



Heavy-Tailed Extended Exponential Log-Logistic Distribution: Properties and Applications

Khorashadi Zade, S. J. , Yousefzadeh, F. , Jomhoori, S. 

Department of Statistics, University of Birjand, Birjand, Iran.

Corresponding author: F. Yousefzadeh, fyousefzadeh@birjand.ac.ir

Received: 29/5/2024 Revised: 29/7/2025 Accepted and Published Online: 31/7/2025.

Introduction

Recent advances in statistical distributions have generated increasing interest in the field of statistics by enabling the construction of flexible models suitable for data analysis across various domains. In this paper, we propose a new statistical distribution based on the CBell transformation, which combines features of Bell numbers and the exponential log-logistic distribution. The resulting distribution is heavy-tailed, offering greater flexibility than many comparable models. Its probability density function can be expressed as a linear combination of exponential log-logistic densities, allowing straightforward derivation of essential properties from the base distribution. Moreover, the distribution has an appealing structure for modeling censored data, with closed-form expressions for its cumulative distribution and hazard rate functions. It provides a wide range of shapes for its density and hazard functions, making it a suitable candidate for modeling survival times, especially when those times are highly dispersed.

Material and Methods

In this paper, we introduce the CBell exponential log-logistic distribution and derive the cumulative distribution function, density function, moments, moment-generating function, and quantile function. Entropy measures such as Rényi, Tsallis, and Shannon entropy, as well as inequality curves and insurance risk measures, are also calculated. Then we present six estimation methods for parameter inference. Also, a simulation study is conducted to evaluate the performance of the proposed estimators using synthetic data. Finally, two real insurance datasets are analysed.

Results and Discussion

The Maximum Product of Spacings Estimator (MPSE) consistently outperforms other estimation methods in terms of bias and mean squared error (MSE), particularly as sample size increases, confirming its robustness and accuracy. Descriptive statistics reveal that the second dataset exhibits greater variability and is more affected by outliers compared to the first. To assess the flexibility of the proposed CBell Exponential Log-Logistic distribution, comparisons were made with alternative models, including EXLLD, APEXLLD, LLD, and APLLD. The proposed model demonstrates stronger performance in risk analysis, as evidenced by higher values of VaR, TVaR, TV, and TVP, reflecting its ability to model heavier tails and capture extreme risks more effectively. Overall, the CBell Exponential Log-Logistic distribution provides an excellent fit and is well-suited for real-world applications involving heavy-tailed data.

Conclusion

In this study, a new family of heavy-tailed distributions called the CBell Exponential Log-Logistic distribution was introduced. This distribution is constructed based on the CBell transformation and demonstrates high flexibility, allowing it to model a wide range of distributional shapes. The results of a simulation study revealed that the MPSE outperformed other methods under most scenarios. Subsequently, essential risk measures such as Value at Risk (VaR), Tail Value at Risk (TVaR), and Tail Variance were computed for the proposed model. Finally, the model was fitted to two real-world datasets, and the estimated parameters, along with goodness-of-fit test results, confirmed the strong performance and suitability of the proposed distribution.

Keywords: Risk measures, Extended Exponential Log-Logistic Distribution, Parameter estimation, Tail Variance Premium, Value at Risk, Tail Value at Risk.

Mathematics Subject Classification (2020): 60E10, 60E05.



©The Author(s). The Publisher is Iranian Statistical Society.

This is an open access article distributed under the terms and conditions of [CC BY-NC 4.0](https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/)

توزیع لگ لوژستیک‌نمایی توسعه یافته دم‌سنگین: خواص و کاربرد آن

سید جمال خراشادی‌زاده، فاطمه یوسف‌زاده، سارا جمهوری

گروه آمار دانشگاه بیرجند

نویسنده مسئول: فاطمه یوسف‌زاده، fyousefzadeh@birjand.ac.ir

تاریخ دریافت: ۱۴۰۴/۳/۸ تاریخ بازنگری: ۱۴۰۴/۵/۷ تاریخ پذیرش و انتشار: ۱۴۰۴/۵/۹

چکیده:

محققان با ساخت یک خانواده تعمیم‌یافته از توابع توزیع به دنبال یافتن مدل‌های آماری جدیدی هستند که بتوانند داده‌ها را در موضوعات مختلف نظیر مدیریت ریسک، اقتصاد و بیمه به خوبی برازش کنند. در این مقاله، یک توزیع جدید به نام توزیع لگ لوژستیک‌نمایی توسعه‌یافته معرفی می‌شود که جزو توزیع‌های دم‌سنگین است. برخی ویژگی‌های آماری این توزیع از جمله گشتاورها، تابع مولد گشتاور، آنترپی و منحنی‌های نابرابری اقتصادی به دست آمده‌اند. شش روش برآوردیابی برای برآورد پارامترهای مدل معرفی شده و عملکرد برآوردگرهای پارامترهای مدل پیشنهادی با استفاده از مجموعه داده‌های تصادفی و این روش‌های برآورد بررسی شده است. علاوه بر این، برخی معیارهای بیمه‌ای نظیر ارزش در معرض خطر، ارزش در معرض خطر دمی، واریانس دمی و حق بیمه واریانس دمی محاسبه شده‌اند. در نهایت، دو مجموعه داده واقعی از حوزه بیمه به کار گرفته شده‌اند تا نشان داده شود که مدل پیشنهادی چگونه داده‌ها را نسبت به بسیاری از مدل‌های شناخته‌شده و مرتبط، بهتر برازش می‌دهد.

واژه‌های کلیدی: معیارهای ریسک، توزیع لگ لوژستیک‌نمایی، برآورد پارامتر، حق بیمه واریانس دمی، ارزش در معرض خطر، ارزش در معرض خطر دمی.
کد موضوع‌بندی ریاضی (۲۰۲۰): 60E05، 60E10.



۱ مقدمه

پیشرفت‌های اخیر در توزیع‌های آماری جذابیت‌هایی را ایجاد نموده که علاقه به علم آمار را افزایش داده است. محققان اغلب به دنبال یافتن یک مدل آماری جدید و یا نسبتاً جدید برای برازش داده‌ها در موضوعات مختلف هستند. روش‌های مختلفی برای ساخت یک خانواده تعمیم یافته از توابع توزیع وجود دارد. یکی از این روش‌ها که بیشترین کاربرد را دارد ترکیب کردن است. داده‌های مدل‌سازی شده در مراحل مختلف تحقیق نظیر مدیریت ریسک، اقتصاد و بیمه نیازمند توزیع‌های دم‌سنگین می‌باشند. این توزیع داده‌ها، ممکن است به لحاظ شکل، تک وجهی (کوری و آناندا، ۲۰۰۵)، چوله به راست (لین، ۲۰۰۰)، مثبت (کلاگمن و همکاران، ۲۰۱۲) و یا دم‌سنگین (ایبراگیموف و پروخروف، ۲۰۱۷) باشند. داده‌های اریب، ترجیحاً با توزیع‌های چوله مدل‌سازی می‌شوند (برناردی و همکاران، ۲۰۱۲). توزیع‌های دم‌سنگین برای مدل‌سازی داده‌های بیمه در میان بیمه‌گرها بسیار پرطرفدار هستند، چرا که آن‌ها اغلب علاقمند به محاسبه مقدار ریسک هستند.

در سال‌های گذشته، استفاده از نسخه تعمیم‌یافته توزیع‌های آماری مورد علاقه دانشمندان بوده است. روش‌های مختلفی برای معرفی توزیع‌های تعمیم‌یافته معرفی شده‌اند که با افزودن یک یا چند پارامتر به توزیع اولیه، انعطاف‌پذیری آن را افزایش می‌دهند. ارتقاء انعطاف‌پذیری توزیع‌ها برای مدل‌سازی داده‌ها در زمینه‌های مختلفی مانند پزشکی، مهندسی، اقتصاد و غیره از اهمیت زیادی برخوردار است. با وجود شایستگی‌هایی که توزیع‌های کلاسیک دارند، برخی کمبودها همچنان در این توزیع‌ها مشاهده می‌شود. عدم انعطاف‌پذیری کافی آن‌ها موجب می‌شود تا در داده‌هایی که دارای دم‌های سنگین هستند بهترین برازش صورت نگیرد.

السعيد و همکاران (۲۰۲۳) کلاس سری‌های توانی تاپ-لئون^۱ معکوس توانی را معرفی کردند. **روکز و همکاران (۲۰۲۰)** زیر توزیعی از خانواده بتا به نام توزیع کوشی توانی با دو پارامتر را معرفی کردند. **سایکوتا و کومار (۲۰۲۳)** نسخه جدیدی از توزیع کوشی توانی را استفاده کردند و آن را معکوس توزیع کوشی توانی نامیدند. توزیع لگاریتمی توانی که ترکیبی از توزیع‌های لگاریتمی و تابع توان است، توسط **عبدالبار و همکاران (۲۰۲۰)** معرفی شد. آن‌ها اشاره کردند که توزیع لگاریتمی توانی در مقایسه با توزیع تابع توان، انعطاف‌پذیری بیشتری دارد. **السادات و همکاران (۲۰۲۴)** با استفاده از تکنیک نمونه‌گیری رتبه‌بندی برآورد پارامترهای توزیع لگاریتمی توانی را به دست آوردند و نشان دادند برآوردگر بیشینه حاصلضرب فاصله‌ها بهترین برآورد را داشته و تکنیک نمونه‌گیری رتبه‌بندی نیز در مقابل نمونه‌گیری تصادفی ساده کارایی بالاتری دارد. **شفاعی و خراشادیزاده (۱۴۰۴)** با معرفی یک تعمیم جدید از توزیع لگ لوژستیک، ویژگی‌ها و برآورد پارامترهای آن مورد مطالعه و بررسی قرار داده‌اند. در این توزیع با اضافه شدن یک پارامتر، نشان داده می‌شود که با افزایش این پارامتر، شکل آن متقارن‌تر و کشیدگی آن کمتر می‌شود. اخیراً **آلگانی (۲۰۲۲)** خانواده

¹Topp – Leon

توزیع‌های CBell^۱ را معرفی نموده است که دارای تابع توزیع تجمعی به صورت

$$F(x) = \frac{\exp[e^{\lambda G^{\theta}(x)} - 1] - 1}{\exp(e^{\lambda} - 1) - 1}, \quad (۱)$$

است، که در آن λ و θ پارامترهای مدل و $G(x)$ تابع توزیع اولیه است.

ما در این مقاله به دنبال یافتن یک توزیع آماری جدید هستیم که بر اساس تبدیل CBell حاصل می‌شود. توزیع پیشنهادی ویژگی‌های اعداد بل و توزیع لگ لوژستیک‌نمایی را با یکدیگر ترکیب می‌کند. این توزیع یک توزیع دم‌سنگین است که انعطاف‌پذیری بیشتری نسبت به سایر توزیع‌های مشابه دارد. تابع چگالی احتمال این توزیع را می‌توان به صورت ترکیب خطی از توابع چگالی توزیع لگ لوژستیک‌نمایی بیان کرد. این ویژگی امکان استخراج مستقیم بسیاری از ویژگی‌های مهم از توزیع لگ لوژستیک‌نمایی را فراهم می‌کند. هم‌چنین این توزیع برای تحلیل داده‌های سانسور شده جذاب است، چرا که دارای ساختار ساده و فرم بسته برای تابع توزیع تجمعی و تابع نرخ ریسک است. این توزیع انعطاف‌پذیری زیادی در شکل تابع چگالی احتمال و تابع نرخ ریسک دارد و می‌توان آن را به عنوان یک مدل برای زمان‌های بقا در نظر گرفت، به ویژه زمانی که این زمان‌ها دارای پراکندگی زیادی باشند. در بخش ۲، توزیع آماری لگ لوژستیک‌نمایی CBell معرفی شده و برخی از ویژگی‌های نظری آن مورد بررسی قرار می‌گیرد. به‌طور خاص، تابع توزیع تجمعی، تابع چگالی احتمال، گشتاورها، تابع مولد گشتاور و تابع چندکی این توزیع استخراج می‌گردند. هم‌چنین، مقادیر آنتروپی‌های رنی، تیسالیس و شانون به همراه منحنی‌های نابرابری و اندازه‌های بیمه محاسبه می‌شوند. در بخش ۳، شش روش مختلف برآورد به‌منظور تخمین پارامترهای مدل ارائه می‌شود. این روش‌ها در بخش ۴، در قالب یک مطالعه شبیه‌سازی بر اساس داده‌های تصادفی، مورد ارزیابی و مقایسه قرار می‌گیرند. در نهایت، در بخش ۵، از توزیع پیشنهادی برای مدل‌سازی داده‌های واقعی استفاده شده و پارامترهای آن با بهره‌گیری از روش‌های مذکور برآورد می‌شوند.

۲ توزیع لگ لوژستیک‌نمایی

توزیع لگ لوژستیک یک مدل پارامتری برای پیشامدهایی است که نرخ خطر در ابتدا افزایشی و سپس کاهش‌ی است. **روسایا و همکاران (۲۰۰۶)** ویژگی‌های توزیع لگ لوژستیک را بررسی نمودند و آنرا یک جایگزین مناسب برای توزیع‌های وایبل و لگ‌نرمال معرفی کردند. اگر X یک متغیر تصادفی پیوسته با تابع توزیع (۱) باشد، آنگاه توزیع پایه را لگ لوژستیک‌نمایی در نظر گرفته که به ترتیب دارای تابع توزیع و تابع چگالی به صورت

$$G(x) = (1 + (\frac{x}{b})^{-a})^{-c}, \quad g(x) = \frac{ca}{b} (\frac{x}{b})^{-a-1} (1 + (\frac{x}{b})^{-a})^{-c-1},$$

^۱Complementary Bell

است. بنابراین تابع توزیع و تابع چگالی احتمال توزیع لگ لوژستیک‌نمایی، CBell، به ترتیب به صورت

$$F(x) = \frac{\exp[e^{\lambda(1+(\frac{x}{b})^{-a})^{-c\theta}} - 1] - 1}{\exp(e^{\lambda} - 1) - 1}, \quad x > 0, \quad (2)$$

$$f(x) = \frac{1}{\exp(e^{\lambda} - 1) - 1} \times \frac{ac\theta}{b} \left(\frac{x}{b}\right)^{-a-1} \left(1 + \left(\frac{x}{b}\right)^{-a}\right)^{-c\theta-1} \\ \times e^{\lambda(1+(\frac{x}{b})^{-a})^{-c\theta}} \times \exp[e^{\lambda(1+(\frac{x}{b})^{-a})^{-c\theta}} - 1], \quad x > 0, \quad (3)$$

بیان می‌شود. از سوی دیگر، تابع بقا یک تابع غیر صعودی است که احتمال عدم وقوع رویداد مورد نظر را بیان می‌کند. به عبارت دیگر، این تابع نشان می‌دهد که متغیر تصادفی مربوطه تا زمان معین همچنان پابرجا باقی می‌ماند. تابع بقا برای توزیع لگ لوژستیک‌نمایی CBell به صورت

$$S(x) = \frac{\exp(e^{\lambda} - 1) - \exp[e^{\lambda(1+(\frac{x}{b})^{-a})^{-c\theta}} - 1]}{\exp(e^{\lambda} - 1) - 1}, \quad x > 0,$$

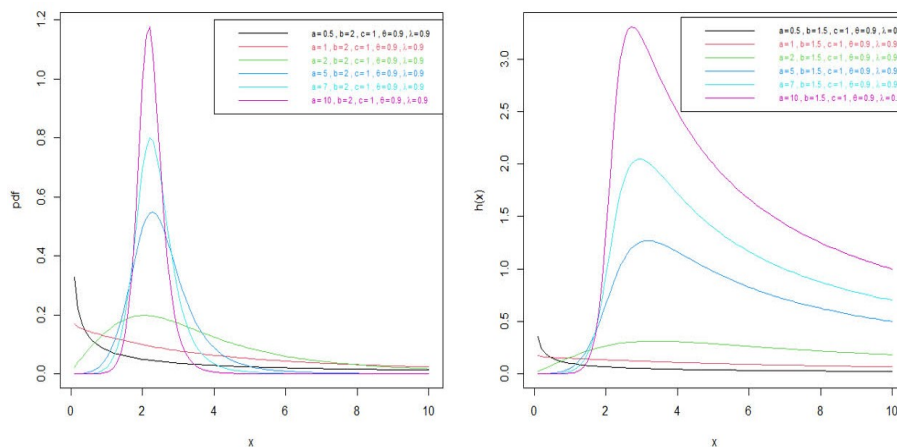
تعریف می‌شود. یکی دیگر از توابع مهم که معمولاً همراه با تابع بقا مورد استفاده قرار می‌گیرد، تابع نرخ خطر است. این تابع احتمال وقوع شکست (رویداد مورد نظر) را در لحظه‌ای مشخص، با فرض عدم وقوع آن تا آن لحظه، توصیف می‌کند. تابع نرخ شکست برای توزیع لگ لوژستیک‌نمایی CBell به صورت

$$h(x) = \frac{1}{\exp(e^{\lambda} - 1) - \exp[e^{\lambda(1+(\frac{x}{b})^{-a})^{-c\theta}} - 1]} \\ \times \frac{ac\theta}{b} \left(\frac{x}{b}\right)^{-a-1} \left(1 + \left(\frac{x}{b}\right)^{-a}\right)^{-c\theta-1} \times e^{\lambda(1+(\frac{x}{b})^{-a})^{-c\theta}} \\ \times \exp[e^{\lambda(1+(\frac{x}{b})^{-a})^{-c\theta}} - 1], \quad x > 0,$$

تعریف می‌گردد. شکل؟؟ تاثیر تغییر پارامترهای مدل پیشنهادی را بر شکل تابع چگالی احتمال و تابع نرخ خطر نشان می‌دهد. همانطور که مشاهده می‌شود، تابع چگالی احتمال می‌تواند J -معکوس، زنگوله‌ای شکل، افزایشی-کاهشی و چوله باشد. هم‌چنین تابع نرخ خطر می‌تواند کاهشی، زنگوله‌ای شکل، افزایشی-کاهشی باشد. نمایش خطی توابع خانواده توزیع CBell از اهمیت ویژه‌ای برخوردارند، زیرا به کمک آن‌ها می‌توان به مجموعه‌ای از ویژگی‌های ریاضی و ساختاری این خانواده توزیع دست یافت. قضیه زیر نمایش خطی این خانواده را بیان می‌کند.

قضیه ۱. نمایش خطی تابع چگالی و تابع توزیع خانواده توزیعهای CBell-G به صورت

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} w_{\nu} h_{\theta(\nu+1)}(x), \quad F(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} w_{\nu} G^{\theta(\nu+1)}(x),$$



شکل ۱. تاثیر تغییر پارامترها بر شکل تابع چگالی و تابع نرخ خطر لگ لوژیستیک نمایی CBBell

هستند، که در آن $h_{\theta(\nu+1)}(x) = \theta(\nu+1)g(x)G^{\theta(\nu+1)-1}(x)$ و

$$w_{\nu} = \frac{\lambda^{\nu+1}(\nu+1)^{-1}}{[\exp(e^{\lambda}-1)-1]\nu!} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{r=0}^k \frac{(-1)^{r+k}}{k!} \binom{k}{r} (r+1)^{\nu}.$$

برهان: به منظور ارائه نمایش خطی تابع چگالی و تابع توزیع لازم است برخی فرمول‌های کلی مورد بازبینی قرار گیرند. در این راستا، سری توانی تابع نمایی به صورت

$$\exp(-cx^d) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m c^m x^{md}}{m!}, \forall c, d, x \in \mathbb{R},$$

بیان می‌شود. با توجه به رابطه فوق و با بهره‌گیری از بسط دوجمله‌ای معادله به صورت

$$\exp(e^{\lambda G^{\theta}(x)} - 1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{r=0}^k (-1)^{r+k} \binom{k}{r} e^{r\lambda G^{\theta}(x)},$$

بدست می‌آید. بنابراین

$$f(x) = \frac{\theta \lambda g(x) G^{\theta-1}(x)}{\exp(e^{\lambda} - 1) - 1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{r=0}^k (-1)^{r+k} \binom{k}{r} e^{(r+1)\lambda G^{\theta}(x)}.$$

۳۳۰ توزیع لگ لوژستیک‌نمایی توسعه یافته

با به کار بردن دوباره سری توانی برای $e^{(r+1)\lambda G^\theta(X)}$ و با در نظر گرفتن

$$\begin{aligned} h_{\theta(\nu+1)}(x) &= \theta(\nu+1)g(x)G^{\theta(\nu+1)-1}(x), \\ w_\nu &= \frac{\lambda^{\nu+1}(\nu+1)^{-1}}{[\exp(e^\lambda-1)-1]\nu!} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{r=0}^k \frac{(-1)^{r+k}}{k!} \binom{k}{r} (r+1)^\nu, \end{aligned}$$

تابع چگالی به فرم $f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} w_\nu h_{\theta(\nu+1)}(x)$ حاصل می‌شود. هم‌چنین تابع توزیع خانواده توزیع‌های CBell-G با $F(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} w_\nu G^{\theta(\nu+1)}(x)$ برابر است.

لم ۱. نمایش خطی تابع چگالی توزیع لگ لوژستیک‌نمایی CBell به صورت

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} w_\nu g(x; a, b, c\theta(\nu+1)),$$

است، که در آن $g(x; a, b, c\theta(\nu+1))$ تابع چگالی توزیع لگ لوژستیک است.

برهان: قرار دادن تابع چگالی و تابع توزیع تجمعی توزیع لگ لوژستیک‌نمایی در قضیه ۱، منجر به ارائه کامل اثبات آن می‌گردد.

بر اساس لم ۱ تابع چگالی احتمال توزیع لگ لوژستیک‌نمایی CBell را می‌توان به صورت ترکیب خطی عمومی بی‌نهایت از توابع چگالی توزیع لگ لوژستیک‌نمایی بیان کرد.

لم ۲. گشتاور m ام توزیع لگ لوژستیک‌نمایی CBell دارای شکل خطی به صورت

$$E(X^m) = \sum_{\nu=0}^{\infty} w_\nu b^m \theta(\nu+1) cB\left(1 - \frac{m}{a}, c\theta(\nu+1) + \frac{m}{a}\right),$$

است، که در آن تابع بتا به صورت $B(p, q) = \int_0^\infty t^{p-1} (1+t)^{-p-q} dt$ است.

برهان: با در نظر گرفتن فرم خطی تابع چگالی توزیع لگ لوژستیک‌نمایی CBell گشتاور m ام به صورت $E(X^m) = \sum_{\nu=0}^{\infty} w_\nu E(Y^m)$ است که در آن Y متغیر تصادفی توزیع لگ لوژستیک‌نمایی است. بنابراین ابتدا گشتاور m ام این توزیع را محاسبه می‌کنیم.

$$E(Y^m) = \int_0^\infty b^m \theta(\nu+1) c t^{-\frac{m}{a}} (1+t)^{-c\theta(\nu+1)-1} dt.$$

با توجه به شکل تابع بتا که به صورت $B(p, q) = \int_0^\infty t^{p-1} (1+t)^{-p-q} dt$ است و با در نظر گرفتن $p =$

۱، $-\frac{m}{a} + 1$ ، $p + q = c\theta(\nu + 1) + 1$ خواهیم داشت

$$E(X^m) = \sum_{\nu=0}^{\infty} w_{\nu} b^m \theta(\nu + 1) cB\left(1 - \frac{m}{a}, c\theta(\nu + 1) + \frac{m}{a}\right).$$

لم ۳. تابع مولد گشتاور توزیع لگ لوژستیک‌نمایی CBell به صورت $M(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m}{m!} E(X^m)$ است.

برهان: با استفاده از سری $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m}{m!} x^m = e^{tx}$ اثبات کامل می‌شود.

لم ۴. تابع چندک توزیع لگ لوژستیک‌نمایی CBell عبارت است از

$$x_p = b \left[\left[\frac{1}{\lambda} \log \left(\log(p(\exp(e^{\lambda} - 1) - 1) + 1) + 1 \right) \right]^{-\frac{1}{c\theta}} - 1 \right]^{-\frac{1}{a}}.$$

برهان: نتیجه با استفاده از رابطه (۲) حاصل می‌گردد.

۲.۱ آنتروپی

آنتروپی یک متغیر تصادفی X ، به‌عنوان معیاری برای سنجش میزان بی‌نظمی یا عدم قطعیت در توزیع احتمال آن شناخته می‌شود و در واقع بیانگر مقدار اطلاعات مورد انتظار از یک مشاهده از آن توزیع است. هرچه مقدار آنتروپی بیشتر باشد، میزان تصادفی بودن یا عدم قطعیت نیز افزایش می‌یابد. آنتروپی مفهومی بنیادین در حوزه‌های مختلفی از جمله مهندسی، فیزیک، و نظریه احتمال به‌شمار می‌رود و تعاریف آن ممکن است بسته به زمینه کاربرد، تفاوت‌هایی داشته باشد.

قضیه ۲. آنتروپی رنی و تیسالیس توزیع لگ‌لوژستیک‌نمایی CBell به صورت

$$R_r(X) = \frac{1}{1-r} \log \left[\sum_{\nu=0}^{\infty} w_{\nu,r} z_{\nu,r} B\left(r + \frac{r-1}{a}, c\theta(r+\nu) - \frac{r-1}{a}\right) \right],$$

$$T_r(X) = \frac{1}{1-r} \left[\sum_{\nu=0}^{\infty} w_{\nu,r} z_{\nu,r} B\left(r + \frac{r-1}{a}, c(\theta(r+\nu)) - \frac{r-1}{a}\right) \right] - 1,$$

بیان می‌شود، که در آن $z_{\nu,r} = \theta^r c^r (\nu + r) \left(\frac{a}{b}\right)^{(r-1)}$ و

$$w_{\nu,r} = \frac{\lambda^{\nu+r} (\nu + r)^{-1}}{[\exp(e^{\lambda} - 1) - 1]^r \nu!} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k \frac{(-1)^{k+j} r^k}{k!} (j+r)^{\nu} \binom{k}{j}.$$

۳۳۲ توزیع لگ لوژستیک‌نمایی توسعه یافته

برهان: مشابه قضیه ۱، با استفاده از سری توانی و بسط دوجمله‌ای برای تابع $f^r(x)$ در چارچوب توزیع‌های خانواده CBell-G داریم $f^r(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} w_{\nu,r} h_{\theta(\nu+r),r}(x)$ ، که در آن

$$h_{\theta(\nu+r),r}(x) = \theta^r(\nu+r)g^r(x)G(x)^{\theta(\nu+r)-r},$$

$$w_{\nu,r} = \frac{\lambda^{\nu+r}(\nu+r)^{-1}}{[\exp(e^{\lambda}-1)-1]^r \nu!} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k \frac{(-1)^{k+j} r^k}{k!} (j+r)^{\nu} \binom{k}{j}.$$

برای محاسبه آنتروپی رنی، انتگرال $f^r(x)$ را برای توزیع لگ لوژستیک‌نمایی CBell محاسبه می‌کنیم

$$\int_0^{\infty} f^r(x) dx \sum_{\nu=0}^{\infty} w_{\nu,r} z_{\nu,r} B\left(r + \frac{r-1}{a}, c(\theta(r+\nu)) - \frac{r-1}{a}\right).$$

در نتیجه، آنتروپی رنی به فرم

$$R_r(X) = \frac{1}{1-r} \log \left[\sum_{\nu=0}^{\infty} w_{\nu,r} z_{\nu,r} B\left(r + \frac{r-1}{a}, c(\theta(r+\nu)) - \frac{r-1}{a}\right) \right],$$

حاصل می‌شود. آنتروپی تساليس نیز به راحتی ثابت می‌شود.

قضیه ۳. آنتروپی شانون برای توزیع لگ لوژستیک‌نمایی CBell عبارت است از

$$S_H(X) = -\log \theta - \log \lambda + 1 + \log [\exp(e^{\lambda}-1)-1] - \log\left(\frac{ac}{b}\right)$$

$$+ \frac{a+1}{a} \sum_{\nu=0}^{\infty} w_{\nu} \psi(c\theta(\nu+1)) + \frac{c+1}{c} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{w_{\nu}}{\theta(\nu+1)} - \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(\theta-1)w_{\nu}}{\theta(\nu+1)}$$

$$- \lambda \sum_{\nu=0}^{\infty} w_{\nu} \frac{\nu+1}{\nu+2} - \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} w_{\nu} \frac{\lambda^k}{k!} \cdot \frac{\nu+1}{(k+\nu+1)},$$

برهان: برای اثبات آنتروپی شانون داریم

$$S_H(X) = - \int_0^{\infty} f(x) \log f(x) dx$$

$$= C - \int_0^{\infty} f(x) \log(g(x)) dx - (\theta-1) \int_0^{\infty} f(x) \log(G(x)) dx$$

$$- \lambda \int_0^{\infty} f(x) G(x)^{\theta} dx - \int_0^{\infty} f(x) e^{\lambda G(x)^{\theta}} dx,$$

$$= C + I + II + III + IV,$$

که در آن $C = -\log \theta - \log \lambda + 1 + \log [\exp(e^\lambda - 1) - 1]$. در ادامه هر یک از انتگرال‌های فوق را به صورت

$$\begin{aligned} I &= -\log\left(\frac{ac}{b}\right) + (a+1) \int_0^\infty f(x) \log\left(\frac{x}{b}\right) dx + (c+1) \int_0^\infty f(x) \log\left(1 + \left(\frac{x}{b}\right)^{-a}\right) dx, \\ &= -\log\left(\frac{ac}{b}\right) + (a+1)I_1 + (c+1)I_2, \end{aligned}$$

بدست می‌آوریم. برای محاسبه انتگرال I_1 با تغییر متغیر $t = \left(\frac{x}{b}\right)^{-a}$ و استفاده از رابطه شناخته‌شده در [گراشتاین و همکاران \(۲۰۰۷\)](#) داریم

$$I_1 = \sum_{\nu=0}^{\infty} w_\nu \frac{1}{a} \psi(c\theta(\nu+1)) \quad (4)$$

که در آن $\psi(\cdot)$ تابع دی‌گاما است. برای محاسبه انتگرال I_2 به صورت مشابه با استفاده از تغییر متغیر $t = \left(\frac{x}{b}\right)^{-a}$ و با استفاده از رابطه

$$\int_0^\infty \log(1+t)(1+t)^{-\beta} dt = \frac{1}{(\beta-1)^2},$$

در [گراشتاین و همکاران \(۲۰۰۷\)](#) (برای $\beta > 1$) و قرار دادن $1 + c\theta(\nu+1)$ به جای β ، نتیجه

$$I_2 = \sum_{\nu=0}^{\infty} w_\nu c\theta(\nu+1) \cdot \frac{1}{(c\theta(\nu+1))^2} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{w_\nu}{c\theta(\nu+1)}, \quad (5)$$

حاصل می‌شود. انتگرال II مشابه انتگرال I_2 به فرم

$$II = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{-(\theta-1)w_\nu}{\theta(\nu+1)}, \quad (6)$$

حاصل می‌شود. انتگرال III با استفاده از تغییر متغیر $u = G(x)$ به سادگی حاصل می‌گردد

$$III = -\lambda \sum_{\nu=0}^{\infty} w_\nu \frac{\nu+1}{\nu+2}. \quad (7)$$

انتگرال IV با تغییر متغیر $t = \left(\frac{x}{b}\right)^{-a}$ به صورت

$$IV = c\theta(\nu+1) \int_0^\infty \exp(\lambda(1+t)^{-c\theta})(1+t)^{-c\theta(\nu+1)-1} dt,$$

۳۳۴ توزیع لگ لوژستیک‌نمایی توسعه یافته

به دست می‌آید. سپس با استفاده از سری مک لورن برای تابع نمایی و جایگذاری این بسط در انتگرال و جابجایی ترتیب انتگرال و جمع، خواهیم داشت

$$IV = \sum_{\nu=0}^{\infty} w_{\nu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \cdot \frac{\nu+1}{(k+\nu+1)}. \quad (8)$$

حال با استفاده از روابط (۴) تا (۸) آنتروپی شانون به صورت زیر به دست می‌آید.

$$\begin{aligned} S_H(X) &= -\log \theta - \log \lambda + 1 + \log [\exp(e^{\lambda} - 1) - 1] + I + II + III + IV \\ &= -\log \theta - \log \lambda + 1 + \log [\exp(e^{\lambda} - 1) - 1] - \log\left(\frac{ac}{b}\right) \\ &+ \frac{a+1}{a} \sum_{\nu=0}^{\infty} w_{\nu} \psi(c\theta(\nu+1)) + \frac{c+1}{c} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{w_{\nu}}{\theta(\nu+1)} - \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(\theta-1)w_{\nu}}{\theta(\nu+1)} \\ &- \lambda \sum_{\nu=0}^{\infty} w_{\nu} \frac{\nu+1}{\nu+2} - \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} w_{\nu} \frac{\lambda^k}{k!} \cdot \frac{\nu+1}{(k+\nu+1)}, \end{aligned}$$

۲.۲ منحنی‌های نابرابری

در تحلیل‌های آماری و اقتصادی، منحنی‌های نابرابری به‌عنوان ابزارهایی مؤثر برای سنجش توزیع درآمد، ثروت، یا سایر منابع در میان جمعیت مورد استفاده قرار می‌گیرند. این منحنی‌ها به‌ویژه در مطالعات مربوط به عدالت اجتماعی، بیمه، اقتصاد سلامت، و ارزیابی ریسک کاربرد فراوان دارند. از مهم‌ترین منحنی‌های نابرابری می‌توان به منحنی‌های لورنتس، بن‌فرونی و زنگا اشاره کرد. هر یک از این منحنی‌ها ساختار خاصی برای تحلیل سهم گروه‌های مختلف از کل منابع دارند و از دیدگاه‌های متفاوتی به مسئله نابرابری می‌پردازند. در این پژوهش سه منحنی نابرابری پرکاربرد لورنتس، بن‌فرونی و زنگا مورد استفاده قرار می‌گیرند.

لم ۵. منحنی لورنتس توزیع لگ لوژستیک‌نمایی CBell عبارت است از

$$L(p) = \frac{1}{\mu} \sum_{\nu=0}^{\infty} w_{\nu} \theta(\nu+1) c b^{a+3} \times B\left(1 + \left(\frac{x_p}{b}\right)^{-a}\right)^{-1}, \frac{1}{a} + c\theta(\nu+1), 1 - \frac{1}{a}\right),$$

برهان: منحنی لورنتس توزیع لگ لوژستیک‌نمایی CBell به صورت

$$L(p) = \frac{1}{\mu} \sum_{\nu=0}^{\infty} w_{\nu} \theta(\nu+1) \int_0^{x_p} x g(x) G^{\theta(\nu+1)-1} dx = \frac{1}{\mu} \sum_{\nu=0}^{\infty} w_{\nu} I,$$

بدست می‌آید. حال میانگین مقطوعی از متغیر تصادفی X تا نقطه x_p را با استفاده از تابع چگالی توزیع لگ لوژستیک‌نمایی CBell محاسبه می‌کنیم. با اعمال تغییر متغیر $t = (\frac{x}{b})^{-a}$ انتگرال اولیه به فرم

$$I = c\theta(\nu + 1)b \int_{t_p}^{\infty} t^{-\frac{1}{a}} (1+t)^{-c\theta(\nu+1)-1} dt,$$

تبدیل می‌شود، که در آن $t_p = (\frac{x_p}{b})^{-a}$. با تغییر متغیر $u = \frac{1}{1+t}$ ، انتگرال فوق به فرم تابع بتا ناقص

$$I = c\theta(\nu + 1)b \cdot B(u, c\theta(\nu + 1) + \frac{1}{a}, 1 - \frac{1}{a}),$$

تبدیل می‌شود، که در آن $u = [1 + (\frac{x_p}{b})^{-a}]^{-1}$. بنابراین اثبات کامل است.

منحنی‌های بن‌فرونی و زنگا نیز بر اساس منحنی لورنتس به صورت زیر به دست می‌آیند.

$$B(p) = \frac{L(p)}{p} \quad Z(p) = \frac{p - L(p)}{p(1 - L(p))},$$

۲.۳ اندازه‌های بیمه

در این بخش برخی معیارهای مهم ریسک برای مدل پیشنهادی مغرفی می‌شود.

۱. ارزش در معرض خطر: ارزش در معرض خطر (VaR) به عنوان ارزش در معرض خطر چندکی شناخته می‌شود. VaR متغیر تصادفی X چندک p تابع توزیع تجمعی متغیر تصادفی X است. اگر X یک متغیر تصادفی از توزیع لگ لوژستیک‌نمایی CBell باشد، آنگاه

$$VaR = x_p = b \left[\left[\frac{1}{\lambda} \log \left(\log(p(\exp(e^\lambda - 1) - 1) + 1) + 1 \right) \right]^{-\frac{1}{c\theta}} - 1 \right]^{-\frac{1}{a}}.$$

۲. ارزش در معرض خطر دمی: ارزش در معرض خطر دمی متغیر تصادفی لگ لوژستیک‌نمایی CBell مشابه اثبات لم ۵ به صورت زیر به دست می‌آید.

$$TVaR = \frac{1}{1-q} \int_{x_q}^{\infty} x f(x) dx = \frac{c\theta(\nu + 1)b}{1-q} B\left(\left(\frac{x_q}{b}\right)^{-a}, 1 - \frac{1}{a}, c\theta(\nu + 1) + \frac{1}{a}\right),$$

۳. اندازه واریانس دمی: بیمه واریانس دمی یکی از مهمترین اندازه‌ها و به صورت زیر است.

$$TV(X) = E(X^2|X > x_q) - (TVaR)^2 \\ = \frac{c\theta(\nu+1)b}{1-q} B\left(\left(\frac{x_q}{b}\right)^{-a}, 1 - \frac{2}{a}, c\theta(\nu+1) + \frac{2}{a}\right) - \left[\frac{1}{1-q} \int_{x_q}^{\infty} xf(x)dx\right]^2.$$

۴. حق بیمه واریانس دمی: حق بیمه واریانس دمی اندازه دیگری است که نقش اساسی در علم بیمه بازی می‌کند. متغیر تصادفی لگ لوژستیک‌نمایی CBell از رابطه $TVP(\lambda) = TVaR + \lambda TV$ به دست می‌آید، که در آن $0 < \lambda < 1$.

۳ روش‌های برآورد

در این بخش، شش روش برای برآورد پارامترهای ناشناخته توزیع لگ لوژستیک‌نمایی CBell معرفی شده است. این روش‌ها عبارت‌اند از: برآورد ماکسیمم درست‌نمایی، برآورد کمترین مربعات، برآورد کمترین مربعات وزنی، برآورد به روش اندرسون-دارلینگ، برآورد به روش کرامر-فون میزس، و برآورد بیشینه حاصل‌ضرب فاصله‌ها. مطالعات متعددی پیرامون برآورد پارامترهای مدل با استفاده از روش‌های کلاسیک انجام شده است. برای نمونه می‌توان به منابع [المفلح و همکاران \(۲۰۲۰\)](#)، [البابین و همکاران \(۲۰۲۱\)](#) و [افی و همکاران \(۲۰۲۰\)](#) اشاره کرد.

۱. روش ماکسیمم درست‌نمایی: برای این منظور از لگاریتم تابع درست‌نمایی نسبت به هریک از پارامترها مشتق گرفته و با برابر صفر قراردادن آن‌ها برآورد پارامترها را به دست می‌آوریم.

۲. روش کمترین مربعات: اگر $x_{1:n}, x_{2:n}, \dots, x_{n:n}$ آماره‌های ترتیبی از توزیع لگ لوژستیک‌نمایی CBell باشند، برآورد پارامترها با مینیمم سازی معادله $OLS = \sum_{i=1}^n \left[F(x_i) - \frac{i}{n+1}\right]^2$ حاصل می‌شود. همچنین می‌توان مقادیر برآوردشده پارامترها را از طریق حل معادله غیرخطی

$$\sum_{i=1}^n \left[\frac{\exp[e^{\lambda(1+(\frac{x_{i:n}}{b})^{-a})^{-c\theta}} - 1] - 1}{\exp(e^{\lambda} - 1) - 1} - \frac{i}{n+1} \right] \phi_s(x_{i:n}) = 0,$$

به دست آورد، که در آن

$$\phi_1(x) = \frac{\partial F}{\partial a} = \frac{1}{\exp(e^{\lambda} - 1) - 1} e^{\lambda(1+(\frac{x}{b})^{-a})^{-c\theta}} \exp[e^{\lambda(1+(\frac{x}{b})^{-a})^{-c\theta}} - 1] \\ \times \lambda(-c\theta)(-1) \ln(\frac{x}{b}) [\frac{x}{b}]^{-a} (1 + (\frac{x}{b})^{-a})^{-c\theta-1}, \quad (9)$$

$$\begin{aligned}\phi_{\mathfrak{r}}(x) &= \frac{\partial F}{\partial b} = \frac{1}{\exp(e^\lambda - 1) - 1} e^{\lambda(1+(\frac{x}{b})^{-a})^{-c\theta}} \exp[e^{\lambda(1+(\frac{x}{b})^{-a})^{-c\theta}} - 1] \\ &\times \lambda(-a)(-\frac{x}{b^{\mathfrak{r}}})(\frac{x}{b})^{-a-1}(-c\theta)[\frac{x}{b}]^{-a}(1+(\frac{x}{b})^{-a})^{-c\theta-1},\end{aligned}\quad (10)$$

$$\begin{aligned}\phi_{\mathfrak{r}}(x) &= \frac{\partial F}{\partial c} = \frac{1}{\exp(e^\lambda - 1) - 1} e^{\lambda(1+(\frac{x}{b})^{-a})^{-c\theta}} \exp[e^{\lambda(1+(\frac{x}{b})^{-a})^{-c\theta}} - 1] \\ &\times \lambda(-\theta) \ln(1+(\frac{x}{b})^{-a})(1+(\frac{x}{b})^{-a})^{-c\theta-1},\end{aligned}\quad (11)$$

$$\begin{aligned}\phi_{\mathfrak{r}}(x) &= \frac{\partial F}{\partial \theta} = \frac{1}{\exp(e^\lambda - 1) - 1} e^{\lambda(1+(\frac{x}{b})^{-a})^{-c\theta}} \exp[e^{\lambda(1+(\frac{x}{b})^{-a})^{-c\theta}} - 1] \\ &\times \lambda(-c) \ln(1+(\frac{x}{b})^{-a})(1+(\frac{x}{b})^{-a})^{-c\theta},\end{aligned}\quad (12)$$

$$\begin{aligned}\phi_{\delta}(x) &= \frac{\partial F}{\partial \lambda} = \frac{1}{(\exp(e^\lambda - 1) - 1)^{\mathfrak{r}}} e^{\lambda(1+(\frac{x}{b})^{-a})^{-c\theta}} \exp[e^{\lambda(1+(\frac{x}{b})^{-a})^{-c\theta}} - 1] \\ &\times (1+(\frac{x}{b})^{-a})^{-c\theta} (\exp(e^\lambda - 1) - 1) - \exp(e^\lambda - 1) \cdot \lambda e^\lambda \\ &\times (\exp[e^{\lambda(1+(\frac{x}{b})^{-a})^{-c\theta}} - 1] - 1).\end{aligned}\quad (13)$$

۳. روش کمترین مربعات وزنی: اگر $x_{1:n}, \dots, x_{n:n}$ آماره‌های ترتیبی از توزیع لگ لوژستیک‌نمایی CBell باشند، در این روش، پارامترهای مدل از طریق حل مسئله مینیم‌سازی معادله

$$WLS = \sum_{i=1}^n \frac{(n+1)^{\mathfrak{r}}(n+2)}{i(n-i+1)} \left[F(x_i) - \frac{i}{n+1} \right]^{\mathfrak{r}},$$

برآورد می‌شوند. افزون بر این، مقادیر برآوردی پارامترها را می‌توان با حل معادله غیرخطی

$$\sum_{i=1}^n \frac{(n+1)^{\mathfrak{r}}(n+2)}{i(n-i+1)} \left[\frac{\exp[e^{\lambda(1+(\frac{x_{i:n}}{b})^{-a})^{-c\theta}} - 1]}{\exp(e^\lambda - 1) - 1} - \frac{i}{n+1} \right] \cdot \phi_s(x_{i:n}) = 0,$$

به‌دست آورد، که در آن $\phi_s(x)$ برای $s = 1, \dots, 5$ روابط (۹) تا (۱۳) هستند.

۴. روش برآورد اندرسون دارلینگ: اگر $x_{1:n}, \dots, x_{n:n}$ آماره‌های ترتیبی از توزیع لگ لوژستیک‌نمایی CBell

باشند، آنگاه ADE پارامترها با مینیم‌سازی

$$A = -n - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\Psi i - 1) [\log F(x_i) - \log S(x_i)],$$

به دست می‌آید. بنابراین پارامترهای برآورد شده از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$\sum_{i=1}^n (\Psi i - 1) \left[\frac{\phi_s(x_{i:n})}{F(x_{i:n})} - \frac{\phi_s(x_{n+1-i:n})}{S(x_{n+1-i:n})} \right] = 0,$$

۵. روش برآورد کرامر فون-میزس: فرض کنید $x_{1:n}, \dots, x_{n:n}$ آماره‌های ترتیبی از توزیع لگ لوژستیک $CBell$ باشند، در این صورت برآورد کرامر فون-میزس با مینیم کردن عبارت

$$CVM = \frac{1}{12n} + \sum_{i=1}^n \left[F(x_i) - \frac{\Psi i - 1}{\Psi n} \right]^2,$$

حاصل می‌گردد. همچنین، مقادیر پارامترهای برآوردی از طریق حل معادله غیرخطی $\sum_{i=1}^n \left[F(x_i) - \frac{\Psi i - 1}{\Psi n} \right] \phi_s(x_{i:n}) = 0$ ، قابل محاسبه هستند.

۶. روش برآورد بیشینه حاصلضرب فاصله‌ها: این روش به‌عنوان جایگزینی برای روش ماکسیم درست‌نمایی جهت برآورد پارامترهای مدل‌های پیوسته تک‌متغیره به‌کار گرفته می‌شود. فاصله‌های یکنواخت حاصل از یک نمونه تصادفی به اندازه n به‌صورت $D_i = F(x_i) - F(x_{i-1})$ ، $i = 1, \dots, n+1$ ، تعریف می‌شوند، که در آن $F(x_0) = 0$ ، $F(x_{n+1}) = 1$ و مجموع فاصله‌ها برابر با واحد است. برآوردگرهای حاصل از این روش برای پارامترهای توزیع لگ لوژستیک‌نمایی از طریق بیشینه‌سازی تابع هدف

$$G = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} \log(D_i), \quad (14)$$

نسبت به پارامترهای توزیع $CBell$ به‌دست می‌آیند. همچنین، این برآوردگرها برای پارامترهای توزیع لگ لوژستیک‌نمایی $CBell$ را می‌توان با حل معادله غیرخطی زیر به‌دست آورد.

$$MPSE = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^n \frac{1}{D_i} [\phi_s(x_{i:n}) - \phi_s(x_{i-1:n})] = 0,$$

۴ مطالعه شبیه‌سازی

در این بخش، پارامترهای مدل جدید لگ لوژستیک‌نمایی CBell با استفاده از شش روش برآورد معرفی‌شده شامل MLE، OLSE، WLSE، ADE، CVME و MPSE برآورد می‌گردند. به‌منظور انجام این برآورد، مراحل زیر در قالب یک مطالعه شبیه‌سازی‌شده طی می‌شود

۱. مقداردهی اولیه پارامترها و تولید یک نمونه تصادفی با اندازه n از توزیع یکنواخت.
۲. تولید نمونه تصادفی با اندازه n از توزیع CBell با استفاده از تابع چندکی
۳. محاسبه اریبی و میانگین توان دوم خطا (MSE) برای هر یک از پارامترها.
۴. تکرار مراحل فوق به تعداد دفعات مشخص (۱۰۰۰۰ تکرار).
۵. محاسبه میانگین اریبی و میانگین توان دوم خطا بر اساس تکرارها.

فرآیند شبیه‌سازی با اجرای ۱۰۰۰۰ تکرار برای اندازه‌های نمونه $n = (۳۰, ۷۰, ۱۵۰, ۳۵۰)$ و سه مجموعه پارامتر به‌صورت $(۱, ۱/۵, ۰/۵, ۰/۷۵, ۰/۵, ۰/۸)$ ، $(۱/۵, ۱/۵, ۰/۷۵, ۰/۵, ۰/۸)$ و $(۱/۵, ۱, ۰/۷۵, ۰/۷۵, ۰/۷۵)$ انجام شده است، که به‌ترتیب نمایانگر مقادیر $(a, b, c, \theta, \lambda)$ هستند. مقادیر اریبی و میانگین توان دوم خطا برای هر یک از پارامترها در محیط نرم‌افزار R محاسبه و در جداول ۱ تا ۳ ارائه شده‌اند. سپس، بر اساس این مقادیر، عملکرد برآوردگرها با یکدیگر مقایسه و رتبه‌بندی شده است؛ به‌گونه‌ای که رتبه پایین‌تر نشان‌دهنده دقت و کارایی بالاتر روش مربوطه است. نتایج ارائه‌شده در جدول‌های ۱ تا ۳ نشان می‌دهند که روش MPSE (برآورد حداکثر حاصل‌ضرب فاصله‌ها) در اغلب سناریوهای بررسی‌شده، چه از نظر اریبی (Bias) و چه از نظر میانگین توان دوم خطا (MSE) نسبت به سایر روش‌ها عملکرد دقیق‌تری داشته است. به‌ویژه با افزایش اندازه نمونه از ۳۰ به ۳۵۰، کاهش محسوسی در مقادیر MSE و اریبی در تمامی روش‌ها مشاهده می‌شود که نشان‌دهنده سازگاری این روش‌ها، به‌ویژه MPSE است. همچنین، جدول ۴؟ مجموع رتبه‌های روش‌های مختلف بر اساس عملکرد آن‌ها در برآورد پارامترها در شرایط مختلف را نشان می‌دهد. بر اساس این رتبه‌بندی

- روش MPSE با مجموع رتبه ۲۷۶، به‌عنوان دقیق‌ترین و پایدارترین روش شناخته شد.
- روش‌های WLSE و OLSE به ترتیب با مجموع رتبه‌های ۳۵۲ و ۴۰۸ در جایگاه دوم و سوم قرار گرفتند.
- روش MLE با رتبه ۴۲۱ عملکرد متوسطی داشته و در جایگاه چهارم قرار دارد.
- روش‌های CVME و ADE با مجموع رتبه‌های ۴۷۰ و ۵۸۹، ضعیف‌ترین عملکرد را از خود نشان دادند.

این یافته‌ها نشان می‌دهند که روش MPSE نسبت به سایر روش‌های کلاسیک برتری قابل توجهی در برآورد پارامترهای مدل لگ لوژستیک‌نمایی CBell دارد و به‌عنوان روش پیشنهادی برای کاربردهای عملی این مدل معرفی می‌شود.

جدول ۱. محاسبه اریبی و میانگین توان دوم خطا برای $(a, b, c, \theta, \lambda) = (0.5, 0.75, 0.5, 1.5, 1)$

n	شاخص	برآورد پارامتر	MLE	OLS	WLS	ADE	CVM	MPSE
۳۰	Bias	$\hat{\lambda}$	۰.۳۷۶۱	۰.۱۳۴۶	۰.۱۱۷۶	۰.۴۸۸۶	۰.۱۳۸۰	۰.۰۷۰۳
		$\hat{\theta}$	۰.۷۱۴۶	۰.۳۸۴۱	۰.۴۰۰۹	۰.۴۴۱	۰.۳۷۹۸	۰.۰۵۷۰۴
		$\hat{a}$	۰.۴۴۱۴	۰.۶۰۱۴	۰.۵۸۷۵	۱.۱۰۴۵	۰.۶۰۵۵	۰.۴۲۹۱
		$\hat{c}$	۰.۳۳۳۶	۰.۳۶۱۱	۰.۳۴۷۲	۰.۹۱۸۴	۰.۳۶۵۰	۰.۱۷۹۳
		$\hat{b}$	۰.۷۱۷۱	۰.۶۲۵۸	۰.۶۱۲۱	۱.۲۳۴۷	۰.۶۲۹۰	۰.۴۲۹۵
	MSE	$\hat{\lambda}$	۰.۲۵۱۰	۰.۲۰۲۲	۰.۱۹۷۵	۰.۳۰۶۸	۰.۲۰۲۲	۰.۰۸۷۱
		$\hat{\theta}$	۰.۶۱۲۲	۰.۳۱۴۸	۰.۳۳۱۳	۰.۶۵۲	۰.۳۱۱۰	۰.۴۰۸۰
		$\hat{a}$	۰.۲۸۲۵	۰.۵۳۵۸	۰.۵۲۳۳	۱.۲۷۹۴	۰.۵۴۰۲	۰.۲۶۶۵
		$\hat{c}$	۰.۱۹۰۹	۰.۳۱۷۰	۰.۳۱۰۱	۰.۹۰۰۸	۰.۳۱۸۳	۰.۱۱۴۹
		$\hat{b}$	۰.۵۸۷۴	۰.۵۸۰۶	۰.۵۶۶۱	۱.۵۸۱۱	۰.۵۸۲۹	۰.۲۶۷۰
۷۰	Bias	$\hat{\lambda}$	۰.۱۸۱۷	۰.۱۲۷۳	۰.۱۱۰۶	۰.۵۶۵۱	۰.۱۲۸۹	۰.۰۴۰۵
		$\hat{\theta}$	۰.۶۱۵۸	۰.۳۷۲۹	۰.۳۸۹۴	۰.۹۰۰	۰.۳۷۱۲	۰.۰۵۴۰۶
		$\hat{a}$	۰.۴۴۷۶	۰.۶۲۶۹	۰.۶۱۰۲	۱.۱۵۴	۰.۶۲۸۵	۰.۴۵۹۴
		$\hat{c}$	۰.۲۵۹۲	۰.۳۷۷۰	۰.۳۶۰۲	۰.۸۹۱۵	۰.۳۷۸۷	۰.۲۰۹۶
		$\hat{b}$	۰.۵۶۸۶	۰.۶۲۶۹	۰.۶۱۰۱	۱.۱۶۸۰	۰.۶۲۸۶	۰.۴۵۹۶
	MSE	$\hat{\lambda}$	۰.۰۷۴۸	۰.۰۸۰۶	۰.۰۷۷۳	۰.۲۴۴۱	۰.۰۸۰۹	۰.۰۲۴۷
		$\hat{\theta}$	۰.۴۱۸۲	۰.۲۰۳۲	۰.۲۱۶۵	۰.۳۲۳	۰.۲۰۱۹	۰.۳۱۵۴
		$\hat{a}$	۰.۲۳۶۹	۰.۴۵۶۹	۰.۴۳۶۸	۱.۲۶۷۷	۰.۴۵۸۸	۰.۲۳۴۲
		$\hat{c}$	۰.۱۰۱۵	۰.۲۰۶۲	۰.۱۹۴۴	۰.۸۱۸۰	۰.۲۰۷۳	۰.۰۶۷۱
		$\hat{b}$	۰.۳۵۵۸	۰.۴۵۷۰	۰.۴۳۶۸	۱.۳۸۷۰	۰.۴۵۸۹	۰.۲۳۴۴
۱۵۰	Bias	$\hat{\lambda}$	۰.۱۰۵۴	۰.۱۳۱۵	۰.۱۱۴۳	۰.۵۹۵۶	۰.۱۳۲۳	۰.۰۱۵۷
		$\hat{\theta}$	۰.۵۷۵۸	۰.۳۶۸۳	۰.۳۸۵۵	۰.۱۰۷۳	۰.۳۶۷۵	۰.۰۱۵۷
		$\hat{a}$	۰.۴۵۳۲	۰.۶۳۱۶	۰.۶۱۴۴	۱.۱۱۹۲	۰.۶۳۲۴	۰.۴۸۴۳
		$\hat{c}$	۰.۲۳۱۹	۰.۳۸۱۷	۰.۳۶۴۴	۰.۸۸۱۱	۰.۳۸۲۴	۰.۲۳۴۳
		$\hat{b}$	۰.۵۱۰۱	۰.۶۳۱۷	۰.۶۱۴۵	۱.۱۴۳۲	۰.۶۳۲۵	۰.۴۸۴۴
	MSE	$\hat{\lambda}$	۰.۰۲۹۰	۰.۰۴۶۰	۰.۰۴۱۹	۰.۳۶۵۹	۰.۰۴۶۲	۰.۰۰۵۰
		$\hat{\theta}$	۰.۳۴۸۹	۰.۱۶۴۳	۰.۱۷۷۴	۰.۰۲۲۶	۰.۱۶۳۷	۰.۲۷۰۷
		$\hat{a}$	۰.۲۲۲۳	۰.۴۲۷۵	۰.۴۰۶۲	۱.۲۶۳۵	۰.۴۲۸۵	۰.۲۳۹۳
		$\hat{c}$	۰.۰۷۰۱	۰.۱۷۴۳	۰.۱۶۱۶	۰.۷۸۷۳	۰.۱۷۴۹	۰.۰۵۹۷
		$\hat{b}$	۰.۲۷۶۱	۰.۴۲۷۸	۰.۴۰۶۴	۱.۳۱۷۶	۰.۴۲۸۷	۰.۲۳۹۴
۳۵۰	Bias	$\hat{\lambda}$	۰.۰۷۱۲	۰.۱۳۰۹	۰.۱۱۳۳	۰.۶۰۸۸	۰.۱۳۱۲	۰.۰۰۱۵
		$\hat{\theta}$	۰.۵۵۸۸	۰.۳۶۹۱	۰.۳۸۶۷	۰.۱۱۳۵	۰.۳۶۸۷	۰.۰۰۱۵
		$\hat{a}$	۰.۴۵۳۶	۰.۶۳۰۹	۰.۶۱۳۳	۱.۱۱۸۸	۰.۶۳۱۲	۰.۴۹۸۵
		$\hat{c}$	۰.۲۱۵۸	۰.۳۸۰۹	۰.۳۶۳۲	۰.۸۷۴۰	۰.۳۸۱۲	۰.۲۴۸۵
		$\hat{b}$	۰.۴۷۸۰	۰.۶۳۰۸	۰.۶۱۳۲	۱.۱۲۹۱	۰.۶۳۱۲	۰.۴۹۸۵
	MSE	$\hat{\lambda}$	۰.۰۱۲۴	۰.۰۲۹۲	۰.۰۲۵۰	۰.۳۷۵۴	۰.۰۲۹۳	۰.۰۰۰۲
		$\hat{\theta}$	۰.۳۱۹۵	۰.۱۴۸۴	۰.۱۶۱۷	۰.۰۱۷۶	۰.۱۴۸۱	۰.۲۵۱۸
		$\hat{a}$	۰.۲۱۲۹	۰.۴۱۰۲	۰.۳۸۸۳	۱.۲۵۶۴	۰.۴۱۰۶	۰.۲۴۸۷
		$\hat{c}$	۰.۰۵۳۶	۰.۱۵۷۲	۰.۱۴۴۱	۰.۷۶۸۶	۰.۱۵۷۴	۰.۰۶۲۰
		$\hat{b}$	۰.۲۳۵۴	۰.۴۱۰۱	۰.۳۸۸۱	۱.۲۷۹۵	۰.۴۱۰۵	۰.۲۴۸۷

جدول ۲. محاسبه اریبی و میانگین توان دوم خطا برای $(a, b, c, \theta, \lambda) = (0.9, 0.5, 0.75, 1.5, 1.5)$

n	شاخص	برآورد پارامتر	MLE	OLS	WLS	ADE	CVM	MPSE
۳۰	Bias	$\hat{\lambda}$	-۰.۴۱۹۹	-۰.۱۸۷۶	-۰.۱۸۲۱	۰.۲۷۹	-۰.۱۸۴۰	-۰.۲۴۹۰
		$\hat{\theta}$	-۰.۲۸۹۴	-۰.۱۸۷۴	-۰.۱۸۵۲	۰.۷۱۳	-۰.۱۸۳۷	-۰.۲۴۹۲
		$\hat{a}$	۰.۴۲۱۰	۰.۴۱۲۱	۰.۴۱۱۷	۰.۷۲۱۹	۰.۴۱۵۴	۰.۳۵۰۶
		$\hat{c}$	۰.۹۲۰۹	۰.۸۱۱۱	۰.۸۰۸۹	۱.۱۷۸۳	۰.۸۱۴۱	۰.۷۵۰۴
		$\hat{b}$	۰.۷۶۴۱	۰.۵۶۰۳	۰.۵۵۵۹	۰.۹۹۰۲	۰.۵۶۲۷	۰.۵۰۰۵
	MSE	$\hat{\lambda}$	۰.۲۰۷۶	۰.۰۶۵۸	۰.۰۶۲۱	۰.۲۶۵	۰.۰۶۴۵	۰.۰۹۱۲
		$\hat{\theta}$	۰.۱۱۳۵	۰.۰۶۵۷	۰.۰۶۳۳	۰.۳۰۰	۰.۰۶۴۴	۰.۰۹۰۸
		$\hat{a}$	۰.۲۰۵۱	۰.۲۰۰۳	۰.۱۹۸۶	۰.۵۴۵۴	۰.۲۰۳۱	۰.۱۵۱۵
		$\hat{c}$	۰.۸۷۴۵	۰.۶۸۸۵	۰.۶۸۳۷	۱.۴۱۲۴	۰.۶۹۳۳	۰.۵۹۱۶
		$\hat{b}$	۰.۶۰۹۳	۰.۳۴۴۶	۰.۳۳۸۹	۱.۰۰۴۱	۰.۳۴۷۴	۰.۲۲۹۰
۷۰	Bias	$\hat{\lambda}$	-۰.۲۸۸۹	-۰.۱۸۸۲	-۰.۱۸۵۱	۰.۸۹۲	-۰.۱۸۶۸	-۰.۲۳۳۸
		$\hat{\theta}$	-۰.۲۳۷۴	-۰.۱۸۸۳	-۰.۱۸۶۱	۰.۱۱۰۰	-۰.۱۸۶۹	-۰.۲۳۳۷
		$\hat{a}$	۰.۴۱۰۸	۰.۴۱۱۷	۰.۴۱۳۱	۰.۷۳۲۲	۰.۴۱۳۲	۰.۲۶۶۲
		$\hat{c}$	۰.۸۵۶۴	۰.۸۱۱۷	۰.۸۱۲۳	۱.۱۵۵۶	۰.۸۱۳۱	۰.۶۶۶۲
		$\hat{b}$	۰.۶۵۰۱	۰.۵۶۱۸	۰.۵۶۱۸	۰.۹۳۰۴	۰.۵۶۳۱	۰.۴۱۶۳
	MSE	$\hat{\lambda}$	۰.۰۹۵۰	۰.۰۴۸۱	۰.۰۴۶۲	۰.۱۸۲	۰.۰۴۷۵	۰.۱۳۱۲
		$\hat{\theta}$	۰.۰۶۷۷	۰.۰۴۸۱	۰.۰۴۶۵	۰.۲۲۳	۰.۰۴۷۵	۰.۱۳۱۱
		$\hat{a}$	۰.۱۷۹۹	۰.۱۸۲۱	۰.۱۸۲۵	۰.۵۴۶۲	۰.۱۸۳۳	۰.۰۹۰۶
		$\hat{c}$	۰.۷۴۴۴	۰.۶۷۱۵	۰.۶۷۱۸	۱.۳۴۵۴	۰.۶۷۳۷	۰.۴۳۳۶
		$\hat{b}$	۰.۴۳۳۴	۰.۳۲۸۳	۰.۳۲۷۶	۰.۸۷۵۵	۰.۳۲۹۸	۰.۱۹۳۰
۱۵۰	Bias	$\hat{\lambda}$	-۰.۲۳۵۰	-۰.۱۸۵۶	-۰.۱۸۳۷	۰.۱۱۶۱	-۰.۱۸۴۹	-۰.۲۳۴۸
		$\hat{\theta}$	-۰.۲۱۱۶	-۰.۱۸۵۶	-۰.۱۸۳۹	۰.۱۲۶۴	-۰.۱۸۴۹	-۰.۲۳۴۸
		$\hat{a}$	۰.۴۱۰۹	۰.۴۱۴۴	۰.۴۱۶۰	۰.۷۳۷۰	۰.۴۱۵۱	۰.۱۶۵۲
		$\hat{c}$	۰.۸۳۲۸	۰.۸۱۴۳	۰.۸۱۵۷	۱.۱۴۷۶	۰.۸۱۵۱	۰.۵۶۵۲
		$\hat{b}$	۰.۶۰۴۲	۰.۵۶۴۴	۰.۵۶۵۵	۰.۹۰۸۶	۰.۵۶۵۱	۰.۳۱۵۲
	MSE	$\hat{\lambda}$	۰.۰۶۰۴	۰.۰۴۰۲	۰.۰۳۹۲	۰.۱۸۲	۰.۰۴۰۰	۰.۱۹۹۵
		$\hat{\theta}$	۰.۰۵۰۰	۰.۰۴۰۲	۰.۰۳۹۳	۰.۲۰۶	۰.۰۴۰۰	۰.۱۹۹۵
		$\hat{a}$	۰.۱۷۴۰	۰.۱۷۷۵	۰.۱۷۸۵	۰.۵۴۷۸	۰.۱۷۸۱	۰.۰۳۷۷
		$\hat{c}$	۰.۶۹۸۷	۰.۶۶۸۹	۰.۶۷۰۹	۱.۳۲۱۷	۰.۶۷۰۲	۰.۳۲۹۹
		$\hat{b}$	۰.۳۷۰۱	۰.۳۲۴۳	۰.۳۲۵۳	۰.۸۳۰۱	۰.۳۲۵۱	۰.۱۰۹۸
۳۵۰	Bias	$\hat{\lambda}$	-۰.۲۰۹۶	-۰.۱۸۵۲	-۰.۱۸۳۷	۰.۱۲۹۱	-۰.۱۸۴۹	-۰.۲۹۲۸
		$\hat{\theta}$	-۰.۱۹۹۷	-۰.۱۸۵۲	-۰.۱۸۳۷	۰.۱۳۳۷	-۰.۱۸۴۹	-۰.۲۹۲۸
		$\hat{a}$	۰.۴۰۹۹	۰.۴۱۴۸	۰.۴۱۶۳	۰.۷۳۸۳	۰.۴۱۵۲	۰.۱۰۷۲
		$\hat{c}$	۰.۸۱۹۵	۰.۸۱۴۸	۰.۸۱۶۲	۱.۱۴۲۸	۰.۸۱۵۱	۰.۵۰۷۲
		$\hat{b}$	۰.۵۷۹۰	۰.۵۶۴۸	۰.۵۶۶۱	۰.۸۹۷۴	۰.۵۶۵۱	۰.۲۵۷۲
	MSE	$\hat{\lambda}$	۰.۰۴۶۱	۰.۰۳۶۸	۰.۰۳۶۱	۰.۱۸۷	۰.۰۳۶۷	۰.۲۴۳۹
		$\hat{\theta}$	۰.۰۴۲۱	۰.۰۳۶۸	۰.۰۳۶۱	۰.۱۹۹	۰.۰۳۶۷	۰.۲۴۳۹
		$\hat{a}$	۰.۱۷۰۳	۰.۱۷۴۶	۰.۱۷۵۶	۰.۵۴۷۱	۰.۱۷۴۹	۰.۰۱۲۵
		$\hat{c}$	۰.۶۷۳۸	۰.۶۶۶۴	۰.۶۶۸۵	۱.۳۰۸۰	۰.۶۶۶۸	۰.۲۵۸۳
		$\hat{b}$	۰.۳۳۷۴	۰.۳۲۱۶	۰.۳۲۲۹	۰.۸۰۷۴	۰.۳۲۱۹	۰.۰۶۷۲

جدول ۳. محاسبه اریبی و میانگین توان دوم خطا برای $(a, b, c, \theta, \lambda) = (0.75, 0.75, 0.75, 1, 1.5)$							
n	شاخص	برآورد پارامتر	MLE	OLS	WLS	ADE	CVM
۳۰	$Bias$	$\hat{\lambda}$	۰.۳۴۶۳	۰.۲۳۲۵	۰.۳۲۲۳	۰.۲۰۵۵	۰.۱۹۷
		$\hat{\theta}$	۰.۲۸۷۰	۰.۴۷۶۴	۰.۴۶۶۴	۰.۷۴۸۶	۰.۴۸۰۲
		$\hat{a}$	۰.۶۵۸۱	۰.۷۲۵۷	۰.۷۱۴۹	۱.۰۴۸۷	۰.۷۲۹۵
		$\hat{c}$	۰.۷۶۹۵	۰.۷۲۵۹	۰.۷۱۵۲	۱.۰۶۳	۰.۷۲۹۵
	MSE	$\hat{b}$	۰.۸۷۴۳	۰.۷۲۶۶	۰.۷۱۶۶	۱.۱۶۹۵	۰.۷۲۹۹
		$\hat{\lambda}$	۰.۱۵۸۹	۰.۴۸۵	۰.۴۶۹	۰.۷۷۶	۰.۴۸۲
		$\hat{\theta}$	۰.۱۲۰۲	۰.۲۷۴۸	۰.۲۶۳۵	۰.۵۹۴۵	۰.۲۷۸۱
		$\hat{a}$	۰.۴۷۰۰	۰.۵۷۴۵	۰.۵۷۳	۱.۱۳۳۳	۰.۵۷۹۹
		$\hat{c}$	۰.۶۲۸۴	۰.۵۷۵۳	۰.۵۵۸۲	۱.۲۵۷۳	۰.۵۸۰۴
		$\hat{b}$	۰.۸۰۰۵	۰.۵۷۶۴	۰.۵۶۰۲	۱.۴۰۱۷	۰.۵۸۱۱
۷۰	$Bias$	$\hat{\lambda}$	۰.۲۰۳۱	۰.۲۳۷	۰.۳۴۱	۰.۲۶۶۸	۰.۲۲۰
		$\hat{\theta}$	۰.۳۴۹۲	۰.۴۷۶۳	۰.۴۶۵۶	۰.۷۸۷۷	۰.۴۷۷۹
		$\hat{a}$	۰.۶۴۹۹	۰.۷۲۶۳	۰.۷۱۵۴	۱.۰۵۹۸	۰.۷۲۷۹
		$\hat{c}$	۰.۶۹۹۱	۰.۷۲۶۳	۰.۷۱۵۵	۱.۰۸۳۱	۰.۷۲۸۰
	MSE	$\hat{b}$	۰.۷۴۶۶	۰.۷۲۶۳	۰.۷۱۵۷	۱.۱۰۷۴	۰.۷۲۸۰
		$\hat{\lambda}$	۰.۰۵۶۰	۰.۱۹۷	۰.۱۹۵	۰.۸۵۳	۰.۱۹۶
		$\hat{\theta}$	۰.۱۳۶۷	۰.۲۴۶۰	۰.۲۳۵۱	۰.۶۳۴۵	۰.۲۴۷۵
		$\hat{a}$	۰.۴۳۷۰	۰.۵۴۶۶	۰.۵۳۰۱	۱.۱۳۷۰	۰.۵۴۹۰
		$\hat{c}$	۰.۵۰۳۲	۰.۵۴۶۸	۰.۵۳۰۳	۱.۱۸۷۰	۰.۵۴۹۱
		$\hat{b}$	۰.۵۷۱۹	۰.۵۴۶۷	۰.۵۳۰۶	۱.۲۴۰۲	۰.۵۴۹۱
۱۵۰	$Bias$	$\hat{\lambda}$	۰.۱۴۹۲	۰.۲۳۸	۰.۳۴۸	۰.۲۹۱۱	۰.۲۳۱
		$\hat{\theta}$	۰.۳۷۴۴	۰.۴۷۶۳	۰.۴۶۵۲	۰.۸۰۱۳	۰.۴۷۷۱
		$\hat{a}$	۰.۶۴۸۰	۰.۷۲۶۳	۰.۷۱۵۱	۱.۰۶۱۸	۰.۷۲۷۱
		$\hat{c}$	۰.۶۷۱۲	۰.۷۲۶۳	۰.۷۱۵۲	۱.۰۷۲۴	۰.۷۲۷۱
	MSE	$\hat{b}$	۰.۶۹۴۰	۰.۷۲۶۳	۰.۷۱۵۲	۱.۰۸۳۳	۰.۷۲۷۰
		$\hat{\lambda}$	۰.۰۲۸۶	۰.۰۹۰	۰.۰۹۲	۰.۹۱۰	۰.۰۸۹
		$\hat{\theta}$	۰.۱۴۶۵	۰.۲۳۵۳	۰.۲۲۴۴	۰.۶۴۸۳	۰.۲۳۶۱
		$\hat{a}$	۰.۴۲۶۲	۰.۵۳۶۰	۰.۵۱۹۴	۱.۱۳۳۵	۰.۵۳۷۱
		$\hat{c}$	۰.۴۵۶۹	۰.۵۳۵۹	۰.۵۱۹۵	۱.۱۵۶۳	۰.۵۳۷۰
		$\hat{b}$	۰.۴۸۷۹	۰.۵۳۵۹	۰.۵۱۹۵	۱.۱۷۹۷	۰.۵۳۷۰
۳۵۰	$Bias$	$\hat{\lambda}$	۰.۱۲۲۳	۰.۲۴۳	۰.۳۵۲	۰.۳۰۳۴	۰.۲۳۹
		$\hat{\theta}$	۰.۳۸۷۷	۰.۴۷۶۱	۰.۴۶۴۸	۰.۸۰۸۰	۰.۴۷۶۵
		$\hat{a}$	۰.۶۴۷۷	۰.۷۲۶۱	۰.۷۱۴۸	۱.۰۶۲۵	۰.۷۲۶۵
		$\hat{c}$	۰.۶۵۷۷	۰.۷۲۶۰	۰.۷۱۴۸	۱.۰۶۷۰	۰.۷۲۶۳
	MSE	$\hat{b}$	۰.۶۶۷۶	۰.۷۲۶۰	۰.۷۱۴۸	۱.۰۷۱۶	۰.۷۲۶۴
		$\hat{\lambda}$	۰.۱۷۷	۰.۰۴۲	۰.۰۴۷	۰.۹۴۸	۰.۰۴۲
		$\hat{\theta}$	۰.۱۵۳۰	۰.۲۳۰۳	۰.۲۱۹۵	۰.۶۵۵۵	۰.۲۳۰۷
		$\hat{a}$	۰.۴۲۲۲	۰.۵۳۰۹	۰.۵۱۴۴	۱.۱۳۱۵	۰.۵۳۱۵
		$\hat{c}$	۰.۴۳۵۳	۰.۵۳۰۸	۰.۵۱۴۳	۱.۱۴۱۲	۰.۵۳۱۲
		$\hat{b}$	۰.۴۴۸۴	۰.۵۳۰۸	۰.۵۱۴۴	۱.۱۵۰۹	۰.۵۳۱۳

جدول ۴. مجموع رتبه‌ها برای برآورد پارامترهای مدل پیشنهادی

پارامترها	<i>n</i>	<i>MLE</i>	<i>OLS</i>	<i>WLS</i>	<i>ADE</i>	<i>CVME</i>	<i>MPSE</i>
$\lambda = 1$	۳۰	۴۱	۳۳	۳۰	۴۹	۳۸	۱۸
$\theta = 1.5$	۷۰	۳۰	۳۷	۳۱	۵۰	۴۳	۱۹
$a = 0.5$	۱۵۰	۲۵	۳۸	۳۲	۴۹	۴۳	۲۱
$b = 0.75$	۳۵۰	۲۲	۳۸	۳۲	۵۰	۴۴	۲۴
$c = 0.5$							
مجموع رتبه	۱۱۸	۱۴۶	۱۲۵	۱۲۵	۱۹۸	۱۶۸	۸۲
$\lambda = 1.5$	۳۰	۵۴	۳۴	۲۰	۴۰	۳۶	۲۶
$\theta = 1.5$	۷۰	۴۴	۳۱	۲۶	۴۰	۳۸	۳۰
$a = 0.9$	۱۵۰	۴۴	۳۰	۳۴	۴۱	۳۲	۳۰
$b = 0.5$	۳۵۰	۴۴	۳۰	۳۴	۴۰	۳۲	۳۰
$c = 0.75$							
مجموع رتبه	۱۸۶	۱۲۵	۱۱۴	۱۱۴	۱۶۱	۱۳۸	۱۱۶
$\lambda = 1.5$	۳۰	۳۸	۳۱	۲۶	۵۸	۳۹	۱۸
$\theta = 1$	۷۰	۳۱	۳۵	۲۷	۵۶	۴۱	۲۰
$a = 0.75$	۱۵۰	۲۴	۳۶	۳۰	۵۸	۴۲	۲۰
$b = 0.5$	۳۵۰	۲۴	۳۵	۳۰	۵۸	۴۲	۲۰
$c = 0.75$							
مجموع رتبه	۱۱۷	۱۳۷	۱۱۳	۱۱۳	۲۳۰	۱۶۴	۷۸
مجموع رتبه	۴۲۱	۴۰۸	۳۵۲	۳۵۲	۵۸۹	۴۷۰	۲۷۶
رتبه نهایی	۴	۳	۲	۲	۶	۵	۱

۵ کاربرد

در این بخش، به منظور بررسی قابلیت انعطاف‌پذیری و کارایی توزیع لگ لوژستیک‌نمایی CBell، دو مجموعه داده واقعی مورد تحلیل قرار گرفته‌اند. این داده‌ها مربوط به میزان خسارت‌های ناشی از ادعای بیکاری در ایالات متحده آمریکا، در بازه زمانی جولای ۲۰۰۸ تا آوریل ۲۰۱۳ بوده که توسط وزارت کار ایالات متحده گردآوری و گزارش شده‌اند. این داده‌ها در **فایومی و همکاران (۲۰۲۲)** نیز مورد استفاده قرار گرفته است. داده‌ها شامل ۲۱ متغیر مرتبط با شاخص‌های مختلف اقتصادی می‌باشند که در این مطالعه، متغیرهای نهم و دوازدهم انتخاب شده‌اند. هر یک از این متغیرها شامل ۵۸ مشاهده هستند که تحلیل آن‌ها به منظور برازش توزیع CBell انجام شده است. اطلاعات عددی مربوط به این دو مجموعه داده در جدول‌های ۵ و ۶ ارائه شده‌اند.

جدول ۵. مجموعه داده‌های اول

۱۱۵/۷	۹۲/۱	۸۵/۶	۸۴/۴	۵۴/۷	۴۹/۴	۵۵/۶	۴۸/۲	۴۸/۲
۸۰/۳	۸۴/۰	۷۰/۴	۷۴/۱	۹۶/۷	۸۶/۶	۱۰۴/۱	۸۷/۴	۹۲/۷
۵۹/۹	۷۸/۶	۶۵/۷	۷۹/۱	۶۶/۷	۷۴/۳	۱۰۴/۷	۸۶/۹	۸۶/۵
۵۸/۹	۷۰/۳	۶۳/۲	۷۲/۱	۷۵/۲	۸۹/۹	۶۶/۶	۷۲/۶	۵۹/۰
۶۵/۲	۶۸/۹	۸۴/۲	۶۰/۴	۵۵/۵	۶۲/۶	۵۵/۳	۷۲/۶	۵۹/۷
۶۹/۶	۵۶/۳	۶۵/۲	۵۴/۰	۶۰/۳	۷۱/۹	۵۶/۳	۵۶/۶	۷۰/۰
					۶۴/۹	۶۳/۵	۶۶/۰	۶۸/۸

آماره‌های توصیفی مربوط به این دو داده در جدول ۷ گزارش شده‌اند. نتایج نشان می‌دهد که داده‌های دوم

جدول ۶. مجموعه داده‌های دوم

۵۷	۳۲	۶۰	۵۲	۲۹	۵۰	۳۹	۳۳	۵۲
۶۸	۶۱	۵۳	۵۰	۳۶	۴۱	۶۴	۶۱	۶۴
۱۳۷	۷۰	۶۹	۵۹	۶۱	۵۷	۶۴	۵۰	۶۰
۹۰	۵۶	۶۳	۶۸	۱۰۹	۲۲۲	۹۰	۱۰۰	۱۷۰
۵۷	۵۴	۷۲	۷۵	۶۶	۱۳۳	۱۱۴	۹۵	۷۴
۸۰	۵۸	۸۰	۶۰	۴۴	۸۳	۶۹	۶۶	۵۲
					۷۳	۶۵	۵۲	۸۰

دارای پراکندگی بیشتری نسبت به داده‌های اول است، به‌طوری که مقدار ماکسیمم در داده‌های دوم (۲۲۲) به‌طور چشم‌گیری بیشتر از داده‌های اول (۱۱۵/۷۰) است. همچنین میانگین داده‌های دوم (۷۰/۶۷) اندکی کمتر از داده‌های اول (۷۱/۵۲) است، که نشان‌دهنده تأثیر داده‌های پرت در توزیع مقادیر داده‌های دوم است. به جهت بررسی بهتر توزیع

جدول ۷. آماره‌های توصیفی داده‌های مورد بررسی

داده‌های	تعداد	مینیم	چارک اول	میانه	میانگین	چارک سوم	ماکسیم
۱	۵۸	۴۸۲	۶۰	۶۹/۲۵	۷۱/۵۲	۸۳/۰۸	۱۱۵/۷۰
۲	۵۸	۲۹	۵۳/۲۵	۶۳/۵	۷۰/۶۷	۷۴/۷۵	۲۲۲

لگ لوژستیک‌نمایی CBell در این بخش از توزیع‌های لگ لوژستیک‌نمایی شده، (EXLLD) لگ لوژستیک توانی نمایی شده (APEXLLD)، لگ لوژستیک (LLD) و لگ لوژستیک توانی (APLLD) به عنوان توزیع‌های جایگزین استفاده شده است. جهت مطالعه بیشتر در مورد این توزیع‌ها می‌توان از تیما و همکاران (۲۰۲۱) استفاده کرد. توابع توزیع هریک از این توزیع‌ها در جدول ۸ آمده است. برآورد پارامترهای مدل لگ لوژستیک‌نمایی CBell و مدل‌های

جدول ۸. توابع توزیع توزیع‌های جایگزین

تابع توزیع	توزیع
$F(x) = (1 + (\frac{x}{b})^{-a})^{-c}$	EXLLD
$F(x) = \frac{\theta^{-(1+(\frac{x}{b})^{-a})^{-c}} - 1}{\theta - 1}$	APEXLLD
$F(x) = (1 + (\frac{x}{b})^{-a})^{-1}$	LLD
$F(x) = \frac{\theta^{-(1+(\frac{x}{b})^{-a})^{-1}} - 1}{\theta - 1}$	APLLD

جایگزین برای دو مجموعه داده در جدول ۹ آورده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، مقادیر برآورد شده برای پارامتر λ و a در توزیع لگ لوژستیک‌نمایی CBell داده‌های اول بیشتر از داده‌های دوم بوده و این می‌تواند نشانه‌ای از ساختار چگال‌تر توزیع در داده‌های اول باشد. برای ارزیابی کیفیت برازش مدل، آزمون‌های نیکویی برازش اندرسون-دارلینگ، کرامر-فون میزس و کولموگروف-اسمیرنوف برای توزیع پیشنهادی و توزیع‌های جایگزین اجرا شده و نتایج آن‌ها در جدول ۱۰ آمده‌اند. برای هر دو داده، مقدار آماره‌ها نسبتاً کوچک و سطوح معنی‌داری بالا هستند، به‌ویژه برای داده‌های اول که مقدار p برای آزمون کولموگروف-اسمیرنوف برابر ۰/۹۳۵ و برای آزمون اندرسون-دارلینگ، برابر ۰/۹۸۵۹ گزارش شده است. این نتایج دلالت بر برازش مناسب مدل به داده‌ها دارند. در فرآیند برازش مدل‌های آماری،

جدول ۹. برآورد پارامترهای داده‌های مورد بررسی

داده‌های	توزیع	$\hat{\lambda}$	$\hat{\theta}$	$\hat{a}$	$\hat{b}$	$\hat{c}$
۱	CBellEXLLD	۶/۱۲۲	۳/۶۲۹	۵/۳۵۸	۱۰/۶۹۰	۱/۵۷۸
	EXLLD			۶/۵۷۵	۵۴/۳۳۵	۳/۵۲۳
	APEXLLD		۷/۸۱۹	۶/۵۳۹	۳۰/۹۰۷	۵۹/۷۳۴
	LLD			۸/۵۵۸	۶۹/۵۷۱	
	APLLD	۱/۴۰۳		۶/۲۶۱	۴۳/۸۳	
۲	CBellEXLLD	۶/۵۲۷	۰/۹۰۶	۲/۵۹۳	۱/۴۲۰۵	۲/۷۴۵
	EXLLD			۴/۴۷۰	۵۵/۷۲۵	۱/۵۹۲
	APEXLLD		۴۶/۳۱۷	۳/۷۹۹	۲۱/۱۹۳	۱۲/۲۱۲
	LLD			۵/۱۱۰	۶۴/۰۴۹	
	APLLD	۴۴/۰۱۵		۴/۵۱۷	۴۵/۵۱۴	

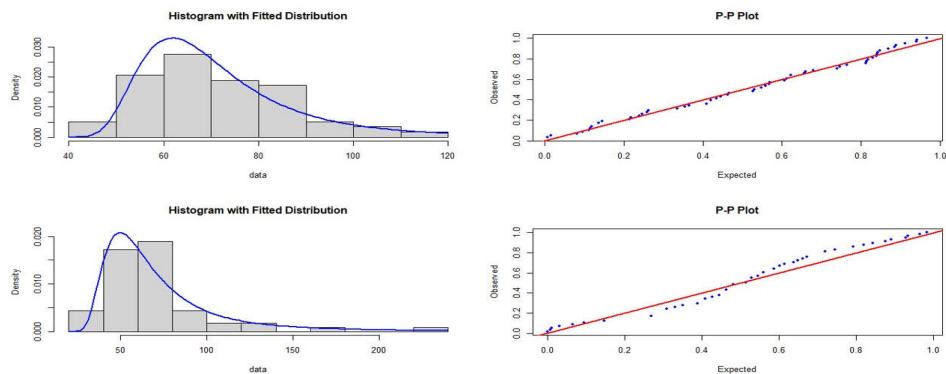
جدول ۱۰. آزمون‌های نیکویی برازش برای داده‌های مورد بررسی

داده‌های	توزیع	اندرسون-دارلینگ		کرامر-فون میزس		کولموگروف-اسمیرنوف	
		آماره آزمون	سطح معنی‌داری	آماره آزمون	سطح معنی‌داری	آماره آزمون	سطح معنی‌داری
۱	CBellEXLLD	۰/۲۶۱	۰/۸۵۵۹	۰/۴۴۷	۰/۹۰۸۷	۰/۰۷۰	۰/۹۳۵
	EXLLD	۰/۲۷۲	۰/۹۵۶	۰/۳۵۳	۰/۹۵۶	۰/۰۸۱	۰/۸۳۹
	APEXLLD	۰/۲۶۹	۰/۹۵۹	۰/۳۳۳	۰/۹۶۴	۰/۰۷۹	۰/۸۵۹
	LLD	۰/۳۹۳	۰/۸۵۴	۰/۵۵۳	۰/۸۵۶	۰/۰۹۲	۰/۷۰۴
	APLLD	۰/۲۸۲	۰/۹۵۰	۰/۳۳۶	۰/۹۵۳	۰/۰۷۸	۰/۸۶۸
۲	CBellEXLLD	۰/۵۱۷	۰/۷۶۷	۰/۷۵	۰/۶۱۸	۰/۱۰۸	۰/۵۵۷
	EXLLD	۰/۵۳۶	۰/۷۰۹	۰/۸۱۷	۰/۶۵۳	۰/۰۹۴	۰/۶۷۸
	APEXLLD	۰/۶۵۹	۰/۵۹۳	۰/۱۰۷	۰/۵۵۱	۰/۱۰۶	۰/۵۳۲
	LLD	۰/۵۹۰	۰/۶۵۶	۰/۸۸۹	۰/۶۴۱	۰/۰۹۹	۰/۶۱۶
	APLLD	۰/۴۶۹	۰/۷۷۷	۰/۷۳	۰/۷۲۹	۰/۰۸۵	۰/۷۹۳

ارزیابی کیفیت برازش و انتخاب مدل بهینه از اهمیت بالایی برخوردار است. برای این منظور، از معیارهای نیکویی برازش متعددی استفاده می‌شود که رایج‌ترین آن‌ها شامل معیار اطلاعات آکائیک (AIC)، معیار اطلاعات آکائیک تصحیح‌شده (CAIC)، معیار اطلاعات بیزی (BIC) و معیار اطلاعات هنان-کوئین (HQIC) هستند. در تمامی این شاخص‌ها، مقدار کمتر نشان‌دهنده مدل بهتر از نظر توازن بین برازش و سادگی است. این معیارها در جدول ۱۱ نمایش داده شده‌اند. نتایج بیانگر آن است که مدل برازش داده‌های اول نسبت به داده‌های دوم از مقادیر کمتری در این معیارها برخوردار است، که مؤید برازش بهتر مدل در داده‌های اول است. همچنین این معیارها نشان می‌دهند که مدل پیشنهادی در داده‌های اول برازش بهتری نسبت به سایر مدلها دارد و برای داده‌های دوم نیز همانند سایر مدلها عملکرد مناسبی را نشان می‌دهد. در شکل ۲، نمودارهای حاصل از برازش مدل پیشنهادی بر داده‌های اول و دوم نمایش داده شده است. انطباق مناسب منحنی‌های مدل با داده‌های تجربی در هر دو مورد به‌خوبی قابل مشاهده است. در ادامه، مقادیر آنتروپی‌های اطلاعاتی از نوع رنی، تیسالیس و شانون برای داده‌ها در جدول ۱۲ گزارش شده‌اند. مقدار بالاتر آنتروپی در داده‌های دوم (مثلاً آنتروپی تیسالیس برابر با ۲۷/۳۱۶ در مقابل ۱۷/۲۶۹ در داده‌های اول) نشان‌دهنده تنوع بیشتر و ساختار پراکندگی قوی‌تر داده‌های دوم است. همچنین مقادیر بزرگتر آنتروپی در توزیع پیشنهادی نسبت به سایر توزیعها نشان می‌دهد که این توزیع ساختار پراکندگی داده‌ها را بهتر نشان می‌دهد. علاوه بر

جدول ۱۱. معیارهای نیکویی برازش برای داده‌های مورد بررسی

داده‌های	توزیع	AIC	CAIC	BIC	HQIC
۱ د	CBellEXLLD	۴۷۲/۱۹۳	۴۷۳/۳۴۷	۴۸۲/۴۹۵	۴۷۶/۲۰۶
	EXLLD	۴۷۷/۳۳۱	۴۷۷/۷۷۶	۴۸۳/۵۱۳	۴۷۹/۷۳۹
	APEXLLD	۴۷۸/۸۷۰	۴۷۹/۶۲۵	۴۸۷/۱۱۲	۴۸۲/۰۸۱
	LLD	۴۷۷/۵۸۵	۴۷۷/۸۰۳	۴۸۱/۷۰۶	۴۷۹/۱۹۰
	APLLD	۴۷۷/۵۵۰	۴۷۷/۹۹۵	۴۸۳/۷۳۲	۴۷۹/۹۵۸
۲	CBellEXLLD	۵۳۵/۵۰۰	۵۳۶/۶۵۳	۵۴۵/۸۰۲	۵۳۹/۵۱۳
	EXLLD	۵۳۵/۶۳۵	۵۳۶/۰۷۹	۵۴۱/۸۱۶	۵۳۸/۰۴۲
	APEXLLD	۵۳۸/۳۸۹	۵۳۹/۱۴۴	۵۴۶/۶۳۱	۵۴۱/۵۹۹
	LLD	۵۳۴/۶۶۴	۵۳۴/۸۸۲	۵۳۸/۷۸۵	۵۳۶/۲۶۹
	APLLD	۵۳۵/۴۲۳	۵۳۵/۷۶۷	۵۴۱/۵۰۴	۵۳۷/۷۳۰



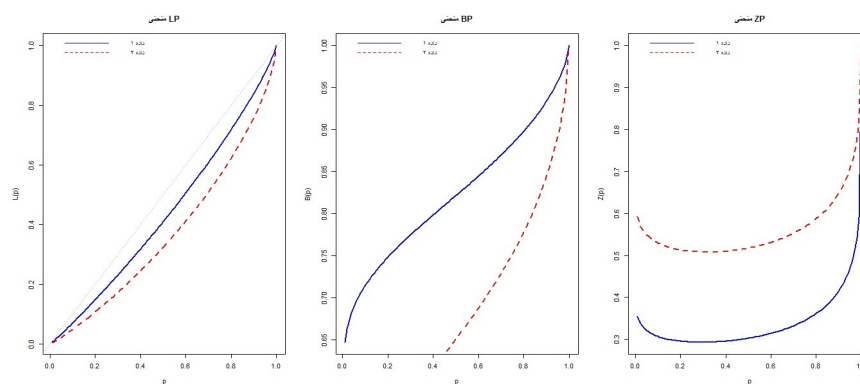
شکل ۲. سطر اول منحنی برازش داده‌های ۱ و سطر دوم منحنی برازش داده‌های ۲

جدول ۱۲. محاسبه آنتروپی

داده‌های	توزیع	رنی	تیسالیس	شانون
۱	CBellEXLLD	۴/۵۳۰	۱۷/۲۶۹	۴/۱۰۴
	EXLLD	۴/۴۶۳	۱۶/۶۲۸	۴/۰۸۱
	APEXLLD	۴/۴۴۸	۱۶/۴۹۵	۴/۰۷۶
	LLD	۴/۴۱۸	۱۶/۲۱۹	۴/۰۹۵
	APLLD	۴/۴۹۰	۱۶/۸۸۹	۴/۰۸۸
۲	CBellEXLLD	۵/۳۷۰	۲۷/۳۱۶	۴/۶۹۷
	EXLLD	۴/۹۷۸	۲۲/۱۰۸	۴/۵۳۸
	APEXLLD	۵/۰۸۱	۲۳/۳۷۶	۴/۵۶۷
	LLD	۴/۹۱۳	۲۱/۳۳۷۰	۴/۵۲۸
	APLLD	۴/۹۷۵	۲۲/۰۷۱	۴/۵۳۰

این، برای تحلیل ریسک، شاخص‌های بیمه‌ای شامل $TVaR$ ، VaR ، TV و TVP برای سطوح اطمینان ۰/۹۰، ۰/۹۵ و ۰/۹۹ محاسبه و در جدول ۱۳ ارائه شده‌اند. همان‌گونه که انتظار می‌رفت، این مقادیر در داده‌های دوم نسبت به داده‌های اول به‌طور قابل توجهی بزرگ‌تر هستند که نشان‌دهنده ریسک بالاتر موجود در داده‌های دوم است. برای

مثال، مقدار $TVaR$ در سطح اطمینان ۰.۸۹ برای داده‌های دوم برابر با ۳۹۵/۴۱ است در حالی که برای داده‌های اول این مقدار تنها ۱۷۴/۹۵ است. شاخهای بیمه در مدل پیشنهادی بیشتر از سایر توزیعها می باشد و این نشان می دهد که این توزیع دارای دمهای سنگین تری نسبت به توزیعهای جایگزین است و ریسک های بالا در داده ها را بهتر نمایش می دهد. در نهایت، منحنی‌های نابرابری اقتصادی برای دو مجموعه داده در شکل ۳ ارائه شده‌اند. مشاهده می‌شود که منحنی‌های داده‌های دوم انحراف بیشتری از خط برابری کامل دارند که نشانه‌ای از نابرابری اقتصادی بالاتر در این داده‌هاست. همچنین منحنی توزیع پیشنهادی در این داده ها نسبت به سایر توزیعها انحراف بیشتری دارد که نشان می دهد این توزیع نابرابری اقتصادی را برای داده ها بهتر نمایش می دهد.



شکل ۳. منحنی‌های نابرابری اقتصادی داده‌های ۱ و ۲

۶ بحث و نتیجه‌گیری

در این پژوهش، یک خانواده جدید از توزیع‌های دم‌سنگین با عنوان توزیع لگلوژستیک‌نمایی CBell معرفی شد. این توزیع بر پایه تبدیل CBell توسعه یافته و به دلیل انعطاف‌پذیری بالا، قادر به مدل‌سازی طیف گسترده‌ای از اشکال توزیع است. پس از تعریف تابع چگالی، تابع توزیع و دیگر ویژگی‌های آماری این مدل، چندین روش برآورد پارامتر شامل روش‌های کلاسیک و نیرومند مورد بررسی قرار گرفت. نتایج حاصل از مطالعه شبیه‌سازی نشان داد که برآوردگر بیشینه حاصل‌ضرب فاصله‌ها (MPSE) در اکثر شرایط عملکرد بهتری نسبت به سایر روش‌ها دارد. سپس، معیارهای مهم سنجش ریسک از جمله ارزش در معرض خطر (VaR)، ارزش در معرض خطر دمی (TVaR) و واریانس دنباله‌ای برای مدل پیشنهادی محاسبه شد. در نهایت، برازش مدل به دو مجموعه داده واقعی انجام شد و نتایج حاصل از برآورد پارامترها و آزمون‌های نیکویی برازش، کارایی بالای مدل را تأیید کرد.

جدول ۱۳. محاسبه مقادیر بیمه				توزیع	داده‌های
۰/۹۹	۰/۹۵	۰/۹	شاخص بیمه		
۱۴۳/۸۴	۱۰۷/۷۲	۹۴/۸۰	<i>VaR</i>	<i>CBellEXLLD</i>	۱
۱۷۴/۹۵	۱۳۱/۲۸	۱۱۵/۸۵	<i>TVaR</i>		
۱۴۹۶/۴۳	۸۵۰/۴۳	۶۷۰/۱۲	<i>TV</i>		
۹۲۳/۱۶	۵۵۶/۴۹	۴۵۰/۹۱	<i>TVP</i>		
۱۳۲/۴۴	۱۰۳/۲۷	۹۲/۴۵	<i>VaR</i>	<i>EXLLD</i>	
۱۵۶/۲۷	۱۲۲/۱۲	۱۰۹/۶۵	<i>TVaR</i>		
۸۱۴/۲۲	۵۰۳/۲۳	۴۱۱/۹۹	<i>TV</i>		
۵۶۳/۳۹	۳۷۳/۷۴	۳۱۵/۶۴	<i>TVP</i>		
۱۳۳/۰۵	۱۰۳/۶۰	۹۲/۶۸	<i>VaR</i>	<i>APEXLLD</i>	
۱۵۷/۱۶	۱۲۲/۶۴	۱۱۰/۰۴	<i>TVaR</i>		
۸۳۴/۴۶	۵۱۴/۴۲	۴۲۰/۷۲	<i>TV</i>		
۵۷۴/۳۹	۳۷۹/۸۵	۳۲۰/۴۱	<i>TVP</i>		
۱۱۹/۰۱	۹۸/۱۳	۸۹/۹۳	<i>VaR</i>	<i>LLD</i>	
۱۳۴/۸۴	۱۱۱/۴۷	۱۰۲/۵۱	<i>TVaR</i>		
۳۲۵/۴۵	۲۲۶/۷۴	۱۹۶/۵۲	<i>TV</i>		
۲۹۷/۵۷	۲۲۴/۸۵	۲۰۰/۷۷	<i>TVP</i>		
۱۳۵/۶۴	۱۰۴/۴۹	۹۳/۰۷	<i>VaR</i>	<i>APLLD</i>	
۱۶۱/۵۰	۱۲۴/۶۸	۱۱۱/۳۶	<i>TVaR</i>		
۹۸۰/۳۷	۵۹۰/۶۵	۴۷۷/۸۷	<i>TV</i>		
۶۵۱/۶۹	۴۲۰/۰۱	۳۵۰/۳۰	<i>TVP</i>		
۲۶۱/۰۹	۱۵۰/۲۴	۱۱۷/۷۰	<i>VaR</i>	<i>CBellEXLLD</i>	۲
۳۹۵/۴۱	۲۲۸/۵۰	۱۸۰/۰۱	<i>TVaR</i>		
۵۵۱۸۸/۲۳	۱۸۶۸۱/۴۸	۱۱۷۳۴/۳۵	<i>TV</i>		
۲۷۹۸۹/۵۳	۹۵۶۹/۲۴	۶۰۴۷/۱۹	<i>TVP</i>		
۱۷۲/۹۲	۱۱۹/۷۴	۱۰۱/۵۴	<i>VaR</i>	<i>EXLLD</i>	
۲۲۲/۹۷	۱۵۵/۰۶	۱۳۲/۲۴	<i>TVaR</i>		
۴۵۱۷/۶۹	۲۲۱۶/۶۷	۱۶۴۲/۵۴	<i>TV</i>		
۲۴۸۱/۸۲	۱۲۶۳/۴۰	۹۵۳/۵۱	<i>TVP</i>		
۱۹۶/۸۲	۱۲۷/۹۸	۱۰۵/۷۰	<i>VaR</i>	<i>APEXLLD</i>	
۲۶۷/۳۸	۱۷۴/۵۵	۱۴۴/۹۱	<i>TVaR</i>		
۱۰۴۸۴/۳۶	۴۵۱۷/۱۵	۳۱۵۷/۰۹	<i>TV</i>		
۵۵۰۹/۵۷	۲۴۳۳/۱۳	۱۷۲۳/۴۶	<i>TVP</i>		
۱۵۷/۴۰	۱۱۳/۹۵	۹۸/۴۵	<i>VaR</i>	<i>LLD</i>	
۱۹۵/۹۱	۱۴۲/۴۷	۱۲۳/۸۳	<i>TVaR</i>		
۲۴۲۵/۴۱	۱۳۰۶/۳۲	۱۰۱۰/۲۸	<i>TV</i>		
۱۴۰۸/۶۲	۷۹۵/۶۳	۶۲۸/۹۸	<i>TVP</i>		
۱۶۹/۹۴	۱۱۸/۲۰	۱۰۰/۴۸	<i>VaR</i>	<i>APLLD</i>	
۲۱۸/۴۶	۱۵۲/۵۳	۱۳۰/۳۴	<i>TVaR</i>		
۴۲۱۰/۲۰	۲۰۸۰/۱۱	۱۵۴۵/۲۱	<i>TV</i>		
۳۳۲۳/۵۶	۱۱۹۲/۵۹	۹۰۲/۹۵	<i>TVP</i>		

تقدیر و تشکر

نویسندگان مقاله از سردبیر محترم، داوران گرامی و ویراستار ارجمند مجله بابت ارائه نظرات ارزنده که باعث بهبود کیفیت نتایج و نحوه ارائه مقاله گردید کمال تشکر و امتنان را دارند.

مراجع

شفاعی نوقابی م.، خراشادیزاده م. (۱۴۰۴)، ویژگی هایی از تعمیم جدید توزیع لگ لوژستیک به همراه کاربرد آن، مجله علوم آماری، ۱۹(۱)، ۱۱۷-۱۳۶.

Afify, A. Z. Gemeay, A. M. and Ibrahim, N. A. (2020), The Heavy-Tailed Exponential Distribution: Risk Measures, Estimation, and Application to Actuarial Data, *Mathematics*, **8**, 1276.

A. M. Teamah, A. M. Elbanna, A. E. and Gemeay, A. M. (2021), Heavy-Tailed Log-Logistic Distribution: Properties, Risk Measures and Applications, *Statistics, Optimization and Information Computing*, **9**, 910-941.

Al-Babtain, A. A. Elbatal, I. Al-Mofleh, H. Gemeay, A. M. Afify, A. Z. and Sarg, A. M. (2021), The Flexible Burr xg Family: Properties, Inference, and Applications in Engineering Science. *Symmetry*, **13**(3), 474.

Abd El-Bar, A. M. T., Lima, M. d. C. S., and Ahsanullah, M. (2020), Some Inferences Based on a Mixture of Power Function and Continuous Logarithmic Distribution, *Journal of Taibah University for Science*, **14**(1), 1116-1126.

Algarni, A. (2022), Group Acceptance Sampling Plan Based on New Compounded Three-Parameter Weibull Model, *Axioms*, **11**(9), 438.

Al-Mofleh, H. Afify, A. Z. and Ibrahim. N. A. (2020) A New Extended Two-Parameter Distribution: Properties, Estimation Methods, and Applications in Medicine and Geology. *Mathematics*, **8**(9), 1578.

Alsadat, N., Hassan, A.S., Elgarhy, M., Johannssen, A. and Gemeay, A.M. (2024), Estimation Methods Based on Ranked Set Sampling for the Power Logarithmic Distribution, *Scientific Reports*, **14**, 17652.

El-Saeed, A.R., Hassan, A.S., Elharoun, N.M., Al Mutairi, A., Khasha, R.H. and Nassr, S.G. (2023), A class of Power Inverted Topp-Leone Distribution: Properties, Different Estimation Methods and Applications, *Journal of Radiation Research and Applied Sciences*, **16**, 100643.

- Bernardi, M., Maruotti, A. and Petrella, L. (2012), Skew Mixture Models for Loss Distributions: A Bayesian Approach, *Insurance: Mathematics and Economics*, **51**(3), 617–623.
- Cooray, K. and Ananda, M. M. A. (2005), Modeling Actuarial Data With a Composite Lognormal-Pareto Model, *Scandinavian Actuarial Journal*, **5**, 321–334.
- Fayomi, A., Tahir, M. H., Algarni, A., Imran, M. and Jamal, F. (2022), A New Useful Exponential Model With Applications to Quality Control and Actuarial Data. *Computational Intelligence and Neuroscience*, 2489998.
- Gradshteyn, I. S., Ryzhik, I. M., Jeffrey, A., and Zwillinger, D. (2007), *Table of Integrals, Series, and Products* (7th ed.), Academic Press.
- Ibragimov, R. and Prokhorov, A. (2017), *Heavy Tails and Copulas: Topics in Dependence Modelling in Economics and Finance*, World Scientific.
- Klugman, S. A. , Panjer, H. H. and Willmot, G. E. (2012), *Loss Models: From Data to Decisions*, John Wiley & Sons.
- Lane, M. N.(2000), Pricing Risk Transfer Transactions, *ASTIN Bulletin*, **30**(2), 259–293.
- Rooks, B., Schumacher, A., and Cooray, K. (2020), *The power Cauchy Distribution: Derivation, Description, and Composite Models*, NSF-REU Program Reports, 2010.
- Rosaiah, K., Kantam, R. R. L., and Kumar, S. (2006), Reliability Test Plans for Exponentiated Log-Logistic Distribution, *Economic Quality Control*, **21**(2), 279–289.
- Sapkota, L. P., and Kumar, V. (2023), Applications and Some Characteristics of Inverse Power Cauchy Distribution, *Reliability Theory and Applications*, **18**(1), 301–315.