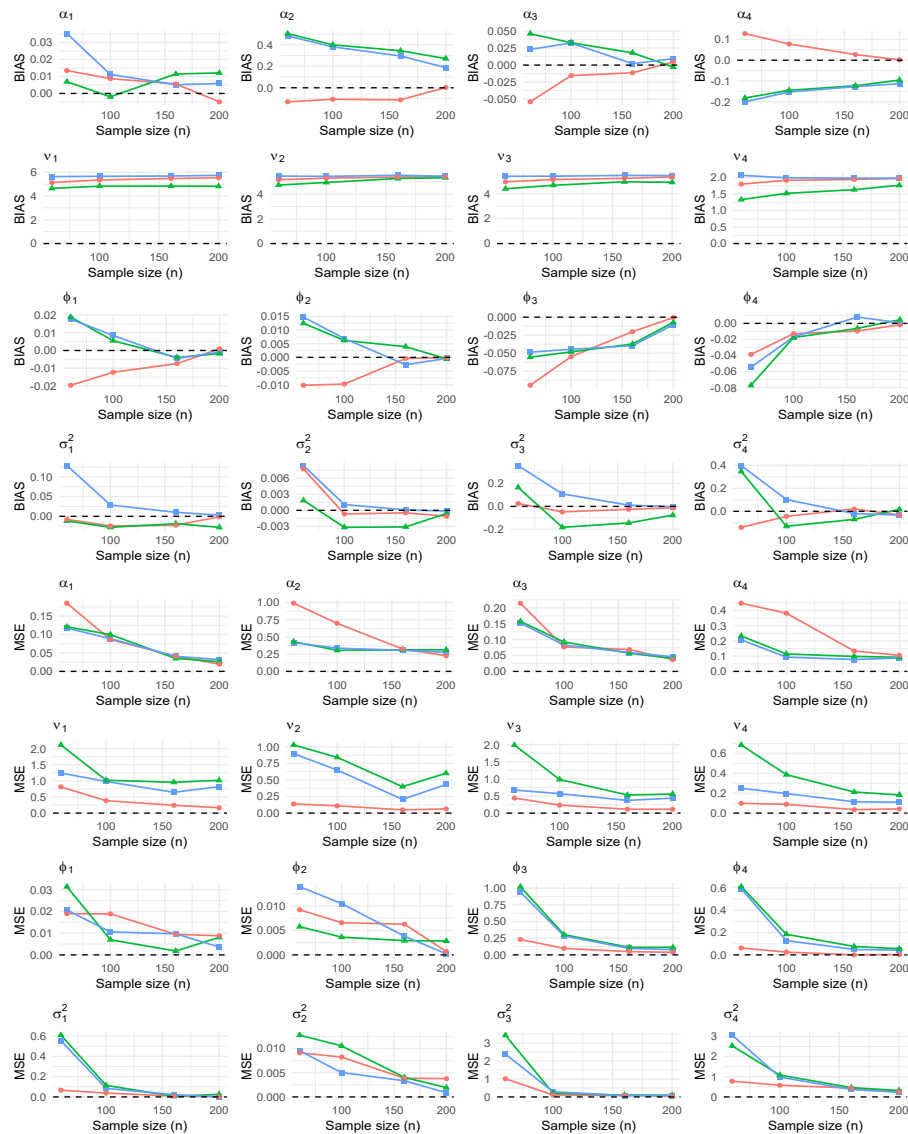
شکل ۱. اریبی و MSE برآورد پارامترها برای مدل PAR با نوآور SN در اندازه‌های نمونه مختلف.



شکل ۲. اریبی و MSE برآورد پارامترهای مدل PAR با نوآر ST در اندازه‌های نمونه مختلف.

۳.۱ ارزیابی عملکرد مدل در مواجهه با داده‌های دارای قله‌های شدید و دم‌های سنگین

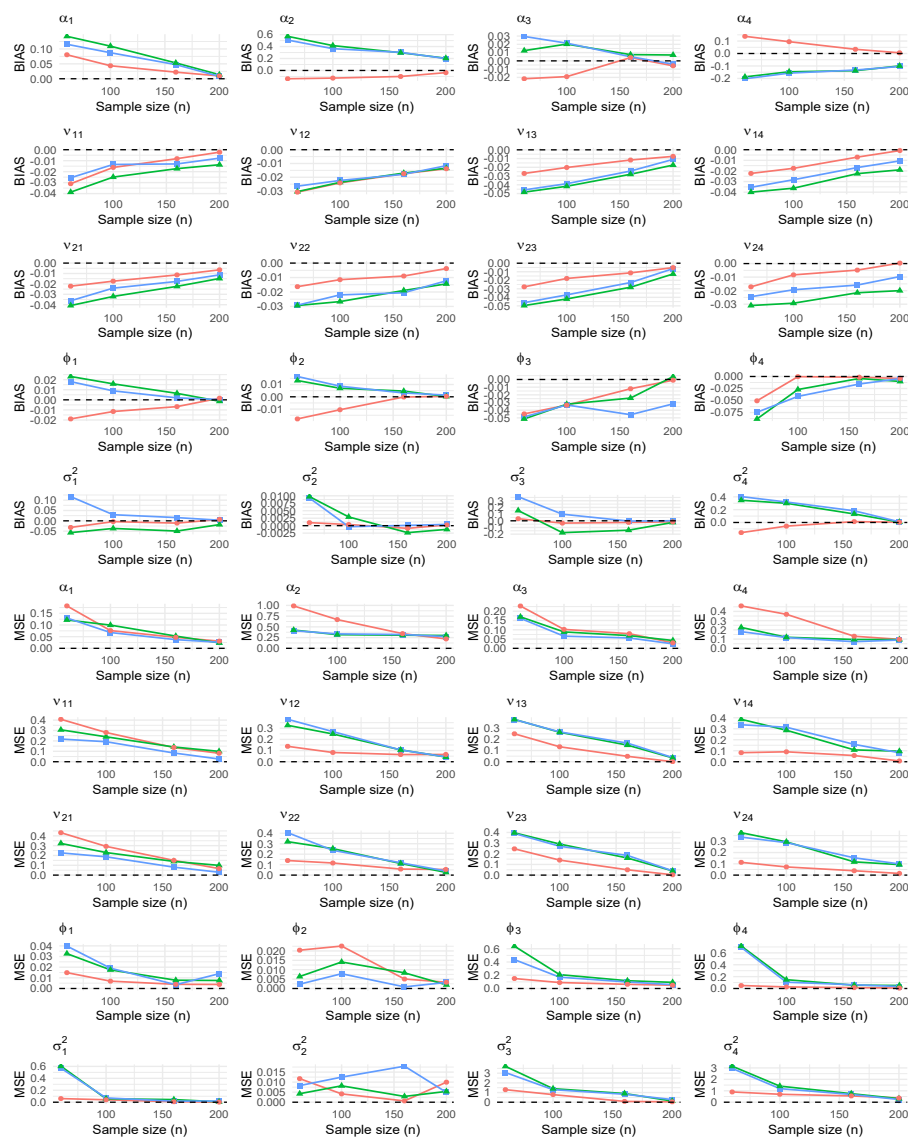
در این بخش، برای بررسی استواری و پایداری مدل در شرایطی که داده‌ها از توزیع‌های غیرنرمال با ویژگی‌های خاص پیروی می‌کنند، دو سناریوی مجزا طراحی شده است. در هر سناریو، داده‌ها با حجم نمونه‌های ۱۰۰ و ۲۰۰ از یک



شکل ۳. اربیی و MSE برآورد پارامترهای مدل PAR با نوآور SL در اندازه‌های نمونه مختلف.

مدل $PAR(1)$ شبیه‌سازی شده‌اند. سناریوی اول بر مبنای توزیع نوآور چوله‌تی تعمیم‌یافته^۱ (GHST) تنظیم شده

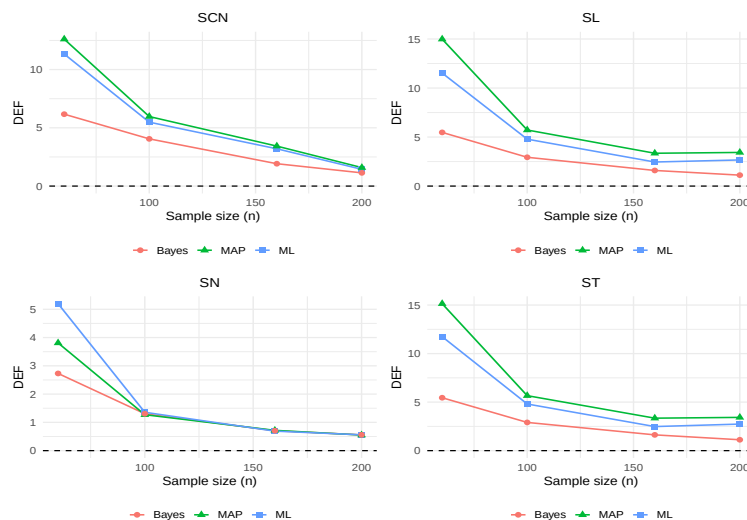
¹Generalized Hyperbolic Skew-t



شکل ۴. اربیی و MSE برآورد پارامترهای مدل PAR با نوآور SCN در اندازه‌های نمونه مختلف.

و سناریوی دوم از توزیع نوآور نرمال معکوس گاوسی^۱ (NIG) بهره می‌برد. پارامترهای واقعی مورد استفاده در مدل‌سازی، در جدول ۱ ارائه شده‌اند. شکل ۶ نیز سری زمانی و هیستوگرام داده‌های تولیدشده تحت توزیع GHST

¹Normal Inverse Gaussian



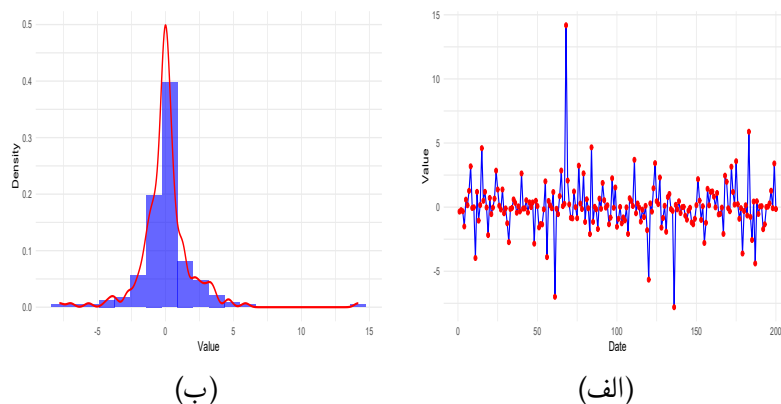
شکل ۵. معیار DEF در اندازه‌های مختلف نمونه.

جدول ۱. پارامترهای واقعی مدل

$(\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4)$	$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$	$(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \sigma_3^2, \sigma_4^2)$	$(\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4)$
$(3, 4, 5, 3)$	$(3, 1.5, 3.5, 1)$	$(0.5, 0.1, 1, 2)$	$(0.5, 0.2, -0.5, 1)$

برای حجم نمونه ۲۰۰ را نمایش می‌دهد که به وضوح ویژگی‌های قله‌ای شدید و دم‌های سنگین را تأیید می‌کند. برای سنجش عملکرد مدل در این دو سناریو، سه روش برآوردیابی ML، MAP و بیزی به‌کار گرفته شده و نتایج با استفاده از معیارهای انتخاب مدل مانند AIC و BIC و معیارهای دقت پیش‌بینی مانند MAPE و RMSPE مورد مقایسه قرار گرفته‌اند. جداول ۲ و ۳ میانگین این معیارها را در ۲۰۰ تکرار شبیه‌سازی برای هر دو توزیع GHST و NIG گزارش می‌کند که مبنایی برای تحلیل رفتار روش‌ها در شرایط غیرنرمال فراهم می‌سازد.

(۱) رهیافت بیزی به‌طور پیوسته پایین‌ترین مقادیر AIC و BIC را در میان تمامی توزیع‌ها و ساختارهای خطا ارائه می‌دهد که بیانگر برازش بهتر مدل است. در میان ساختارهای خطا، مدل با خطای ST بهترین برازش را نشان می‌دهد و کمترین مقادیر AIC و BIC را در میان تمامی روش‌های برآوردیابی دارد. در مقابل، مدل با خطای SCN دارای بیشترین مقادیر این معیارهاست و ضعیف‌ترین برازش را ارائه می‌دهد. همچنین روش MAP در تمام موارد عملکرد ضعیف‌تری دارد و بالاترین مقادیر AIC و BIC را تولید می‌کند. (۲) رهیافت بیزی کمترین مقادیر RMSPE، MAPE و RMAPE را ارائه می‌دهد که نشان‌دهنده دقت بالای برآورد پارامترها و دقت بالای پیش‌بینی در این روش است. مدل با نوآور ST در تمامی روش‌ها دقیق‌ترین پیش‌بینی‌ها را به‌همراه دارد. در طرف مقابل، مدل با نوآور SCN ضعیف‌ترین عملکرد را دارد و بیشترین خطاهای پیش‌بینی را تولید می‌کند. روش ML از نظر دقت



شکل ۶. نمودارهای سری زمانی (الف) و هیستوگرام (ب) برای داده‌های مدل GHST-PAR با نمونه ۲۰۰.

پیش‌بینی در سطح متوسطی قرار دارد ولی به‌طور مداوم از روش بیزی ضعیف‌تر است. روش MAP در تمامی موارد دارای بیشترین خطای پیش‌بینی بوده و در نتیجه ضعیف‌ترین عملکرد را دارا می‌باشد.

(۳) افزایش اندازه نمونه از ۱۰۰ به ۲۰۰، دقت برآورد و پیش‌بینی را به‌طور معناداری بهبود می‌بخشد. در این میان، مدل SCN با وجود عملکرد ضعیف، بیشترین بهبود را با افزایش حجم نمونه تجربه می‌کند. در مقابل، مدل ST با افزایش حجم نمونه بیشترین کاهش خطای RMSPE و MAPE را نشان می‌دهد که مؤید استواری و دقت بالای این مدل در مواجهه با داده‌های با دم‌سنگین است.

(۴) به‌طور کلی نتایج شبیه‌سازی‌ها نشان می‌دهد که روش بیزی مؤثرترین روش برای برآورد مدل $PAR(1)$ در داده‌های دارای قله شدید و دم‌سنگین است. این روش توازن مناسبی میان دقت در برازش، کیفیت پیش‌بینی و کارایی محاسباتی برقرار می‌کند. روش ML نیز به‌عنوان جایگزینی قابل‌قبول مطرح است، اما به دقت و کارایی روش بیزی نمی‌رسد. روش MAP در تمامی شاخص‌های ارزیابی ضعیف‌ترین عملکرد را داشته و توصیه نمی‌شود. در میان ساختارهای مختلف خطا، مدل با نوآور ST بهترین گزینه محسوب می‌شود؛ زیرا دقیق‌ترین پیش‌بینی‌ها، بهترین برازش و کارایی محاسباتی را ارائه می‌دهد. در مقابل، مدل SCN بدترین عملکرد را داشته و علاوه بر خطای بالا، زمان محاسباتی بیشتری نیز نیاز دارد. بنابراین، برای کاربردهای عملی، ترکیب مدل ST با روش برآورد بیزی، چارچوبی قدرتمند و کارآمد برای مدل‌سازی سری‌های زمانی $PAR(1)$ با توزیع‌های دم‌سنگین فراهم می‌کند.

۳.۲ تحلیل حساسیت در حضور داده‌های پرت

در این مطالعه شبیه‌سازی، استواری مدل‌های PAR در مواجهه با داده‌های پرت مورد بررسی قرار می‌گیرد. فرآیند تولید داده‌ها مشابه شبیه‌سازی قبل است و دو سناریو PAR-GHST و PAR-NIG برای شبیه‌سازی استفاده شده‌اند.

جدول ۲. مقادیر میانگین معیارها برای برآورد پارامترهای مدل PAR با نوآور GHST.

اندازه نمونه	نوآور	روش	AIC	BIC	RMSPE	MAPE	RMAPE
۱۰۰	SN	ML	۵۰۱/۲۱۰۶	۵۶۹/۰۱۸	۰/۱۳۷	۰/۱۰۳	۸۸۲۵
		MAP	۵۲۵/۹۲۳۹	۵۸۵/۵۶۸۹	۰/۱۵۶	۰/۱۲۴	۱۱/۲۶۸
		Bayes	۴۷۶/۱۳۷۴	۵۵۱/۰۸۱۸	۰/۱۱۴	۰/۰۸۵	۶۳۲۶
	ST	ML	۴۸۶/۶۴۲۴	۵۴۶/۳۴۳۶	۰/۱۰۷	۰/۰۷۳	۵/۷۳۱
		MAP	۴۹۳/۰۰۳۸	۵۵۵/۹۶۷۴	۰/۱۲۸	۰/۰۹۰	۷/۵۳۲
		Bayes	۴۷۰/۹۵۱۱	۵۲۷/۹۲۳	۰/۰۸۴	۰/۰۵۴	۳/۸۰۵
	SL	ML	۴۹۶/۶۲۴۶	۵۶۶/۵۹۰۹	۰/۱۵۲	۰/۱۱۷	۷/۲۶۰
		MAP	۵۰۹/۹۶۱۷	۵۸۶/۷۹۱۹	۰/۱۷۰	۰/۱۳۹	۱۰/۲۲۵
		Bayes	۴۶۹/۸۲۶۶	۵۴۳/۹۰۷	۰/۱۳۰	۰/۰۹۸	۴/۵۱۶
۲۰۰	SCN	ML	۵۲۳/۲۲۲	۵۸۸/۷۷۲۷	۰/۱۶۷	۰/۱۳۳	۱۱/۷۷۹
		MAP	۵۴۱/۷۷۲۶	۶۱۱/۷۲۰۹	۰/۱۸۹	۰/۱۵۲	۱۴/۵۳۲
		Bayes	۵۰۵/۰۶۰۶	۵۷۶/۵۴۲۴	۰/۱۴۸	۰/۱۱۳	۹/۱۳۴
	SN	ML	۱۰۰۷/۱۸۲	۱۱۴۵/۹۳۴	۰/۱۲۰	۰/۰۸۷	۷/۱۷۶
		MAP	۱۰۳۶/۴۰۱	۱۱۵۹/۷۰۹	۰/۱۴۲	۰/۱۰۷	۹/۰۱۰
		Bayes	۹۸۶/۲۲	۱۱۲۵/۴۰۳	۰/۱۰۱	۰/۰۶۴	۵/۲۰۲
	ST	ML	۹۶۸/۴۳۷۳	۱۰۹۵/۷۲۱	۰/۰۹۰	۰/۰۵۷	۴/۱۸۴
		MAP	۹۹۴/۸۰۵۳	۱۱۰۱/۲۰۲	۰/۱۱۲	۰/۰۷۷	۶/۸۹۷
		Bayes	۹۶۰/۷۶۴۹	۱۰۶۹/۹۶۷	۰/۰۷۳	۰/۰۳۶	۱/۵۶۴
۳۰۰	SL	ML	۹۸۶/۰۰۸۸	۱۱۲۷/۹۹۹	۰/۱۳۵	۰/۱۰۲	۵/۶۶۴
		MAP	۱۰۰۹/۲۴	۱۱۵۴/۸۶۲	۰/۱۵۲	۰/۱۲۱	۸/۳۸۰
		Bayes	۹۷۶/۶۸۸۵	۱۱۱۴/۷۹۶	۰/۱۱۳	۰/۰۸۴	۳/۵۰۵
	SCN	ML	۱۰۴۴/۲۹۸	۱۱۸۴/۳	۰/۱۵۰	۰/۱۱۷	۱۰/۱۵۰
		MAP	۱۰۵۵/۶۹۱	۱۱۸۸/۴۸۳	۰/۱۷۱	۰/۱۳۷	۱۲/۹۹۷
		Bayes	۱۰۱۴/۲۰۸	۱۱۶۲/۱۶	۰/۱۳۳	۰/۰۹۸	۸/۱۵۷

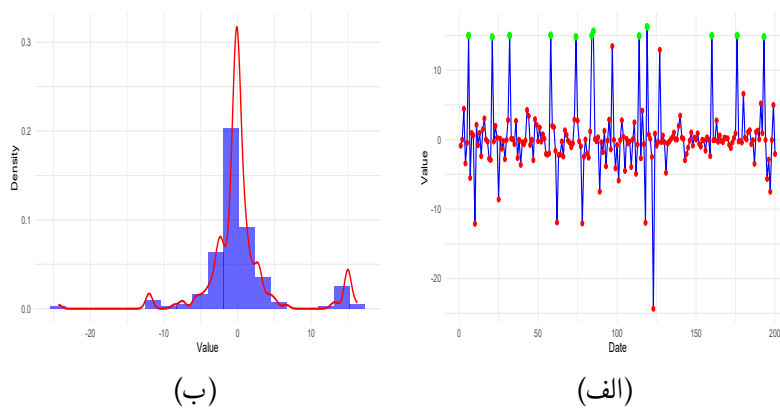
به داده‌های تولید شده، پرت‌هایی با احتمال وقوع متفاوت در بازه ۰٪ تا ۶٪ افزوده می‌شود. این داده‌های پرت به‌طور تصادفی در مقاطع زمانی مختلف افزوده شده‌اند تا شرایط واقعی‌تر از نوسانات ناگهانی یا داده‌های غیرعادی را بازنمایی کنند. نمونه‌ای از داده‌های شبیه‌سازی شده در شکل ۷ نمایش داده شده است که در آن، دایره‌های سبز رنگ داده‌های پرت را مشخص می‌کنند.

برای ارزیابی تأثیر داده‌های پرت بر دقت برآورد پارامترها و عملکرد مدل، چهار ساختار نوآور مختلف شامل PAR-SN، PAR-ST، PAR-SL و PAR-SCN بر مدل‌ها اعمال شده‌اند. در طی ۵۰۰ تکرار شبیه‌سازی، میانگین سه شاخص MPAA، RMSPE و RMAPE محاسبه شده‌اند. میانگین این شاخص‌ها در سطوح مختلف آلودگی داده‌ها در جدول ۴ گزارش شده است.

(۱) با افزایش درصد داده‌های پرت از ۰٪ تا ۶٪، مقادیر RMSPE، MAPE و RMAPE در تمامی مدل‌ها افزایش می‌یابد که نشان‌دهنده کاهش دقت برآورد در حضور داده‌های پرت است. این روند در مدل با نوآور SCN شدیدتر است و با افزایش آلودگی، میزان خطاها به‌طور قابل توجهی افزایش می‌یابد.

جدول ۳. مقادیر میانگین معیارها برای برآورد پارامترهای مدل PAR با نوآور NIG .

اندازه نمونه	نوآور	روش	AIC	BIC	RMSPE	MAPE	RMAPE
۱۰۰	SN	ML	۵۴۹,۶۴۹۷	۶۱۵,۰۷۲۵	۰/۱۴۹	۰/۱۱۹	۱۰/۸۳۱
		MAP	۵۶۱,۵۰۶۲	۶۱۸,۵۲۳۶	۰/۱۷۷	۰/۱۳۸	۱۴/۲۶۳
		Bayes	۵۲۶,۰۶۶۵	۵۸۷,۹۵۴	۰/۱۳۵	۰/۱۰۵	۹/۴۱۲
	ST	ML	۵۲۳,۶۹۷۷	۵۸۰,۹۷۳۸	۰/۱۲۵	۰/۰۹۴	۷/۴۸۲
		MAP	۵۴۷,۳۷۲۷	۶۱۴,۰۱۵۹	۰/۱۴۰	۰/۱۲۱	۱۱/۶۵۴
		Bayes	۵۰۲,۶۱۴۱	۵۶۳,۹۴۴۳	۰/۱۰۴	۰/۰۶۷	۵/۸۴۳
	SL	ML	۵۸۴,۳۴۵۸	۶۰۵,۱۶۴۷	۰/۱۷۵	۰/۱۳۲	۱۰/۴۰۳
		MAP	۵۳۵,۳۵۹۸	۶۳۸,۰۱۰۸	۰/۱۸۲	۰/۱۴۷	۱۱/۱۲۹
		Bayes	۵۳۳,۹۱۶	۵۸۲,۳۷۸۵	۰/۱۴۱	۰/۱۱۲	۷/۳۰۵
۲۰۰	SN	ML	۱۰۴۸,۸۲۹	۱۱۹۹,۰۳۲	۰/۱۴۱	۰/۱۰۶	۸/۹۶۳
		MAP	۱۰۹۲,۵۴۶	۱۲۴۸,۹۲۶	۰/۱۵۹	۰/۱۱۸	۱۱/۴۲۷
		Bayes	۱۰۳۰,۳۷۲	۱۱۹۵,۸۵۵	۰/۱۱۴	۰/۰۹۴	۷/۳۸۶
	ST	ML	۱۰۱۶,۴۵	۱۱۹۶,۷۸۲	۰/۱۱۵	۰/۰۷۷	۶/۱۲۰
		MAP	۱۰۴۳,۸۲۸	۱۱۹۲,۴۴۸	۰/۱۳۰	۰/۰۹۳	۸/۸۰۱
		Bayes	۱۰۵۷,۳۹۶	۱۱۵۹,۶۷۸	۰/۰۹۲	۰/۰۵۱	۴/۳۶۵
	SL	ML	۱۰۹۹,۳۴۹	۱۲۴۲,۱۱۷	۰/۱۵۵	۰/۱۲۲	۷/۵۹۰
		MAP	۱۱۰۰,۹۳۹	۱۲۱۰,۸۹۱	۰/۱۷۸	۰/۱۳۵	۱۰/۸۹۱
		Bayes	۱۰۷۱,۸۶۳	۱۲۰۶,۸۲۳	۰/۱۳۵	۰/۱۰۱	۵/۸۰۰
	SCN	ML	۱۱۵۹,۷۵	۱۲۷۲,۱۲	۰/۱۷۳	۰/۱۳۹	۱۳/۴۶۰
		MAP	۱۱۱۸,۵۳۱	۱۲۵۲,۸۲۹	۰/۱۹۴	۰/۱۶۳	۱۴/۷۱۴
		Bayes	۱۱۳۷,۰۵۴	۱۲۳۳,۳۷۴	۰/۱۴۲	۰/۱۱۳	۱۰/۲۳۳



شکل ۷. نمودارهای سری زمانی (الف) و هیستوگرام (ب) برای داده‌های مدل GHST-PAR با نمونه ۲۰۰ و ۶٪ داده پرت.

(۲) روش بیزی در تمام سناریوها بهترین عملکرد را دارد و در همه سطوح آلودگی، کمترین مقادیر RMSPE، MAPE و RMAPE را ارائه می‌دهد؛ این موضوع نشان‌دهنده استواری بالای روش بیزی در مواجهه با داده‌های پرت است. روش ML عملکرد متوسطی دارد، اما با افزایش درصد پرت‌ها، دقت آن به سرعت کاهش می‌یابد. روش MAP در همه حالت‌ها ضعیف‌ترین عملکرد را دارد و بالاترین خطاها را به‌ویژه در حضور آلودگی بالا نشان می‌دهد.

(۳) از میان ساختارهای نوآور بررسی‌شده، مدل با نوآور ST مقاوم‌ترین مدل در برابر داده‌های پرت است و در تمام سطوح آلودگی، کمترین مقادیر RMSPE، MAPE و RMAPE را حفظ می‌کند. نوآورهای SN و SL مقاومت متوسطی دارند، اما عملکردشان با افزایش آلودگی نسبت به ST افت بیشتری دارد. مدل SCN حساس‌ترین ساختار و بیشترین افزایش خطا را در حضور داده‌های پرت نشان می‌دهد.

(۴) این تحلیل حساسیت بر اهمیت انتخاب مناسب روش برآوردیابی و ساختار نوآور در مدل‌سازی سری‌های زمانی دارای پرت تأکید دارد. روش بیزی استوارترین و دقیق‌ترین نتایج را در تمام سطوح آلودگی ارائه می‌دهد. در میان ساختارهای نوآور، مدل ST بیشترین مقاومت و SCN بیشترین حساسیت را نسبت به داده‌های پرت دارد. بنابراین برای مدل‌سازی سری‌های زمانی که در معرض داده‌های پرت هستند، ترکیب روش بیزی با ساختار نوآور ST مقاوم‌ترین و دقیق‌ترین چارچوب ممکن را فراهم می‌کند.

۳.۳ جمع‌بندی نتایج شبیه‌سازی‌ها

نتایج سه مطالعه شبیه‌سازی نشان می‌دهد که کارایی روش‌های برآورد به نوع توزیع نوآور، اندازه نمونه و وجود داده‌های پرت وابسته است. در داده‌های نرمال یا تقریباً نرمال مانند SN و در نمونه‌های بزرگ، ML و بیزی عملکرد خوبی دارند، اما بیزی حتی در نمونه‌های کوچک نیز پایدارتر است. در توزیع‌های چوله و دم‌سنگین مانند ST و GHST، روش بیزی با فاصله زیادی بهتر عمل می‌کند و نوسانات شدید را دقیق‌تر مدل می‌کند. ML در این شرایط همچنان قابل قبول است اما به چولگی حساس‌تر می‌شود و MAP بیشترین انحراف را دارد. در حضور داده‌های آلوده، برتری بیزی پررنگ‌تر است؛ این روش کمترین افزایش خطا را نشان می‌دهد، در حالی که MAP بیشترین افت دقت را دارد و ML عملکردی میانه ارائه می‌دهد. در مجموع، روش بیزی در همه شرایط از نمونه‌های کوچک تا توزیع‌های چوله، دم‌سنگین و داده‌های پرت، پایدارترین و دقیق‌ترین رهیافت است. ML در داده‌های نرمال یا نمونه‌های بزرگ گزینه‌ای سریع و مناسب محسوب می‌شود، اما MAP برای داده‌های تمیز توصیه می‌شود. بنابراین، ترکیب مدل PAR با نوآور ST و رهیافت بیزی بهترین چارچوب برای تحلیل داده‌های متناوب با ویژگی‌های چولگی و دم‌سنگین است.

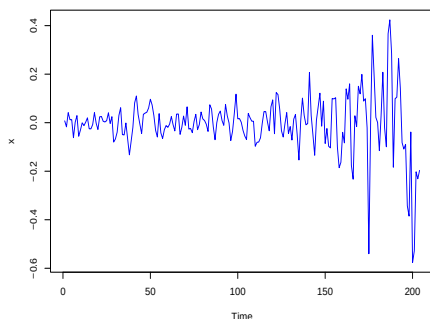
۴ تحلیل داده‌های واقعی

در این بخش، داده‌های واقعی مربوط به قیمت سهام گوگل از تاریخ ۱ اوت ۲۰۰۴ تا ۳۱ دسامبر ۲۰۲۴ که از پایگاه داده Finance Yahoo استخراج شده‌اند، مورد بررسی قرار گرفته‌اند. این مجموعه داده شامل ۲۴۵ مشاهده ماهانه

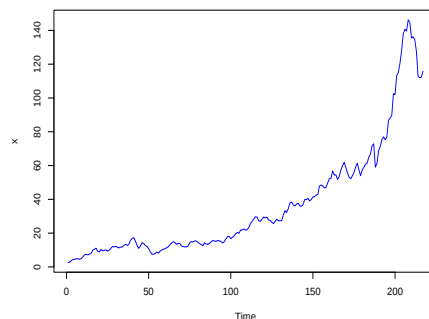
جدول ۴. میانگین معیارها برای برآورد پارامترهای مدل PAR با نتایجهای CHST و NIG و درصد دادههای پرت در اندازههای مختلف نمونه.

سناریو	نمونه	روش	%			%			%			%		
			MAPE	MAPER	RMSPE	MAPE	MAPER	RMSPE	MAPE	MAPER	RMSPE	MAPE	MAPER	RMSPE
سناریو	NIG	SN	۲۱/۴۸۰	۰/۲۵۹	۰/۳۶۲	۱۴/۳۳۹	۰/۱۷۴	۰/۲۴۰	۱۰/۷۸۶	۰/۱۳۰	۰/۱۸۰	۷۱/۳۴	۰/۰۸۷	۰/۱۲۰
			۸۸۷۲۶	۰/۳۱۷	۰/۴۲۷	۱۹/۴۵۵	۰/۳۰۹	۰/۴۸۳	۱۵/۱۲۵	۰/۱۶۰	۰/۲۰۷	۹۸/۲۳	۰/۱۰۷	۰/۱۳۹
		ST	۱۵۸۳۶	۰/۳۰۸	۰/۴۹۵	۸۷۸۸	۰/۱۳۴	۰/۱۹۴	۸/۱۲۰	۰/۱۰۴	۰/۱۴۹	۴/۷۳۸	۰/۰۶۸	۰/۰۹۹
			۱۲۵۴۲	۰/۱۷۱	۰/۲۶۹	۸۴۵۸	۰/۱۱۳	۰/۱۸۱	۶/۲۲۱	۰/۰۸۵	۰/۱۲۵	۴/۱۶۲	۰/۰۵۷	۰/۰۹۰
		SL	۲۱/۲۹۴	۰/۲۲۶	۰/۳۳۵	۱۳/۲۱۷	۰/۱۶۰	۰/۲۱۷	۹/۶۱۷	۰/۱۱۵	۰/۱۶۴	۵۸/۱	۰/۰۷۵	۰/۱۱۲
			۶/۰۷۲	۰/۱۰۸	۰/۲۰۷	۳/۶۲۲	۰/۰۷۸	۰/۱۴۰	۲/۵۱۶	۰/۰۵۵	۰/۱۰۶	۱/۵۷۰	۰/۰۴۰	۰/۰۷۱
		ML	۱۷/۰۰۰	۰/۳۰۶	۰/۴۰۵	۱۱/۳۷۸	۰/۲۰۴	۰/۲۶۹	۸/۷۸۰	۰/۱۵۳	۰/۲۰۲	۵/۶۴۶	۰/۱۰۱	۰/۱۲۵
			۲۴/۴۹۳	۰/۲۵۹	۰/۴۵۹	۱۶/۲۲۲	۰/۲۲۹	۰/۳۱۰	۱۱/۸۹۲	۰/۱۸۱	۰/۲۳۷	۸۳/۹۳	۰/۱۲۳	۰/۱۵۶
		SCN	۸۸۱۳	۰/۲۴۹	۰/۳۴۲	۷/۴۲۴	۰/۱۶۹	۰/۲۳۰	۵/۰۴۵	۰/۱۲۴	۰/۱۷۰	۲/۵۰۳	۰/۰۸۴	۰/۱۱۴
			۳/۰۵۲۶	۰/۳۵۱	۰/۴۵۰	۲۰/۳۰۶	۰/۲۲۴	۰/۳۰۰	۱۵/۲۴۰	۰/۱۷۵	۰/۲۲۵	۱۰/۱۶۹	۰/۱۱۷	۰/۱۵۰
سناریو	NIG	SN	۲۸/۷۵۵	۰/۴۰۵	۰/۵۰۸	۲۵/۹۶۸	۰/۲۶۸	۰/۳۳۷	۱۹/۰۷۵	۰/۲۰۰	۰/۲۵۳	۱۲/۷۳۸	۰/۱۳۴	۰/۱۷۰
			۲۲/۳۹۲	۰/۲۹۹	۰/۳۹۴	۱۶/۲۰۸	۰/۱۹۴	۰/۲۵۶	۱۰/۸۵۴	۰/۱۴۲	۰/۱۹۵	۷/۷۳۳	۰/۰۹۵	۰/۱۲۹
		ST	۲۹/۵۰۹	۰/۳۳۷	۰/۴۹۳	۱۷/۸۱۷	۰/۱۹۶	۰/۲۸۰	۱۳/۸۸۶	۰/۱۵۲	۰/۲۱۵	۹/۱۵۴	۰/۱۰۱	۰/۱۳۷
			۳۴/۸۸۳	۰/۳۹۶	۰/۴۶۹	۲۳/۲۳۹	۰/۲۳۹	۰/۳۲۳	۱۶/۹۳۷	۰/۱۸۹	۰/۲۴۱	۱۲/۰۴۶	۰/۱۳۰	۰/۱۵۰
		SL	۲۳/۵۴۷	۰/۲۷۹	۰/۳۶۸	۱۶/۲۷۲	۰/۱۷۳	۰/۲۴۳	۱۰/۷۶۹	۰/۱۳۲	۰/۱۸۲	۷/۷۲۶	۰/۰۸۳	۰/۱۱۳
			۱۹/۹۸۷	۰/۲۴۲	۰/۳۲۳	۱۳/۲۹۵	۰/۱۵۳	۰/۲۲۳	۹/۴۶۲	۰/۱۱۴	۰/۱۶۹	۶/۲۵۲	۰/۰۶۳	۰/۱۰۴
		ML	۲۸/۸۸۸	۰/۲۸۹	۰/۳۷۱	۱۸/۲۵۶	۰/۱۸۷	۰/۲۶۵	۱۳/۸۰۹	۰/۱۲۷	۰/۱۹۸	۹/۷۲۱	۰/۰۹۳	۰/۱۲۶
			۱۱/۲۷۶	۰/۱۴۲	۰/۲۵۸	۹/۸۰۷	۰/۰۹۲	۰/۱۶۵	۶/۴۰۲	۰/۰۸۴	۰/۱۴۱	۴/۰۰۷	۰/۰۵۶	۰/۰۸۹
		SCN	۲۳/۳۷۸	۰/۳۸۲	۰/۴۷۱	۱۶/۰۳۵	۰/۲۷۵	۰/۳۱۷	۱۱/۵۵۶	۰/۱۸۲	۰/۲۷۸	۷/۹۱۰	۰/۱۱۹	۰/۱۶۱
			۳/۰/۸۸۶	۰/۴۴۲	۰/۵۲۱	۱۹/۹۷۹	۰/۲۷۵	۰/۳۶۳	۱۴/۶۷۶	۰/۲۲۱	۰/۲۷۸	۹/۶۳۳	۰/۱۴۶	۰/۱۸۰
سناریو	SCN	ML	۱۸/۸۵۵	۰/۲۷۶	۰/۴۰۵	۱۲/۳۷۶	۰/۲۰۰	۰/۲۶۰	۹/۵۲۳	۰/۱۵۶	۰/۱۸۷	۶/۵۵۲	۰/۰۹۴	۰/۱۳۱
			۴/۰/۲۹۶	۰/۴۰۰	۰/۵۰۷	۲۶/۱۱۹	۰/۲۸۱	۰/۳۲۳	۱۹/۱۰۳	۰/۲۰۷	۰/۲۵۹	۱۲/۳۳۹	۰/۱۳۳	۰/۱۶۸
		MAP	۴۳/۵۴۵	۰/۴۸۶	۰/۵۷۵	۲۸/۷۵۳	۰/۳۱۷	۰/۳۷۹	۲۲/۶۸۹	۰/۲۲۵	۰/۲۸۱	۱۵/۶۰۳	۰/۱۶۱	۰/۱۹۰
			۳/۰/۴۲۹	۰/۳۵۲	۰/۴۲۸	۱۹/۸۵۲	۰/۲۲۳	۰/۳۰۶	۱۳/۶۹۸	۰/۱۶۲	۰/۲۲۴	۱۰/۳۲۵	۰/۱۰۸	۰/۱۴۷

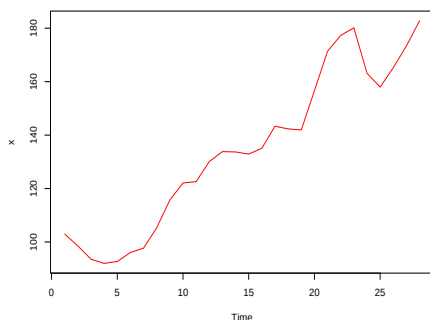
است که از میان آن‌ها ۸۹ داده (معادل ۱۱ درصد) برای ارزیابی مدل و ۲۱۷ داده باقی‌مانده برای برازش مدل استفاده شده‌اند. به‌منظور حذف روند خطی و مؤلفه‌های فصلی از داده‌ها، دو مرحله تفاضل‌گیری با مرتبه‌های ۱۲ و ۱ انجام شده است. نمودارهای مربوط به سری زمانی اصلی، داده‌های تفاضلی و هیستوگرام‌ها در شکل ۸ نمایش داده شده‌اند.



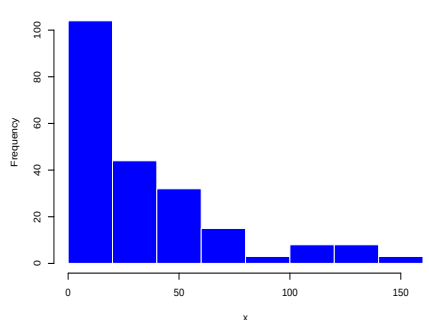
(ب)



(الف)



(د)



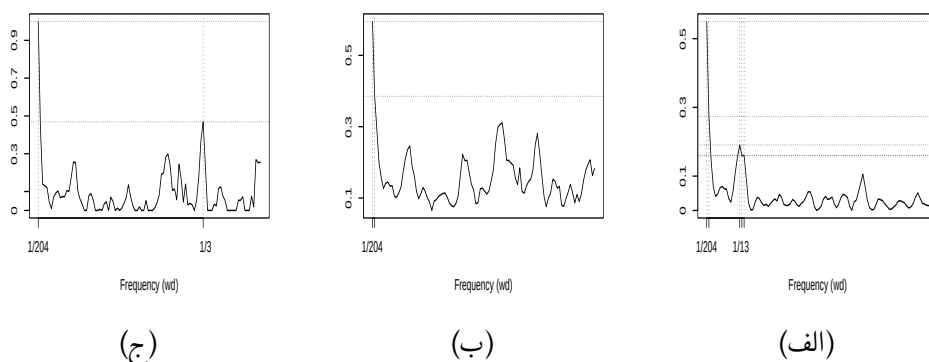
(ج)

شکل ۸. (الف) نمودار سری زمانی داده‌های آموزش؛ (ب) نمودار سری زمانی حاصل از تفاضل‌گیری مرتبه اول و ۱۲؛ (ج) نمودار هیستوگرام داده‌های آموزش؛ (د) نمودار سری زمانی داده‌های آزمون برای قیمت پایانی تعدیل‌شده سهام گوگل (۲۰۰۴-۲۰۲۴).

برای بررسی وجود همبستگی متناوب، از آزمون‌های تشخیصی مانند معیار برازندگی^۱ (MoF)، آماره منسجم^۲ و آماره نامنسجم استفاده شده است که توسط بروشکیویچ-سواج و همکاران (۲۰۰۴) و نعمت‌اللهی و همکاران (۲۰۱۷) پیشنهاد شده‌اند. شکل ۹ حاکی از وجود ساختار متناوب با دوره تناوب سه است؛ به‌گونه‌ای که قله‌هایی در فرکانس‌هایی که مضرب ۳ هستند، ظاهر شده‌اند. برای تعیین مرتبه مدل خودبازگشتی، از تابع خودهمبستگی^۳

^۱Measure of Fitness

^۲Coherent Statistics



شکل ۹. آماره‌های منسجم (الف)، نامنسجم (ب) و MoF (ج) با پارامترهای آزمون $M = ۲۰$ ، $B = ۱۰۰$ ، $\alpha = ۰/۰۱$ و $N = ۲۲۰$.

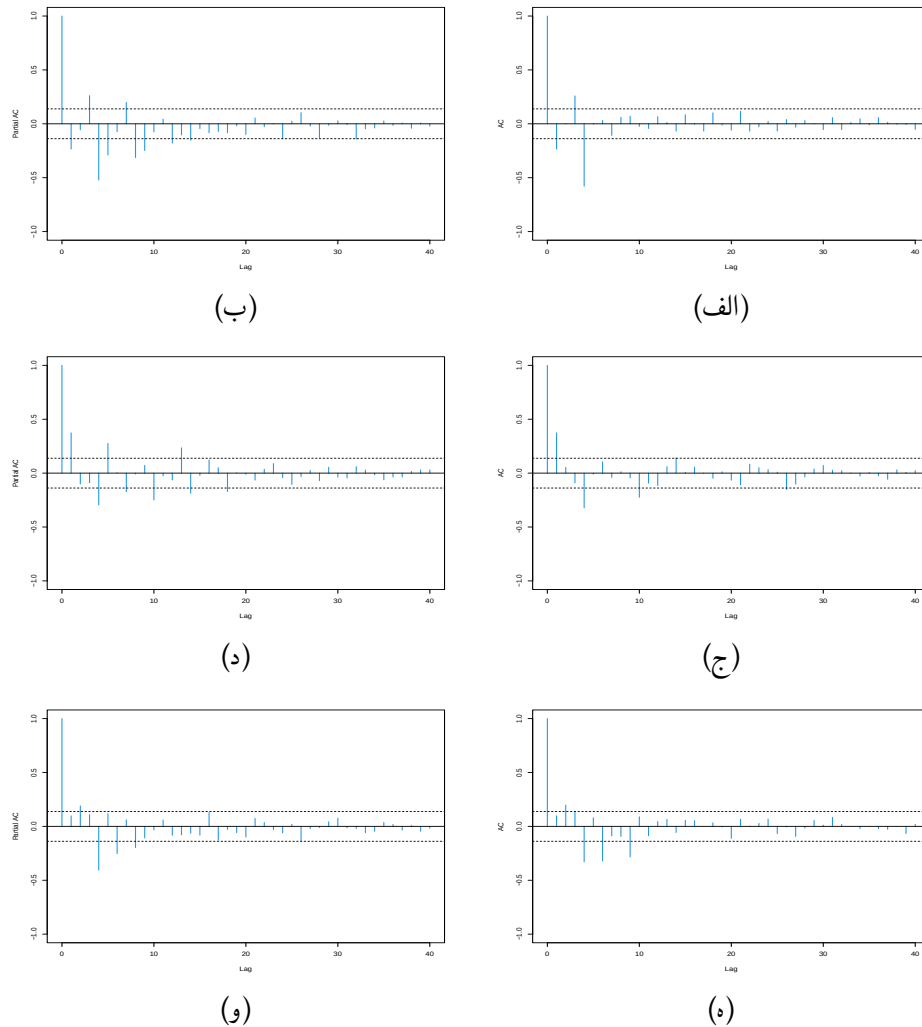
(ACF) و تابع خودهمبستگی جزئی^۱ (PACF) به صورت متناوب در شکل ۱۰ استفاده شده است. همچنین از معیارهای شناخته شده‌ای نظیر AIC ، SIC ، HQC و FPE برای انتخاب بهینه مدل در جدول ۵ بهره گرفته شده است. نتایج حاصل از نمودارها و مقادیر معیارها نشان می‌دهند که مدل $PAR(۱)$ برای این داده‌ها مناسب‌ترین گزینه است.

مدل $PAR(۱)$ با استفاده از سه روش برآوردیابی ماکسیمم درستنمایی، ماکسیمم احتمال پسین و رهیافت بیزی بر داده‌ها برازش داده شده است. هر یک از این روش‌ها با چهار ساختار مختلف نوآورها مورد بررسی قرار گرفته‌اند. مقادیر برآورد شده برای پارامترها در هر روش و تناوب در جدول ۶ ارائه شده‌اند. به منظور تکمیل تحلیل

جدول ۵. معیارهای انتخاب مرتبه مدل PAR					
مدل	FPE	SIC	AIC	HQC	BIC
$PAR(۱)$	۰/۰۰۶۷	-۴۶۹۴۸	-۴۹۲۰۹	-۴۸۱۳۷	-۱۹۴۰۹۰۴
$PAR(۲)$	۰/۰۰۷۳	-۴۶۵۳۴	-۴۹۱۶۶	-۴۸۰۲۵	-۱۹۲۳۳۶۶
$PAR(۳)$	۰/۰۰۷۹	-۴۶۰۳۵	-۴۸۳۳۸	-۴۷۴۲۷	-۱۸۸۵۳۷۹
$PAR(۴)$	۰/۰۰۷۶	-۴۶۶۹۱	-۴۸۷۸۲	-۴۸۲۷۹	-۱۸۹۶۰۷۱
$PAR(۵)$	۰/۰۰۸۲	-۴۶۰۷۹	-۴۸۰۵۳	-۴۷۲۷۲	-۱۸۷۴۴۸۸
$PAR(۶)$	۰/۰۰۸۵	-۴۶۳۵۳	-۴۷۶۶۹	-۴۷۱۴۹	-۱۸۶۲۱۴۸
$PAR(۷)$	۰/۰۰۸۰	-۴۵۴۴۶	-۴۸۲۹۱	-۴۷۶۴۰	-۱۸۹/۱۵۵۲
$PAR(۸)$	۰/۰۱۱۴	-۴۴۴۳۹	-۴۴۷۶۸	-۴۴۶۳۸	-۱۷۱/۲۶۶۸
$PAR(۹)$	۰/۰۱۱۸	-۴۳۶۹۹	-۴۳۳۵۷	-۴۴۰۹۷	-۱۷۰/۳۹۶۰
$PAR(۱۰)$	۰/۰۱۱۵	-۴۳۶۴۷	-۴۳۶۳۴	-۴۴۲۴۳	-۱۷۱/۲۸۴۴
مرتبه مدل	۱	۱	۱	۴	۱

³Sample Autocorrelation Function

¹Partial Autocorrelation Function



شکل ۱۰. نمودارهای خودهمبستگی (ACF) و خودهمبستگی جزئی (PACF) برای سه دوره تناوب زمانی: (الف)-(ب) دوره اول، (ج)-(د) دوره دوم، (ه)-(و) دوره سوم؛ در هر دوره، نمودار سمت چپ ACF و نمودار سمت راست PACF است.

برآوردهای پارامترها، علاوه بر مقادیر نقطه‌ای، انحراف معیار هر پارامتر نیز برای سه روش برآوردیابی محاسبه و در جدول ۶ گزارش شده است. این مقادیر امکان استخراج فواصل اطمینان در روش‌های ML و MAP و فواصل اعتباری در روش بیزی را فراهم می‌سازند. در روش ماکسیمم درستنمایی، انحراف معیار هر پارامتر از ریشه قطره‌ای ماتریس وارون هسین، یعنی ماتریس اطلاعات فیشر مشاهده‌شده، $SE(\hat{\theta}_{ML}) = \sqrt{\text{diag}(I(\hat{\theta})^{-1})}$ به‌دست

آمده است، که در آن $I(\hat{\theta})$ ماتریس اطلاعات فشر در نقطه ماکسیم درستنمایی است. در روش ماکسیم احتمال پسین، با فرض نرمال بودن تقریبی توزیع پسین در همسایگی مقدار برآورد شده، انحراف معیارها از ماتریس وارون هسین تابع لاگ‌پسین در نقطه ماکسیم استخراج شده‌اند. در روش بیزی، انحراف معیار هر پارامتر مستقیماً از نمونه‌های حاصل از MCMC به صورت $SE(\hat{\theta}_{Bayes}) = sd(\{\theta^{(1)}, \dots, \theta^{(N)}\})$ به دست آمده است، که در آن sd بیانگر انحراف معیار نمونه‌ای توزیع پسین است. بر اساس این مقادیر، فواصل اطمینان یا فواصل اعتباری ۹۵٪ به صورت تقریبی از رابطه $\hat{\theta} \pm 1.96 \times SE(\hat{\theta})$ قابل محاسبه‌اند. به منظور نمایش دقیق‌تر نتایج، مقادیر انحراف معیار در پرانتز کنار هر برآورد در جدول ۶ درج شده‌اند. این کار امکان ارزیابی هم‌زمان دقت، ناپایداری و مقایسه سه روش برآوردیابی را فراهم می‌سازد.

بر اساس جدول ۷، مدل $ST-PAR(1)$ با رهیافت بیزی بهترین برازش را در میان سایر مدل‌ها داشته و کمترین مقادیر AIC و BIC را به خود اختصاص داده است. همچنین این مدل در معیارهای خطای پیش‌بینی MAPE، RMSPE و عملکرد برتری از خود نشان داده است. همان‌طور که ملاحظه می‌شود روش بیزی در تمامی ساختارهای نوآور دارای کمترین خطا و بالاترین دقت پیش‌بینی است، در حالی که روش ML در مرتبه دوم و روش MAP ضعیف‌ترین عملکرد را داشته است. این برتری ناشی از آن است که در رهیافت بیزی، عدم قطعیت پارامترها به طور کامل در فرآیند پیش‌بینی لحاظ می‌شود، در حالی که در دو روش دیگر برآورد نقطه‌ای صرف مورد استفاده قرار می‌گیرد.

از میان خانواده‌های مختلف توزیع نوآور، مدل ST به دلیل برخورداری از انعطاف‌پذیری بالا در مدل‌سازی چولگی و دم‌های سنگین، دقیق‌ترین و پایدارترین پیش‌بینی‌ها را ارائه داده است. مدل‌های SN و SL عملکرد قابل‌قبولی داشته‌اند اما دقت آن‌ها به‌ویژه در افق‌های بلندتر کاهش می‌یابد. در مقابل، مدل SCN به‌علت ساختار دو مؤلفه‌ای و حساسیت بالا به داده‌های پرت، دارای بیشترین خطای پیش‌بینی بوده است. شکل ۱۱ نتایج پیش‌بینی یک مرحله‌ای همراه با فواصل اطمینان ۹۵ درصد را نشان می‌دهد که بیانگر هم‌خوانی مناسب پیش‌بینی‌های مدل بیزی با مقادیر واقعی است. همچنین مقادیر فاصله‌ای (بازه‌های پیش‌بینی) نشان می‌دهند که عدم قطعیت در برآورد پارامترها در حد قابل قبولی کنترل شده و پیش‌بینی‌ها از لحاظ آماری معنادار هستند. در مجموع، نتایج این بخش بیانگر آن است که ترکیب مدل $ST-PAR(1)$ با برآورد بیزی می‌تواند چارچوبی قدرتمند برای تحلیل و پیش‌بینی سری‌های زمانی مالی و اقتصادی با رفتارهای نامتقارن و سنگین‌دم فراهم کند. به منظور بررسی برازندگی مدل، آزمون‌های آماری مربوط به تصادفی بودن و نرمال بودن باقیمانده‌ها بر روی باقیمانده‌های مدل $ST-PAR(1)$ با روش بیزی انجام شده‌اند. نتایج آزمون‌های Ljung-Box، Box-Pierce، McLeod-Li، Turning points، Diff signs، Rank و نیز آزمون‌های نرمال بودن Jarque-Bera و Shapiro-Wilk در جدول ۸ ارائه شده‌اند که همگی تأیید می‌کنند باقیمانده‌ها به‌طور تصادفی و با توزیع مناسب تولید شده‌اند.

شکل ۱۲ نیز نمودارهای هیستوگرام و Q-Q مربوط به باقیمانده‌ها را نشان می‌دهد. این نمودارها نشان می‌دهند که مدل $ST-PAR(1)$ با روش بیزی به‌خوبی ساختارهای متناوب موجود در داده‌های سهام Google را مدل‌سازی کرده و باقیمانده‌هایی با ویژگی‌های آماری معتبر تولید می‌کند. بنابراین نتایج تحلیل داده‌های واقعی نشان

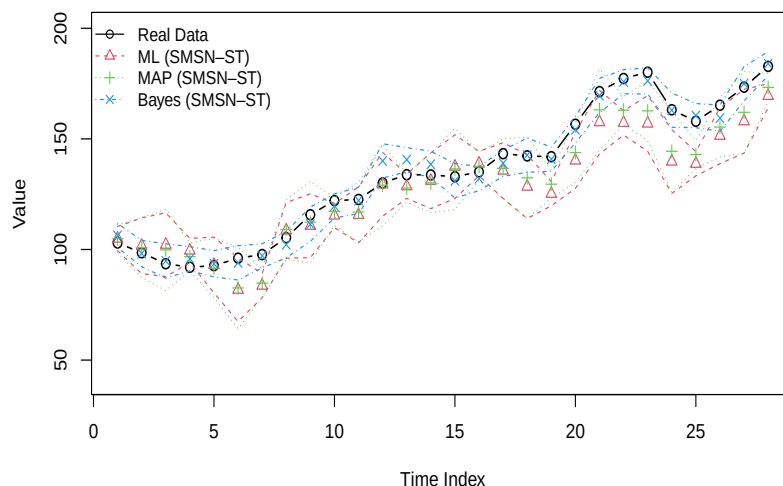
جدول ۶. نتایج برآورد پارامترهای مدل $SMSN-PAR(1)$ همراه با انحراف معیار آنها (در پرانتز).

نواور	پارامتر	ML	MAP	Bayes
SN	$Coefficient(Period1)$	۰/۴۸۵۶ (۰/۱۲)	۰/۴۸۵۲ (۰/۱۱)	۰/۴۲۱۸ (۰/۱۵)
	$Coefficient(Period2)$	۰/۵۶۸۴ (۰/۱۳)	۰/۵۶۸۵ (۰/۱۲)	۰/۴۱۹۳ (۰/۱۶)
	$Coefficient(Period3)$	-۰/۸۶۶۱ (۰/۱۸)	-۰/۸۶۷۳ (۰/۱۷)	-۰/۶۵۴۴ (۰/۱۹)
	$Scale(Period1)$	۰/۰۰۹ (۰/۰۱)	۰/۰۰۸۵ (۰/۰۱)	۰/۰۰۹۲ (۰/۰۱)
	$Scale(Period2)$	۰/۱۱۵ (۰/۰۱۲)	۰/۱۰۹ (۰/۰۱)	۰/۱۱۸ (۰/۰۱)
	$Scale(Period3)$	۰/۰۴۷ (۰/۰۰۴)	۰/۰۴۴۴ (۰/۰۰۴)	۰/۱۴۳ (۰/۰۰۲)
	$Skewness(Period1)$	-۰/۱۸۸ (۰/۰۰۴)	-۰/۱۹۴ (۰/۰۰۴)	-۰/۰۴۴۸ (۰/۰۰۶)
	$Skewness(Period2)$	-۰/۰۹۹۴ (۰/۰۰۵)	-۰/۰۹۸ (۰/۰۰۵)	-۰/۱۰۴۳ (۰/۰۰۷)
	$Skewness(Period3)$	-۰/۰۶۸۹ (۰/۰۰۶)	-۰/۰۷۰۸ (۰/۰۰۶)	-۰/۰۲۳۹ (۰/۰۰۵)
ST	$Coefficient(Period1)$	۰/۲۰۶۱ (۰/۰۰۷)	۰/۲۰۴ (۰/۰۰۶)	۰/۳۱۶۷ (۰/۰۰۸)
	$Coefficient(Period2)$	-۱/۰۶۰۰ (۰/۰۱۵)	-۰/۸۱۶۵ (۰/۰۱۲)	-۰/۵۹۲۷ (۰/۰۱۰)
	$Coefficient(Period3)$	۲/۳۹۰۰ (۰/۰۲۵)	۳/۰۲۹۲ (۰/۰۳۲)	۰/۹۱۴۱ (۰/۰۰۹)
	$Scale(Period1)$	۰/۰۰۱۴ (۰/۰۰۰۱)	۰/۰۰۰۱ (۰/۰۰۰۱)	۰/۰۰۱۳ (۰/۰۰۰۱)
	$Scale(Period2)$	۰/۰۰۵۳ (۰/۰۰۰۵)	۰/۰۰۳۲ (۰/۰۰۰۳)	۰/۰۰۳۴ (۰/۰۰۰۳)
	$Scale(Period3)$	۰/۱۳۲ (۰/۰۰۱)	۰/۱۶۵ (۰/۰۰۱)	۰/۰۲۵ (۰/۰۰۰۳)
	$Skewness(Period1)$	۰/۰۵۶۹ (۰/۰۰۴)	۰/۰۶۲۷ (۰/۰۰۴)	۰/۰۶۱۶ (۰/۰۰۵)
	$Skewness(Period2)$	۰/۰۳۶۸ (۰/۰۰۳)	۰/۰۵۲۶ (۰/۰۰۴)	۰/۰۳۶۶ (۰/۰۰۴)
	$Skewness(Period3)$	۰/۰۶۵۶ (۰/۰۰۶)	۰/۰۴۴۹ (۰/۰۰۵)	۰/۱۶ (۰/۰۰۲)
SL	$Coefficient(Period1)$	۰/۲۶۵۱ (۰/۰۰۹)	۰/۲۱۵۸ (۰/۰۰۸)	۰/۳۵۵۰ (۰/۰۱۰)
	$Coefficient(Period2)$	-۰/۸۳۸۶ (۰/۰۱۳)	-۰/۸۸۴۶ (۰/۰۱۱)	-۰/۵۴۰۱ (۰/۰۰۹)
	$Coefficient(Period3)$	۲/۴۲۱۳ (۰/۰۲۴)	۲/۵۱۹۳ (۰/۰۲۶)	۰/۸۸۱۴ (۰/۰۱۰)
	$Scale(Period1)$	۰/۰۰۱۰ (۰/۰۰۰۱)	۰/۰۰۰۵ (۰/۰۰۰۱)	۰/۰۰۰۷ (۰/۰۰۰۱)
	$Scale(Period2)$	۰/۰۰۴۶ (۰/۰۰۰۴)	۰/۰۰۱۴ (۰/۰۰۰۲)	۰/۰۰۰۲ (۰/۰۰۰۲)
	$Scale(Period3)$	۰/۱۰۴ (۰/۰۰۱)	۰/۰۰۵۱ (۰/۰۰۰۵)	۰/۰۰۱۲ (۰/۰۰۰۱)
	$Skewness(Period1)$	۰/۰۵۴۶ (۰/۰۰۴)	۰/۰۶۷۸ (۰/۰۰۵)	۰/۰۶۵۳ (۰/۰۰۵)
	$Skewness(Period2)$	-۰/۰۰۰۳ (۰/۰۰۰۴)	-۰/۰۴۷۴ (۰/۰۰۵)	-۰/۰۲۹۶ (۰/۰۰۴)
	$Skewness(Period3)$	۰/۰۹۸۱ (۰/۰۰۷)	۰/۰۵۶۲ (۰/۰۰۵)	۰/۰۳۱۹ (۰/۰۰۴)
SCN	$Coefficient(Period1)$	۰/۴۸۴۹ (۰/۰۱۲)	۰/۴۸۴۸ (۰/۰۱۱)	۰/۳۳۸۱ (۰/۰۱۳)
	$Coefficient(Period2)$	۰/۵۶۷۷ (۰/۰۱۳)	۰/۵۶۵۹ (۰/۰۱۲)	۰/۴۶۴۴ (۰/۰۱۴)
	$Coefficient(Period3)$	-۰/۸۷۰۶ (۰/۰۱۸)	-۰/۸۷۷۳ (۰/۰۱۷)	-۰/۸۳۱۵ (۰/۰۱۵)
	$Scale(Period1)$	۰/۰۰۷۴ (۰/۰۰۰۷)	۰/۰۰۶۹ (۰/۰۰۰۶)	۰/۰۰۳۲ (۰/۰۰۰۳)
	$Scale(Period2)$	۰/۰۰۹۲ (۰/۰۰۱)	۰/۰۰۸۷ (۰/۰۰۱)	۰/۰۰۵۲ (۰/۰۰۰۵)
	$Scale(Period3)$	۰/۰۳۸۴ (۰/۰۰۴)	۰/۰۳۶۴ (۰/۰۰۴)	۰/۰۰۵۵ (۰/۰۰۰۵)
	$Skewness(Period1)$	-۰/۰۲۰۴ (۰/۰۰۴)	-۰/۰۲۰۹ (۰/۰۰۴)	-۰/۰۱۷۷ (۰/۰۰۳)
	$Skewness(Period2)$	-۰/۰۹۵ (۰/۰۰۵)	-۰/۰۹۸۱ (۰/۰۰۵)	-۰/۰۱۱۲ (۰/۰۰۴)
	$Skewness(Period3)$	-۰/۰۶۶۱ (۰/۰۰۵)	-۰/۰۶۸۲ (۰/۰۰۵)	-۰/۰۱۶۷ (۰/۰۰۳)

می‌دهند که مدل $ST - PAR(1)$ با رهیافت بیزی عملکرد بهینه‌ای از نظر برازش مدل، دقت پیش‌بینی و اعتبار آماری باقیمانده‌ها دارد. این مدل، به شکل معناداری از سایر مدل‌ها بهتر عمل می‌کند و نشان می‌دهد که مدل‌های خودبازگشتی متناوب با نواورهای چوله و دم‌سنگین، ابزار مناسبی برای مدل‌سازی و پیش‌بینی سری‌های زمانی مالی هستند.

جدول ۷. مقادیر شاخص‌های برازندگی در برازش مدل $SMSN - PAR(1)$.

نواور	روش	MAPE	RMSPE	RMAPE	AIC	BIC
SN	ML	۷۹۲۳۸	۹/۱۷۹۵	۵/۶۴۴۸	-۵۸۹۶۰۷	-۵۷۶۳۹۳
	MAP	۸۰۲۰۴	۹/۲۹۹۲	۵/۷۰۲۰	-۵۶۰۹۵۶	-۵۴۷۷۴۳
	Bayes	۷۸۳۳۱	۸/۹۲۶۰	۵/۶۱۲۹	-۶۰۰/۳۶۷	-۵۹۰/۴۵۷
ST	ML	۷۷۴۳۲	۸/۶۷۱۳	۵/۳۷۸۸	-۶۷۲/۵۰۱	-۶۵۵/۹۸۵
	MAP	۷۹۲۱۸	۹/۱۲۳۵	۵/۷۰۴۰	-۵۹۶/۳۵۲	-۵۸۶/۴۴۲
	Bayes	۶۸۰۱۶	۷/۶۱۴۳	۴/۹۴۱۴	-۶۹۶/۵۱۵	-۶۸۳/۳۰۱
SL	ML	۸۰۲۰۹	۹/۳۴۰۷	۵/۷۴۳۵	-۵۵۹/۸۶۳	-۵۴۶/۶۰۴
	MAP	۸۳۳۱۷	۹/۵۴۴۳	۵/۹۱۰۹	-۵۳۹/۶۰۷	-۵۲۶/۳۹۳
	Bayes	۷۹۴۳۲	۹/۲۵۱۳	۵/۶۳۸۸	-۵۸۸۰/۲۵	-۵۷۹/۱۱۵
SCN	ML	۸۹۵۲۴	۱۰/۴۸۷۳	۶/۲۴۱۰	-۴۶۸۰/۲۴	-۴۵۵/۶۲۵
	MAP	۸۹۸۵۴	۱۰/۵۳۱۰	۶/۲۶۱۳	-۴۶۹/۴۷۷	-۴۵۶/۲۶۳
	Bayes	۸۷۸۸۶	۱۰/۲۳۶۲	۶/۱۶۴۹	-۴۹۰/۲۲۶	-۴۸۰/۴۳۵



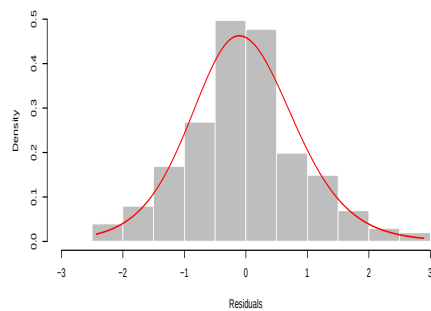
شکل ۱۱. پیش‌بینی‌های یک مرحله‌ای و فواصل پیش‌بینی ۹۵٪ از برازش سری زمانی $PAR(1)$ با نواور ST .

۵ بحث و نتیجه‌گیری

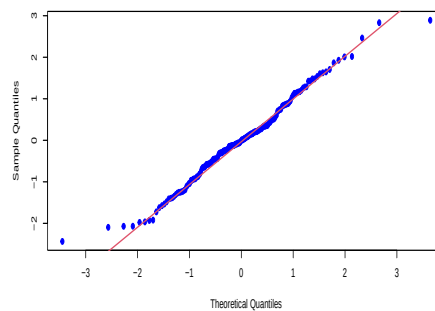
این مقاله مروری جامع بر روش‌های موجود برای برآوردیابی مدل‌های خودبازگشتی متناوب با نواورهای ترکیبی مقیاسی چوله‌نرمال ($SMSN - PAR$) که برای مدل‌سازی وابستگی‌های متناوب در داده‌های سری زمانی با ساختار نواور از خانواده توزیع‌های چوله و دم‌سنگین مناسب می‌باشد، ارائه می‌دهد. در این راستا، سه روش مختلف

جدول ۸. آزمون تصادفی بودن و نرمال بودن برای باقیمانده‌های مدل $PAR(1)$ با نوآور ST .

نوع آزمون	آماره	df/Asymp-stat	مقدار-p
<i>Ljung – Box(Randomness)</i>	۵۲/۶۴۶	۲۰	۰/۰۰۲
<i>Box – Pierce(Randomness)</i>	۴۶/۸۶۸	۲۰	۰/۰۰۷
<i>McLeod – Li(Randomness)</i>	۱۸/۸۲	۲۰	۰/۳۸۰
<i>Turning points(Randomness)</i>	۴۹	-۰/۵۰۱	۰/۶۴۴
<i>Diff signs(Randomness)</i>	۶۷	۰/۳۲۸	۰/۷۰۳
<i>Rank(Randomness)</i>	۱۵۰۹	۰/۷۳۷	۰/۴۹۲
<i>Jarque – Bera(Normality)</i>	۲/۳۲۷	۲	۰/۳۶۰
<i>Shapiro – Wilk(Normality)</i>	۰/۹۷۵	۸۹	۰/۷۳۹



(ب)



(الف)

شکل ۱۲. (الف) نمودار Q-Q و (ب) هیستوگرام باقیمانده‌های مدل $PAR(1)$ با نوآور ST .

ماکسیمم درستنمایی، ماکسیمم پسین و بیزی برای برآورد پارامترها محاسبه و با یکدیگر مقایسه شده‌اند. با استفاده از مطالعات شبیه‌سازی و تحلیل داده‌های واقعی، عملکرد مدل از نظر دقت برآورد، استواری در برابر داده‌های دم‌سنگین و حساسیت به پرت‌ها مورد ارزیابی قرار گرفته‌اند. نتایج نشان می‌دهند که روش بیزی بر سایر روش‌ها برتری دارد و دقیق‌ترین برآوردهای پارامتر، کمترین خطاهای پیش‌بینی، و بیشترین استواری را در شرایط پیچیده آماری ارائه می‌دهد. در میان ساختارهای مختلف نوآورها، مدل با توزیع چوله‌تی بهترین عملکرد را از خود نشان داده و استوارترین و دقیق‌ترین برآوردها را فراهم می‌کند. در مقابل، مدل با نوآور نرمال آلوده چوله بیشترین حساسیت را نسبت به داده‌های پرت داشته و خطاهای بیشتری در برآورد و پیش‌بینی ایجاد می‌نماید. تحلیل داده‌های واقعی کاربردپذیری و اثربخشی مدل پیشنهادی را تأیید می‌کند. این پژوهش نشان می‌دهد که مدل‌های خودبازگشتی متناوب با نوآورهای SMSN پیشنهادی مناسب و انعطاف‌پذیر برای مدل‌سازی داده‌های سری زمانی پیچیده می‌باشند. استفاده از رهیافت بیزی موجب افزایش دقت، استواری در برابر داده‌های پرت و بهبود پیش‌بینی در شرایط غیرنرمال می‌شود. مطالعات آتی در زمینه ساختار مدل، روش‌های برآورد، و بهینه‌سازی محاسباتی می‌توانند دامنه کاربرد این مدل‌ها را در مسائل

واقعی پیش‌بینی، به‌ویژه در حوزه‌های مالی، اقتصادی و اقلیمی گسترش دهند. مقایسه عملکرد این‌گونه مدل‌های خودبازگشتی متناوب با مدل‌های کلاسیک نظری ARIMA و GARCH نیز می‌تواند یک جهت تحقیقاتی ارزشمند برای پژوهش‌های آتی در نظر گرفته شود.

تقدیر و تشکر

از سردبیر محترم، داوران و ویراستار ارجمند که پیشنهادهای ایشان موجب ارتقای کیفیت این مقاله شده است، صمیمانه قدردانی می‌گردد. از دانشگاه شیراز نیز، به‌عنوان حامی این پژوهش، سپاسگزاری می‌شود.

مراجع

- Basawa, I. V. and Lund, R. B. (2001), Large Sample Properties of Parameter Estimates for Periodic ARMA Models, *Journal of Time Series Analysis*, **22**, 651-663.
- Basso, R. M., Lachos, V. H., Cabral, C. R. B. and Ghosh, P. (2010), Robust Mixture Modeling Based on the Scale Mixtures of Skew-Normal Distributions, *Computational Statistics and Data Analysis*, **54**, 2926-2941.
- Broszkiewicz-Suwaj, E., Makagon, A., Weron, R., and Wylomanska, A. (2004). On Detecting and Modeling Periodic Correlation in Financial Data, *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, **336**(1-2), 196-205.
- Chaari, F., Leskow, J., Napolitano, A., Zimroz, R. and Wylomanska, A. (2017), *Cyclostationarity: Theory and Methods III (Eds)*, *Applied Condition Monitoring*, Springer.
- Ferreira, C. S., and Dias, R. (2024), Semiparametric Regression Models Under Skew Scale Mixtures of Normal Distributions, *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, 1-23.
- Franses, P. H. and Paap, R. (1994), Model Selection in Periodic Autoregressive, *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, **56**(4), 421-439.

- Giri, P., Grzesiek, A., Żuławiński, W., and Sundar, S. (2022), The Modified Yule–Walker Method for Multidimensional Infinite-Variance Periodic Autoregressive Model of Order 1, *Journal of the Korean Statistical Society*, **51**(4), 1130-1142.
- Gladyshev, E. G. (1961). Periodically Correlated Random Sequences. *Soviet Mathematics*, **2**, 385-388.
- Hipel, K. W. and Mcleod, A. I. (1994), *Time Series Modelling of Water Resources and Environmental Systems*, Elsevier.
- Liu, C. and Rubin, D. B. (1994), The ECME Algorithm: A Simple Extension of EM and ECM With Faster Monotone Convergence, *Biometrika*, **81**, 633-648.
- Maleki M., Arellano-Valle R. B., Dey, D. K., Mahmoudi, M. R. and Jalili, S. M. J. (2018), A Bayesian Approach to Robust Skewed Autoregressive Processes, *Calcutta Statistical Association Bulletin*, **69**(2), 165-182.
- Manouchehri, T. and Nematollahi, A. R. (2019a), On the Estimation Problem of Periodic Autoregressive Time Series: Symmetric and Asymmetric Innovations, *Journal of Statistical Computation and Simulation*, **89**(1), 71-97.
- Manouchehri, T. and Nematollahi, A. R. (2019b), Periodic Autoregressive Models With Closed Skew-Normal Innovations. *Computational Statistics*, **34**(3), 1183-1213.
- Manouchehri, T., and Nematollahi, A. R. (2022), A Comparison of the Bayesian and Non-Bayesian Approaches for the Periodic AR Models Based on the SMSN Innovations, *Iranian Journal of Science and Technology, Transactions A: Science*, **46**(2), 615-630.
- Meng, X. L. and Rubin, D. B. (1993), Maximum Likelihood Estimation Via the ECM Algorithm: A General Framework, *Biometrika*, **80**, 267-278.
- Nematollahi, A. R., Soltani, A. R. and Mahmoudi, M. R. (2017), Periodically Correlated Modeling by Means of the Periodograms Asymptotic Distributions. *Statistical Papers*, **1**(1), 1-12.

- Thomas, H. A. and Fiering, M. B. (1962), Mathematical Synthesis of Streamflow Sequences for the Analysis of River Basins by Simulation, *Design of Water Resource Systems*, 459-493.
- Yaghoubi, S., and Farnoosh, R. (2025), Static Finite Mixture Model of Multivariate Skew-Normal Distributions to Cluster Multivariate Time Series Based on Generalized Autoregressive Score Approach, *International Journal of Nonlinear Analysis and Applications*, **16**(4), 27-39.
- Zeller, C. B., Cabral, C. R. B., Lachos, V. H. (2016), Robust Mixture Regression Modeling Based on Scale Mixtures of Skew-Normal Distributions, *TEST*, **25**(2), 375-396.
- Żuławiński, W., and Wylomańska, A. (2023), Estimation of Coefficients for Periodic Autoregressive Model With Additive Noise—A Finite-Variance Case, *arXiv Preprint*, arXiv:2302.07070.
- Żuławiński, W., Antoni, J., Zimroz, R., and Wylomańska, A. (2024), Robust Coherent and Incoherent Statistics for Detection of Hidden Periodicity in Models With Non-Gaussian Additive Noise, *EURASIP Journal on Advances in Signal Processing*, **2024**(1).