

توزيع جدید سری نمایی توانی مکمل

عارف خنجری عیدنک، محمد رضا زاد کرمی، علیرضا دانشخواه

گروه آمار، دانشگاه شهید چمران اهواز

تاریخ دریافت: ۱۳۹۲/۱۲/۱۶ تاریخ آخرین بازنگری: ۱۳۹۳/۸/۸

چکیده: در این مقاله، یک توزیع ترکیبی طول عمر جدید با توابع نرخ مخاطره‌های صعودی، نزولی، و ان شکل و تک مدی مطرح می‌شود. توزیع جدید، چهار پارامتری و تعمیمی از توزیع نمایی توانی مکمل است. گشتاورهای معمولی، تابع چگالی آماره‌های ترتیبی، تابع بقا، تابع نرخ مخاطره، چارک‌ها، متوسط باقیمانده طول عمر و پارامتر قابلیت اطمینان آن ارائه می‌شود. برآوردهای پارامترهای توزیع جدید در حالت خاص پواسون نمایی توانی مکمل، با روش ماکسیمم درستنمایی و الگوریتم EM مورد مطالعه قرار می‌گیرد. همچنین توزیع مجانبی برآوردهای ماکسیمم درستنمایی پارامترهای توزیع بیان می‌شود، سپس جهت تعیین دقت واریانس و کوواریانس این برآوردهای از شبیه‌سازی استفاده می‌شود و در یک مثال کاربردی مزایای این توزیع نشان داده می‌شود.

واژه‌های کلیدی: الگوریتم EM، پارامتر قابلیت اطمینان، تابع بقا، تابع نرخ مخاطره، توزیع نمایی توانی مکمل.

آدرس الکترونیک مسئول مقاله: عارف خنجری عیدنک، aref65khanjar@yahoo.com

کد موضوع بنای ریاضی (۲۰۱۰): ۶۲F۱۰

۱ مقدمه

طی سال‌های اخیر توزیع‌های متعددی از جمله توزیع‌های توانی و ترکیبی، توسط محققین زیادی مورد توجه قرار گرفته و برای برآش به داده‌ها در علوم مختلف استفاده شده است. اسمیت و باین (۱۹۷۵)، توزیع نمایی توانی^۱ (EP) را با دو پارامتر مقیاس و شکل و نرخ مخاطره‌های وان شکل و صعودی پیشنهاد کردند. مارشال و الکین (۱۹۹۷) توزیع‌های توانی را به منظور دستیابی به مدل‌هایی با نرخ مخاطره‌های متفاوت، بیشتر مورد بررسی قرار دادند. همچنین باریگا و همکاران (۲۰۱۱)، توزیع نمایی توانی مکمل^۲ (CEP) را با یک پارامتر شکل اضافه با به توان رساندن توزیع تجمعی نمایی توانی (اسمیت و باین، ۱۹۷۵) پیشنهاد کردند. توزیع‌های ترکیبی دو پارامتری نمایی-هندسی (EG) آدامیدیس و لوکاس (۱۹۹۸)، نمایی-پواسون (EP) کاس (۲۰۰۷)، نمایی-سلگاریتمی (EL) طهماسبی و رضایی (۲۰۰۸) با نرخ مخاطره نزولی معرفی شدند. توزیع نمایی-سری توانی (EPS) با نرخ مخاطره نزولی به عنوان تعمیم این توزیع‌ها توسط چاهمکنی و گنجعلی (۲۰۰۹) پیشنهاد شد. توزیع‌های پواسون-نمایی (PED) کانچو و همکاران (۲۰۱۱) و سری نمایی-ستوانی مکمل (CEPS) فلوراس و همکاران (۲۰۱۳) با نرخ مخاطره صعودی معرفی شدند. همتی و همکاران (۲۰۱۱)، توزیع واپیول-پواسون (WP) را پیشنهاد کردند که دارای توابع مخاطره نزولی، صعودی، تک مدى-وان شکل هستند. مورایس و بارتو سوزا (۲۰۱۱) توزیع ترکیبی جدیدی با نرخ مخاطره نزولی وقتی که پارامتر شکل کمتر از یک و نرخ مخاطره متفاوت با پارامتر بیشتر یا مساوی یک را مطرح کردند. همچنین خنجری و همکاران (۱۳۹۰) توزیع نمایی پواسون توانی (PEP) با نرخ مخاطره‌های نزولی، صعودی، وان شکل و تک مدى-وان شکل را معرفی کردند. در این مقاله، خانواده توزیع ترکیبی جدید سری نمایی توانی مکمل^۳ (SCEP) با یک پارامتر مکان اضافه و توابع نرخ مخاطره صعودی، نزولی، وان شکل و تک مدى مطرح شده و با یک مثال کاربردی مزایای این توزیع نشان داده می‌شود.

^۱ Exponential Power^۲ Complementary Exponential Power^۳ Series Complementary Exponential Power

عارف خنجری عینک و همکاران ۱۳۷.....

توزیع جدید از ترکیب توزیع‌های نمایی توانی مکمل باریگا و همکاران (۲۰۱۱) و سری توانی بریده شده در صفر به دست می‌آید که تمام توزیع‌های پواسون نمایی توانی مکمل (PCEP)، نمایی لگاریتمی توانی مکمل (LCEP)، نمایی هندسی توانی مکمل (GCEP)، نمایی دوجمله‌ای توانی مکمل (BCEP)، و نمایی توانی مکمل، نمایی پواسون توانی و نمایی توانی را در بر می‌گیرد.

فرض کنید T_1, \dots, T_N نمونه‌ای تصادفی از توزیع نمایی توانی مکمل به صورت

$$f_T(t; \alpha, \beta, \gamma) = \frac{\beta\gamma}{\alpha} \left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\beta-1} e^{(\frac{t}{\alpha})^\beta} g_{\alpha, \beta}(t) [1 - g_{\alpha, \beta}(t)]^{\gamma-1}, \quad t > 0$$

باشد، که در آن $g_{\alpha, \beta}(t) = e^{1-e^{(\frac{t}{\alpha})^\beta}}$ و $\alpha > 0$ پارامتر مقیاس و $\beta > 0$ و $\gamma > 0$ پارامترهای شکل هستند. همچنین N یک متغیر تصادفی سری توانی بریده شده در صفر باتابع جرم احتمال

$$P(N = n; \lambda) = \frac{a_n \lambda^n}{A(\lambda)}, \quad A(\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \lambda^n, \quad n \in \{1, \dots\}, \quad \lambda \in (0, s),$$

باشد، که در آن a_1, \dots, a_s دنباله‌ای از اعداد حقیقی نامتفقی هستند به‌طوری که حداقل یکی از آن‌ها اکیداً مثبت است و s مقداری کوچکتر یا مساوی نسبت همگرایی سری $A(\lambda)$ می‌باشد. جدول ۱ توسط مورایس و بارتوسوزا (۲۰۱۱) برای مقادیر متفاوت $A(\lambda)$ گزارش شده است.

جدول ۱: کمیت‌های مفید برخی از توزیع‌های سری توانی

s	$A^{-1}(\lambda)$	$A''(\lambda)$	$A'(\lambda)$	$A(\lambda)$	a_n	توزیع
∞	$\ln(1 + \lambda)$	e^λ	e^λ	$e^\lambda - 1$	$n!^{-1}$	پواسون
۱	$1 - e^{-\lambda}$	$(1 - \lambda)^{-2}$	$(1 - \lambda)^{-1}$	$-\ln(1 - \lambda)$	n^{-1}	لگاریتمی
۱	$\lambda(1 + \lambda)^{-1}$	$2(1 - \lambda)^{-3}$	$(1 - \lambda)^{-2}$	$\lambda(1 - \lambda)^{-1}$	۱	هندسی
∞	$(\lambda - 1)^{\frac{1}{m}} - 1$	$\frac{m(m-1)}{(1+\lambda)^{2-m}}$	$m(1 + \lambda)^{m-1}$	$(1 + \lambda)^m - 1$	$\binom{m}{n}$	دوجمله‌ای

اگر متغیرهای تصادفی T و N مستقل باشند، آنگاه تابع چگالی احتمال شرطی متغیر تصادفی جدید $X = \max\{T_1, \dots, T_N\}$ به صورت

$$f_{SCEP}(x; \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{X,N}(x, n) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{X|N}(x | n) P(N = n) \quad (1)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\beta\gamma}{\alpha} \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta-1} e^{(\frac{x}{\alpha})^\beta} g_{\alpha,\beta}(x) \\
&\times (\mathbb{1} - g_{\alpha,\beta}(x))^{\gamma-1} [(\mathbb{1} - g_{\alpha,\beta}(x))^\gamma]^{n-1} \frac{a_n \lambda^n}{A(\lambda)} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{n\lambda\beta\gamma}{\alpha} \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta-1} e^{(\frac{x}{\alpha})^\beta} g_{\alpha,\beta}(x) \\
&\times (\mathbb{1} - g_{\alpha,\beta}(x))^{\gamma-1} \frac{[\lambda(\mathbb{1} - g_{\alpha,\beta}(x))^\gamma]^{n-1}}{A(\lambda)},
\end{aligned}$$

است که در آن

$$\begin{aligned}
f(x | n; \alpha, \beta, \gamma) &= n f_{CEP}(x) F_{CEP}(x)^{n-1} \\
&= \frac{n\beta\gamma}{\alpha} \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta-1} e^{(\frac{x}{\alpha})^\beta} g_{\alpha,\beta}(x) (\mathbb{1} - g_{\alpha,\beta}(x))^{n\gamma-1},
\end{aligned}$$

همچنین

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{n\lambda\beta\gamma}{\alpha} \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta-1} e^{(\frac{x}{\alpha})^\beta} g_{\alpha,\beta}(x) [\mathbb{1} - g_{\alpha,\beta}(x)]^{\gamma-1} [\lambda[\mathbb{1} - g_{\alpha,\beta}(x)]^\gamma]^{n-1} \\
&= \frac{\partial}{\partial x} A(\lambda[\mathbb{1} - g_{\alpha,\beta}(x)]^\gamma)
\end{aligned} \tag{۲}$$

با جایگذاری (۲) در رابطه (۱)، تابع چگالی توزیع جدید به صورت

$$\begin{aligned}
f_{SCEP}(x; \theta) &= \frac{\frac{\partial}{\partial x} A(\lambda[\mathbb{1} - g_{\alpha,\beta}(x)]^\gamma)}{A(\lambda)} \\
&= \frac{\lambda\beta\gamma}{\alpha} \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta-1} e^{(\frac{x}{\alpha})^\beta} g_{\alpha,\beta}(x) (\mathbb{1} - g_{\alpha,\beta}(x))^{\gamma-1} \\
&\times \frac{A'(\lambda[\mathbb{1} - g_{\alpha,\beta}(x)]^\gamma)}{A(\lambda)}, \quad x > 0, \alpha, \beta, \gamma, \lambda > 0.
\end{aligned}$$

به دست می‌آید، که در آن $A'(\lambda[\mathbb{1} - g_{\alpha,\beta}(x)]^\gamma)$ مشتق اول $A(\cdot)$ بر حسب λ است. توزیع X را توزیع سری نمایی توانی مکمل می‌نامیم، زمانی که $\lambda \rightarrow 0$ توزیع SCEP به توزیع CEP تبدیل می‌شود.

زیرا $\lim_{\lambda \rightarrow 0} f_{SCEP}(x; \alpha, \beta, \gamma, \lambda)$ به شرح

$$\begin{aligned}
&\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\lambda\beta\gamma}{\alpha} \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta-1} e^{(\frac{x}{\alpha})^\beta} g_{\alpha,\beta}(x) (\mathbb{1} - g_{\alpha,\beta}(x))^{\gamma-1} \times \frac{A'(\lambda[\mathbb{1} - g_{\alpha,\beta}(x)]^\gamma)}{A(\lambda)} \\
&= \frac{\beta\gamma}{\alpha} \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta-1} e^{(\frac{x}{\alpha})^\beta} g_{\alpha,\beta}(x) (\mathbb{1} - g_{\alpha,\beta}(x))^{\gamma-1} \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\lambda A'(\lambda[\mathbb{1} - g_{\alpha,\beta}(x)]^\gamma)}{A(\lambda)}
\end{aligned}$$

عارف خنجری عینک و همکاران ۱۳۹

$$\begin{aligned}
&= \frac{\beta\gamma}{\alpha} \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta-1} e^{\left(\frac{x}{\alpha}\right)^\beta} g_{\alpha,\beta}(x) (1 - g_{\alpha,\beta}(x))^{1-\gamma} \\
&\times \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{A'(\lambda[1 - g_{\alpha,\beta}(x)]^\gamma) + \lambda A''(\lambda[1 - g_{\alpha,\beta}(x)]^\gamma)}{A'(\lambda)} \\
&= \frac{\beta\gamma}{\alpha} \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta-1} e^{\left(\frac{x}{\alpha}\right)^\beta} g_{\alpha,\beta}(x) (1 - g_{\alpha,\beta}(x))^{1-\gamma} \\
&= f_{CEP}(x, \alpha, \beta, \gamma),
\end{aligned}$$

است، که در آن مقدار $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{A'(\lambda[1 - g_{\alpha,\beta}(x)]^\gamma) + \lambda A''(\lambda[1 - g_{\alpha,\beta}(x)]^\gamma)}{A'(\lambda)}$ به ازای تمامی مقادیر (\cdot) و A' و A'' میندرج جدول ۱ برابر یک می‌شود. در این صورت به ازای $1 \leq \beta \leq \gamma$ تابع چگالی تک مدی و به ازای $1 \leq \beta < \gamma$ تابع چگالی نزولی است. زیرا با توجه به مشتقات اول و دوم لگاریتم طبیعی تابع چگالی نمایی توانی مکمل، داریم

$$\begin{aligned}
\ln(f_{CEP}(x; \alpha, \beta, \gamma)) &= 1 + \ln\left(\frac{\beta\gamma}{\alpha}\right) + (\beta - 1)\ln\left(\frac{x}{\alpha}\right) \\
&+ \left(\frac{x}{\alpha}\right)^\beta - e^{\left(\frac{x}{\alpha}\right)^\beta} + (\gamma - 1)\ln(1 - g_{\alpha,\beta}(x)), \\
\frac{\partial[\ln(f_{CEP}(x; \alpha, \beta, \gamma))]}{\partial x} &= \frac{\beta - 1}{x} + \frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta-1}(1 - e^{\left(\frac{x}{\alpha}\right)^\beta}) \\
&+ \frac{\beta(\gamma - 1)}{\alpha}\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta-1}e^{\left(\frac{x}{\alpha}\right)^\beta}g_{\alpha,\beta}(x)(1 - g_{\alpha,\beta}(x))^{-1},
\end{aligned}$$

از آنجا که به ازای هر $x > 0$ داریم $1 - e^{\left(\frac{x}{\alpha}\right)^\beta} < 0$ و $\beta > 0$ و $\alpha > 0$ ، لذا به ازای $1 \leq \beta \leq \gamma$ مشتق اول لگاریتم طبیعی تابع چگالی نمایی توانی مکمل همواره منفی است، بنابراین شکل تابع چگالی نمایی توانی مکمل نزولی می‌باشد.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2[\ln(f_{CEP}(x; \alpha, \beta))]}{\partial x^2} &= -\frac{\beta - 1}{x^2} + \frac{\beta(\beta - 1)}{\alpha^2}\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta-2}(1 - e^{\left(\frac{x}{\alpha}\right)^\beta}) \\
&- \frac{\beta^2}{\alpha^2}\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{2(\beta-1)}e^{\left(\frac{x}{\alpha}\right)^\beta} + \frac{\beta^2(\gamma - 1)}{\alpha^2}\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta-2}e^{\left(\frac{x}{\alpha}\right)^\beta}g_{\alpha,\beta}(x)(1 - g_{\alpha,\beta}(x))^{-1} \\
&\times \left[\frac{\beta - 1}{\beta} - \left(\frac{x}{\alpha}\right)^\beta e^{\left(\frac{x}{\alpha}\right)^\beta} + \left(\frac{x}{\alpha}\right)^\beta(1 - e^{\left(\frac{x}{\alpha}\right)^\beta}g_{\alpha,\beta}(x)[1 - g_{\alpha,\beta}(x)]^{-1})\right]
\end{aligned}$$

همچنین به ازای $1 \leq \beta \leq \gamma$ مشتق دوم لگاریتم طبیعی تابع چگالی نمایی توانی مکمل همواره منفی است، بنابراین شکل تابع چگالی نمایی توانی مکمل تک مدی است.

برای تفسیر مدل پیشنهادی، فرض کنید x ها نشان دهنده طول عمر سیستم‌هایی باشد که به‌طور موازی (البته نه از لحاظ مداری بلکه از لحاظ عملکرد) قرار دارند، از توزیع CEP پیروی کنند و همچنین مؤلفه‌های هر سیستم که به صورت موازی قرار دارند، از توزیع EP پیروی کنند، در این صورت توزیعی که در رابطه (۱) ارائه شد منجر به توزیع SCEP برای مدل‌بندی زمان آخرین شکست می‌شود.

برخی از ویژگی‌های توزیع SCEP را می‌توان با استفاده از توزیع CEP به‌دست آورد، اگر متغیر تصادفی X از توزیع SCEP با پارامترهای α, β, γ و λ پیروی کند آنگاه با توجه به رابطه (۱) می‌توان نشان داد

$$\begin{aligned} f_{SCEP}(x; \theta) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \lambda^n}{A(\lambda)} f_n(x) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \lambda^n}{A(\lambda)} f_{CEP}(x; \alpha, \beta, n\gamma) \end{aligned}$$

که در آن $f_n(x)$ تابع چگالی احتمال ماکسیمم نمونه تصادفی به اندازه n توزیع نمایی توانی مکمل باریگا و همکاران (۲۰۱۱) است که به صورت

$$f_n(x) = \frac{n\beta\gamma}{\alpha} \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta-1} e^{(\frac{x}{\alpha})^\beta} g_{\alpha,\beta}(x) [1 - g_{\alpha,\beta}(x)]^{n\gamma-1}$$

حاصل می‌شود.

۲ ویژگی‌های توزیع SCEP

در این بخش به ارائه تابع توزیع، تابع بقا، تابع نرخ شکست، چارک‌ها و میانه، گشتاور معمولی مرتبه r ، میانگین باقیمانده طول عمر، تابع چگالی نامین آماره ترتیبی و پارامتر قابلیت اطمینان توزیع SCEP پرداخته می‌شود. فرض کنید X یک متغیر تصادفی نامنفی نشان دهنده طول عمر یک سیستم باشد که از توزیع SCEP با پارامترهای α, β, γ و λ پیروی کند که تابع توزیع آن به صورت

$$F_X(x; \theta) = \frac{A(\lambda[1 - g_{\alpha,\beta}(x)]^\gamma)}{A(\lambda)}, \quad x > 0 \quad (۳)$$

عارف خنجری عینک و همکاران ۱۴۱

است، تابع بقا و تابع نرخ مخاطره این توزیع به صورت

$$\begin{aligned} S(x; \theta) &= 1 - F_X(x; \alpha, \beta, \gamma, \lambda) \\ &= \frac{A(\lambda) - A(\lambda[1 - g_{\alpha, \beta}(x)]^{\gamma})}{A(\lambda)}, \quad x > 0 \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} h(x; \theta) &= \frac{f_{SCEP}(x; \alpha, \beta, \gamma, \lambda)}{S(x; \alpha, \beta, \gamma, \lambda)} \\ &= \frac{\frac{\lambda \beta \gamma}{\alpha} \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta-1} e^{\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta}} g_{\alpha, \beta}(x) (1 - g_{\alpha, \beta}(x))^{\gamma-1} A'(\lambda[1 - g_{\alpha, \beta}(x)]^{\gamma})}{A(\lambda) - A(\lambda[1 - g_{\alpha, \beta}(x)]^{\gamma})}, \quad x > 0 \end{aligned}$$

به دست می‌آیند. با توجه به رابطه (۳) چارک \circ از توزیع SCEP، یعنی

$$x_{\gamma_0} = F^{-1}(\gamma_0; \theta)$$

$$x_{\gamma_0} = \alpha [\ln(1 - \ln[1 - (\lambda^{-1} A^{-1}[\gamma_0 A(\lambda)])^{\frac{1}{\gamma}}])]^{\frac{1}{\beta}}, \quad (4)$$

است، که در آن $(\cdot)^{-1} A$ معکوس (\cdot) می‌باشد. به ازای 5° میانه متناظر با توزیع جدید به صورت

$$m = \alpha [\log(1 - \ln[1 - (\lambda^{-1} A^{-1}[5^\circ / 5 A(\lambda)])^{\frac{1}{\gamma}}])]^{\frac{1}{\beta}},$$

حاصل می‌شود. با توجه به رابطه (۲)، اگر $m = \frac{r}{\beta}$ یک عدد صحیح باشد آن‌گاه r -امین گشتاور معمولی توزیع SCEP به صورت

$$\begin{aligned} \mu'_r &= E(X^r) \\ &= n\gamma\alpha^r \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \lambda^n}{A(\lambda)} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^{j-m} C(n\gamma - 1, j) e^{j+1} E_0^m(j + 1) \end{aligned} \quad (5)$$

به دست می‌آید، که در آن $E_0^m(j + 1) = (-1)^m \int_1^\infty (\log(x))^m e^{-(j+1)t} dx$ برای $m = 1, \dots$

$$C(n\gamma - 1, j) = \frac{(n\gamma - 1) \dots (n\gamma - j)}{j!}$$

میانگین باقیمانده طول عمر توزیع SCEP نیز از رابطه

$$\begin{aligned} m_F(x; \theta) &= \frac{\gamma}{A(\lambda)S(x)} \\ &\times \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{n\gamma-1} n a_n \lambda^n (j+1)^{-1} \binom{n\gamma-1}{j} (-1)^j e^{-(j+1)(e^{(\frac{x}{\alpha})^\beta}-1)}, \end{aligned} \quad (6)$$

به دست می‌آید. به سادگی می‌توان نشان داد که تابع چگالی آمین آماره ترتیبی در نمونه تصادفی به اندازه n برای $i = 1, \dots, n$ در توزیع SCEP به صورت

$$\begin{aligned} f_{i:n}(x; \theta) &= \binom{n}{i-1} f_{SCEP}(x) F_{SCEP}(x)^{i-1} (1 - F_{SCEP}(x))^{n-i} \\ &= \binom{n}{i-1} \frac{\lambda \beta \gamma}{\alpha} \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta-1} e^{(\frac{x}{\alpha})^\beta} g_{\alpha, \beta}(x) [1 - g_{\alpha, \beta}(x)]^{\gamma-1} \\ &\times \frac{A'(\lambda[1 - g_{\alpha, \beta}(x)]^\gamma)}{A(\lambda)} \sum_{j=0}^{n-i} (-1)^j \binom{n-i}{j} \left[\frac{A'(\lambda[1 - g_{\alpha, \beta}(x)]^\gamma)}{A(\lambda)}\right]^{j+i-1}. \end{aligned}$$

حاصل می‌شود. همچنین فرض کنید $X \sim SCEP(\alpha, \beta, \gamma, \lambda_1)$ و $Y \sim SCEP(\alpha, \beta, \gamma, \lambda_2)$ به طوری که X و Y دو متغیر تصادفی مستقل باشند
بنابراین پارامتر قابلیت اطمینان به صورت

$$\begin{aligned} P(X > Y) &= \int_0^\infty \int_0^x \frac{\lambda_1 \beta \gamma}{\alpha A(\lambda_1)} \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta-1} e^{(\frac{x}{\alpha})^\beta} g_{\alpha, \beta}(x) \\ &\times (1 - g_{\alpha, \beta}(x))^{\gamma-1} A'(\lambda_1[1 - g_{\alpha, \beta}(x)]^\gamma) \frac{\lambda_2 \beta \gamma}{\alpha A(\lambda_2)} \left(\frac{y}{\alpha}\right)^{\beta-1} \\ &\times e^{(\frac{y}{\alpha})^\beta} g_{\alpha, \beta}(y) [1 - g_{\alpha, \beta}(y)]^{\gamma-1} A'(\lambda_2[1 - g_{\alpha, \beta}(y)]^\gamma) dy dx \\ &= \frac{\lambda A(\lambda_1 + \lambda_2)}{A(\lambda_1)A(\lambda_2)(\lambda_1 + \lambda_2)} - \frac{A'(\infty)}{A(\lambda_2)} \end{aligned} \quad (V)$$

تعریف می‌شود، که در آن $A(\cdot)$ و $A'(\cdot)$ از جدول ۱ استخراج می‌شود و ملاحظه می‌شود که مقدار پارامتر قابلیت اطمینان به پارامترهای α , β و γ بستگی ندارد.

۳ حالت‌های خاص توزیع SCEP

در این بخش به ارائه زیر توزیع‌های توزیع جدید پرداخته می‌شود. با توجه به جدول ۱ و همچنین با در نظر داشتن تابع توزیع سری نمایی توانی مکمل، تابع

توزیع نمایی دوجمله‌ای توانی مکمل به صورت

$$F_X(x; \theta) = \frac{(1 + \lambda[1 - g_{\alpha,\beta}(x)]^\gamma)^m - 1}{(1 + \lambda)^m - 1}, \quad x > 0.$$

حاصل می‌شود، که در آن $\theta = (\alpha, \beta, \gamma, \lambda)$ و m یک عدد صحیح مثبت است. تابع توزیع نمایی هندسی توانی مکمل از قرار

$$F_X(x; \theta) = \frac{(1 - \lambda)(1 - g_{\alpha,\beta}(x))^\gamma}{1 - \lambda(1 - g_{\alpha,\beta}(x))^\gamma}, \quad x > 0, \quad \lambda \in (0, 1)$$

است. تابع توزیع نمایی هندسی توانی مکمل به صورت

$$F_X(x; \theta) = \frac{\ln(1 - \lambda[1 - g_{\alpha,\beta}(x)]^\gamma)}{\ln(1 - \lambda)}, \quad x > 0, \quad \lambda \in (0, 1)$$

است و تابع توزیع پواسون نمایی توانی مکمل (PCEP) به صورت

$$F_X(x; \theta) = (e^\lambda - 1)^{-1} (e^{\lambda[1 - g_{\alpha,\beta}(x)]^\gamma} - 1), \quad x > 0 \quad (8)$$

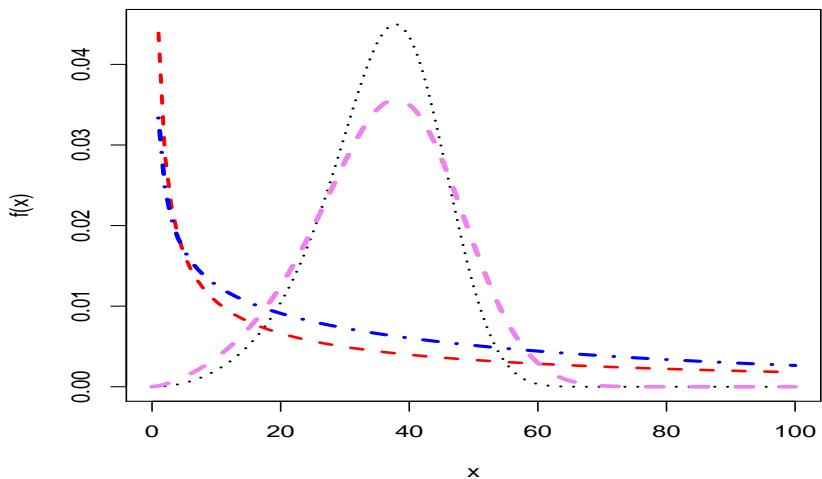
به دست می‌آید، که تابع چگالی متناظر با آن به صورت

$$\begin{aligned} f_X(x; \theta) &= \frac{\lambda \beta \gamma}{\alpha(e^\lambda - 1)} \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta-1} e^{\left(\frac{x}{\alpha}\right)^\beta} \\ &\times g_{\alpha,\beta}(x)[1 - g_{\alpha,\beta}(x)]^{\gamma-1} e^{\lambda[1 - g_{\alpha,\beta}(x)]^\gamma}, \quad x > 0 \end{aligned}$$

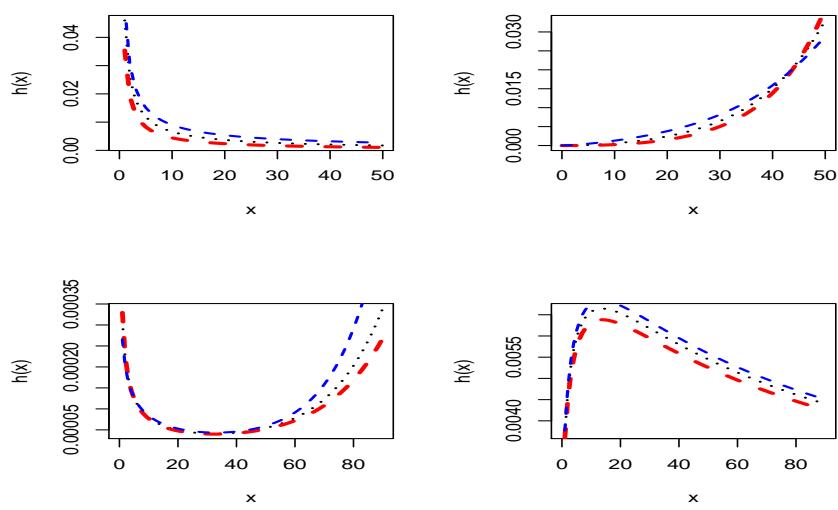
است. به ازای $\gamma = 1$ حالت خاصی به دست می‌آید که همان توزیع نمایی پواسون توانی خنجری و همکاران (۱۳۹۰) است. شکل ۱ تابع چگالی PCEP را به ازای مقادیر مختلف پارامترها نشان می‌دهد، که در آن مقادیر پارامترهای α ، β و λ به ترتیب ۵، ۳۵ و ۵ انتخاب شده‌اند و به ازای مقادیر پارامتر γ و $0/16$ و $0/24$ ، شکل تابع چگالی نزولی و به ازای مقادیر $1/55$ و $1/25$ ، شکل تابع چگالی تک مدبی است.

۴ ویژگی‌های توزیع PCEP

در این بخش به ارائه توابع بقا و نرخ شکست، چارک‌ها و میانه، گشتاور معمولی مرتبه ۴ام، میانگین باقیمانده طول عمر، تابع چگالی نامیان آماره ترتیبی و پارامتر قابلیت اطمینان توزیع چهار پارامتری PCEP پرداخته می‌شود.



شکل ۱: تابع چگالی احتمال توزیع برای مقادیر مختلف پارامترها



شکل ۲: تابع نرخ شکست توزیع برای مقادیر مختلف پارامترها

عارف خنجری عینک و همکاران ۱۴۵.....

همان طور که از شکل ۲ ملاحظه می‌شود تابع نرخ شکست توزیع PCEP به‌ازای مقادیر مختلف پارامترها حالت‌های نزولی، صعودی، و ان شکل و تک مدی را شامل می‌شود. تابع بقا و نرخ شکست متناظر با توزیع PCEP به‌ترتیب به‌صورت

$$S_X(x; \theta) = (e^\lambda - 1)^{-1} (e^\lambda - e^{\lambda[1-g_{\alpha,\beta}(x)]^\gamma}), \quad x > 0$$

$$h_X(x; \theta) = \frac{\lambda \beta \gamma (\frac{x}{\alpha})^{\beta-1} e^{(\frac{x}{\alpha})^\beta} g_{\alpha,\beta}(x) [1 - g_{\alpha,\beta}(x)]^{\gamma-1}}{\alpha (e^{\lambda(1-[1-g_{\alpha,\beta}(x)]^\gamma)} - 1)}, \quad x > 0$$

به‌دست می‌آیند. این توزیع نیز دارای فرم بسته‌ای از توابع بقا و نرخ شکست است و برای داده‌های بقا، بسیار منعطف می‌باشد. با جایگذاری مقادیر $\alpha = 1$ و $\beta = 1$ از جدول ۱ در رابطه (۴) چارک γ از توزیع PCEP به‌صورت

$$x_{\gamma_0} = \alpha [\ln(1 - \ln[1 - (\lambda^{-1} \ln[1 + \gamma_0(e^\lambda - 1)])^{\frac{1}{\gamma}}])]^{\frac{1}{\beta}},$$

حاصل می‌شود. به‌ازای $\gamma = 0$ میانه توزیع PCEP به‌صورت

$$m = \alpha [\ln(1 - \ln[1 - (\lambda^{-1} \ln[1 + 0/5(e^\lambda - 1)])^{\frac{1}{\gamma}}])]^{\frac{1}{\beta}},$$

حاصل می‌شود. برای متغیر تصادفی X که از توزیع PCEP پیروی می‌کند، با فرض این که $m = \frac{r}{\beta}$ یک عدد صحیح باشد با جایگذاری مقدار $\lambda = e^\lambda - 1$ از جدول ۱ در رابطه (۵) گشتاور $r^{\text{ام}}$ توزیع PCEP به‌صورت

$$\mu'_r = \frac{\lambda \gamma \alpha^r}{(e^\lambda - 1)} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda^{i-1}}{(i-1)!} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^{j-m} C(i\gamma - 1, j) e^{j+1} E_0^m(j+1)$$

است، که در آن $E_0^m(j+1) = (-1)^m \int_1^\infty (\log(x))^m e^{-(j+1)t} dx$ ، $m = 1, \dots$ و

$$C(i\gamma - 1, j) = \frac{(i\gamma - 1) \dots (i\gamma - j)}{j!}$$

میانگین باقیمانده طول عمر توزیع نمایی پواسون توانی مکمل به سادگی با جایگذاری مقادیر $\lambda = e^\lambda - 1$ و $A(\lambda) = (e^\lambda - 1)^{-1} (e^\lambda - e^{\lambda[1-g_{\alpha,\beta}(x)]^\gamma})$ در $S(x) = (e^\lambda - 1)^{-1} (e^\lambda - e^{\lambda[1-g_{\alpha,\beta}(x)]^\gamma})$ رابطه (۶) به‌صورت

$$m_F(x; \theta) = E(X - x \mid X \geq x; \theta)$$

$$= \frac{\gamma}{(e^\lambda - e^{\lambda[1-g_{\alpha,\beta}(x)]^\gamma})} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{n\gamma-1} n a_n \lambda^n (j+1)^{-1} \\ \times \binom{n\gamma-1}{j} (-1)^j e^{-(j+1)(e^{(\frac{x}{\alpha})^\beta}-1)},$$

حاصل می شود، می توان نشان داد که تابع چگالی i امین آماره ترتیبی X در نمونه تصادفی به اندازه n برای $i = 1, \dots, n$ در توزیع PCEP به صورت

$$f_{i:n}(x; \theta) = \binom{n-1}{i-1} \frac{n\lambda\beta\gamma}{\alpha(e^\lambda - 1)^n} \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta-1} \exp\left\{\left(\frac{x}{\alpha}\right)^\beta\right\} \\ \times g_{\alpha,\beta}(x) [1 - g_{\alpha,\beta}(x)]^{\gamma-1} e^{\lambda[1-g_{\alpha,\beta}(x)]^\gamma} \\ \times (e^{\lambda[1-g_{\alpha,\beta}(x)]^\gamma} - 1)^{i-1} (e^\lambda - e^{\lambda[1-g_{\alpha,\beta}(x)]^\gamma})^{n-i}$$

است. فرض کنید $(Y \sim PCEP(\alpha, \beta, \gamma, \lambda_1) \text{ و } X \sim PCEP(\alpha, \beta, \gamma, \lambda_2))$ دو متغیر تصادفی مستقل باشند با جایگذاری مقادیر $A'(\circ) = 1$ و $A(\lambda) = e^\lambda - 1$ در رابطه (۷) پارامتر قابلیت اطمینان متناظر با توزیع PCEP به صورت

$$P(X > Y) = \int_0^\infty \int_0^x \frac{\lambda_1 \beta \gamma}{\alpha(e^{\lambda_1} - 1)} \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta-1} \exp\left\{\left(\frac{x}{\alpha}\right)^\beta\right\} g_{\alpha,\beta}(x) \\ \times [1 - g_{\alpha,\beta}(x)]^{\gamma-1} e^{\lambda_1(1-g_{\alpha,\beta}(x))^\gamma} \frac{\lambda_2 \beta \gamma}{\alpha(e^{\lambda_2} - 1)} \left(\frac{y}{\alpha}\right)^{\beta-1} \\ \times \exp\left\{\left(\frac{y}{\alpha}\right)^\beta\right\} g_{\alpha,\beta}(y) (1 - g_{\alpha,\beta}(y))^{\gamma-1} e^{\lambda_2(1-g_{\alpha,\beta}(y))^\gamma} dy dx \\ = \frac{\lambda_1 e^{(\lambda_1 + \lambda_2)}}{(e^{\lambda_1} - 1)(e^{\lambda_2} - 1)(\lambda_1 + \lambda_2)} - \frac{1}{e^{\lambda_2} - 1},$$

حاصل می شود. همان‌طور که ملاحظه می شود مقدار پارامتر قابلیت اطمینان به پارامترهای α , β و γ بستگی ندارد.

۵ برآورد پارامترهای توزیع PCEP

فرض کنید X_1, \dots, X_n نمونه‌ای تصادفی از توزیعی با توزیع PCEP و بردار پارامترهای $(\alpha, \beta, \gamma, \lambda)$ باشد. لگاریتم طبیعی تابع درستنمایی آن عبارت است از

$$\ell(\theta) = n(1 + \ln \frac{\lambda\beta\gamma}{\alpha(e^\lambda - 1)}) + (\beta - 1) \sum_{i=1}^n \ln(\frac{x_i}{\alpha})$$

عارف خنجری عینک و همکاران ۱۴۷

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\alpha} \right)^\beta - \sum_{i=1}^n e^{(\frac{x_i}{\alpha})^\beta} \\
& + (\gamma - 1) \sum_{i=1}^n \ln(1 - g_{\alpha,\beta}(x_i)) + \lambda \sum_{i=1}^n (1 - g_{\alpha,\beta}(x_i))^\gamma
\end{aligned}$$

که در آن $g_{\alpha,\beta}(x_i) = e^{1-e^{(\frac{x_i}{\alpha})^\beta}}$ برای محاسبه برآوردهای ماکسیمم درستنمایی پارامترها باستی از لگاریتم طبیعی تابع درستنمایی نسبت به تک تک پارامترها مشتق گرفته و برابر صفر قرار داد.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \ell(\theta)}{\partial \alpha} &= -\frac{n\beta}{\alpha} - \frac{\beta}{\alpha} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\alpha} \right)^\beta + \frac{\beta}{\alpha} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\alpha} \right)^\beta e^{(\frac{x_i}{\alpha})^\beta} \\
&- \frac{\beta(\gamma - 1)}{\alpha} \sum_{i=1}^n \frac{\left(\frac{x_i}{\alpha} \right)^\beta e^{(\frac{x_i}{\alpha})^\beta} g_{\alpha,\beta}(x_i)}{[1 - g_{\alpha,\beta}(x_i)]} \\
&- \frac{\lambda\beta\gamma}{\alpha} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\alpha} \right)^\beta e^{(\frac{x_i}{\alpha})^\beta} g_{\alpha,\beta}(x_i) [1 - g_{\alpha,\beta}(x_i)]^{\gamma-1} = 0,
\end{aligned} \tag{۹}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \ell(\theta)}{\partial \beta} &= \frac{n}{\beta} + \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\alpha} \right)^\beta \ln\left(\frac{x_i}{\alpha}\right) - \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\alpha} \right)^\beta \ln\left(\frac{x_i}{\alpha}\right) e^{(\frac{x_i}{\alpha})^\beta} \\
&- \lambda\gamma \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\alpha} \right)^\beta \ln\left(\frac{x_i}{\alpha}\right) e^{(\frac{x_i}{\alpha})^\beta} g_{\alpha,\beta}(x_i) [1 - g_{\alpha,\beta}(x_i)]^{\gamma-1} \\
&+ \sum_{i=1}^n \ln\left(\frac{x_i}{\alpha}\right) + (\gamma - 1) \sum_{i=1}^n \frac{\left(\frac{x_i}{\alpha} \right)^\beta \ln\left(\frac{x_i}{\alpha}\right) e^{(\frac{x_i}{\alpha})^\beta} g_{\alpha,\beta}(x_i)}{[1 - g_{\alpha,\beta}(x_i)]},
\end{aligned} \tag{۱۰}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \ell(\theta)}{\partial \gamma} &= \frac{n}{\gamma} + \sum_{i=1}^n \ln[1 - g_{\alpha,\beta}(x_i)] \\
&+ \lambda \sum_{i=1}^n ([1 - g_{\alpha,\beta}(x_i)]^\gamma) \log[1 - g_{\alpha,\beta}(x_i)] = 0,
\end{aligned} \tag{۱۱}$$

$$\frac{\partial \ell(\theta)}{\partial \lambda} = n \left[\frac{(1-\lambda)e^\lambda - 1}{\lambda(e^\lambda - 1)} \right] + \sum_{i=1}^n [1 - g_{\alpha,\beta}(x_i)]^\gamma = 0, \tag{۱۲}$$

چون بنابر روابط (۹) تا (۱۲) مشتقهای جزئی $\ell(\theta)$ نسبت به پارامترها توابعی خطی نیستند، محاسبه برآورد ماکسیمم درستنمایی (MLE) پارامترها به صورت مستقیم میسر نیست از روش‌های عددی یا الگوریتم EM استفاده می‌شود. برای این منظور،

توزیع داده‌های کامل باتابع چگالی

$$\begin{aligned} f_{X,N}(x, n; \theta) &= f_{X|N}(x | n)P(N = n; \theta), \quad \theta = (\alpha, \beta, \gamma, \lambda) \\ &= \frac{\beta\gamma}{\alpha} \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta-1} e^{\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta}} g_{\alpha,\beta}(x) (1 - g_{\alpha,\beta}(x))^{\gamma-1} \\ &\times (1 - g_{\alpha,\beta}(x))^{(n-1)\gamma} \frac{\Gamma^{-1}(n)\lambda^n}{(e^\lambda - 1)}, \quad x, \alpha, \beta, \lambda > 0 \end{aligned}$$

بیان می‌شود. گام اول الگوریتم EM، گام محاسبه امید ریاضی شرطی $N|X$ ، یعنی محاسبه $E(N|X; \theta^{(k)})$ است که در آن $\theta^{(k)}$ برآورد جاری پارامتر θ (مرحله k) است.

$$E(N | X; \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} n P(n | x; \theta)$$

داریم:

$$P(n|x; \theta) = \frac{f_{X,N}(x, n)}{f_X(x)} = \Gamma^{-1}(n)(\lambda[1 - g_{\alpha,\beta}(x_i)]^{\gamma})^{n-1} e^{-\lambda[1 - g_{\alpha,\beta}(x_i)]^{\gamma}} \quad (13)$$

با جایگذاری مقدار $P(n | x; \theta)$ در رابطه (13) و تعریف $C = e^{-\lambda[1 - g_{\alpha,\beta}(x_i)]^{\gamma}}$ داریم:

$$E(N|X; \theta) = C \sum_{n=1}^{\infty} n \Gamma^{-1}(n)(\lambda(1 - g_{\alpha,\beta}(x_i))^{\gamma})^{n-1}$$

در ادامه با قرار دادن $A = \lambda[1 - g_{\alpha,\beta}(x_i)]^{\gamma}$ داریم:

$$\begin{aligned} E(N|X; \theta) &= C \sum_{n=1}^{\infty} n \Gamma^{-1}(n) A^{n-1} = C \sum_{n=1}^{\infty} \Gamma^{-1}(n) \frac{d}{dA} A^n \\ &= C \left(\frac{d}{dA} \sum_{n=1}^{\infty} \Gamma^{-1}(n) A^n \right) = C \left(\frac{d}{dA} \left(A \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A^{n-1}}{(n-1)!} \right) \right) \right) \\ &= C \frac{d}{dA} (A e^A) = C[e^A(1 + A)], \end{aligned}$$

که در آن $C = e^{-A} \cdot \Gamma^{-1}(n) = \frac{1}{(n-1)!}$ با جایگذاری مقادیر C و A داریم:

$$E(N|X; \theta) = 1 + \lambda[1 - g_{\alpha,\beta}(x_i)]^{\gamma},$$

عارف خنجری عینک و همکاران ۱۴۹

لگاریتم طبیعی تابع درستنما می توانم متغیرهای X و N برابر است با:

$$\begin{aligned}\ell(\theta) &= \prod_{i=1}^n \ln(f(x_i, n_i; \theta)) \\ &= n \ln\left(\frac{\beta\gamma}{\alpha(e^\lambda - 1)}\right) + (\beta - 1) \sum_{i=1}^n \ln\left(\frac{x_i}{\alpha}\right) + \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^\beta + \sum_{i=1}^n \ln[g_{\alpha, \beta}(x_i)] \\ &+ (\gamma - 1) \sum_{i=1}^n \ln[1 - g_{\alpha, \beta}(x_i)] + \gamma \sum_{i=1}^n (n_i - 1) \ln[1 - g_{\alpha, \beta}(x_i)] \\ &- \sum_{i=1}^n \ln(\Gamma(n_i)) + \ln(\lambda) \sum_{i=1}^n n_i,\end{aligned}$$

گام دوم الگوریتم EM، گام شامل ماکسیمم کردن لگاریتم طبیعی تابع درستنما می داده های کامل نسبت به پارامترها است. در این مرحله کافی است در برآوردهای به دست آمده به روش MLE، به جای متغیر پنهان n_i ، امید شرطی آن جایگزین شود.

در نتیجه با تعریف $t^{(k)} = [1 - g_{\alpha^{(k)}, \beta^{(k)}}(x_i)]^{\gamma^{(k)}}$ داریم:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \ell(\theta)}{\partial \alpha} &= -\frac{n\beta^{(k+1)}}{\alpha^{(k+1)}} - \frac{\beta^{(k+1)}}{\alpha^{(k+1)}} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\alpha^{(k+1)}}\right)^{\beta^{(k+1)}} \\ &+ \frac{\beta^{(k+1)}}{\alpha^{(k+1)}} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\alpha^{(k+1)}}\right)^{\beta^{(k+1)}} e^{\left(\frac{x_i}{\alpha^{(k+1)}}\right)^{\beta^{(k+1)}}} - \left[\frac{\beta^{(k+1)}(\gamma^{(k+1)} - 1)}{\alpha^{(k+1)}}\right. \\ &\times \left. \sum_{i=1}^n \frac{\left(\frac{x_i}{\alpha^{(k+1)}}\right)^{\beta^{(k+1)}} e^{\left(\frac{x_i}{\alpha^{(k+1)}}\right)^{\beta^{(k+1)}}} g_{\alpha^{(k+1)}, \beta^{(k+1)}}(x_i)}{[1 - g_{\alpha^{(k+1)}, \beta^{(k+1)}}(x_i)]} \right] - \left[\frac{\beta^{(k+1)}\gamma^{(k+1)}}{\alpha^{(k+1)}}\right. \\ &\times \left. \sum_{i=1}^n \frac{\lambda^{(k)} t^{(k)} \left(\frac{x_i}{\alpha^{(k+1)}}\right)^{\beta^{(k+1)}} e^{\left(\frac{x_i}{\alpha^{(k+1)}}\right)^{\beta^{(k+1)}}} g_{\alpha^{(k+1)}, \beta^{(k+1)}}(x_i)}{[1 - g_{\alpha^{(k+1)}, \beta^{(k+1)}}(x_i)]} \right] = 0, \\ \frac{\partial \ell(\theta)}{\partial \beta} &= \frac{n}{\beta^{(k+1)}} + \sum_{i=1}^n \ln\left(\frac{x_i}{\alpha^{(k+1)}}\right) + \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\alpha^{(k+1)}}\right)^{\beta^{(k+1)}} \ln\left(\frac{x_i}{\alpha^{(k+1)}}\right) \\ &- \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\alpha^{(k+1)}}\right)^{\beta^{(k+1)}} \ln\left(\frac{x_i}{\alpha^{(k+1)}}\right) e^{\left(\frac{x_i}{\alpha^{(k+1)}}\right)^{\beta^{(k+1)}}} + [(\gamma^{(k+1)} - 1) \\ &\times \sum_{i=1}^n \frac{\left(\frac{x_i}{\alpha^{(k+1)}}\right)^{\beta^{(k+1)}} \ln\left(\frac{x_i}{\alpha^{(k+1)}}\right) e^{\left(\frac{x_i}{\alpha^{(k+1)}}\right)^{\beta^{(k+1)}}} g_{\alpha^{(k+1)}, \beta^{(k+1)}}(x_i)}{[1 - g_{\alpha^{(k+1)}, \beta^{(k+1)}}(x_i)]} + [\gamma^{(k+1)}]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \sum_{i=1}^n \frac{\lambda^{(k)} t^{(k)} \left(\frac{x_i}{\alpha^{(k+1)}}\right)^{\beta^{(k+1)}} \ln\left(\frac{x_i}{\alpha^{(k+1)}}\right) e^{\left(\frac{x_i}{\alpha^{(k+1)}}\right)^{\beta^{(k+1)}}} g_{\alpha^{(k+1)}, \beta^{(k+1)}}(x_i)}{[1 - g_{\alpha^{(k+1)}, \beta^{(k+1)}}(x_i)]} = \circ, \\ \frac{\partial \ell(\theta)}{\partial \gamma} &= \frac{n}{\gamma^{(k+1)}} + \sum_{i=1}^n [1 + \lambda^{(k)} t^{(k)}] \ln[1 - g_{\alpha^{(k+1)}, \beta^{(k+1)}}(x_i)] = \circ, \\ \frac{\partial \ell(\theta)}{\partial \lambda} &= -\frac{n e^{\lambda^{(k+1)}}}{(e^{\lambda^{(k+1)}} - 1)} + \frac{\sum_{i=1}^n [1 + \lambda^{(k)} t^{(k)}]}{\lambda^{(k+1)}} = \circ, \end{aligned}$$

برای نمونه‌هایی با اندازه بزرگ، برآوردهای ماکسیمم درستنمایی پارامترها $\hat{\theta} = (\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}, \hat{\lambda})$ تحت شرایط نظم (لهمن و کسلا، ۱۹۹۸) دارای توزیع مجانبی نرمال چهار متغیره با میانگین θ و ماتریس واریانس-کوواریانس $I^{-1}(\theta)$ است، که در آن $I(\theta)$ ماتریس اطلاع مورد انتظار، امید ریاضی ماتریس اطلاع مشاهده $J(\theta; y_{obs})$ است. بنابراین $(\hat{\theta} - \theta) \sim N_4(0, I^{-1}(\theta))$. چون ماتریس اطلاع مورد انتظار پیچیده و نیازمند حل انتگرال‌ها به روش عددی است می‌توان آن را با $J(\hat{\theta})$ جایگزین کرد (کاراسکو و همکاران، ۲۰۰۸). بنابراین توزیع مجانبی به صورت $(\hat{\theta}) \sim N_4(0, J^{-1}(\hat{\theta}))$ به دست می‌آید. با مشتق گیری از روابط (۹) تا (۱۲) نسبت به پارامترهای α, β, γ و λ و منفی کردن نتایج، ماتریس اطلاع مشاهده $J(\theta; y_{obs})$ به دست آورده می‌شود. با گرفتن امید ریاضی از J_{ij} به ازای مقادیر $i, j = 1, 2, 3, 4$ نسبت به توزیع X ، ماتریس اطلاع مورد انتظار $I(\theta)$ به دست می‌آید. به دلیل پیچیدگی و محاسبات زیاد برای این منظور نرم افزار آماری MATLAB به کار گرفته می‌شود.

۶ مطالعه شبیه‌سازی

برای بررسی دقیق برآوردهای ماکسیمم درستنمایی توزیع پواسون نمایی توانی مکمل با الگوریتم EM هر بار ۱۰۰۰ بردار با مقادیر مختلف پارامترهای α, β, γ و λ و همچنین مقادیر اولیه $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \lambda_0) = \theta_0$ با اندازه‌های ۵۰ و ۱۰۰ و ۵۰۰ تولید شده است که هر بار میانه، واریانس و کوواریانس برآوردهای پارامترها $\theta = (\alpha, \beta, \gamma, \lambda)$ و همچنین میانه و انحراف معیار تعداد تکرارهای الگوریتم EM که با k نمایش داده شده، محاسبه می‌شود. برای مثال در ابتدا ۱۰۰۰ بردار ۱۰۰ تایی از توزیع جدید

تولید شده و برای هر بردار برآوردهای پارامترهای توزیع که همان $\hat{\theta} = (\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}, \hat{\lambda})$ می‌باشد و همچنین تعداد تکرارهای برآوردهای EM برای به دست آوردن برآورد پارامترهای توزیع، محاسبه می‌شود؛ میانه، واریانس و کوواریانس این ۱۰۰۰ برآورد نیز محاسبه می‌شود. نتایج این شبیه سازی به ازای مقادیر مختلف n , $\theta = (\alpha, \beta, \gamma, \lambda)$ و $N = 1000$ در جدول ۲ ارائه شده است. همان‌طور که ملاحظه می‌شود با افزایش n دقت برآوردها بیشتر شده است، به طوری که به ازای $n = 500$ میانه و واریانس برآوردهای شبیه سازی شده توزیع جدید به ازای $(0/4, 0/4, 0/4, 0/4) = \theta$ و مقادیر اولیه $(0/4, 0/4, 0/4, 0/4) = \hat{\theta}$ و واریانس به ترتیب برابر $(0/3967, 0/3918, 0/4093, 0/4068) = V(\hat{\theta})$ شده است. همچنین در همه حالت‌ها، حتی زمانی که مقادیر اولیه متفاوت از پارامترها می‌باشد، همگرایی الگوریتم EM اتفاق می‌افتد.

۷ مثال کاربردی

در این بخش، رفتار توزیع جدید، در مورد داده‌های مربوط به ۲۴ مشاهده بر روی فواصل زمانی بین زمین لرزه‌های متوالی در قرن گذشته در منطقه گسل زای آنتالیای شمالی مورد تحلیل قرار می‌گیرد، این داده‌ها توسط کاس (۲۰۰۷) تحلیل شده اند. جدول ۳، برآوردهای ماکسیمم درستنمایی پارامترها، مقادیر آماره آزمون کولموگروف- اسمیرنوف و مقادیر معنی داری برآش مدل‌های پواسون نمایی توانی مکمل، نمایی توانی مکمل، نمایی- هندسی، نمایی- پواسون، نمایی- لگاریتمی، واپسیول و گاما را به داده‌های زمین لرزه آنتالیای شمالی نشان می‌دهد.

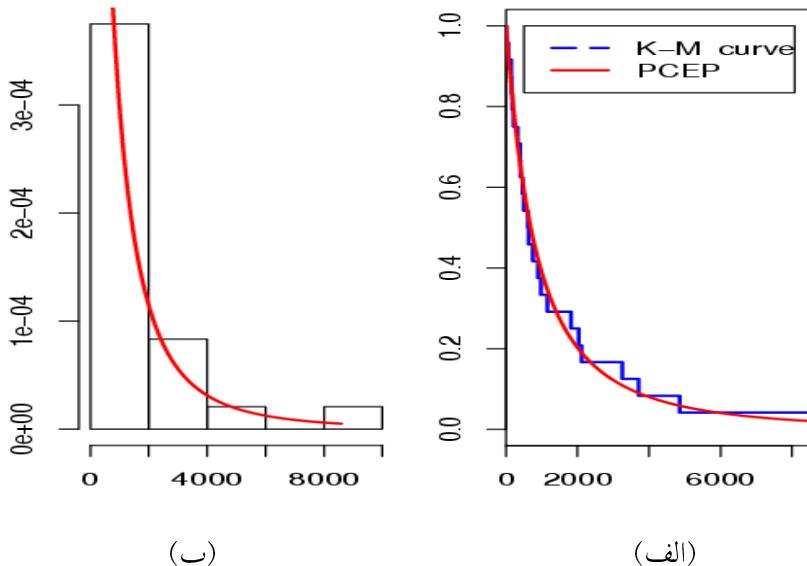
در شکل ۳ برآش تابع چگالی احتمال توزیع PCEP (خط ممتد) نمودار کاپلان مایر (خطوط شکسته) و برآش تابع بقای تجربی توزیع PCEP (خط ممتد) به داده‌های زمین لرزه‌های آنتالیای شمالی رسم شده است به طور شهودی به نظر می‌رسد برآش مناسبی انجام شده است. شکل ۴ نمودار تابع لگاریتم درستنمایی نیمرخ توزیع جدید را در برآش به داده‌های زمین لرزه‌های آنتالیای شمالی نشان می‌دهد، همان‌طور که مشاهده می‌شود برآوردهای به دست آمده یکتا هستند. در

جدول ۳: نتایج شبیه‌سازی مربوط به برآورد پارامترهای توزیع PCEP

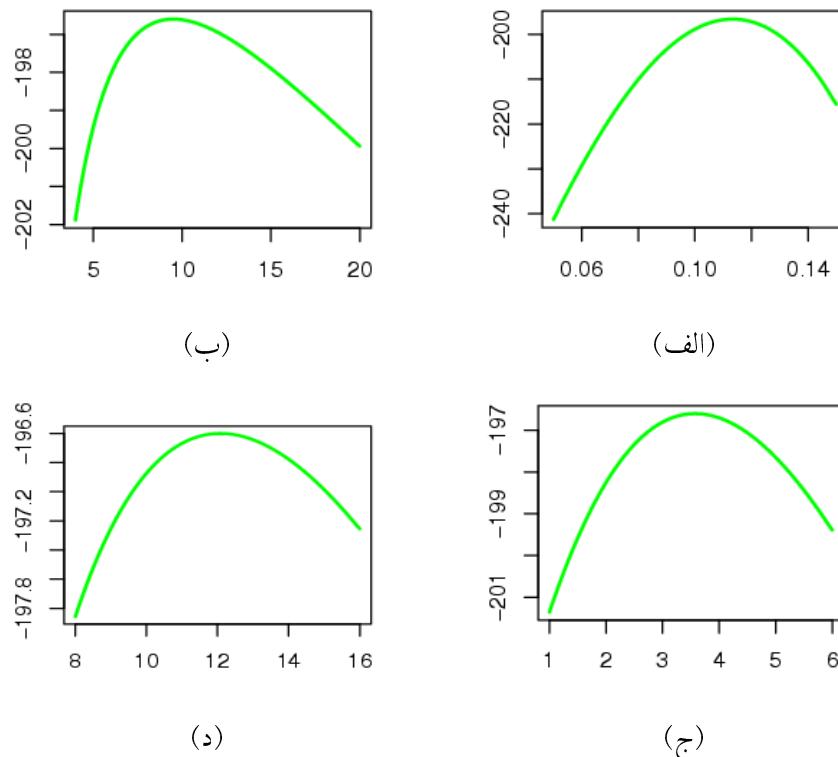
$(Cov(\hat{\alpha}, \hat{\beta}), Cov(\hat{\alpha}, \hat{\gamma}), Cov(\hat{\alpha}, \hat{\lambda}))$	$\hat{\theta} = (\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}, \hat{\lambda})$	n	$\theta = (\alpha, \beta, \gamma, \lambda)$
$(Cov(\hat{\beta}, \hat{\gamma}), Cov(\hat{\beta}, \hat{\lambda}), Cov(\hat{\gamma}, \hat{\lambda}))$	$(V(\hat{\alpha}), V(\hat{\beta}), V(\hat{\gamma}), V(\hat{\lambda}))$		$\theta_0 = (\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \lambda_0)$
$(-o/0277V, o/0000, -o/0002)$	$(o/3470, o/4079, o/3409, o/4578)$	50	
$(o/0174, -o/019V, o/0000)$	$(o/0257, o/0242, o/0274, o/0000)$		
$(-o/0114, o/0001, -o/0001)$	$(o/3079, o/2758, o/3749, o/2582)$	100	$(o/30, o/35, o/40, o/45)$
$(o/0088V, -o/0109, o/0000)$	$(o/118, o/0088, o/0142, o/0000)$		$(o/30, o/35, o/40, o/45)$
$(-o/0351, o/0000, -o/0002)$	$(o/2961, o/3509, o/4006, o/4580)$	500	
$(o/0011, -o/0023, -o/0000)$	$(o/0027, o/0012, o/0021, o/0000)$		
$(-o/0351, o/0000, -o/0002)$	$(o/4589, o/4599, o/3254, o/3782)$	50	
$(o/0210, -o/0201, -o/0030)$	$(o/0422, o/0361, o/0310, o/0928)$		
$(-o/0149, -o/0027, o/0000V)$	$(o/4167, o/4447, o/3591, o/3782)$	100	$(o/4, o/4, o/4, o/4)$
$(o/0130, -o/0127, -o/0044)$	$(o/0183, o/0137, o/0146, o/0788)$		$(o/4, o/4, o/4, o/4)$
$(-o/0024, -o/0007, o/0001)$	$(o/4078, o/4092, o/3918, o/3971)$	500	
$(o/0029, -o/0027, -o/0011)$	$(o/0047, o/0025, o/0031, o/0200)$		
$(-o/0570, -o/0095, o/0021)$	$(o/5701, o/6207, o/2801, o/4520)$	50	
$(o/0379, -o/0363, -o/0133)$	$(o/0328, o/0508, o/0570, o/2202)$		
$(-o/0222, -o/0097, o/0026)$	$(o/5206, o/5485, o/4580, o/4797)$	100	$(o/5, o/5, o/5, o/5)$
$(o/0191, -o/0204, -o/0126)$	$(o/0205, o/0207, o/0265, o/1568)$		$(o/40, o/40, o/40, o/40)$
$(-o/0037, -o/0051, o/0004)$	$(o/5230, o/5237, o/4831, o/4937)$	500	
$(o/0044, -o/039, -o/0082)$	$(o/0055, o/0042, o/0044, o/0781)$		

جدول ۳: مقادیر MLE و احتمال در برآزش به داده‌های کاس (۲۰۰۷)

مدل	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\gamma}$	$\hat{\lambda}$	$K - S$	مقدار احتمال
PCEP	۹/۰۵۳۶	۰/۱۱۳۴	۱۲/۰۹۶	۳/۰۵۸۲	۰/۰۶۸۸	۰/۹۹۹۴
CEP	۲۹۹/۰۲۰	۰/۱۹۸۰	۹/۳۸۲		۰/۰۷۴۰	۰/۹۹۸۱
EG	۰/۷۳۷	۰/۰۰۰۳			۰/۰۹۶۴	۰/۹۶۹۰
EL	۰/۱۲۶	۰/۰۰۰۴			۰/۰۸۸۵	۰/۹۸۸۵
EP	۲/۶۴۴۳	۰/۰۰۰۴			۰/۰۹۵۰	۰/۹۷۵۷
Weibull	۰/۰۰۰۴	۰/۷۸۵۴			۰/۱۰۰۳	۰/۹۶۰۲
Gamma	۰/۷۱۲	۰/۰۰۰۵			۰/۱۲۳۵	۰/۸۳۲۸



شکل ۳: الف: نمودارهای کاپلان-سمایر، تابع بقا و ب: بافت‌نگار و تابع چگالی احتمال توزیع PCEP

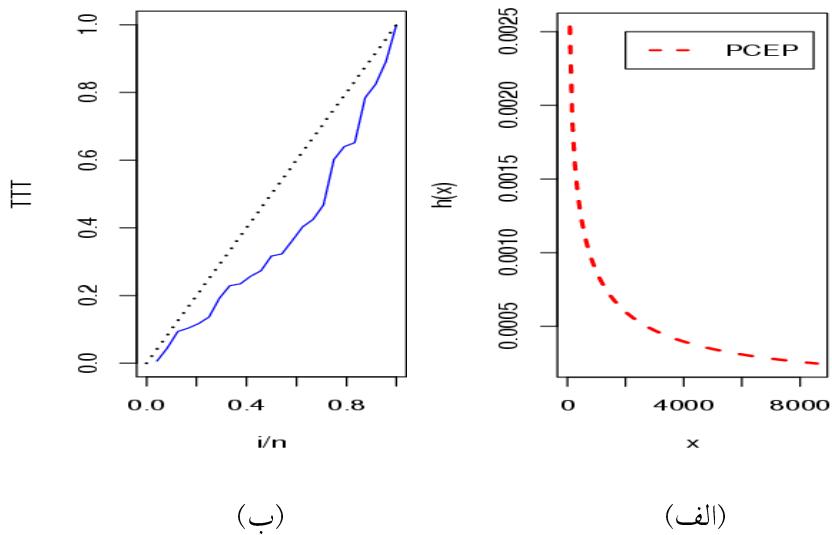


شکل ۴: نمودار تابع لگاریتم درستنما بی نیمرخ توزیع جدید در مقابل الف: β ، ب: γ و د: α ، ج: λ

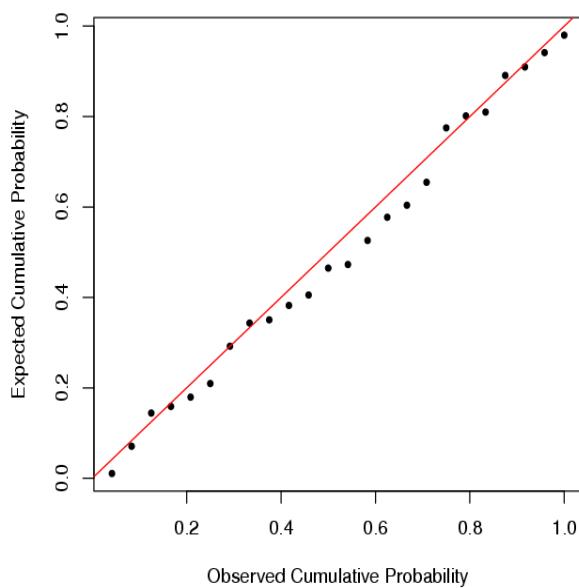
شکل ۵ برآزش تابع نرخ مخاطره توزیع PCEP (خط چین) و نمودار تجربی TTT، آراست (۱۹۸۷)، (خطوط شکسته) این داده ها رسم شده است، همان طور که ملاحظه می شود تابع نرخ مخاطره داده های زمین لرزه آنتالیای شمالی، نزولی است. با توجه به شکل ۶ چون مشاهدات نزدیک به خط میانی قرار دارند برآزش تقریبا خوبی به داده های زمین لرزه آنتالیای شمالی صورت گرفته است.

۸ بحث و نتیجه گیری

در این تحقیق، به معروفی توزیع ترکیبی طول عمر جدید، توزیع سری نمایی توانی مکمل SCEP که تعمیمی از توزیع نمایی توانی مکمل و نمایی پواسن توانی است،



شکل ۵: الف: تابع نرخ مخاطره توزیع جدید و ب: نمودار تجربی



شکل ۶: نمودار PP توزیع PCEP در برآذش به داده‌های کاس (۲۰۰۷)

پرداخته شد. ویژگی های این توزیع و همچنین در حالت خاص توزیع پواسن نمایی توانی مکمل بیان گردید. مشاهده شد که توزیع PCEP دارای نرخ مخاطره های صعودی، نزولی، وان شکل و تک مدلی است، با توجه به نتایج به دست آمده مقادیر $S - K$ و احتمال از جدول ۳، توزیع نمایی پواسن توانی مکمل در مقایسه با توزیع نمایی توانی مکمل و توزیع های ترکیبی نمایی-هندسی، نمایی-پواسن، نمایی-ملگاریتمی، وایبول و گاما تقریباً دارای برآشش بهتری به داده های زمین لرزه آنتالیای شمالی می باشد.

با توجه به اینکه در توزیع جدید λ پارامتر مکان است، ملاحظه می شود که توزیع جدید نسبت به توزیع های مطرح شده دارای انعطاف پذیری مناسب تری برای برآشش به داده های طول عمر است. در ضمن گشتاورهای معمولی، چارک ها و میانه، توابع نرخ مخاطره و بقا، برآوردهای ماکسیمم درستنمایی و برآوردهای EM پارامترها و همچنین رفتار حدی و یک مثال کاربردی برای توزیع جدید ارائه گردیده است.

تقدیر و تشکر

نویسنندگان مقاله کمال تشکر و قدردانی را از داوران، ویراستار و سردبیر محترم نشریه، که با رهنمودهای ارزنده خود باعث بهبود مقاله گردیده اند، دارند.

مراجع

خنجری عیدنک، ع.، زادکرمی، م. و دانشخواه، ع. (۱۳۹۰)، توزیع جدید نمایی پواسن توانی برای مدل طول عمر، مجله علوم آماری، ۵، ۱۴۹-۱۶۰.

Aarset, M. V. (1987), How to Identify a Bathtub Hazard Rate, *IEEE Transactions on Reliability*, **36**, 106-108.

Adamidis, K. and Loukas, S. (1998), A Life Time Distribution with Decreasing Failure Rate, *Statistical and Probability Letters*, **39**, 35-42.

۱۵۷ عارف خنجری عیدنک و همکاران

- Barriga, D. C., Louzada, F. N. and Cancho, V. G. (2011), The Complementary Exponential Power Lifetime Model, *Computational Statistics and Data Analysis*, **55**, 1250-1259.
- Cancho, V. G., Louzada-Neto, F. and Barriga, G. D. C. (2011), The Poisson Exponential Life time Distribution, *Computational Statistics and Data Analysis*, **55**, 677-686.
- Carrasco, J. M. F., Ortega, E. M. M. and Corderiro, G. M. (2008), A Generalized Modified Weibull Distribution for Lifetime Modeling, *Computational Statistics and Data Analysis*, **53**, 450-462.
- Chahkandi, M. and Ganjali, M. (2009), On Some Life Time Distribution with Decreasing Failure Rate, *Computational Statistics and Data Analysis*, **53**, 4433-4440.
- Flores J. D., Borges, P., Cancho, V. G. and Louzada., F. (2013), The Complementary Exponential Power Series Distribution, *The Brazilian Journal of Probability and Statistics*, **27**, 565-584.
- Hemmati, F., Khorram, E. and Rezakhah, S. (2011), A New Three Parameter Ageing Distribution, *Journal of Statistical of Planing and Inference*, **141**, 2266-2275.
- Kus, C. (2007), A New Life Time Distribution, *Computational Statistics and Data Analysis*, **51**, 4497-4509.
- Lehmann, E. L. and Casella, G. (1998), *Theory of Point Estimation*, 2nd Ed, Chapman and Hall, New York.
- Marshall, A. W. and Olkin, I. (1997), A New Method for Adding a Parameter to a Family of Distribution with Application to the Exponential

and Weibull Families, *Biometrika*, **84**, 641-652.

Morais, A. L. and Barreto-souza, W. (2011), A Compound Class of Weibull and Power Series Distributions, *Computational Statistics and Data Analysis*, **55**, 1410-1425.

Smith, R. M. and Bain, L. J. (1975), An Exponential Power Life-Testing Distribution, *Communications in Statistics- Theory and Methods*, **4**, 469-481.

Tahmasbi, R. and Rezaei, S. (2008), A Two-Parameter Lifetime Distribution with Decreasing Failure Rate, *Computational Statistics and Data Analysis*, **52**, 3889-3901.